Il s'agit de démontrer qu'il y en a au plus une infinité dénombrable de ces $x$.

Pour chaque $i$, $x$ appartient, par hypothèse, à l'ensemble $A_1^i+A_2^i+\ldots+A_{k_i}^i$. Conformément à la définition de $A_k^i$, il vient $n_i^x \leqslant k_i$. En d'autres termes: $T_x \preccurlyeq S$. Or, cette formule ne peut être remplie, selon la propriété de la famille $\mathscr{F}$ énoncée dans (II'), que pour une infinité au plus dénombrable des $x$.

Ainsi, le théorème II et, par conséquent, le théorème I se trouvent démontrés.

R e m a r q u e. Comme nous venons de voir, la proposition (II') entraîne, sans l'aide de l'hypothèse du continu, le théorème II. Nous prouverons, à présent, que l'implication inverse a aussi lieu.

Supposons, en effet, que les ensembles $A_k^i$ satisfont au théorème II. Soit $\mathscr{F}$ la famille de toutes les suites $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ ne soit pas vide.

La famille $\mathscr{F}$ ainsi définie a la puissance du continu. Car, d'une part, selon la condition 3° du théorème II, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et, d'autre part, selon 1°, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre est égal à $E$, a donc la puissance du continu.

Soit $S = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ une suite arbitraire. L'ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i+A_2^i+\ldots+A_{k_i}^i)$$

étant, selon 3°, au plus dénombrable, on en conclut que parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$, avec $n_i \leqslant k_i$, il n'y en a pas plus qu'une infinité dénombrable qui ne soient pas vides (puisque selon 2°, deux produits de ce genre sont toujours disjoints). Cela veut dire, précisément, que l'ensemble des suites $T$ de la famille $\mathscr{F}$ telles que $T \preccurlyeq S$ est au plus dénombrable.

L'équivalence des propositions II et II' se trouve ainsi démontrée.

---

# Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen*

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit der Untersuchung einiger Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen. Eine trigonometrische Reihe soll dabei *lakunär* heißen, wenn sie die Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t) \tag{1}$$

hat, wo die Folge $\{k_n\}$ aus der natürlichen Zahlenfolge durch Weglassen unendlich vieler Glieder entsteht. Es sind über die lakunären Reihen einer besonderen Klasse, über die Reihen nämlich, für welche die Bedingung

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

stattfindet, zwei bemerkenswerte Sätze bekannt. Der erste rührt von Herrn S. Sidon her und lautet: Wenn die Reihe (1) die Fourierreihe einer meßbaren beschränkten Funktion ist, so muß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

konvergent sein [1]. Den zweiten hat Herr A. Zygmund bewiesen: Stellt die Reihe (1) die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion dar, so

---

* Commenté sur p. 337.

[1] S. Sidon, *Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen*, Mathematische Annalen 96 (1927), p. 418-419; S. Sidon, *Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken*, Mathematische Annalen 97 (1927), p. 675-676.

ist diese Funktion mit jeder positiven Potenz integrierbar — im besonderen also konvergiert die Reihe [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Ich gebe hier gewisse neue Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen der oben erwähnten Klasse an. Ich zeige z. B., daß es, falls die Voraussetzung des Satzes des Herrn Zygmund erfüllt ist, eine stetige Funktion $x(t)$ gibt, derart daß die Eulerschen Formeln

$$(3)\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos k_nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin k_nt\,dt\qquad(n=0,1\ldots)$$

stattfinden [2]. Als eine einfache Folgerung dieses Satzes ergibt sich die Existenz von Fourierreihen, die die Carlemansche — und sogar eine stärkere — Singularität aufweisen [3].

Es gilt nämlich der folgende

Satz a. *Wenn $\{\varepsilon_n\}$ eine gegen Null konvergente Folge positiver Zahlen ist, so gibt es eine stetige Funktion $x(t)$ derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{2-\varepsilon_n}+|b_n|^{2-\varepsilon_n}),$$

*wo $a_n, b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ die Fourierkoeffizienten der Funktion $x(t)$ sind, divergent ist.*

Beweis. Es sei $\{k_n\}$ eine Folge wachsender natürlicher Zahlen, für die die Bedingung (2) stattfindet. Betrachten wir zwei Zahlenfolgen $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

konvergiert und zugleich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|^{2-\varepsilon_{k_n}}+|\beta_n|^{2-\varepsilon_{k_n}})$$

divergiert; die Konstruktion solcher Folgen bietet keine Schwierigkeiten.

Setzen wir $a_{k_n}=\alpha_n$, $b_{k_n}=\beta_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Auf Grund unseres vorher ausgesprochenen Satzes gibt es eine stetige Funktion $x(t)$, derart daß

$$a_{k_n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos k_nt\,dt,\qquad b_{k_n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin k_nt\,dt\qquad(n=1,2,\ldots)$$

ist; es ist klar, daß diese Funktion die verlangten Eigenschaften besitzt.

Ich beweise weiter, daß man, falls die Bedingung (2) erfüllt ist, zu jedem Paar gegen Null konvergenter Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}$ eine integrierbare Funktion $x(t)$ konstruieren kann, derart daß die Gleichungen (3) gelten. Daraus folgt wieder leicht der folgende

Satz b. *Wenn $\{\lambda_n\}$ eine gegen $+\infty$ divergente Folge positiver Zahlen ist, so gibt es eine integrierbare Funktion $x(t)$ derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{\lambda_n}+|b_n|^{\lambda_n}),$$

*wo $a_n, b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ die Fourierkoeffizienten der Funktion $x(t)$ sind, divergiert.*

Da wir mit der Methode der Theorie der Operationen arbeiten, wollen wir zuerst, die aus diesem Gebiete unten vorkommenden Begriffe und Sätze kurz besprechen, ohne übrigens auf genauere Erläuterungen und Beweise einzugehen. Unter einem *Raume vom Typus* $(B)$ werden wir stets einen linearen, normierten und vollständigen Raum verstehen. Wir werden mit den folgenden Räumen dieser Art zu tun haben:

1. $(L)$: Der Raum aller in $\langle 0,1\rangle$ erklärten, integrierbaren Funktionen $x(t)$, wobei $||x||=\int_0^1|x(t)|\,dt$ ist [1].

2. $(C)$: Der Raum aller in $\langle 0,1\rangle$ erklärten, stetigen Funktionen $x(t)$; $||x||=\underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{Max}}|x(t)|$.

3. $(l^2)$: Der Raum aller Zahlenfolgen $\{\xi_n\}$ von dieser Eigenschaft, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2$ konvergiert, wobei $||x||=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\right)^{1/2}$ ist [2].

4. $(c_0)$: Der Raum aller gegen Null konvergenten Zahlenfolgen $\{\xi_n\}$; $||x||=\underset{n=1,2,\ldots}{\text{Max}}|\xi_n|$.

Wenn in einem Raume $X$ vom Typus $(B)$ eine Funktion $y=F(x)$ erklärt ist, deren Werte einem Raume $Y$ vom Typus $(B)$ angehören, so spricht man von einer *Operation*; ein *Funktional* ist eine Operation mit reellem Wertbereich. Die Operation $F(x)$ heißt *additiv*, wenn für

---

[1] A. Zygmund, *Sur les séries trigonométriques lacunaires*, Journal of the London Mathematical Society 5 (1930), p. 138-145.

[2] $k_0=0$.

[3] Siehe T. Carleman, *Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion*, Acta Mathematica 41 (1918), p. 377-384.

[1] $x=x(t)$; analog im Falle 2.

[2] $x=\{\xi_n\}$; ebenso im Raume $(c_0)$.

jedes Elementenpaar $x', x''$ aus $X$ die Gleichheit $F(x'+x'') = F(x') + F(x'')$ stattfindet; sie heißt *stetig*, wenn immer aus $x, x_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \to x$ die Beziehung $F(x_n) \to F(x)$ folgt. Damit eine additive Operation $F(x)$ stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl $K$ gibt, für die die Ungleichung $||F(x)|| \leqslant K||x||$ im ganzen Raume $X$ erfüllt ist; die kleinste Zahl von dieser Eigenschaft nennt man die *Norm* der Operation $F(x)$ und bezeichnet sie mit $||F||$. Eine additive und stetige Operation heißt *linear*. Bekanntlich hat jedes in den Räumen $(l^2)$ und $(c_0)$ erklärte lineare Funktional die folgende Gestalt:

3. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\xi}_n$, wobei $\{\bar{\xi}_n\} \subset (l^2)$ und $||L|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n^2\right)^{1/2}$ ist, bzw.

4. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\xi}_n$, wobei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n$ absolut konvergiert und $||L|| = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\xi}_n|$ ist.

Bezeichnen wir mit $X^*$ die Menge aller in $X$ erklärten linearen Funktionale $L(x)$. Diese Menge bildet, bei der gewöhnlichen Definition der Verknüpfungen einen linearen Raum. Wenn wir als Norm eines dem Raume $X^*$ angehörigen Elementes $x^* = L(x)$ die Norm des Funktionals $L(x)$ erklären, so wird dieser Raum auch vom Typus $(B)$ sein. Wir nennen den Raum $X^*$ den zu $X$ *konjugierten Raum*. Es sei weiter $y = F(x)$ eine lineare Operation und $y^* = L(y)$ ein Element des zu $Y$ konjugierten Raumes $Y^*$. Ordnen wir dem Element $y^*$ das Element $x^* = L(F(x))$ des Raumes $X^*$ zu. Die so entstandene lineare Operation $x^* = F^*(y^*)$ nennen wir die zu $F(x)$ *konjugierte Operation*.

Es seien $L(x)$ und $L_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ beliebige im Raume $X$ erklärte lineare Funktionale. Wenn für jedes Element $x_0$ dieses Raumes die Folge der Zahlen $\{L_r(x_0)\}$ gegen die Zahl $L(x_0)$ konvergent ist, so sagen wir, daß die Folge der Funktionale $\{L_r(x)\}$ gegen das Funktional $L(x)$ *schwach konvergiert*.

Wir brauchen in dieser Arbeit die folgenden Sätze (unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen):

Satz α. *Wenn die Operation $F^*(y^*)$ eine lineare Umkehrung besitzt und die Folge der Funktionale $\{F^*(y_r^*)\}$ gegen ein lineares im Raume $X$ erklärtes Funktional $L(x)$ schwach konvergiert, so gibt es im Raume $Y^*$ ein Element $y^*$, derart daß $L(x) = F^*(y^*)$ ist* (¹).

Satz β. *Wenn die Operation $F^*(y^*)$ den Raum $Y^*$ auf einen abgeschlossenen Teil des Raumes $X^*$ eineindeutig abbildet, so ist die Umkehrung dieser Operation linear* (²).

(¹) Banach [*23*], p. 223-239, insb. Lemme 9.

(²) Siehe Théorème 7 der unter (¹) zitierten Arbeit.



Satz γ. *Damit die Operation $F^*(y^*)$ eine lineare Umkehrung besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die Operation $F(x)$ den Raum $X$ auf den ganzen Raum $Y$ abbilde* (¹).

**§ 1.** Es seien $a_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beliebige, meßbare und beschränkte, in $\langle 0, 1\rangle$ erklärte Funktionen; setzen wir voraus, daß sie ein orthogonales, normiertes System $S$ bilden. Man sagt, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(t)$$

die Entwicklung einer gegebenen integrierbaren Funktion $x(t)$ nach dem betrachteten System ist, wenn die Koeffizienten $c_n$ dieser Reihe durch die Gleichungen

$$c_n = \int_0^1 x(t) a_n(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

definiert sind (²). In diesem § werden wir ausschließlich mit dem Fall zu tun haben, wo das System $S$ einer speziellen Bedingung genügt, aus der sowohl die Vollständigkeit wie auch die Abgeschlossenheit dieses Systems im Raume $(L)$ sofort folgt. Es handelt sich nämlich um die folgende

Bedingung I. *Ist $z(t)$ eine integrierbare Funktion, so kann man die Zahlen $c_n^{(m)}$ $(n = 1, 2, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots)$ so wählen, daß — $z_m(t) = \sum_{n=1}^{m} c_n^{(m)} a_n(t)$ für $m = 1, 2, \ldots$ gesetzt —:*

1. $\lim_{m\to\infty} \int_0^1 |z_m(t) - z(t)|\, dt = 0$ *ist;*

2. *aus* $\int_0^1 z(t) a_n(t)\, dt = 0$ *für ein gewisses $n$, die Relationen* $c_n^{(m)} = 0$ $(m = n, n+1, \ldots)$ *folgen.*

Es sei nun $\{k_n\}$ eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen; wir erklären für eine derartige Folge die drei Eigenschaften A, B und C folgenderweise:

A. *Es gibt eine Konstante $K$, derart daß für jede Zahlenfolge $\{c_n\}$ die Ungleichungen*

$$(1) \qquad \left(\sum_{n=1}^{m} c_n^2\right)^{1/2} \leqslant K \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} c_n a_{k_n}(t)\right| dt \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

*gelten.*

(¹) Siehe Théorème 5 und 6 der unter (¹) auf s. 190 zitierten Arbeit.

(²) Wenn wir kurz von Funktionen sprechen, so sind stets die in $\langle 0, 1\rangle$ erklärten Funktionen gemeint.

B. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_{k_n}(t) \tag{2}$$

*die Entwicklung einer integrierbaren Funktion nach dem System $S$ ist, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2. \tag{3}$$

C. *Wenn die Reihe* (3) *konvergent ist, so gibt es eine stetige Funktion $x(t)$, die den Gleichungen*

$$\int_0^1 x(t)\, a_{k_n}(t)\, dt = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

*genügt.*

Wir werden jetzt den folgenden grundlegenden Satz beweisen:

Satz I. *Die Eigenschaften* A, B *und* C *sind äquivalent.*

Beweis. Es sei $x = x(t) \subset (C)$; setzen wir

$$\eta_n(x) = \int_0^1 x(t)\, a_{k_n}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Durch die Gleichung

$$F(x) = \{\eta_n(x)\}$$

ist im Raume $(C)$ eine lineare Operation definiert, die ihn auf einen Teil des Raumes $(l^2)$ abbildet; die Stetigkeit der betrachteten Operation folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß

$$\|F(x)\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2(x)\Big)^{1/2} \leqslant \Big[\int_0^1 x^2(t)\, dt\Big]^{1/2} \leqslant \|x\|$$

ist. Es sei ferner $y^* = L(y)$ ein lineares im Raume $(l^2)$ erklärtes Funktional; wir haben also

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \bar{\eta}_n,$$

wobei $y = \{\eta_n\}$ und $\{\bar{\eta}_n\} \subset (l^2)$ ist. Infolgedessen erhalten wir

$$L\big(F(x)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\eta}_n \int_0^1 x(t)\, a_{k_n}(t)\, dt$$

und

$$F^*(y^*) = \int_0^1 x(t)\, \bar{x}(t)\, dt, \tag{5}$$



wenn mit $\bar{x}(t)$ die durch die Beziehung

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \Big(\bar{x}(t) - \sum_{n=1}^{m} \bar{\eta}_n a_{k_n}(t)\Big)^2 dt = 0 \tag{6}$$

bestimmte Funktion bezeichnet wird. Wir bemerken hier, daß — wie leicht nachzuprüfen ist — die Gleichheit

$$\|F^*(y^*)\| = \int_0^1 |\bar{x}(t)|\, dt \tag{7}$$

stattfindet.

Wir wollen jetzt zeigen, daß jede der Eigenschaften A, B und C der Folge $\{k_n\}$ mit der Existenz einer linearen Umkehrung der Operation $F^*(y^*)$ äquivalent ist.

A. Wir werden uns hier der einfachen Bemerkung bedienen, nach der die Operation $F^*(y^*)$ dann und nur dann eine stetige Umkehrung besitzt, wenn es eine Zahl $K$ gibt, welche die Ungleichung

$$\|y^*\| \leqslant K \|F^*(y^*)\| \tag{8}$$

für alle $y^*$ befriedigt.

Setzen wir voraus, daß die Folge $\{k_n\}$ die Eigenschaft A besitzt; es ist

$$\Big(\sum_{n=1}^{m} \bar{\eta}_n^2\Big)^{1/2} \leqslant K \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{m} \eta_n a_{k_n}(t)\Big| dt \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Aus (6) und (7) folgt nun

$$\lim_{m\to\infty} \int \Big|\sum_{n=1}^{m} \bar{\eta}_n a_{k_n}(t)\Big| dt = \|F^*(y^*)\|; \tag{10}$$

es genügt also noch die Relation

$$\|y^*\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\eta}_n^2\Big)^{1/2} \tag{11}$$

zu berücksichtigen, um aus (9) durch Grenzübergang die Ungleichung (8) zu gewinnen. Aber auch umgekehrt, wenn die letzte Ungleichung für alle $y^*$ erfüllt ist, so kommt der Folge $\{k_n\}$ die Eigenschaft A zu. Es sei nämlich $\{c_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge und $m$ eine natürliche Zahl. Setzt man $\bar{\eta}_n = c_n$ für $n \leqslant m$, $= 0$ für $n > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, so ist wegen (10) und (11), die Relation (8) mit (1) ersichtlich gleichbedeutend.

B. Nehmen wir an, daß die Folge $\{k_n\}$ die Eigenschaft B besitzt. Es sei $\{y_r^*\} = \{L_r(x)\}$ eine Folge der linearen im Raume $(l^2)$ erklärten Funktionale; man kann sie also in der Form

$$L_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \bar{\eta}_n^{(r)}$$

schreiben, wo $x = \{\eta_n\}$ ist und $\{\overline{\eta}_n^{(r)}\} \subset (l^2)$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Setzen wir weiter voraus, daß die Folge $\{F^*(y_r^*)\}$ gegen ein Element $L(x)$ des zu $(C)$ konjugierten Raumes konvergiert. Es ist stets, nach dem Vorigen,

$$F^*(y_r^*) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}_r(t)\,dt,$$

wobei die Beziehungen

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \Big(\overline{x}_r(t) - \sum_{n=1}^{m} \overline{\eta}_n^{(r)} a_{k_n}(t)\Big)^2 dt = 0 \tag{12}$$

gelten; da weiter

$$\|F^*(y_p^*) - F^*(y_q^*)\| = \int_0^1 |\overline{x}_p(t) - \overline{x}_q(t)|\,dt \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

ist, so muß die Folge $\{\overline{x}_r(t)\}$ gegen ein Element des Raumes $(L)$ konvergieren. Es existiert also eine integrierbare Funktion $\overline{x}(t)$, für die die Relation

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^1 |\overline{x}_r(t) - \overline{x}(t)|\,dt = 0 \tag{13}$$

stattfindet; es ist offenbar

$$L(x) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}(t)\,dt$$

für jede dem Raume $(C)$ angehörige Funktion $x = x(t)$. Betrachten wir jetzt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}(t)\int_0^1 \overline{x}(t)\,a_{k_n}(t)\,dt; \tag{14}$$

aus den Relationen

$$\int_0^1 \overline{x}(t)\,a_s(t)\,dt = \lim_{r\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{m}\overline{\eta}_n^{(r)} a_{k_n}(t)\Big) a_s(t)\,dt \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

die man unter Bezugnahme auf (12) und (13) leicht verifiziert, folgt unmittelbar, daß die Reihe (14) die Entwicklung der Funktion $\overline{x}(t)$ nach dem System $S$ ist; wegen der Voraussetzung muß also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\int_0^1 \overline{x}(t)\,a_{k_n}(t)\,dt\Big]^2$$

konvergieren. Daraus schließen wir sofort, daß —

$$\overline{\eta}_n = \int_0^1 \overline{x}(t)\,a_{k_n}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$



gesetzt — die Beziehung (6) erfüllt ist; infolgedessen haben wir, für das durch die Gleichung

$$y^* = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \overline{\eta}_n$$

im Raume $(l^2)$ erklärte Funktional,

$$L(x) = F^*(y^*).$$

Auf diese Weise sehen wir, daß die Operation $F^*(y^*)$ den zu $(l^2)$ konjugierten Raum auf einen abgeschlossenen Teil des zu $(C)$ konjugierten Raumes abbildet; da diese Abbildung eineindeutig ist, so besitzt, wegen des Satzes β, die Operation $F^*(y^*)$ eine lineare Umkehrung.

Setzen wir voraus, daß die Operation $F^*(y^*)$ eine stetige Umkehrung besitzt. Es sei die Reihe (2) die Entwicklung einer integrierbaren Funktion $\overline{x}(t)$ nach dem System $S$. Das System $S$ genügt der Bedingung I; man kann also die Zahlen $\overline{\eta}_n^{(r)}$ $(n = 1, 2, \ldots, r;\ r = 1, 2, \ldots)$ so wählen, daß —

$$\overline{x}_r(t) = \sum_{n=1}^{r}\overline{\eta}_n^{(r)} a_{k_n}(t) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt —

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^1 |\overline{x}_r(t) - \overline{x}(t)|\,dt = 0$$

ist. Wir erklären jetzt im Raume $(C)$ die Funktionale $L(x)$ und $L_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ folgenderweise:

$$L(x) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}(t)\,dt, \qquad L_r(x) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}_r(t)\,dt,$$

wobei $x(t)$ das Element $x$ bezeichnet. Es existieren offenbar in dem zu $(l^2)$ konjugierten Raume Elemente $y_r^*$ so beschaffen, daß

$$L_r(x) = F^*(y_r^*)$$

ist. Da die Folge $\{F^*(y_r^*)\}$ gegen das Element $L(x)$ konvergiert und nach dem Satz α die Operation $F^*(y^*)$ den zu $(l^2)$ konjugierten Raum auf einen abgeschlossenen Teil des zu $(C)$ konjugierten Raumes abbildet, so gibt es in dem zu $(l^2)$ konjugierten Raume ein Element $y^*$, derart daß

$$L(x) = F^*(y^*)$$

ist. Infolgedessen ist die Funktion $\overline{x}(t)$ mit der durch die Relation (6) erklärten Funktion identisch und folglich quadratisch integrierbar; die Reihe (3) muß also in der Tat konvergieren.

C. Um diesen Teil des Beweises zu erledigen, genügt es zu bemerken, daß die Folge $\{k_n\}$ dann und nur dann die Eigenschaft C besitzt, wenn die

Operation $y = F(x)$ den Raum $(C)$ auf den ganzen Raum $(l^2)$ abbildet — und den Satz $\gamma$ anzuwenden.

Ersichtlich erfüllt das trigonometrische System die Bedingung I. Wenn nun die Folge $\{k_n\}$ der Forderung

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügt, so besitzt sie nach dem zitierten Satz des Herrn A. Zygmund die Eigenschaft B; auf Grund unseres Satzes I kommt ihr also auch die Eigenschaft C zu. Das heißt aber, daß man, wenn die Zahlenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

konvergiert, eine stetige Funktion $x(t)$ so wählen kann, daß die Gleichungen

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos k_n t\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin k_n t\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

stattfinden.

**§ 2.** Setzen wir jetzt voraus, daß die Funktionen $\alpha_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht nur individuell, sondern auch gemeinsam beschränkt sind. Wir werden außerdem annehmen, daß für das System $S$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

Bedingung I′. *Wenn $z(t)$ eine beschränkte meßbare Funktion ist, so können die Zahlen $c_n^{(m)}$ $(n = 1, 2, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots)$ so gewählt werden, daß — $z_m(t) = \sum_{n=1}^{m} c_n^{(m)} \alpha_n(t)$ für $m = 1, 2, \ldots$ gesetzt —*

1. *fast überall $\lim_{m\to\infty} z_m(t) = z(t)$ ist;*

2. *die Funktionen $z_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gemeinsam beschränkt sind;*

3. *wenn $\int_0^1 z(t)\alpha_n(t)\,dt = 0$ für ein gewisses $n$ ist, so ist $c_n^{(m)} = 0$ $(m = n, n+1, \ldots)$.*

Es bezeichne wieder $\{k_n\}$ eine beliebige wachsende Folge natürlicher Zahlen; wir erklären für derartige Folgen die Eigenschaften A′, B′ und C′ folgendermaßen:

A′. *Es gibt eine Konstante $K$, derart daß für jede Zahlenfolge $\{c_n\}$ die Ungleichungen*

$$\sum_{n=1}^{m} |c_n| \leqslant K \text{ wesentliche obere Grenze}_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|\sum_{n=1}^{m} c_n \alpha_{k_n}(t)\right| \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

*stattfinden.*



B′. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_{k_n}(t)$$

*die Entwicklung einer beschränkten meßbaren Funktion nach dem System $S$ ist, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

*konvergent.*

C′. *Wenn $\{c_n\}$ eine gegen Null konvergente Zahlenfolge ist, so gibt es stets eine integrierbare Funktion $x(t)$, für welche die Formeln*

$$\int_0^1 x(t)\alpha_{k_n}(t)\,dt = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

*gelten.*

Wir beweisen jetzt den zu Satz I analogen

Satz I′. *Die Eigenschaften A′, B′ und C′ sind äquivalent.*

Beweis. Es sei $x = x(t) \subset (L)$; setzen wir

$$\eta_n(x) = \int_0^1 x(t)\alpha_{k_n}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$F(x) = \{\eta_n(x)\}.$$

Da nach einem bekannten Satze die Folge $\{\eta_n(x)\}$ gegen Null konvergiert, so bildet die durch die letzte Gleichung erklärte Operation den Raum $(L)$ auf einen Teil des Raumes $(c_0)$ ab; diese Operation ist ersichtlich linear, da die Ungleichung

$$\|F(x)\| \leqslant \text{obere Grenze}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} |\alpha_{k_n}(t)| \int_0^1 |x(t)|\,dt$$

statthat. Wir werden jetzt die Gestalt der zu $F(x)$ konjugierten Operation $F^*(y^*)$ bestimmen. Es bezeichne $y^* = L(y)$ ein beliebiges im Raume $(c_0)$ erklärtes Funktional; es ist also

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \bar{\eta}_n,$$

wobei $y = \{\eta_n\}$ ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\eta}_n$ absolut konvergiert. Wir haben

$$L(F(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x(t)\alpha_{k_n}(t)\,dt$$

und daher

$$F^*(y^*) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}(t)\,dt,$$

wobei

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\eta}_n\, a_{k_n}(t)$$

ist; außerdem gilt die Gleichung

$$\|F^*(y^*)\| = \text{wesentliche obere Grenze}_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}(t)|.$$

Man kann nun leicht beweisen, daß jede der Eigenschaften A′, B′ und C′ der Folge $\{k_n\}$ damit gleichbedeutend ist, daß die Operation $F^*(y^*)$ eine lineare Umkehrung besitzt. Der Beweis verläuft ganz analog dem entsprechenden Beweis des vorigen §.

Offenbar ist für das trigonometrische System die Bedingung I′ erfüllt. Dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn S. Sidon zufolge besitzt die Folge $\{k_n\}$ die Eigenschaft B′, wenn sie nur der Bedingung

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügt; dann hat sie also auch nach unserem Satze I′ die Eigenschaft C′. Dieses bedeutet, daß es, wenn die Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegen Null konvergieren, eine integrierbare Funktion $x(t)$ gibt, für welche die Relationen

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos k_n t\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin k_n t\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind.

## Bemerkung zu der Arbeit „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen“

Bei der Drucklegung meiner oben zitierten Arbeit (Studia Mathematica 2 (1930), p. 207-220) haben sich einige Fehler eingeschlichen. Die Sätze a bzw. b (p. 208 bzw. 209) sollen nämlich statt des angeführten offenbar den folgenden Wortlaut haben:

SATZ a. *Es gibt eine gegen Null konvergente Folge positiver Zahlen* $\{\varepsilon_n\}$ *und eine stetige Funktion* $x(t)$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{2-\varepsilon_n} + |b_n|^{2-\varepsilon_n}),$$

*wo* $a_n, b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *die Fourierkoeffizienten der Funktion* $x(t)$ *sind, divergent ist.*

SATZ b. *Es gibt eine gegen* $+\infty$ *divergente Folge positiver Zahlen* $\{\lambda_n\}$ *und eine integrierbare Funktion* $x(t)$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n}),$$

*wo* $a_n, b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *die Fourierkoeffizienten der Funktion* $x(t)$ *sind, divergiert.*

Im Zusammenhang mit dem letzten Satz bemerken wir, daß schon Herr W. Orlicz die Existenz einer integrierbaren Funktion bewiesen hat, für welche die Reihe der $\lambda$-ten Potenzen ihrer Fourierkoeffizienten bei jedem konstanten $\lambda$ divergiert (*Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-41, insb. p. 30).

---

* Commenté sur p. 337.