THÉORÈME 42. *Pour que deux ensembles de points situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, soient presque équivalents par décomposition dénombrable en ensembles mesurables* (*L*) (*ou même fermés*), *il faut et il suffit, qu'ils aient la même mesure* (¹).

On déduit ce théorème facilement du lemme 38 et du théorème 36, en analysant leurs démonstrations.

(¹) Dans le même ordre d'idées on peut établir le théorème suivant:

A et B étant des ensembles, situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, si A est mesurable (*L*), *B est ouvert et $m(A) < m(B)$, l'ensemble A est équivalent à un sous-ensemble de B par décomposition dénombrable en ensembles mesurables* (*L*).

Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*

Introduction

Dans ce travail je démontre les propositions suivantes.

Si C est un arc simple dans le plan (une image biunivoque et continue d'un segment de droite), la condition nécessaire et suffisante pour que C soit rectifiable est que les fonctions $N_x(s, C)$ et $N_y(s, C)$ soient intégrables, où $N_x(s, C)$ désigne le nombre de points en lesquels la droite $x = s$ coupe l'arc C.

Je prouve ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction continue $y = f(x)$ à variation bornée soit absolument continue est que tout ensemble de mesure nulle situé sur l'axe d'abscisses soit transformé par cette fonction en un ensemble de mesure nulle situé sur l'axe d'ordonnées.

Ce théorème donne une réponse à une question posée par M. Hahn (¹) dans son livre *Theorie der reellen Funktionen* (Berlin 1921), p. 589, note¹).

Pour une définition convenable de l'aire d'une portion S de surface (une image biunivoque et continue du carré), en désignant par le

* Commenté sur p. 327.

(¹) Le théorème que nous donnons comme réponse à la question de M. Hahn peut être déduit de la théorie de la totalisation de M. Denjoy.

En effet, en vertu de cette théorie, pour qu'une fonction continue, à variation bornée sur un ensemble parfait, ait sur toute portion de cet ensemble la variation $= 0$, il faut et il suffit que l'ensemble de valeurs de cette fonction qu'elle admet sur l'ensemble considéré soit de mesure nulle (Denjoy, *Sur la totalisation*, Ann. Éc. Norm. 33 (1916), p. 192) Donc, en particulier, toute fonction à variation bornée qui satisfait à la condition du texte est de variation nulle sur tout ensemble parfait de mesure nulle, et parsuite est une *totale* au sens de Denjoy. La dérivée (existante presque partout) étant dans ce cas intégrable au sens de Lebesgue, la fonction considérée est l'intégrale (*L*) de sa dérivée, c.-à-dire une fonction absolument continue (Denjoy, l. c., p. 174).

La démonstration que nous donnerons dans le texte est tout-à-fait élémentaire et indépendante de la théorie de M. Denjoy. Or, elle s'applique aux images des domaines à un nombre supérieur de dimensions.

symbole $N_{xy}(s, t, S)$ le nombre de points en lesquels la droite $x = s$, $y = t$, parallèle à l'axe $0z$, coupe S, et en définissant d'une façon analogue les fonctions $N_{xz}(s, t, S)$ et $N_{yz}(s, t, S)$, j'énonce le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la portion de surface S ait une aire finie est que les fonctions $N_{xy}(s, t, S)$, $N_{xz}(s, t, S)$ et $N_{yz}(s, t, S)$ soient intégrables au sens de Lebesgue.

J'énonce ensuite encore quelques théorèmes analogues aux précédents, concernant les transformation continues définies par les fonctions

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v) \quad (0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1).$$

Je n'ai pas rencontré ces théorèmes dans la littérature qui m'était accessible.

§ 1. Les fonctions à variation bornée

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, définie dans (a, b). Nous introduirons les notations suivantes:

1) A tout ensemble E faisons correspondre l'ensemble $E_y^{(f)}$, ou, plus simplement, E_y: nous désignerons ainsi l'ensemble de toutes les valeurs que prend la fonction $y = f(x)$ dans les points de l'ensemble E, où elle est définie.

A tout ensemble E nous ferons correspondre l'ensemble $E_x^{(f)}$, ou, plus simplement, E_x: nous désignerons ainsi l'ensemble de tous les points x en lesquels $f(x)$ prend une valeur contenue dans E.

2) $f(x)$ étant une fonction donnée, nous désignerons par le symbole $N(t, f)$, ou brièvement par $N(t)$, le nombre de racines x de l'équation $t = f(x)$, s'il est fini, et le nombre $+\infty$, sinon.

3) E étant un ensemble mesurable (L), nous désignerons par $|E|$ sa mesure lebesguienne.

Théorème 1. *Si $f(x)$ est une fonction continue, sa fonction correspondante $N(t)$ est de classe $\leqslant 2$ de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction continue, définie dans l'intervalle (a, b). Divisons cet intervalle en 2^p parties égales (p étant un nombre naturel donné quelconque). Désignons par δ_1 l'intervalle $a \leqslant x \leqslant a+(b-a)/2^p$, et par δ_k l'intervalle

$$a+(k-1)\frac{b-a}{2^p} < x \leqslant a+k\frac{b-a}{2^p},$$

pour $k = 2, 3, \ldots, 2^p$.

Posons maintenant $L_k(t) = 1$, si $f(x)$ prend la valeur t dans l'intervalle δ_k, et $L_k(t) = 0$ sinon. Il est clair que $L_k(t)$ est une fonction de Baire de classe $\leqslant 1$ (comme ayant au plus deux points de discontinuité). Posons

$$N_p(t) = L_1(t)+L_2(t)+\ldots+L_{2^p}(t)$$

— ce sera donc aussi une fonction de classe $\leqslant 1$. Remarquons que $N_i(t)$ est le nombre de tous ces intervalles δ_k dans lesquels $f(x)$ prend la valeur t (au moins une fois).

Il est évident que

$$(1) \qquad N_m(t) \leqslant N_n(t) \quad \text{pour} \quad m < n;$$

il en résulte l'existence de la limite

$$(2) \qquad \lim_{p\to\infty} N_p(t) = \overline{N}(t).$$

Les fonctions $N_p(t)$ étant de classe $\leqslant 1$, il en résulte que $\overline{N}(t)$ est une fonction de classe $\leqslant 2$. Or, nous prouverons que $N(t) = \overline{N}(t)$.

En effet, soit t un nombre réel donné, m — un nombre naturel $\leqslant N(t)$. Il résulte donc de la définition du nombre $N(t)$ qu'il existe m nombres $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ de (a, b) tels que $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_m) = t$.

Désignons maintenant par d le plus petit des $m-1$ nombres

$$x_{k+1}-x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1);$$

nous aurons évidemment pour tout p naturel, tel que $1/2^p < d$, l'inégalité

$$N_p(t) \geqslant m,$$

d'où résulte, d'après (2), que $\overline{N}(t) \geqslant m$. Or, m étant un nombre naturel quelconque $\leqslant N(t)$, il en résulte que $\overline{N}(t) \geqslant N(t)$.

Or, nous avons évidemment $N_p(t) \leqslant N(t)$ pour tout p naturel et t réel, d'où résulte, d'après (2), que $\overline{N}(t) \leqslant N(t)$.

Les inégalités $\overline{N}(t) \geqslant N(t)$ et $\overline{N}(t) \leqslant N(t)$ donnent

$$(3) \qquad \overline{N}(t) = N(t),$$

ce qui prouve que $N(t)$ est une fonction de classe $\leqslant 2$, c. q. f. d.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée est que $N(t)$ soit intégrable au sens de Lebesgue. Si $f(x)$ est à variation bornée, la variation totale de $f(x)$ est égale à $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt$.*

Démonstration. En conservant les notations de la démonstration du théorème 1, on voit sans peine que

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_k(t)\,dt = M_k - m_k,$$

où M_k et m_k désigne resp. le maximum et le minimum de $f(x)$ dans l'intervalle δ_k. Il en résulte la formule

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} N_p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{2^p} \int_{-\infty}^{+\infty} L_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k).$$

Or, si $f(x)$ est une fonction à variation bornée et si V est sa variation totale, nous avons pour tout p naturel l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{2^p} M_k - m_k) \leqslant V,$$

donc, d'après (4),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_p(t)\,dt \leqslant V.$$

Il en résulte, d'après 1), 2), 3) et 4) que la fonction $N(t)$ est intégrable au sens de Lebesgue entre $-\infty$ et $+\infty$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt = \lim_{p\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_k(t)\,dt = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k) = V.$$

Supposons maintenant que $N(t)$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue entre $-\infty$ et $+\infty$. Il en résulte, d'après 1), 2), 3) et 4), pour tout p naturel, l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt.$$

Or, cela prouve que $f(x)$ est une fonction à variation bornée.

COROLLAIRE 1. *Si la fonction continue $f(x)$ est à variation bornée, l'ensemble de toutes les valeurs t pour lesquelles l'équation $t = f(x)$ admet une infinité de solutions en x, est de mesure nulle.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème 2 et de la remarque que $N(t)$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue.

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue à variation bornée soit absolument continue est que la formule $|E| = 0$ entraîne pour tout ensemble E la formule $|E_y| = 0$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Cela résulte immédiatement de la définition de la continuité absolue. Soit, en effet, $f(x)$ une fonction absolument continue et E un ensemble contenu dans (a, b), tel que $|E| = 0$. On voit sans peine qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite finie ou infinie d'intervalles $\{\sigma_k\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres, tels que

$$\text{(a)} \qquad E \subset \sum \sigma_k,$$

$$\text{(b)} \qquad \sum \sigma_k \leqslant \varepsilon,$$

$$\text{(c)} \qquad \sum (M_k - m_k) \leqslant \varepsilon,$$

M_k et m_k désignant le maximum, resp. le minimum de $f(x)$ dans σ_k.

Or, en désignant par τ_k l'intervalle $m_k < y \leqslant M_k$, on voit que

$$E_y \subset \sum \tau_k,$$

et

$$\sum |\tau_k| = \sum (M_k - m_k) \leqslant \varepsilon,$$

d'où résulte que la mesure extérieure de E_y est $\leqslant \varepsilon$. Le nombre ε étant aussi petit que l'on veut, on en déduit que $|E_y| = 0$, c. q. f. d.

La condition est suffisante. Soit maintenant $f(x)$ une fonction continue à variation bornée et supposons que la formule $|E| = 0$ entraîne toujours la formule $|E_y| = 0$. Si $f(x)$ n'était pas absolument continue, il existerait une suite infinie d'ensembles $\{\varDelta_i\}$ contenus dans (a, b) et jouissant des propriétés suivantes:

1) $\varDelta_i$ est une somme d'un nombre fini d'intervalles $\{\delta_i^r\}$ ($r = 1, 2, \ldots, r_1$) n'empiétant pas les uns sur les autres.

2) La somme $\sum_{i=1}^{\infty} |\varDelta_i|$ est finie.

3) Il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel qu'en désignant par ω_i^r l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i^r, on a l'inégalité

$$\sum_{r=1}^{r_i} \omega_i^r \geqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Il est clair maintenant que si $N_i(t)$ désigne le nombre de tous ceux intervalles δ_i^r contenus dans $\varDelta_i$, dans lesquels $f(x)$ prend la valeur t, alors

$$(\alpha) \qquad N_i(t) \leqslant N(t),$$

$$(\beta) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} N_i(t)\,dt = \sum_{r=1}^{r_i} \omega_i^r \geqslant \varepsilon.$$

Désignons par A l'ensemble de tous ces points t en lesquels

$$(\gamma) \qquad \limsup_{i\to\infty} N_i(t) \neq 0.$$

Décomposons l'ensemble A en deux ensembles disjoints A_1 et A_2, où A_1 désigne l'ensemble de tous les points de A, où $N(t) = +\infty$. La fonction $N(t)$ étant intégrable (puisque $f(x)$ est à variation bornée), il est clair que

$$(\delta) \qquad |A_1| = 0.$$

Soit maintenant t_0 un point de A_2. D'après (γ) il existe une suite infinie de nombres k_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tels que

$$N_{k_n}(t) \geqslant 1$$

($N_i(t)$ est un nombre naturel pour tout t réel).

Il en résulte, d'après la définition de la fonction $N_i(t)$, qu'il existe une suite infinie de nombres x_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$, satisfaisant aux conditions:

$$(1) \qquad x_{k_n} \subset \Delta_{k_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(2) \qquad f(x_{k_n}) = t_0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, de $N(t_0) \neq +\infty$ résulte que dans la suite x_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ il n'y a qu'un nombre fini de nombres distincts: il existe donc un nombre x_0 qui figure dans cette suite un nombre infini de fois et parsuite appartient à une infinité d'ensembles Δ_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$. En posant $E = \limsup \Delta_i$, nous voyons donc que

$$(\varepsilon) \qquad x_0 \epsilon E.$$

Or, $f(x_0) = t_0$, donc $t_0 \epsilon E_y$. Nous avons ainsi démontré que $A_2 \supset E_y$. Or, d'après (2), $E = 0$, ce qui entraîne, d'après l'hypothèse $|E_y| \leqslant 0$. Il résulte donc de $A = A_1 + A_2$, et de (δ) que $|A| = 0$. Il en résulte, d'après la définition de l'ensemble A, qu'on a presque partout $\lim_{i\to\infty} N_i(t) = 0$, ce qui donne, d'après (α), $N(t)$ étant une fonction intégrable,

$$\lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_i(t)\,dt = 0,$$

ce qui est incompatible avec (β).

Notre théorème est ainsi démontré.

§ 2. Les transformations continues

Les théorèmes du § précédent peuvent être généralisés aux espaces de plusieurs dimensions.

Supposons que deux fonctions continues

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v)$$

sont définies dans le carré E_0 $(0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1)$.

Les fonctions (1) déterminent une transformation univoque et continue. Introduisons la notation suivante: si E est un ensemble contenu dans E_0, désignons par E_{xy} l'ensemble dans le plan xy en lequel est transformé l'ensemble E par les formules (1). Les fonctions (1) étant continues, à tout ensemble E mesurable (B) correspondra un ensemble E_{xy} mesurable (L) (puisque toute image continue d'un ensemble mesurable (B) est un ensemble (A) de M. Souslin, et tout ensemble (A) est, d'après Lusin et Sierpiński, mesurable (L)).

Définition 1. Nous dirons que *la transformation* (1) *est à variation bornée*, s'il existe un nombre $M > 0$, tel que pour toute suite finie ou infinie K^i $(i = 1, 2, \ldots)$ de carrés n'empiétant pas les uns sur les autres et contenus dans E_0

$$\sum_i |K^i_{xy}| < M.$$

Il résulte tout de suite de cette définition que $E^1, E^2, \ldots, E^n$ étant une suite finie d'ensembles fermés n'empiétant pas les uns sur les autres et les transformations (1) étant à variation bornée, il est aussi

$$\sum_{i=1}^{n} |E^i_{xy}| < M.$$

(On démontre cela en recouvrant chacun d'ensembles E^i par les carrés n'empiétant pas les uns sur les autres, dont les côtés sont moindres que la plus petite distance mutuelle entre les ensembles E_i.)

Il en résulte sans peine que l'ensemble de toutes les droites qui se transforment en un ensemble de mesure positive (dans le plan xy) est au plus dénombrable (ou vide). Désignons cet ensemble par D.

Considérons maintenant un système auxiliaire $u'v'$, dont les axes sont parallèles aux axes uv, tel qu'aucune de droites $u' = i/2^k$, $v' = i/2^k$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$ n'appartienne pas à l'ensemble D.

Soit maintenant k un entier $\geqslant 0$ quelconque. Les droites $u' = i/2^k$, $v' = i/2^k$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ divisent tout le plan en carrés. Soient $K^1, K^2, \ldots, K^n$ ces carrés ou leurs parties qui sont contenus dans le carré E_0.

Posons:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} |K^i_{xy}|.$$

Il est clair que $V_k \leqslant V_{k+1}$; or, nous avons $V_k \leqslant M$; il en résulte une limite finie $\lim_{k\to\infty} V_k$.

Définition 2. La transformation (1) étant à variation bornée, nous appellerons *variation totale* de cette transformation le nombre $\lim_{k\to\infty} V_k$.

(Quoique, d'après cette définition, la variation totale dépend du choix du système $u'v'$, il résultera des théorèmes suivants qu'elle ne dépend pas de ce choix, à condition qu'aux droites utilisées pour la division ne correspondent pas des ensembles de mesure positive.)

Nous introduirons maintenant une fonction d'ensemble auxiliaire $F(E)$, définie comme il suit: $F(E) = |E_{xy}|$, si E est un ensemble mesurable (B), contenu dans E_0. Il est clair que la fonction $F(E)$ satisfait aux conditions suivantes:

(1) $$F(E) \geqslant 0,$$

(2) Si $E_1 E_2 = 0$, on a $F(E_1+E_2) \leqslant F(E_1)+F(E_2)$.

(3) $F(E)$ est à variation bornée, si la transformation (1) est à variation bornée (1).

J'ai démontré dans le mémoire cité que les fonctions satisfaisant aux conditions (2) et (3) possèdent presque partout une dérivée superficielle intégrable (2). Donc, en définissant le Jacobien généralisé de la transformation (1) comme $\lim\limits_{|K|\to 0} |K_{xy}|/|K|$, où K est un carré contenant le point P, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la transformation* (1) *est à variation bornée, il existe presque partout le Jacobien généralisé qui, considéré comme une fonction de deux variables réelles, est intégrable superficiellement.*

Remarque. On pourrait démontrer que si les fonctions (1) possèdent des dérivées partielles continues, le Jacobien généralisé est égal en valeur absolue au Jacobien ordinaire.

Définition 3. Nous dirons que la transformation (1) est *absolument continue*, s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$, tel que pour tout ensemble de carrés $\{K^i\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et satisfaisant à la condition

$$\sum |K^i| < \eta,$$

subsiste l'inégalité

$$\sum |K^i_{xy}| < \varepsilon.$$

On voit sans peine que si la transformation (1) est absolument continue, la fonction $F(K)$ définie plus haut est aussi absolument continue. Dans le Mémoire cité j'ai démontré que la variation totale de $F(K)$ est alors égale à l'intégrale de sa dérivée. Nous pouvons donc énoncer le suivant

(1) La définition d'une fonction d'ensemble à variation bornée et quelques théorèmes sur lesquels je m'appuis se trouvent dans mon mémoire [*11*].

(2) Par une dérivée superficielle d'une fonction d'ensemble $F(K)$ au point P nous comprenons le nombre $\lim\limits_{|K|\to 0} F(K)/|K|$, où K est un carré contenant le point P.

THÉORÈME 2. *Si la transformation* (1) *est absolument continue, la variation totale est égale à l'intégrale du Jacobien généralisé.*

Désignons maintenant par le symbole $N(s, t)$ le nombre des solutions du système d'équations

$$s = f(u, v), \quad t = \varphi(v).$$

Or, en procédant pareillement comme dans le § 1, on peut démontrer les théorèmes suivants:

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation* (1) *soit à variation bornée est que la fonction $N(s, t)$ soit intégrable au sens de Lebesgue. Si la transformation* (1) *est à variation bornée, la variation totale est égale à l'intégrale de la fonction $N(s, t)$.*

THÉORÈME 4. *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation continue* (1) *à variation bornée soit absolument continue est que pour tout ensemble E, tel que $|E| = 0$, subsiste la formule $|E_{xy}| = 0$.*

§ 3. Les lignes et les surfaces

Soit l un ensemble plan donné quelconque. Désignons par le symbole $N_x(l, t)$ le nombre de points en lesquels la droite $x = t$ rencontre l'ensemble l. Pareillement nous définissons le symbole $N_y(t, l)$.

Soit maintenant l un arc simple défini par les fonctions continues

(1) $$x = f(u), \quad y = \varphi(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

satisfaisant à la condition que les égalités $f(u') = f(u'')$ et $\varphi(u') = \varphi(u'')$ entraînent toujours $u' = u''$.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que l soit rectifiable est que les fonctions (1) soient à variation bornée. Or, cela équivaut à la condition que les fonctions $N(t, f)$ et $N(t, \varphi)$ soient intégrables au sens de Lebesgue (§ 1, théorème 2). Or, comme on voit sans peine:

$$N(t, f) = N_x(t, l) \quad \text{et} \quad N(t, \varphi) = N_y(t, l);$$

nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'arc simple plan l soit rectifiable est que les fonctions $N_x(t, l)$ et $N_y(t, l)$ soient intégrables au sens de Lebesgue.*

Il est pareillement pour les portions de surface. Considérons une portion de surface dans l'espace à 3 dimensions (une image biunivoque et continue d'un carré), définie par les fonctions continues

(2) $$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 0 \leqslant v \leqslant 1, \end{matrix}$$

satisfaisant à la condition que les égalités $f(u', v') = f(u'', v'')$, $\varphi(u', v') = \varphi(u'', v'')$, $\psi(u', v') = \psi(u'', v'')$ entraînent les égalités $u' = u''$ et $v' = v''$.

Définissons une fonction d'ensemble $F_1(E)$ comme il suit. Si E est un ensemble mesurable (B), posons

$$F_1(E) = \sqrt{|E_{xy}|^2 + |E_{xz}|^2 + |E_{yz}|^2}$$

(E_{xy} correspond ici, comme dans le § 2, à la transformation définie par les fonctions $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$; E_{xz} — à celle qui est définie par les fonctions $x = f(u, v)$, $z = \psi(u, v)$, E_{yz} — à celle qui est définie par les fonctions $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$).

Si $F_1(E)$ est à variation bornée, nous comprendrons par l'aire d'une portion de surface S la variation totale de la fonction $F_1(E)$ déduite pareillement comme la variation totale de la fonction $F(E)$ dans le § 2. On prouve aisément le

THÉORÈME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une portion de surface S, déterminée par les formules* (2), *ait une aire finie est que les trois correspondances*

$$\begin{array}{lll} x = f, & x = f, & y = \varphi, \\ y = \varphi, & z = \psi, & z = \psi \end{array}$$

soient à variation bornée.

En désignant par $N_{xy}(s, t, S)$ le nombre de points en lesquels la droite $x = s$, $y = t$ rencontre S et en introduisant d'une façon analogue les notations $N_{xz}(s, t, S)$ est $N_{yz}(s, t, S)$, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une portion de surface S, déterminée par les formules* (2), *ait une aire finie est que les fonctions $N_{xy}(s, t, S)$, $N_{xz}(s, t, S)$ et $N_{yz}(s, t, S)$ soient intégrables au sens de Lebesgue.*

COROLLAIRE 1. *Si la portion de surface S a une aire finie, l'ensemble de droites parallèles à l'axe z et rencontrant S en une infinité de points est de mesure nulle.*

Remarque. Si l'on suppose que les corespondances

$$\begin{array}{lll} x = f, & x = f, & y = \varphi, \\ y = \varphi, & z = \psi, & z = \psi \end{array}$$

sont absolument continues, l'aire de S s'exprime comme l'intégrale de la racine de deuxième degré de la somme des carrés de Jacobiens généralisés (puisque $F_1(E)$ est alors absolument continue).

Ces conséquences peuvent être appliquées à la portion de surface S, déterminée par la fonction continue

(3) $$z = f(x, y) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1).$$

Les équations de S peuvent être exprimées paramétriquement:

(4) $$z = f(u, v), \quad x = u, \quad y = v.$$

En désignant par $V_1(x)$ la variation de $f(x, y)$ pour x fixe, et par $V_2(y)$ la variation de $f(x, y)$ pour y fixe, on voit sans peine que si S a une aire finie, il est

$$\int_0^1 V_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int N_{yz}(s, t, S)\,ds\,dt$$

et

$$\int_0^1 V_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int N_{xz}(s, t, S)\,ds\,dt,$$

d'où résulte que la fonction $f(x, y)$ possède presque partout des dérivées partielles.

Des recherches ultérieures et quelques résultats nouveaux dans le même ordre d'idées donne M. J. Szauder dans sa Thèse qui paraîtra dans le volume VIII des Fundamenta Mathematicae.