La suffisance. Supposons que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés (N) et (T_2) et admettons qu'elle ne jouit pas de la propriété (S). Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite infinie d'ensembles $\{E_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) La somme $|E_1|+|E_2|+|E_3|+\ldots$ est finie.

2) $|(E_i)_y| \geqslant \varepsilon$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Posons

$$E = \overline{\lim}\, E_i$$

(en désignant par $\overline{\lim}$ l'ensemble-limite complet de la suite $E_1, E_2, \ldots$). Il est clair que, d'après 1):

$$|E| = 0 \tag{4}$$

(ou bien E est vide). Posons

$$E^* = \overline{\lim}\,(E_i)_y; \tag{5}$$

d'après 2) nous avons

$$|E^*| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Je dis que $E_y \supset E^* - A_1$. En effet, si $z \in (E^* - A_1)$, l'ensemble $C(z)$ des points de (a, b) en lesquels $f(x)$ prend la valeur z est fini. Or, de $z \in E^*$ résulte, d'après (5), que z appartient à une infinité des ensembles $(E_i)_y$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$; par conséquent une infinité d'ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ contient des points de $C(z)$; l'ensemble $C(z)$ étant fini, il en résulte l'existence d'un nombre x de $C(z)$ qui appartient a une infinité des ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots)$, et par suite appartient à E. Donc $z \in E_y$, c. q. f. d.

Or, de $E_y \supset E^* + A_1$ résulte que $E^* \subset E_y + A_1$. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété (T_1), nous avons $|A_1| = 0$; la fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N), nous trouvons, d'après (4), $|E_y| = 0$. La formule $E^* \subset E_y + A_1$ donne donc $|E^*| = 0$, ce qui est incompatible avec (6).

La fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété (S) et notre théorème est démontré.

Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre

Soit E un ensemble de fonctions remplissant les conditions suivantes:

1° Toute fonction de E est définie et continue dans un cercle K. Nous ne supposons pas que le cercle K soit le même pour toutes les fonctions de E.

2° Toute fonction superposable [1] à une fonction quelconque de E appartient à E.

3° A tout cercle K de rayon plus petit qu'un nombre $R > 0$ et à toute fonction φ définie et continue sur $\overline{K}$, $\overline{K}$ désignant la circonférence de K, il correspond une fonction F de E définie et continue dans K, qui se réduit à φ sur $\overline{K}$. Deux fonctions F_1 et F_2 continues dans K et identiques sur $\overline{K}$ sont identiques dans K et $\varphi = 0$ implique $F = 0$.

4° Si l'on pose $F = U(\varphi/K)$, U est une fonctionnelle continue par rapport à φ et admettant une première variation pour $\varphi = 0$, quelque soit le cercle K [2].

Sous ces conditions, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Soit $f = \delta U(\delta\varphi/K)$ la première variation de U pour $\varphi = 0$. Il existe un nombre réel λ tel que pour chaque $\delta\varphi$, f soit une fonction continue ainsi que ses premières et secondes derivées à l'intérieur du cercle K et satisfasse à l'équation suivante*:

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \overline{K} \qquad \left(\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Remarque 1. On peut démontrer un théorème analogue en supposant que les fonctions de l'ensemble E attribuent aux points des vecteurs de n dimensions.

---

[1] Deux fonctions F_1 et F_2 définies dans les ensembles D_1 resp. D_2 sont dites *superposables*, s'il existe une translation euclidienne (produit d'un déplacement et d'une rotation) qui transforme D_1 à D_2 de telle manière qu'en des points correspondants F_1 et F_2 aient des valeurs égales.

[2] Pour la définition de la première et seconde variation voir les *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de Paul Lévy, Paris 1922, p. 50 et p. 79.

Remarque 2. L'état physique d'un corps homogène conduit fréquemment à l'ensemble de fonctions jouissant des propriétés citées ci-dessus. Les fonctions qui définissent les déformations d'un corps homogène peuvent servir d'exemple. Le théorème précédent montre qu'en première approximation ces fonctions sont des fonctions analytiques satisfaisant à l'équation:

$$\Delta f+\lambda f = 0.$$

Définition. $||f|| =$ maximum de $|f|$ dans K.

THÉORÈME II. *Si nous supposons que la deuxième variation $\delta^2 U(\delta\varphi/K)$ existe pour $\varphi = 0$, et qu'il existe un nombre M tel que pour tout K et $\delta\varphi$ on ait*

$$||\delta^2 U(\delta\varphi/K)|| \leqslant M||\delta\varphi||^2,$$

alors en posant

$$f = \delta U(\delta\varphi/K), \qquad \psi = \delta^2 U(\delta\varphi/K)$$

on aura

$$\Delta\psi+\lambda\psi = \alpha f+\beta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right], \qquad \psi = 0 \ \text{sur} \ \bar{K},$$

$$\Delta f+\lambda f = 0, \qquad f = \delta\varphi \quad \text{sur} \quad \bar{K},$$

α et β étant deux nombres constants ne dépendant ni de $\delta\varphi$ ni de K.

On peut établir des équations pareilles pour les autres variations.

Démonstration du théorème I. Supposons que nous ayons deux fonctions continues φ_1 et φ_2 définies dans $\bar{K}_1$ resp. $\bar{K}_2$ telles que les fonctions $f_1 = \delta U(\varphi_1/K_1)$ et $f_2 = \delta U(\varphi_2/K_2)$ soient égales dans $\bar{K}$, K étant contenu dans K_1 et K_2. Nous allons démontrer que les fonctions f_1 et f_2 sont aussi égales dans K.

En effet, posons dans $\bar{K}$

$$F_h^{(1)} = U(h\varphi_1/K_1), \qquad F_h^{(2)} = U(h\varphi_2/K_2) \tag{1}$$

et nous aurons dans K

$$U(h\varphi_1/K_1) = U(F_h^{(1)}/K), \qquad U(h\varphi_2/K_2) = U(F_h^{(2)}/K), \tag{2}$$

en outre

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_h^{(1)}}{h} = \lim_{h\to\infty}\frac{F_h^{(2)}}{h} = f. \tag{3}$$

Mais d'après la définition de la variation

$$\begin{aligned} U(F_h^{(1)}/K) &= \delta U(F_h^{(1)}/K)+||F_h^{(1)}||\cdot R_1, \\ U(F_h^{(2)}/K) &= \delta U(F_h^{(2)}/K)+||F_h^{(2)}||\cdot R_2, \end{aligned} \tag{4}$$

R_1 et R_2 tendant vers zéro uniformément avec h.

Donc d'après (1), (3) et (4)

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(F_h^{(1)}/K)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{U(F_h^{(2)}/K)}{h} = \delta U(f/K). \tag{5}$$

Les relations (1), (2) et (5) nous donnent enfin dans K

$$f_1 = f_2.$$

Soit maintenant K un cercle quelconque et f une fonction définie et continue sur $\bar{K}$. Posons $V(f/K)$ égale à la valeur de la fonction $\delta U(f/K)$ au centre de K. Il est clair que la fonctionnelle $V(f/K)$ est continue et linéaire et en outre si deux cercles K_1 et K_2 ont des rayons égaux et si f_1 et f_2 sont deux fonctions superposables, continues et définies sur $\bar{K}_1$ resp. $\bar{K}_2$, on a

$$V(f_1/K_1) = V(f_2/K_2).$$

Soit maintenant A un point quelconque de $\bar{K}$ et α l'angle du rayon vecteur joignant le centre de K avec A avec l'axe des x. Nous allons démontrer que pour tout nombre naturel n

$$V(\sin n\alpha/K) = V(\cos n\alpha/K) = 0.$$

En effet, γ étant un nombre quelconque, les fonctions $\sin n\alpha$ et $\sin n(\alpha+\gamma)$ sont superposables, donc

$$V\big(\sin n(\alpha+\gamma)/K\big) = V(\sin n\alpha/K).$$

Nous aurons alors quelque soit γ

$$\cos\gamma\cdot V(\sin n\alpha/K)+\sin\gamma\cdot V(\cos n\alpha/K) = V(\sin n\alpha/K)$$

et pour tout n naturel

$$V(\sin n\alpha/K) = V(\cos n\alpha/K) = 0.$$

Soit $\varphi(\alpha)$ une fonction continue, telle que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et soit

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha)$$

sa série de Fourier. On sait que la moyenne des sommes partielles tend uniformément vers $\varphi(a)$. Donc en posant

$$V(1/K) = 2\pi c,$$

nous aurons

$$V(\varphi/K) = 2\pi a_0 c = c\int_0^{2\pi} \varphi(a)\,da.$$

Donc si $f(x, y) = \delta U(\delta\varphi/K)$, nous aurons pour tout couple (x, y) situé à l'intérieur de K et pour tout r suffisamment petit

$$f(x, y) = c(r)\int_0^{2\pi} f(x+r\cos a,\ y+r\sin a)\,da, \tag{6}$$

$c(r)$ étant une constante ne dépendante que de r.

Puisque f n'est pas identiquement nul si $\delta\varphi$ ne l'est pas, la formule (6) montre que $\lim\limits_{r\to 0} c(r) = 1/2\pi$ et que $c(r)$ est continue pour tout r plus petit qu'un nombre positif R.

La formule (6) donne

$$f(x, y)\int_0^R \frac{r\,dr}{c(r)} = \int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi} f(x+r\cos a,\ y+r\sin a)\,da \tag{7}$$
$$= \iint_{K_R} f(x, y)\,dx\,dy,$$

K_R étant un cercle de centre (x, y) et de rayon R.

On voit sans peine que d'après (7) $f(x, y)$ est une fonction remplissante la condition de Lipschitz dans tout cercle au rayon plus petit que R situé dans K. Donc pour presque tous les (x, y)

$$f'_x(x, y) = c(r)\int_0^{2\pi} f'_x(x+r\cos a,\ y+r\sin a)\,da$$

et

$$f'_x(x, y)\int_0^R \frac{r}{c(r)}\,dr = \iint_{K_R} f'_x(x, y)\,dx\,dy;$$

$f'_x(x, y)$ est donc continue dans chaque point intérieur de K. De la même manière on peut démontrer l'existence et la continuité des $f'_y(x, y)$, $f''_{x^2}(x, y), f''_{y^2}(x, y)$ dans tout point intérieur de K. D'après (6), la continuité de $f'_x(x, y)$ entraîne l'existence et la continuité de $1/c'(r)$ pour r suffisamment petit.

L'égalité (6) fournit

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)} f(x, y) = \int_0^{2\pi} [f'_x(x+r\cos a,\ y+r\sin a)\cos a +$$
$$+ f'_y(x+r\cos a,\ y+r\sin a)\sin a]\,da.$$

Donc

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)} f(x, y) = \frac{1}{r}\int_{\overline{K}_R} (f'_x\,dx - f'_y\,dy).$$

En employant la formule de Green, nous obtenons

$$-\frac{rc'(r)}{c^2(r)} f(x, y) = -\iint_{K_R} \Delta f\,dx\,dy,$$

ce qui donne

$$\frac{c'(r)}{r\pi c^2(r)} f(x, y) = \frac{1}{r^2\pi}\iint_{K_R} \Delta f\,dx\,dy.$$

Puisque

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2\pi}\iint_{K_R} \Delta f\,dx\,dy = \Delta f, \tag{8}$$

$\lim\limits_{r\to 0} c'(r)/r\pi c^2(r)$ existe; en désignant cette limite par $-\lambda$ nous aurons d'après (8)

$$\Delta f + \lambda f = 0,$$

en tout point de K, λ étant une constante ne dépendant ni de f ni de K.

Soit $B(f, \varphi)$ une fonctionnelle continue qui à chaque couple de fonctions f et φ continues dans $(0, 2\pi)$ et telles que $f(0)-f(2\pi) = \varphi(0)-\varphi(2\pi) = 0$, attribue un nombre réel. Supposons que pour toutes les fonctions f, φ, ψ remplissantes les conditions cités ci-dessus, on ait toujours

$$B(f, \varphi) = B(\varphi, f),$$

$$B(f+\psi, \varphi) = B(f, \varphi) + B(\psi, \varphi).$$

La fonctionnelle B remplissante les conditions précédentes est dite symétrique et linéaire.

Dans ce qui suivra nous ferons usage du lemme suivant:

Lemme. *Si $B(f,\varphi)$ est une fonctionnelle continue linéaire et symétrique et si la fonctionnelle $A(f) = B(f,f)$ prend les mêmes valeurs pour les fonctions superposables, on a*

$$A(f) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^{2\pi} A_i^2 d\alpha,$$

où les c_i sont des constantes indépendantes de la fonction f et

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cos i\alpha + b_i \sin i\alpha)$$

est la série de Fourier correspondante à la fonction f.

Démonstration. Posons

$$a_{nr} = B(\sin n\alpha, \sin r\alpha), \quad b_{nr} = B(\sin n\alpha, \cos r\alpha), \quad c_{nr} = B(\cos n\alpha, \cos r\alpha).$$

Si β est un nombre quelconque, un calcul facile montre que

$$2a_{nr} = (a_{nr} - c_{nr})\cos(n+r)\beta + (b_{nr} + b_{rn})\sin(n+r)\beta + \\ + (a_{nr} + c_{nr})\cos(n-r)\beta + (-b_{nr} + b_{rn})\sin(n-r)\beta;$$

nous avons donc

$$a_{nr} = b_{nr} = c_{nr} = 0, \quad \text{si} \quad n \neq r$$

et

$$a_{nn} = c_{nn}, \quad b_{nn} = 0.$$

Comme les premières moyennes des sommes partielles de la série de Fourier correspondant à la fonction f tendent uniformément vers f, on a

$$A(f) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^{2\pi} A_i^2 d\alpha.$$

(Les c_i sont des constantes indépendantes de f.)

Démonstration du théorème II. Si F est une fonction définie dans un ensemble A dont B est un sous-ensemble, nous désignons par F_B une fonction définie seulement dans B, qui prend aux points correspondants les mêmes valeurs que la fonction F. Si K' est un cercle situé dans K nous démontrérons la relation suivante valable dans K':

(9) $$\delta^2 U(\delta\varphi/K) = \delta U(\psi_{\bar K'}/K') + \delta^2 U(f_{\bar K'}/K').$$

En effet, soit $U(h\delta\varphi/K) = f^{(h)}$; nous aurons dans K

(10) $$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(h)}}{h} = f,$$

(11) $$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(h)} - hf}{h^2} = \frac{1}{2}\psi.$$

Il est clair que d'après (11) il subsiste dans K' la relation suivante:

(12) $$\frac{1}{2}\psi = \lim_{h\to 0} \frac{U(f^{(h)}_{\bar K'}/K') - h\delta U(f^{(h)}_{\bar K'}/K')}{h^2}.$$

D'après la définition de la deuxième variation on a pour tout cercle K:

(13) $$U(\delta\varphi/K) = \delta U(\delta\varphi/K) + \frac{1}{2}\delta^2 U(\delta\varphi/K) + ||\delta\varphi||^2 R$$

où R tend uniformément vers zéro avec $||\delta\varphi||$.

Donc, d'après (10), (12) et (13), nous aurons dans K':

$$\frac{1}{2}\psi = \lim_{h\to 0} \frac{\delta U[f^{(h)}_{\bar K'}/K'] + \frac{1}{2}\delta^2 U[f^{(h)}_{\bar K'}/K'] + ||f^{(h)}_{\bar K'}||^2 R' - h\delta U[f^{(h)}_{\bar K'}/K']}{h^2},$$

ce qui prouve la relation (9).

D'après le théorème I et d'après la formule (6), (x, y) étant le centre du K', la valeur de $\delta U(\psi_{\bar K'}/K')$ au point (x, y) est égale à

$$c(r)\int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\alpha, y + r\sin\alpha)\, d\alpha.$$

Il est clair, que si $V(f_{K'})$ est la valeur de $\delta^2 U(f_{K'}/K')$ au point (x, y), la fonctionnelle V remplit les conditions imposées à la fonctionnelle A du lemme, donc

(14) $$V(f_{K'}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha$$

où les $c_i(r)$ sont des constantes dépendant seulement de r.

On peut donc écrire pour r assez petit

(15) $$\psi(x, y) = c(r)\int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\alpha, y + r\sin\alpha)\, d\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha.$$

Si nous supposons maintenant que

$$||\delta^2 U(\delta\varphi/K)|| \leqslant M ||\delta\varphi||^2$$

(M étant indépendant de K et $\delta\varphi$) nous aurons en posant dans (15) $f_{K'} = \sin n\alpha$,

$$|\pi c_n(r)| \leqslant M;$$

la relation (15) donne maintenant

$$\psi(x, y)\int_0^R \frac{r}{c(r)}\, dr = \iint_{K_R} \psi(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha \int_0^R \frac{r c_i(r)}{c(r)}\, dr.$$

Nous rappellons que $\lim_{r\to 0} c(r) = 1/2\pi$.

Puisque

$$\left|\sum_{i=0}^{i=\infty}\int_0^{2\pi} A_i(r)\frac{\partial A_i(r)}{\partial x}\,d\alpha\int_0^R \frac{rc_i(r)}{c(r)}\,dr\right|^2$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} A_i^2(r)\,d\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial A_i(r)}{\partial x}\right)^2 d\alpha\right]M^2\left(\int_0^R \frac{r}{c(r)}\,dr\right)^2$$

et puisque $f(x, y)$ est une fonctionnelle analytique, on peut démontrer de la même façon que la fonction $\psi(x, y)$ a toutes les derivées continues [1]. Considérons maintenant que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi(x, y)-c(r)\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha)\,d\alpha}{r^2\pi} = \frac{1}{4\pi}(\varDelta\psi+\lambda\psi). \tag{16}$$

Or

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{i=2}^{\infty}\int_0^{2\pi} A_i^2(r)\,d\alpha}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\left(\int_0^{2\pi} f(x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha)\,d\alpha\right)^2-\int_0^{2\pi} A_0^2(r)\,d\alpha-\int_0^{2\pi} A_1^2(r)\,d\alpha}{r^2}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]-\pi f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-$$

$$-\pi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=0;$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r)\int_0^{2\pi} A_i^2(r)}{r^2\pi}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{2c_0(r)}{r^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha)\,d\alpha+\lim_{r\to 0}\frac{c_1(r)\int_0^{2\pi} A_1^2(r)\,d\alpha}{r^2\pi}.$$

En supposant que $f_{K'}$ soit constant, on voit sans peine que $\lim c_0/r^2$ existe. Donc $\lim_{r\to 0} c_1(r)$ existe.

---

[1] Il faut remarquer que l'on peut démontrer l'existence de toutes les dérivées de $\psi(x, y)$ sans l'hypothèse que M soit indépendant de r.

Nous obtenons alors

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r)\int_0^{2\pi} A_i^2(r)\,d\alpha}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{4\pi}f+\frac{\beta}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right], \tag{17}$$

α et β étant des constantes indépendantes de f, et finalement tenant compte de (15), (16) et (17)

$$\varDelta\psi+\lambda\psi = \alpha f+\beta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

c. q. f. d.