partout nulle, si l'on a pour tout n, $\int_0^1 f\varphi_n = 0$. En s'appuyant sur un théorème de M. F. Riesz [1], on peut maintenant démontrer le lemme suivant:

Si la fonction f et les fonctions d'une suite $\{f_n\}$ sont des fonctions sommables de la $(1+1/p)^{ième}$ puissance, et si l'on a, pour tout i,

$$\lim \int_0^1 f_n\varphi_i = \int_0^1 f\varphi_i,$$

alors

$$\underline{\lim} \int_0^1 |f_n|^{1+1/p} \geqslant \int_0^1 |f|^{1+1/p}.$$

En s'appuyant sur le lemme précédent, on peut maintenant démontrer, de la même manière que le théorème II, le théorème suivant:

Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites qui remplissent les conditions du lemme et si à chaque fonction $x(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{ième}$ puissance, on peut faire correspondre une fonction $y(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{ième}$ puissance telle que pour tout n

$$\int_0^1 x(t)\varphi_n(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\psi_n(t)\,dt,$$

la convergence en moyenne par $(1+1/p)^{ième}$ puissance de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n$.

Remarque. On peut énoncer de pareils théorèmes pour *les divers procédés* sommatoires.

[1] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (Mathematische Annalen 69 (1910), p. 469-467): si p et M sont deux nombres positifs et si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions telle que $\int_0^1 |\varphi_n|^{1+p} \leqslant M$, il existe une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ et une fonction φ telle que: 1° $\int_0^1 |\varphi|^{1+p} \leqslant M$; 2° pour chaque fonction f de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance sommable on a

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f\varphi_{n_k} = \int_0^1 f\varphi.$$

Sur une classe de fonctions continues*

Introduction

Le but de cette Note est d'établir quelques relations qui subsistent entre certaines classes de fonctions continues.

Précisons d'abord les notations.

E désignant un ensemble, $|E|$ désigne sa mesure extérieure.

$y = f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, E_y désigne l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour $x \in E$.

On dit, d'après M. Lusin [1], que $f(x)$ vérifie dans (a, b) la condition (N), lorsque $|E| = 0$ implique toujours $|E_y| = 0$.

Je prouve dans ce travail que toute fonction continue satisfaisant à la condition (N) admet la dérivée unique et finie dans un ensemble de points de mesure positive. Or, M. Ruziewicz a montré que cet ensemble n'est pas nécessairement d'éppaisseur pleine: en effet, il a construit une fonction continue vérifiant la condition (N) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de mesure non-nulle [2].

Nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$ continue dans (a, b) satisfait à la condition (S), lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ de manière que $|E| < \eta$ entraîne $|E_y| < \varepsilon$.

On voit de suite que la propriété (S) implique la propriété (N). La question réciproque ne paraît pas être resolue. L'exemple cité de M. Ruziewicz prouve de même qu'il y a de fonctions continues satisfaisant à la condition (S) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de points de mesure positive.

* Commenté sur p. 331.

[1] *L'intégrale et série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915, p. 109. La même propriété a été traîtée par M. Rademacher qui a prouvé (Monatshefte für Mathematik 27 (1916), p. 183) que la condition (N) est nécessaire et suffisante pour que la mesurabilité de E entraîne toujours celle de E_y.

[2] voir Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 173.

Soit maintenant A_1, respectivement A_2, l'ensemble de valeurs que la fonction $y = f(x)$ admet une infinité resp. une infinité non dénombrable de fois dans l'intervalle (a, b). Nous dirons qu'elle jouit de la propriété (T_1), respectivement (T_2) lorsque $|A_1| = 0$, resp. $|A_2| = 0$.

Je prouve que $f(x)$ étant continue dans (a, b), l'ensemble de conditions (N) et (T_1) est équivalent à la condition (S) et que la condition (N) entraîne la propriété (T_2).

On peut remarquer encore que toute fonction *à variation bornée* jouit des propriétés (T_1) et (T_2) [1], mais ne vérifie pas, en général, la condition (N) et, à plus forte raison, (S). Inversement, toute fonction *absolument continue* satisfait évidemment à la condition (S), donc aussi à tous les autres conditions ici considérées.

Nous commencerons par prouver un théorème du à M. Mazurkiewicz.

THÉORÈME 1 [2]. *$f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et H désignant un ensemble F_σ situé dans cet intervalle, l'ensemble H^* de points $x \in H$, tels que*

$$f(x') \neq f(x) \quad \textit{pour} \quad x' \in H,\ x' < x,$$

est un ensemble $F_{\sigma\varrho}$ [3].

Démonstration. H étant un F_σ, on peut le mettre sous la forme:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

$\{F_n\}$ désignant une suite d'ensembles fermés non décroissants.

Soit P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de points $x \in F_n$ tels que, pour chacun d'eux, il y a des points x' vérifiant les relations:

$$x' \in P_n, \quad x' \leqslant x - \frac{1}{n}, \quad f(x') = f(x).$$

(1) voir mon travail [*14*], p. 229.

(2) ce théorème n'a pas été publié; il m'a été communiqué obligeamment par M. Mazurkiewicz.

(3) on appelle F_σ tout ensemble — somme d'une suite infinie d'ensembles fermés (Hausdorff); $F_{\sigma\varrho}$ désigne tout ensemble qui est une différence de deux ensembles F_σ. Remarquons que, dans le cas où H est un ensemble fermé, H^* est un ensemble G_δ (ensemble produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts).

$f(x)$ étant continue et F_n fermés, on voit de suite que les ensembles P_n ainsi déterminés sont aussi fermés; or, d'autre part,

$$H^* = H - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

ce qui revient à notre énoncé.

THÉORÈME 2. *$f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, il existe toujours un ensemble A_E vérifiant les conditions suivantes:*

1° *A_E est mesurable,*

2° $A_E \subset E$,

3° $(A_E)_y = E_y$,

4° *$x_1, x_2 \in A_E$ et $x_1 \neq x_2$ impliquent $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Démonstration. On peut mettre E sous la forme

$$E = H + R,$$

H étant un ensemble F_σ et R étant de mesure nulle. D'après le théorème de M. Mazurkiewicz il existe un ensemble $H^* = A_H$ qui vérifie relativement à H tous les conditions de la proposition précédente, donc, à plus forte raison, du théorème à prouver. On voit, d'autre part, que R contient un sous-ensemble R_E satisfaisant par rapport à R, aux conditions 1°, 2°, 3°, 4°. Supprimons de R_E les points où la fonction $f(x)$ admet des valeurs contenues déjà dans H_y, et désignons par S l'ensemble de points restant. L'ensemble

$$A_E = H^* + S$$

vérifie évidemment les conditions de notre théorème.

Remarque 1. Dans ce qui suit nous aurons besoin du théorème suivant qui résulte immédiatement des théorèmes démontrés par M. Saks [1]. Si E est l'ensemble dans lequel une fonction $f(x)$, définie dans (a, b) a en tout point tous les quatre dérivés du même signe, il existe presque dans tous les points de E une dérivée finie.

(1) Fundamenta Mathematicae 5 (1923), p. 98-104. Ce sont les théorèmes I (p. 102) et 3 (p. 104). Pour en déduire notre théorème, il suffit de remarquer, qu'en désignant par E_1 la partie de l'ensemble, où les nombres dérivés sont $\geqslant 0$, les dérivés inférieures gauche et droite seront en tout point de E_1 distinctes de $-\infty$, d'où résulte que les nombres dérivés opposés sont dans E_1 presque partout égaux et finis, et parsuite, il existe presque partout dans E_1 la dérivée. Le même peut être démontré pour le complémentaire de E_1 par rapport à E, d'où résulte notre théorème.

THÉORÈME 3. *Si une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) satisfait à la condition (N)* (¹), *alors*

1) *$f(x)$ jouit de la propriété (T_2),*

2) *$f(x)$ a dans un ensemble de mesure positive une dérivée finie.*

Démonstration. Faisons correspondre à tout ensemble mesurable E contenu dans (a, b) un ensemble A_E satisfaisant aux conditions du théorème 2. Or, faisons correspondre à tout nombre ordinal ξ de la première ou de la deuxième classe un ensemble mesurable M_ξ comme il suit:

a) $M_1 = A_\delta$ (δ désigne l'intervalle (a, b)),

b) pour $\xi > 1$: $M_\xi = A_E$, où $E = \delta - \sum\limits_{\xi' < \xi} M_{\xi'}$

(si E était un ensemble vide, M_ξ serait aussi vide).

On démontre sans peine par l'induction transfinie qu'une telle correspondance est possible.

Les ensembles M_ξ étant mesurables, disjoints, en quantité non dénombrable, il existe nécessairement un nombre ordinal ξ_0, tel que $|M_{\xi_0}| = 0$. La fonction $f(x)$ jouissant, d'après l'hypothèse, de la condition (N), nous en concluons que

(1) $$|(M_{\xi_0})_y| = 0.$$

Si, maintenant, l'ensemble A_2 (c'est-à-dire l'ensemble de valeurs que notre fonction prend une infinité non dénombrable de fois) est non vide, nous avons, pour tout $\xi < \Omega$, $(M_\xi)_y \supset A_2$, donc aussi $(M_{\xi_0})_y \supset A_2$, ce qui prouve, d'après (1), que $|A_2| = 0$.

La première partie de notre théorème est ainsi démontré. Pour prouver la seconde, désignons par B l'ensemble de valeurs de $f(x)$ n'appartenant pas à A_2. Nous aurons donc $B = \delta_y - A_2$ et, d'après $|A_2| = 0$:

(2) $$|B| = |\delta_y| > 0.$$

Toute valeur z de l'ensemble B la fonction $f(x)$ prend dans un ensemble fermé $C(z)$ au plus dénombrable, donc dans un ensemble possédant des points isolés. Désignons par $D(z)$ l'ensemble de tous les points isolés de l'ensemble $C(z)$. Posons $D = \sum\limits_z D(z)$, la sommation s'étendant à tous les points z de l'ensemble B. Il est évident qu'aucun des ensembles $D(z)$ n'est vide, donc $D_y = B$. Donc, de (3) et de l'hypothèse que $f(x)$ satisfait à la condition (N) résulte que l'ensemble D ne peut être de mesure nulle. Supprimons dans D tous les points dans lesquels $f(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre. Soit E l'ensemble qui restra. L'ensemble

(¹) Quant aux définitions des conditions (N), (S), (T_1), (T_2) — voir l'introduction.

E diffère de D dans un ensemble au plus dénombrable de points (¹): donc E n'est pas de mesure nulle. De la définition de l'ensemble E résulte que pour tout point x de E existe un nombre positif ε_x, tel que les inégalités $0 < h < \varepsilon_x$, $0 < k < \varepsilon_x$ entraînent

$$[f(x+h)-f(x)][f(x-k)-f(x)] < 0,$$

ce qui prouve que les nombres dérivés au point x ont même signe, donc, d'après la remarque 1, $f(x)$ a en presque tous les points de E une dérivée finie. Or, l'ensemble de tous les points où la fonction continue $f(x)$ a une dérivée étant mesurable et contenant E, et l'ensemble E n'étant pas de mesure nulle, nous concluons que l'ensemble de points où $f(x)$ a une dérivée finie est de mesure positive, c. q. f. d.

Il se pose maintenant le problème si dans le théorème 3 l'assertion 2) peut être remplacée par celle-ci: „$f(x)$ a une dérivée dans une épaisseur pleine". C'est M. S. Ruziewicz qui a montré que le théorème généralisé ainsi n'est pas vrai.

THÉORÈME 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) jouisse de la propriété (S) est qu'elle jouisse des propriétés (N) et (T_1).*

Démonstration. La nécessité. Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété (S). En conservant la notation utilisée dans la démonstration du théorème 3, nous aurons, comme on voit sans peine, pour tout indice ξ fini:

(3) $$(M_\xi)_y \supset A_1.$$

Les ensembles M_ξ étant mesurables et disjoints, contenus dans l'intervalle fini (a, b), nous avons

$$\lim_{\xi\to\infty} |M_\xi| = 0,$$

d'où, d'après l'hypothèse que $f(x)$ jouit de la propriété (S):

$$\lim_{\xi\to\infty} |(M_\xi)_y| = 0,$$

donc, d'après (3), $|A_1| = 0$, ce qui prouve que $f(x)$ jouit de la propriété (T_1).

Or, il est évident que la propriété (S) entraîne la propriété (N). La nécessité de notre condition est donc démontrée.

(¹) Voir p. e. W. Sierpiński, *Analiza*, t. I, 4$^{\text{me}}$ partie, p. 218, th. 218 (Varsovie 1925, en polonais); aussi A. Schoenflies *Die Entw. d. Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (Jahresb. d. deutsch. Math.-Verein. Bd. VIII, 2), p. 158. (La condition de M. Schoenflies que la fonction soit continue, n'est pas nécessaire, comme l'a montré M. Sierpiński).

La suffisance. Supposons que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés (N) et (T_2) et admettons qu'elle ne jouit pas de la propriété (S). Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite infinie d'ensembles $\{E_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) La somme $|E_1|+|E_2|+|E_3|+\ldots$ est finie.

2) $|(E_i)_y| \geqslant \varepsilon$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Posons

$$E = \overline{\lim}\, E_i$$

(en désignant par $\overline{\lim}$ l'ensemble-limite complet de la suite $E_1, E_2, \ldots$). Il est clair que, d'après 1):

$$|E| = 0 \tag{4}$$

(ou bien E est vide). Posons

$$E^* = \overline{\lim}\,(E_i)_y; \tag{5}$$

d'après 2) nous avons

$$|E^*| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Je dis que $E_y \supset E^* - A_1$. En effet, si $z \epsilon (E^* - A_1)$, l'ensemble $C(z)$ des points de (a, b) en lesquels $f(x)$ prend la valeur z est fini. Or, de $z \epsilon E^*$ résulte, d'après (5), que z appartient à une infinité des ensembles $(E_i)_y$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$; par conséquent une infinité d'ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ contient des points de $C(z)$; l'ensemble $C(z)$ étant fini, il en résulte l'existence d'un nombre x de $C(z)$ qui appartient a une infinité des ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots)$, et par suite appartient à E. Donc $z \epsilon E_y$, c. q. f. d.

Or, de $E_y \supset E^* + A_1$ résulte que $E^* \subset E_y + A_1$. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété (T_1), nous avons $|A_1| = 0$; la fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N), nous trouvons, d'après (4), $|E_y| = 0$. La formule $E^* \subset E_y + A_1$ donne donc $|E^*| = 0$, ce qui est incompatible avec (6).

La fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété (S) et notre théorème est démontré.

Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre

Soit E un ensemble de fonctions remplissant les conditions suivantes:

1° Toute fonction de E est définie et continue dans un cercle K. Nous ne supposons pas que le cercle K soit le même pour toutes les fonctions de E.

2° Toute fonction superposable [1] à une fonction quelconque de E appartient à E.

3° A tout cercle K de rayon plus petit qu'un nombre $R > 0$ et à toute fonction φ définie et continue sur $\bar{K}$, $\bar{K}$ désignant la circonférence de K, il correspond une fonction F de E définie et continue dans K, qui se réduit à φ sur $\bar{K}$. Deux fonctions F_1 et F_2 continues dans K et identiques sur $\bar{K}$ sont identiques dans K et $\varphi = 0$ implique $F = 0$.

4° Si l'on pose $F = U(\varphi/K)$, U est une fonctionnelle continue par rapport à φ et admettant une première variation pour $\varphi = 0$, quelque soit le cercle K [2].

Sous ces conditions, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Soit $f = \delta U(\delta\varphi/K)$ la première variation de U pour $\varphi = 0$. Il existe un nombre réel λ tel que pour chaque $\delta\varphi$, f soit une fonction continue ainsi que ses premières et secondes derivées à l'intérieur du cercle K et satisfasse à l'équation suivante:*

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \bar{K} \quad \left(\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Remarque 1. On peut démontrer un théorème analogue en supposant que les fonctions de l'ensemble E attribuent aux points des vecteurs de n dimensions.

---

[1] Deux fonctions F_1 et F_2 définies dans les ensembles D_1 resp. D_2 sont dites *superposables*, s'il existe une translation euclidienne (produit d'un déplacement et d'une rotation) qui transforme D_1 à D_2 de telle manière qu'en des points correspondants F_1 et F_2 aient des valeurs égales.

[2] Pour la définition de la première et seconde variation voir les *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de Paul Lévy, Paris 1922, p. 50 et p. 79.