Sur une généralisation du problème de la mesure*

par

S. Banach et C. Kuratowski

M. Lebesgue a appelé *problème de la mesure* (¹) le problème suivant: définir une fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble X situé dans l'intervalle $E = 0{,}1$ un nombre réel $m(X) \geqslant 0$ de façon que:

I. Si X_1 et X_2 sont superposables, $m(X_1) = m(X_2)$.

II. $X_1, X_2, \ldots$ étant une suite finie ou infinie d'ensembles disjoints, on a: $m(X_1+X_2+\ldots) = m(X_1)+m(X_2)+\ldots$

III. $m(E) = 1$.

M. Vitali (en 1905) a prouvé que ce problème *n'admet pas de solution.*

Or, on peut chercher à résoudre ce problème, en imposant à la fonction $m(X)$ des conditions moins restrictives (²). Dans cette note nous allons prouver, en admettant l'hypothèse du continu, que le problème *plus général* (³) qui s'obtient de celui de la mesure en omettant la condition I et en y ajoutant la condition, que pour X composé d'un seul point $m(X) = 0$ (condition qui résulte évidemment de I et II), — *ne possède nonplus de solution*; nous allons nous débarrasser, en même temps, de

* Commenté sur p. 333.

(¹) *Leçons sur l'intégration* (Coll. Borel), I-re éd. 1904, II-me 1928, p. 110.

(²) Ainsi, si l'on remplace l'additivité complète (énoncée dans la cond. II) par l'additivité finie, le problème de mesure admet une solution (voir Banach [*9*]); et cela reste encore vrai dans le cas où E est un carré, tandis qu'il n'en est rien, si E est un cube (voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 469, et, dans le même ordre d'idées, Banach et Tarski [*13*] et J. v. Neumann, Fundamenta Mathematicae 13).

(³) Ce problème fut posé par M. Banach, qui l'a réduit aussi au théorème II. La démonstration du théorème II a été trouvée par les deux auteurs indépendamment et simultanément.

la condition peu essentielle que $m(X)$ soit non-négatif. Nous parviendrons ainsi à la généralisation suivante (¹) du résultat cité de M. Vitali:

THÉORÈME I. *Il n'existe aucune fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble $X \subset E$ un nombre réel $m(X)$ de façon que*

(1) *pour X composé d'un seul élément, $m(X) = 0$,*

(2) *$m(X)$ est complètement additive* (= *cond.* II),

(3) *$m(X)$ n'est pas identiquement* 0.

1. Nous allons prouver, au préalable, que le théorème I résulte du suivant

THÉORÈME II. *Il existe une double suite d'ensembles A_k^i telle que* 1°:

$$\begin{gathered} E = A_1^1+A_2^1+\ldots+A_k^1+\ldots, \\ E = A_1^2+A_2^2+\ldots+A_k^2+\ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E = A_1^i+A_2^i+\ldots+A_k^i+\ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

2°: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints,* 3°: *quelle que soit la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, le produit $\prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i+A_2^i+\ldots+A_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable.*

Supposons, en effet, qu'il existe une fonction $m(X)$ satisfaisant aux conditions du théorème I. Nous en conclurons que le théorème II est en défaut.

On peut admettre que $m(E) \neq 0$. Car, selon (3), il existe un ensemble $E_1 \subset E$ tel que $m(E_1) \neq 0$. Donc, si $m(E) = 0$, on a, conformément à (2): $m(E-E_1) \neq 0$. L'un des deux ensembles E_1 ou $E-E_1$ (soit E_1) a la puissance du continu. Or, la fonction $m(X)$ étant assujettie aux conditions (1)-(3) pour $X \subset E_1$, on en conclut aussitôt (en s'appuyant sur le fait que E et E_1 ont même puissance) qu'il existe une fonction assujettie aux mêmes conditions pour tout $X \subset E$ et ne s'annulant pas pour $X = E$.

Soit donc $m(E) = a \neq 0$. Considérons une double suite A_k^i satisfaisant aux conditions 1° et 2°. Il s'agit de prouver que la condition 3° est en défaut.

(¹) Comme on voit, le fait que le problème de mesure ne possède pas de solution n'est pas de caractère géométrique (comme on pourrait le croire, en tenant compte de la condition I), mais c'est un fait de la Théorie des ensembles. Quant à l'ensemble E, on peut évidemment supposer, dans la suite, que c'est un ensemble arbitraire de la puissance du continu (non nécessairement un intervalle).

On a, en vertu de (2),

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^1).$$

Il existe, par conséquent, un indice k_1 tel que

$$\Big|\sum_{k=k_1+1}^{\infty} m(A_k^1)\Big| \leqslant \frac{|a|}{4},$$

donc, en désignant par R^1 la somme $A_{k_1+1}^1 + A_{k_1+2}^1 + \ldots$, il vient

$$|m(R^1)| \leqslant |a|/4.$$

En général, il existe une suite d'entiers $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ tels qu'en désignant $R^i = A_{k_i+1}^i + A_{k_i+2}^i + \ldots$, on a

$$|m(R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1})| \leqslant \frac{|a|}{2^{i+1}},$$

puisque la décomposition évidente

$$E - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}$$

entraîne

$$m(E - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}),$$

donc pour k_i suffisamment grand:

$$\Big|\sum_{k=k_i+1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1})\Big| \leqslant \frac{|a|}{2^{i+1}}.$$

On parvient ainsi à la conclusion que

$$\Big|m\Big(\sum_{i=1}^{\infty} R^i\Big)\Big| = \Big|m\Big(\sum_{i=1}^{\infty} R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}\Big)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{\infty} m(R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}\Big| \leqslant \frac{|a|}{2}$$

et comme

$$E - \sum_{i=1}^{\infty} R^i = \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i),$$

il vient

$$\Big|m\Big(\prod_{i=1}^{\infty} A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i\Big)\Big| \geqslant \frac{|a|}{2} \neq 0,$$

ce qui prouve que l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$ est indénombrable, puisque, pour tout X fini ou dénombrable, on a conformément à (1) et (2): $m(X) = 0$.

La condition 3° n'est donc pas remplie.

Il est ainsi établi que, dès que le théorème II va être prouvé, le théorème I le sera aussi.

2. *Démonstration du théorème* II *basée sur l'hypothèse du continu.*

Etant données deux suites d'entiers positifs $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, convenons d'écrire $T \prec S$, lorsque $n_i \leqslant k_i$ quel que soit i.

Nous allons prouver que

(II') *Il existe une famille $\mathscr{F}$, de la puissance du continu, ayant comme éléments des suites d'entiers positifs et telle que, pour chaque suite S (qu'elle appartienne à $\mathscr{F}$ ou non), l'ensemble des suites T de $\mathscr{F}$ telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.*

En effet, la famille de toutes les suites infinies d'entiers positifs est, selon l'hypothèse du continu, une famille bien ordonnée:

$$S_0, S_1, \ldots S_\omega, \ldots S_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega),$$

Ω désignant le premier nombre transfini de la troisième classe.

Or, on peut faire correspondre à chaque α un nombre ξ_α tel que, pour $\beta < \alpha$, on n'ait jamais $S_{\xi_\alpha} \prec S_\beta$, ni $S_{\xi_\alpha} = S_{\xi_\beta}$, car, pour chaque famille finie ou dénombrable de suites $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, on peut construire (par un procédé classique de diagonale) une suite S telle qu'on n'ait pour aucun n: $S \prec T_n$.

La famille des suites S_{ξ_α} est donc la famille $\mathscr{F}$ demandée (puisque, pour chaque β, si $S_{\xi_\alpha} \prec S_\beta$, on a $\alpha \leqslant \beta$; l'ensemble de ces α est parsuite au plus dénombrable). La puissance de $\mathscr{F}$ étant égale à celle de l'ensemble E = l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par T_x de sorte que si $x \neq y$, $T_x \neq T_y$. Soit $T_x = n_1^x, n_2^x, \ldots, n_i^x, \ldots$

Nous définissons les ensembles A_k^i du théorème II de la façon suivante:

x appartient à A_k^i lorsque $k = n_i^x$.

On voit aussitôt que les conditions 1° et 2° du théorème II sont réalisées. Pour prouver qu'il en est de même de 3°, considérons une suite arbitraire $S = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ et soit x un élément de l'ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i).$$

Il s'agit de démontrer qu'il y en a au plus une infinité dénombrable de ces x.

Pour chaque i, x appartient, par hypothèse, à l'ensemble $A_1^i+A_2^i+ +\ldots+A_{k_i}^i$. Conformément à la définition de A_k^i, il vient $n_i^x \leqslant k_i$. En d'autres termes: $T_x \prec S$. Or, cette formule ne peut être remplie, selon la propriété de la famille $\mathcal{F}$ énoncée dans (II'), que pour une infinité au plus dénombrable des x.

Ainsi, le théorème II et, par conséquent, le théorème I se trouvent démontrés.

Remarque. Comme nous venons de voir, la proposition (II') entraîne, sans l'aide de l'hypothèse du continu, le théorème II. Nous prouverons, à présent, que l'implication inverse a aussi lieu.

Supposons, en effet, que les ensembles A_k^i satisfont au théorème II. Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les suites $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ ne soit pas vide.

La famille $\mathcal{F}$ ainsi définie a la puissance du continu. Car, d'une part, selon la condition 3° du théorème II, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et, d'autre part, selon 1°, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre est égal à E, a donc la puissance du continu.

Soit $S = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ une suite arbitraire. L'ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i+A_2^i+\ldots+A_{k_i}^i)$$

étant, selon 3°, au plus dénombrable, on en conclut que parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$, avec $n_i \leqslant k_i$, il n'y en a pas plus qu'une infinité dénombrable qui ne soient pas vides (puisque selon 2°, deux produits de ce genre sont toujours disjoints). Cela veut dire, précisément, que l'ensemble des suites T de la famille $\mathcal{F}$ telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.

L'équivalence des propositions II et II' se trouve ainsi démontrée.

Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen*

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit der Untersuchung einiger Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen. Eine trigonometrische Reihe soll dabei *lakunär* heißen, wenn sie die Gestalt

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos k_n t+b_n \sin k_n t) \tag{1}$$

hat, wo die Folge $\{k_n\}$ aus der natürlichen Zahlenfolge durch Weglassen unendlich vieler Glieder entsteht. Es sind über die lakunären Reihen einer besonderen Klasse, über die Reihen nämlich, für welche die Bedingung

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2}$$

stattfindet, zwei bemerkenswerte Sätze bekannt. Der erste rührt von Herrn S. Sidon her und lautet: Wenn die Reihe (1) die Fourierreihe einer meßbaren beschränkten Funktion ist, so muß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

konvergent sein [1]. Den zweiten hat Herr A. Zygmund bewiesen: Stellt die Reihe (1) die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion dar, so

---

* Commenté sur p. 337.

[1] S. Sidon, *Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen*, Mathematische Annalen 96 (1927), p. 418-419; S. Sidon, *Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken*, Mathematische Annalen 97 (1927), p. 675-676.