POLSKA AKADEMIA NAUK
MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM 43

PWN — POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS

JACEK SZARSKI

DIFFERENTIAL INEQUALITIES

WARSZAWA 1965

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
(PWN — Polish Scientific Publishers)
WARSZAWA (Poland), ul. Miodowa 10

PRINTED IN POLAND

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO W KRAKOWIE

To
Tadeusz Ważewski

REFERENCES

[1] Alexiewicz, A., *On a theorem of Ważewski*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951), 129-131.

[2] Aziz, K. and Diaz, J., *On a mean value theorem of the differential calculus of vector valued functions*, Math. Dept. Rep. M-17, US Naval Ord. Lab. White Oak. Md (1961), 1-23.

[3] Besala, P., *On solution of Fourier's first problem for a system of nonlinear parabolic equations in an unbounded domain*, Ann. Pol. Math. 13 (1963), 247-265.

[4] Birkhoff, G., and Rota, G. C., *Ordinary differential equations*, Ginn and Comp., Boston Mass.-New York-Toronto, 1962.

[5] Brzychczy, S., *Some theorems on second order partial differential inequalities of parabolic type*, Ann. Pol. Math. 15, 2 (1964), 143-151.

[6] Chaplygin, S. A., *Collected papers on mechanics and mathematics*, Moscow, 1954 (in Russian).

[7] Coddington, E. A., and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, New York, McGraw-Hill (1955).

[8] Dunford, N. and Schwartz, J., *Linear operators (General Theory) Part I*, Pure Appl. Math. Ser. VIII (1958), Intersc. Publ. New York, London.

[9] Feller, W., *On positivity preserving semi-groups of transformations on $C(r_1, r_2)$*, Ann. Soc. Pol. Math., 25 (1952), 85-94.

[10] Gronwall, T. H., *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. Math. (2) 20 (1919), 292-296.

[11] Haar, A., Atti del Congresso Internationale dei Mathematici (1928) Bologna, 3, p. 5—10.

[12] Hille, E. and Phillips, R. S., *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Providence, 1957.

[13] Kamke, E., *Zur Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen II*, Acta Math. 58 (1932), 57-85.

[14] — *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, Leipzig 1930. Akad. Verlagsgesellschaft.

[15] Kato, T., *Integration of the equation of evolution in Banach space*, J. Math. Soc. Jap. 5 (1953), 208-234.

[16] — *On the semi-groups generated by Kolmogoroffs differential equations*, J. Math. Soc. Jap. 6 (1954), 1-15.

[17] — *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*, Nagoya Math. J. 19 (1961), 93-125.

[18] Krzyżański, M., *Sur l'unicité des solutions des second et troisième problèmes de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Ann. Pol. Math. 7 (1960), 201-208.

[19] Levinson N., and Coddington, E. A., see [7].

[20] Lusin, N. N., *On the Chaplygin method of integration*, Collected Papers, vol. 3, Moscow (1953), 146-167 (in Russian).

[21] Lusternik, L. A. and Sobolew, W. I., *Functional analysis*, Moscow-Leningrad 1951 (in Russian).

[22] Mlak, W., *On the epidermic effect for ordinary differential inequalities of the first order*. Ann. Pol. Math. (3) 1 (1956), 37-40.

[23] — *Note on the mean value theorem*, Ann. Pol. Math. (3) 1 (1956), 29-31.

[24] — *Differential inequalities of parabolic type*, Ann. Pol. Math. (3) 2 (1957), 349-354.

[25] — *Differential inequalities in linear spaces*, Ann. Pol. Math. 5, 1 (1958), 95-101.

[26] — *Parabolic differential inequalities and Chaplyghin's method*. Ann. Pol. Math. 8 (1960), 139-153.

[27] — *Differential inequalities with unbounded operators in Banach spaces*, Ann. Math. Pol. 9 (1960), 101-111.

[28] — *Note on abstract differential inequalities and Chaplyghin method*, Ann. Pol. Math. 10 (1961), 253-271.

[29] — *Integration of linear differential inequalities with distributions*, Contributions to Diff. Eq. II (1963), 265-268.

[30] — and Olech, C., *Integration of infinite systems of differential inequalities*, Ann. Pol. Math. 13 (1963), 105-112.

[31] — *An example of the equation $u_t = u_{xx} + f(x, t, u)$ with distinct maximum and minimum solutions of a mixed problem*, Ann. Pol. Math. 13 (1963), 101-103.

[32] — *Note on abstract linear differential inequalities*, Rev. Math. Pures Appl. Acad. Rep. Pop. Roumaine 1961, VI, 4, 655-657.

[33] — *Limitations of solutions of parabolic equations*, Ann. Pol. Math. (5) 2 (1958).

[34] Nagumo, M., *Über die Ungleichung $\partial u/\partial x > f(x, y, u, \partial u/\partial x)$*, Jap. J. Math. 15 (1938), 51-56.

[35] — et Simoda, S., *Note sur l'inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique*, Proc. Jap. Ac. 27 (1951), 536-539.

[36] Nickel, K., *Parabolic equations with applications to boundary layer theory*. Partial differential equations and continuum mechanics, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1961.

[37] Olech, C., *Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Pol. Sci. (8) 10 (1960), 661-666.

[38] — and Mlak, W., see [30].

[39] Opial, Z., *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Pol. Math. 3 (1957), 200-209.

[40] Phillips, R. S., and Hille, E., see [12].

[41] Prodi, G., *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*, I, II, Rend. Inst. Lombardo (1953), 1-47.

[42] Pliś, A., *Remark on a partial differential inequality of the first order*, Ann. Pol. Math. 16 (1965), 371-375.

[43] Rota, G. C., and Birkhoff, G., see [4].

[44] Rolewicz, S., *Uwagi o funkcjach o pochodnej zero*, Roczniki PTM, Wiadomości Matematyczne 3 (1959), 127-128 (in Polish).

[45] Saks, S., *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937.

[46] Schwartz, J., and Dunford, N., see [8].

[47] Simoda, S. et Nagumo, M., see [35].

[48] Sobolev, W. I., and Lusternik, L. A., see [21].

[49] Szarski, J., *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), 7-26.

[50] Szarski, J., *Sur un système d'inégalités différéntielles*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), 126-134.

[51] — et Ważewski, T., *Sur une méthode de comparaison des équations hyperboliques aux dérivées partielles du second ordre avec les équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Pol. Sci. (1) 1-2 (1953), 6-10.

[52] — *Characteristics and Cauchy problem for non-linear partial differential equations of the first order*, University of Kansas, Lawrence, Kansas 1959.

[53] — *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Pol. Math. (2) 2 (1955), 237-249.

[54] — *Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non-linéaire d'équations paraboliques*, Ann. Pol. Math. 6 (1959), 211-16.

[55] — *Sur un système non-linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Ann. Pol. Math. 15 (1964), 15-22.

[56] — *Remarque sur un critère d'unicité des intégrales d'une équation différentielle ordinaire*, Ann. Pol. Math. 12 (1962), 203-205.

[57] Ważewski, T., *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Pol. Math. 14 (1936), 149-177.

[58] — *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes*, Ann. Soc. Pol. Math. 16 (1935), p. 97.

[59] — *Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires*, Studia Math. 10 (1948), 48-59.

[60] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), 112-166.

[61] — *Certaines propositions de caractère epidermique relatives aux inégalités différentielles*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1952), 1-12.

[62] Ważewski, T., et Szarski, J., see [51].

[63] Ważewski, T., *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach et applications à la généralisation du théorème de l'Hôpital*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1953), 132-147.

[64] — *Une modification du théorème de l'Hôpital, liée au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles*, Ann. Pol. Math. 1 (1954), 1-12.

[65] — *Remarque sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Pol. Math. (1957), 270-272.

[66] Westphal, H., *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*, Math. Z. 51 (1949), 690-695.

[67] Widder, D. V., *The Laplace transform*, Princeton, 1946.

[68] Yosida, K., *On Brownian motion in a homogeneous Riemanian space*, Pacific J. Math. 2 (1952), 263-270.

LIST OF SPECIAL SYMBOLS

$\in$	is an element of
$\notin$	is not an element of
$\subset$	is a subset of
$\{x: P(x)\}$	set of x's for which the proposition P is true
$\bigcup$	union of sets
$\bigcap$	intersection of sets
$\bar{D}$	closure of D
∂D	boundary of D
$\lVert x\rVert$	norm of a vector
D^+	right-hand upper derivative
D_+	right-hand lower derivative
D^-	left-hand upper derivative
D_-	left-hand lower derivative
D_+^{s}	right-hand strong derivative
D_+^{w}	right-hand weak derivative
s-lim	strong limit
w-lim	weak limit
$A \leqslant B$	for two points $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ such that $a_j \leqslant b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$
$A < B$	for two points $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ such that $a_j < b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$
$A \overset{i}{\leqslant} B$	for two points $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ such that $A \leqslant B$ and $a_i = b_i$, the index i being fixed
$-A$	for a point $A = (a_1, \ldots, a_n)$ we denote $-A = (-a_1, \ldots, -a)$
$\lvert A\rvert$	for a point $A = (a_1, \ldots, a_n)$ we denote $\lvert A\rvert = (\lvert a_1\rvert, \ldots, \lvert a_n\rvert)$
$p \Rightarrow q$	p implies q
$\varphi_n(X) \underset{D}{\Rightarrow} \varphi(X)$	the sequence $\varphi_n(X)$ converges to $\varphi(X)$ uniformly on D
$\Omega(t; H)$	right-hand maximum solution of comparison system through the point $(0, H) = (0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$
u_X	for a function $u(X) = u(x_1, \ldots, x_n)$ its gradient
u_{XX}	for a function $u(X) = u(x_1, \ldots, u_n)$ the sequence of its second derivatives

(a, b)	open interval $a < t < b$
$[a, b]$	closed interval $a \leqslant t \leqslant b$
$[a, b)$	interval $a \leqslant t < b$
$(a, b]$	interval $a < t \leqslant b$
$G_1 \times G_2$	topological product
$\lvert A-B \rvert$	for two points $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ their Euclidean distance
E'	adjoint space of E
I	identity operator
$\operatorname{sgn} x$	denotes 1 if $x \geqslant 0$, and -1 if $x < 0$

INDEX

CONTENTS