Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales*

Soit $\{f_n\}$ une suite complète de fonctions continues, normales et orthogonales. Soit $\{a_n\}$ une suite des coefficients d'une fonction continue φ, obtenus par l'intermédiaire de la suite $\{f_n\}$. Soit enfin E l'ensemble de toutes les suites $\{a_n\}$ correspondant à toutes les φ continues possibles. Il est clair que deux suites $\{f_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ peuvent engendrer le même ensemble E. Nous voulons pourtant démontrer que la seule connaissance de l'ensemble E et de la suite $\{a_n\}$ suffit pour établir si la série $\sum a_n f_n$ converge uniformément, même si la suite $\{f_n\}$ n'est pas connue, pourvu qu'elle engendre l'ensemble E. C'est-à-dire que les séries $\sum a_n f_n$ et $\sum a_n \varphi_n$ sont en même temps convergentes uniformément ou non pourvu que les suites $\{f_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ engendrent le même ensemble E.

Des théorèmes pareils sont encore valables dans d'autres champs fonctionnels d'un caractère plus général.

1. Considérons une fonctionnelle $U(x)$ qui, à chaque fonction continue $x(t)$, fait correspondre une fonction continue $y(t)$. La fonctionnelle $U(x)$ est continue si, en posant $||x|| = \max|x(t)|$, $\lim\limits_{n\to\infty}||x_n - x|| = 0$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty}||U(x_n) - U(x)|| = 0$. La fonctionnelle est dite *linéaire* si l'on a $U(x_1+x_2) = U(x_1)+U(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2.

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème I [1]. *Si $U(x)$ est une fonctionnelle linéaire et si $\lim\limits_{n\to\infty}||x_n - x|| = 0$ implique $\underline{\lim}\,||U(x_n)|| \geqslant ||U(x)||$, la fonctionnelle $U(x)$ est continue.*

Le même théorème est vrai, en supposant que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions de la $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance sommable $(p \geqslant 0)$ et en posant

$$||x|| = \sqrt[1+p]{\int_0^1 |x(t)|^{1+p}\,dt}.$$

* Commenté sur p. 330.

[1] Ce théorème est démontré dans ma Thèse [7].

Théorème II. *Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites complètes de fonctions continues, orthogonales et normales et si, à chaque fonction continue $x(t)$, on peut faire correspondre une fonction continue $y(t)$ telle que pour tout n*

$$\int_0^1 x(t)\varphi_n(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\psi_n(t)\,dt,$$

la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\alpha} a_n\varphi_n(t)$$

entraîne celle de la série

$$\sum_{n=1}^{\alpha} a_n\psi_n(t),$$

quelle que soit la suite de nombres $\{a_n\}$.

Démonstration. Posons $y(t) = U[x(t)]$. Il est clair que la fonctionnelle U est linéaire. Puisque $\psi_n = U(\varphi_n)$,

$$\int_0^1 [x_1 - x_2]^2\,dt = \int_0^1 [U(x_1) - U(x_2)]^2\,dt.$$

Donc, si $\lim\limits_{n\to\infty}||x_n - x|| = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [U(x_n) - U(x)]^2 = 0$$

et par conséquent

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}||U(x_n)|| \geqslant ||U(x)||.$$

Or cette inégalité, d'après le théorème I, prouve que U est continue. Puisque

$$U\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i,$$

la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ entraîne celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n$. Le théorème est donc démontré.

2. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite complète de fonctions orthogonales, normales, sommable de la $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance $(p > 0)$. Supposons en outre que chaque fonction f sommable de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance soit presque partout nulle, si l'on a pour tout n, $\int_0^1 f\varphi_n = 0$. En s'appuyant sur un théorème de M. F. Riesz [1], on peut maintenant démontrer le lemme suivant:

Si la fonction f et les fonctions d'une suite $\{f_n\}$ sont des fonctions sommables de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance, et si l'on a, pour tout i,

$$\lim \int_0^1 f_n\varphi_i = \int_0^1 f\varphi_i,$$

alors

$$\underline{\lim} \int_0^1 |f_n|^{1+1/p} \geqslant \int_0^1 |f|^{1+1/p}.$$

En s'appuyant sur le lemme précédent, on peut maintenant démontrer, de la même manière que le théorème II, le théorème suivant:

Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites qui remplissent les conditions du lemme et si à chaque fonction $x(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance, on peut faire correspondre une fonction $y(t)$ sommable de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance telle que pour tout n

$$\int_0^1 x(t)\varphi_n(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\psi_n(t)\,dt,$$

la convergence en moyenne par $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n$.

Remarque. On peut énoncer de pareils théorèmes pour *les divers procédés* sommatoires.

---

[1] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (Mathematische Annalen 69 (1910), p. 469-467): si p et M sont deux nombres positifs et si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions telle que $\int_0^1 |\varphi_n|^{1+p} \leqslant M$, il existe une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ et une fonction φ telle que: 1° $\int_0^1 |\varphi|^{1+p} \leqslant M$; 2° pour chaque fonction f de la $(1+1/p)^{\text{ième}}$ puissance sommable on a

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f\varphi_{n_k} = \int_0^1 f\varphi.$$

Sur une classe de fonctions continues*

Introduction

Le but de cette Note est d'établir quelques relations qui subsistent entre certaines classes de fonctions continues.

Précisons d'abord les notations.

E désignant un ensemble, $|E|$ désigne sa mesure extérieure.

$y = f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, E_y désigne l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour $x \epsilon E$.

On dit, d'après M. Lusin [1], que $f(x)$ vérifie dans (a, b) la condition (N), lorsque $|E| = 0$ implique toujours $|E_y| = 0$.

Je prouve dans ce travail que toute fonction continue satisfaisant à la condition (N) admet la dérivée unique et finie dans un ensemble de points de mesure positive. Or, M. Ruziewicz a montré que cet ensemble n'est pas nécessairement d'éppaisseur pleine: en effet, il a construit une fonction continue vérifiant la condition (N) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de mesure non-nulle [2].

Nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$ continue dans (a, b) satisfait à la condition (S), lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ de manière que $|E| < \eta$ entraîne $|E_y| < \varepsilon$.

On voit de suite que la propriété (S) implique la propriété (N). La question réciproque ne paraît pas être resolue. L'exemple cité de M. Ruziewicz prouve de même qu'il y a de fonctions continues satisfaisant à la condition (S) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de points de mesure positive.

---

* Commenté sur p. 331.

[1] *L'intégrale et série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915, p. 109. La même propriété a été traitée par M. Rademacher qui a prouvé (Monatshefte für Mathematik 27 (1916), p. 183) que la condition (N) est nécessaire et suffisante pour que la mesurabilité de E entraîne toujours celle de E_y.

[2] voir Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 173.