CHAPITRE VII

INVARIANTS INTÉGRAUX

Ce dernier chapitre du livre a pour l'objet l'étude de la théorie des invariants intégraux qui, fondée de deux manières différentes par H. Poincaré et S. Lie, a trouvé d'importantes applications à la mécanique et aux équations différentielles. A cette théorie ont été consacrés plusieurs travaux des nombreux savants et en particulier l'ouvrage de E. Cartan [7], où l'on trouvera des renseignements bibliographiques concernant le sujet. En se servant de la méthode des formes extérieures Cartan a pu montrer, entre autres, le lien qui existe entre les invariants intégraux et les formes qu'il appelait formes intégrales d'un système des équations différentielles et qui constituent une généralisation féconde de la notion d'intégrale.

Le premier paragraphe du Chapitre contient des renseignements sur les intégrales multiples et le théorème de Stokes. Dans le § 2 j'introduis les notions d'invariant intégral et de forme intégrale et je donne un apperçu de la théorie du pseudo-groupe de Lie à un paramètre et de la transformation infinitésimale Xf qui lui correspond. Ces préliminaires sont suivis de la démonstration que Xf admet une infinité d'invariants intégraux et de formes intégrales.

Dans la théorie des invariants intégraux et des formes intégrales jouent un rôle important les notions de dérivée de Lie et de produit intérieur d'une forme différentielle extérieure et d'un vecteur. A ces notions et à leurs propriétés qui concernent les invariants intégraux est consacré le § 3. Dans le paragraphe suivant on trouve la notion d'invariants attachés aux trajectoires d'un pseudo-groupe Xf, due à Poincaré; une fois cette notion introduite je démontre les divers critères d'invariance pour les invariants attachés aux trajectoires. Le § 5 est consacré aux applications des invariants intégraux et des formes intégrales à la mécanique. Après avoir défini les formes intégrales complétées, introduites par E. Cartan, j'expose ici, entre autres, deux théorèmes importants de Poincaré et de Cartan qui se rapportent aux systèmes des équations canoniques de Hamilton.

Le dernier paragraphe de ce Chapitre a la forme d'un annexe qui sert à combler deux lacunes dans les exposés des chapitres précédents. Je donne ici des renseignements sur la notion de différentielle extérieure généralisée des formes qui ne sont pas différentiables et j'explique en suite, au moyen de la dérivée de Lie, le lien entre les théories de Lie et de Cartan des groupes continus et finis.

§ 1. Intégrales multiples

98. Préliminaires. Soit U un ouvert fini et connexe de l'espace euclidien $R^p(x^\varkappa)$; supposons que l'on assujettit les coordonnées cartésiennes $x^\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ à une transformation

$$x^\varkappa = \varphi^\varkappa(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^p) \tag{1}$$

$\varphi^\varkappa$ étant des fonctions C^r $(r \geqslant 1)$, définies dans un ouvert $\bar{U}$ d'un autre espace euclidien $\bar{R}^p(\bar{x}^\varkappa)$ et telles que le jacobien

$$J = \left| \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \bar{x}^\lambda} \right|$$

soit différent de zéro dans U; nous désignerons cette transformation par T. On introduit ainsi dans U un nouveau système de coordonnées que l'on nomme coordonnées gaussiennes. Tous les systèmes de coordonnées que l'on introduit ainsi, en partant du système $x^\varkappa$, peuvent être divisées en deux classes suivant que le jacobien J est positif ou négatif (cf. n° 30). Il est clair que le passage d'un système de coordonnées à un autre se fait par une transformation au jacobien positif ou négatif selon que les deux systèmes appartiennent à la même classe ou aux classes différentes. Si l'on choisit arbitrairement un de ces systèmes, on dira que l'ouvert U a été *orienté*. Nous distinguerons entre les deux orientations en appelant l'une d'elles, arbitrairement choisie, *positive* et l'autre *négative*.

Pour donner au choix d'orientation une représentation géométrique imaginons en un point arbitraire $M \in U$ un repère R_p composé du point M comme origine et de p vecteurs tangent à U; on détermine l'ordre de ces vecteurs de manière que le déterminant Δ de leurs composantes soit positif ou négatif selon que la classe du système de coordonnées adoptées en U soit positive ou négative; nous dirons que le repère R_p est *compatible* avec l'orientation de l'ouvert U. Si l'on introduit des nouvelles coordonnées $\bar{x}^\varkappa$ par les formules (1) et que l'on calcule le déterminant $\bar{\Delta}$ des composantes transformées des vecteurs de R_p, on aura

$$\bar{\Delta} = \Delta \cdot J.$$

On voit que $\bar{\Delta}$ aura le même signe que Δ ou le signe contraire selon que $J > 0$ ou $J < 0$; il en résulte que le signe de $\bar{\Delta}$ indiquera l'orientation du système $\bar{x}^\varkappa$. Il est évident que cette règle ne dépend pas du choix du point M et du repère R_p.

99. Intégrales multiples. Nous donnerons le nom de *frontière* de l'ouvert U à l'ensemble de points qui, n'appartenant pas à U, sont des points d'accumulation des points de U. Nous allons supposer que cette frontière est une variété compacte de classe $r \geqslant 1$ (n° 30) et nous désignerons par D l'ensemble des points de U et de sa frontière.

Soit $f = f(x^1, x^2, \ldots, x^p)$ une fonction continue définie dans un ouvert U' contenant U. Désignons par I l'intégrale de f étendu à D:

$$I = \int_D f\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^p. \tag{2}$$

Introduisons maintenant dans U' des nouvelles coordonnées au moyen des formules (1) et désignerons par $\bar{D}$ le champ d'intégration déduit de D par la transformation inverse à T. On aura

$$\int_D f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p = \int_{\bar{D}} \bar{f}\,|J|\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p, \tag{3}$$

où $\bar{f}$ designe la fonction que l'on obtient en remplaçant dans f les variables $x^\varkappa$ par les fonctions $\varphi^\varkappa$.

Nous allons généraliser la notion classique d'intégrale multiple et la formule (3) en utilisant la notion d'orientation définie au numéro précédent. Imaginons à cet effet que dans le champ d'intégration D de l'intégrale (2) on a établi une orientation déterminée et désignerons par E le champ D muni de cette orientation. Nous définirons l'intégrale de la fonction f étendue au champ orienté E en posant

$$\int_E f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p = \varepsilon \int_D f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p, \tag{4}$$

où ε est égal à $+1$ ou à -1 selon que le système $x^\varkappa$ est compatible ou non avec l'orientation de E. En rapprochant les formules (3) et (4) on obtient

$$\int_E f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p = \varepsilon \int_{\bar{D}} \bar{f}\,|J|\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^n. \tag{5}$$

D'autre part, l'application de la formule (4) au système $\bar{x}^\varkappa$ donne

$$\int_{\bar{E}} \bar{f}\,|J|\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p = \eta \int_{\bar{D}} \bar{f}\,|J|\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p, \tag{6}$$

où $\bar{E}$ désigne le champ d'intégration $\bar{D}$ muni de l'orientation correspondante au système $\bar{x}^\varkappa$ et η est un nombre égal à $+\varepsilon$ ou à $-\varepsilon$ selon que les systèmes $x^\varkappa$ et $\bar{x}^\varkappa$ sont de la même orientation ou des orientations différentes. Ceci revient à dire que $\eta = \varepsilon$ ou $\eta = -\varepsilon$, selon que l'on a $J > 0$ ou $J < 0$. On peut donc écrire

$$J = \varepsilon\eta\,|J|. \tag{7}$$

Remarquons maintenant que les formules (5) et (6) entraînent la relation suivante:

$$\int_E f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p = \varepsilon\eta \int_{\bar{E}} \bar{f}\,|J|\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p$$

qui, en vertu de (7), peut s'écrire

$$\int_E f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p = \int_{\bar{E}} \bar{f}J\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p. \tag{8}$$

Désignons maintenant par Φ la forme différentielle extérieure $f[dx^1\,dx^2\ldots dx^p]$ et par $\bar{\Phi}$ la forme que l'on déduit de Φ en y introduisant les variables $\bar{x}^\varkappa$; on aura donc

$$\bar{\Phi} = \bar{f}J\,[d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p]$$

(cf. n° 2). Nous définirons les intégrales des formes différentielles en posant

$$\int_E \Phi = \int_E f\,dx^1\,dx^2\ldots dx^p; \qquad \int_{\bar{E}} \bar{\Phi} = \int_{\bar{E}} \bar{f}J\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^p;$$

la relation (8) prendra alors la forme

$$\int_E \Phi = \int_{\bar{E}} \bar{\Phi}. \tag{9}$$

Remarquons que la relation (9) reste vraie, si l'on remplace Φ et $\bar{\Phi}$ par les expressions $f[dx^{h_1}dx^{h_2}\ldots dx^{h_p}]$ et $\bar{f}J\,[d\bar{x}^{h_1}d\bar{x}^{h_2}\ldots d\bar{x}^{h_p}]$, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant une permutation arbitraire des indices $1, 2, \ldots, p$; elle ne cesse pas d'être valable, si deux indices h_i sont égaux, car dans ce cas les deux membres de cette égalité s'annulent.

Remarque. De la définition (4) de l'intégrale multiple étendue à un champ orienté découlent immédiatement les propositions suivantes.

1° Si l'on décompose le champ E en deux champs E' et E'' qui n'ont pas des points intérieurs en commun et dont l'orientation est induite par celle de E, on a l'égalité

$$\int_E \Phi = \int_{E'} \Phi + \int_{E''} \Phi.$$

2° Si dans un domaine ouvert de $R^p(x^\varkappa)$ la relation

$$\int_E \Phi = \int_E \Psi$$

reste vraie quelque soit le champs E, les deux formes Φ et Ψ sont égales.

100. Intégrales multiples (suite) [1]. Supposons que dans $R^n(x^\varkappa)$ soit donné un domaine connexe D_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ défini par les formules

$$x^\varkappa = f^\varkappa(u^1, u^2, \ldots, u^p), \tag{10}$$

où $f^\varkappa$ sont des fonctions C^1 données dans un ouvert fini Δ_p de l'espace euclidien $R^p(u^h)$; nous supposons de plus que le rang de la matrice des

[1] Dans ce numéro les indices grecs parcourent comme d'habitude les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et les indices latins les valeurs $1, 2, \ldots, p$.

dérivées $\partial f^\varkappa/\partial u^h$ soit égal à p et que Δ_p soit orienté au moyen des repères naturels. L'orientation de Δ_p induit une orientation du domaine D_p plongé dans l'espace $R^n(x^\varkappa)$; pour l'obtenir considérons p vecteurs $\vec{X}_h = (\partial x^\varkappa/\partial u^h)$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ et le repère R_p formé des vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$. Nous dirons que R_p munit D_p d'une orientation et nous désignerons par $\mathscr{D}_p$ le domaine ainsi orienté.

Supposons maintenant que dans un domaine ouvert de $R^n(x^\varkappa)$, contenant le champs $\mathscr{D}_p$, soit donnée la forme différentielle C^0

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}].$$

Considérons un des termes de cette forme, par exemple le terme $\Psi = a_{12\ldots p}[dx^1 dx^2 \ldots dx^p]$. En appliquant à la forme Ψ la formule (8) on aura la relation

$$\int_{\mathscr{D}_p} \Psi = \int_{\Delta_p} a_{12\ldots p} J\, du^1 du^2 \ldots du^p,$$

où dans le coefficient $a_{12\ldots p}$ les variables $x^\varkappa$ ont été remplacées par les fonctions $f^\varkappa(u^1, u^2, \ldots, u^p)$ et où J désigne le déterminant $D(x^1, x^2, \ldots, x^p)/$ $/D(u^1, u^2, \ldots, u^p)$. En procédant de la même manière avec tous les termes de Φ_p et en sommant les valeurs ainsi obtenues on obtient un nombre qui sera appelé la *valeur de l'intégrale* de la forme Φ_p étendue sur le champs orienté $\mathscr{D}_p$ et sera désigné par $\int_{\mathscr{D}_p} \Phi_p$; on aura donc

$$\int_{\mathscr{D}_p} \Phi_p = \frac{1}{p!} \int_{\Delta_p} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} \frac{D(x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \ldots x^{\varkappa_p})}{D(u^1 u^2 \ldots, u^p)} du^1 du^2 \ldots du^p. \tag{11}$$

Il est facile de voir que la valeur de l'intégrale (11) reste inaltérée, si l'on remplace le système des coordonnées u^h par un autre système de la même classe et qu'elle change de signe, si le nouveau système est de classe différente; la valeur de l'intégrale (11) est aussi invariante pour une transformation arbitraire C^1 des coordonnées $x^\varkappa$.

Considérons maintenant une variété orientable V^p de classe $r \geqslant 1$ et supposons que dans V^p soit donnée une forme différentielle

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

de classe $s \geqslant 0$. Il résulte des théorèmes de S. S. Cairns ([2] et [3]) que la variété V^p peut être munie d'un recouvrement composé d'un nombre fini ou dénombrable des voisinages U_P, homéomorphes à une hypersphère fermée de l'espace euclidien à p dimensions, de telle manière que

deux voisinages différents n'ont pas de points intérieurs en commun et que tout point de V^p appartient à l'un de ces voisinages. L'orientation de la variété V^p induit une orientation de chacun de ces voisinages.

Nous définirons la valeur de l'intégrale, étendue à la variété V^p, de la forme Φ_p comme la somme des intégrales étendues aux voisinages de V^p, si cette somme a une valeur déterminée. Nous écrirons alors

$$\int_{V^p} \Phi_p = \sum_P \int_{U_P} \Phi_p,$$

où P parcourt les indices du recouvrement de V^p. Si V^p est une variété compacte, on désigne cette intégrale par $\oint_{V^p} \Phi_p$.

101. Théorème de Stokes. Revenons au champ orienté $\mathscr{D}_p$ défini au commencement du n° 100 en ajoutant encore l'hypothèse que sa frontière, désignée par $\partial\mathscr{D}_p$, est une variété compacte C^1 douée en tout point d'un hyperplan tangent, à p dimensions, variant continûment sur la frontière. Pour orienter la frontière d'une manière cohérente avec l'orientation du champ $\mathscr{D}_p$ imaginons dans l'espace $R^n(x^\varkappa)$ un repère R_n, formé de n vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$, choisis de telle manière que le repère composé de p premiers vecteurs se confond avec le repère qui indique l'orientation du champ $\mathscr{D}_p$; imaginons de plus que le repère R_n soit attaché à un point de la frontière de sorte que les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p-1}$ soient tangents à la frontière et que les autres soient extérieurs au champ $\mathscr{D}_p$. Avec ces conventions on a la formule

$$\oint_{\partial\mathscr{D}_p} \Phi_{p-1} = \int_{\mathscr{D}_p} d\Phi_{p-1} \tag{12}$$

appelée *formule de Stokes* et valable pour une forme différentielle arbitraire de classe $r \geqslant 1$, définie dans un ouvert de $R^n(x^\varkappa)$ contenant $\mathscr{D}_p$.

On trouvera la démonstration de cette formule dans le livre de B. Segre [42]. Nous nous bornons ici à remarquer que la formule générale prend pour $n = 2$ la forme de la formule de Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[dx\,dy]$$

et pour $n = 3$, $p = 3$ la forme de la formule de Gauss-Ostrogradski

$$\oint\!\!\oint_S P[dy\,dz] + Q[dz\,dx] + R[dx\,dy]$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)[dx\,dy\,dz].$$

Pour la forme de degré $n-1$

$$\Phi_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} A_i [dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n]$$

on a d'après (12) la relation suivante:

$$\int_{\partial \mathscr{D}_n} \sum_{i=1}^{n} A_i [dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n] = \int_{\mathscr{D}_n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} [dx^1 dx^2 \ldots dx^n].$$

§ 2. Formes invariantes et invariants intégraux

102. Définitions. Supposons que dans un ouvert connexe U de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ soit donnée une transformation T (1)

$$\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{1}$$

dont le jacobien est différent de zéro dans U; cette transformation applique l'ouvert U sur un autre ouvert $\bar{U}$ de l'espace R^n. Supposons aussi que dans un domaine ouvert qui embrasse U et $\bar{U}$ soit donnée une forme différentielle de degré p

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} [dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

et l'intégrale

$$I = \int_{E_p} \Phi_p$$

étendue à un champ orienté E_p situé dans U et définie par les formules

$$x^\varkappa = \varphi^\varkappa(u^1, u^2, \ldots, u^p),$$

où $\varphi^\varkappa$ désignent des fonctions données dans un ouvert Δ_p de $R^p(u^1, u^2, \ldots, u^p)$. La transformation T fait correspondre à Φ_p la forme suivante:

$$\bar{\Phi}_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p}(\bar{x}) [d\bar{x}^{\varkappa_1} d\bar{x}^{\varkappa_2} \ldots d\bar{x}^{\varkappa_p}],$$

où l'on doit prendre les valeurs des coefficients au point $(\bar{x}^\varkappa)$; de même à l'intégrale I la transformation T fait correspondre l'expression

$$\bar{I} = \int_{\bar{E}_p} \bar{\Phi}_p,$$

(1) Dans tout ce qui suit les fonctions et les formes seront supposées C^∞.

$\bar{E}_p$ étant le champ orienté déduit de E_p par T. On dira que Φ_p est une *forme invariante pour* T, si $\Phi_p = \bar{\Phi}_p$, c'est-à-dire si, en considérant les formules (1) comme définissant une transformation de coordonnées dans U, les deux formes Φ_p et $\bar{\Phi}_p$ se transforment l'une dans l'autre; de même nous dirons que $\int \Phi_p$ est un *invariant intégral pour* T, si l'on a

$$\int_{E_p} \Phi_p = \int_{\bar{E}_p} \bar{\Phi}_p,$$

quel que soit le champ d'intégration E_p. Les invariants ainsi définis portent le nom *d'invariants absolus*; si l'égalité précédante n'a lieu que pour les champs d'intégration compacts, on donne à l'intégrale $\int_{E_p} \Phi_p$ le nom *d'invariant relatif*.

THÉORÈME 1. *Pour que l'intégrale* $\int_{E_p} \Phi_p$ *soit, si elle existe, un invariant absolu pour la transformation* T, *il faut et il suffit que la forme* Φ_p *soit invariante pour* T.

Nous démontrerons ce théorème pour $p = 2$, la méthode du raisonnement étant générale. Or, en vertu de l'équation (11) du n° 100 on a

$$\int_{E_2} \Phi_2 = \int_{D_2} a_{\varkappa\lambda}(x) \frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2} du^1 du^2$$

et

$$\int_{\bar{E}_2} \bar{\Phi}_2 = \int_{D_2} a_{\varrho\sigma}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial u^2} du^1 du^2.$$

Donc, si $\int_{E_2} \Phi_2 = \int_{\bar{E}_2} \bar{\Phi}_2$, quel que soit E_2, il doit être

$$a_{\varkappa\lambda}(x) \frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2} = a_{\varrho\sigma}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial u^2}$$

ou

$$a_{\varkappa\lambda}(x) \frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2} = a_{\varrho\sigma}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}. \tag{2}$$

La relation (2) devant être vraie quelles que soient les fonctions $x^\nu = \varphi^\nu(u^1, u^2)$ qui définissent le champ E_2, il en résulte l'équation

$$a_{\varkappa\lambda}(x) = a_{\varrho\sigma}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial x^\varkappa} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\lambda},$$

ce qui entraîne la relation $\Phi_2 = \bar{\Phi}_2$. Il est évident qu'inversement l'égalité de ces formes entraîne la relation (2) et par suite, l'égalité $\int_{E_2} \Phi_2 = \int_{\bar{E}_2} \bar{\Phi}_2$.

Il résulte du Théorème 1 et des propriétés des formes différentielles que tout invariant intégral se change en un invariant, si l'on fait le même changement des variables sous le signe d'intégration et dans la transformation T.

THÉORÈME 2. *Si l'intégrale $\int \Phi_p$ est un invariant absolu ou relatif pour une transformation T, l'intégrale $\int d\Phi_p$ est un invariant absolu et, inversement, si $\int d\Phi_p$ est un invariant absolu, l'intégral $\int \Phi_p$ est un invariant absolu ou relatif.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Stokes et de la définition de l'invariant intégral.

COROLLAIRE. *Si, Φ_p étant une forme fermée ($d\Phi_p = 0$), l'intégrale $\int \Phi_p$ est un invariant absolu et si Ψ_{p-1} est une forme telle qu'il soit $d\Psi_{p-1} = \Phi_p$, $\int \Psi_{p-1}$ est un invariant relatif.*

103. Le pseudo-groupe de Lie à un paramètre. Soit D un domaine de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ formé d'un ouvert fini et de sa frontière; supposons que sur D soit donné un vecteur non nul $\vec{X}$ dont les composantes $X^\varkappa(x)$ sont fonctions C^∞. Le système des équations

$$\frac{dx^\varkappa}{dt} = X^\varkappa(x) \tag{3}$$

admet dans D une solution

$$x^\varkappa = f^\varkappa(x_0, t) \tag{4}$$

définie dans un intervalle $-\tau < t < \tau$ $(\tau > 0)$ et telle qu'il soit

$$f^\varkappa(x_0, 0) = x_0^\varkappa,$$

où $x_0 = (x_0^\varkappa)$ est un point arbitraire du domaine D; le nombre τ peut être déterminé indépendemment du choix du point x_0. Soit t_1 un nombre quelconque de l'intervalle $(-\tau, \tau)$; la relation

$$f^\varkappa(x_0, t_1) = x_1^\varkappa \tag{5}$$

fait appliquer le point x_0 sur un point $x_1 = (x_1^\varkappa)$ du domaine D. Posons $t = \bar{t} + t_1$; si l'on remplace la variable t dans les équations (3) par $\bar{t}$, le système de ces équations se transformera en les équations

$$\frac{dx^\varkappa}{d\bar{t}} = X^\varkappa(x) \tag{6}$$

et son intégrale (4) prendra la forme

$$x^\varkappa = f^\varkappa(x_0, \bar{t} + t_1).$$

Le rapprochement de la relation (5) montre que cette intégrale prend les valeurs $x_1^\varkappa$ pour $\bar{t} = 0$. D'autre part, d'après ce qui a été posé plus haut sur les équations (3) et (4), l'intégrale du système (6) prenant pour $\bar{t} = 0$ les valeurs $x_1^\varkappa$ peut être présentée sous la forme

$$x^\varkappa = f^\varkappa(x_1, \bar{t}).$$

En comparant les deux dernières relations on trouve

$$f^\varkappa(x_0, \bar{t} + t_1) = f^\varkappa(x_1, \bar{t}).$$

Soit t_2 un nombre de l'intervalle $(-\tau, \tau)$ tel que la somme $t_1 + t_2$ appartienne aussi à cet intervalle; posons $f^\varkappa(x_1, t_2) = x_2$; si dans la dernière équation on pose $\bar{t} = t_2$, on aura

$$f^\varkappa(x_0, t_2 + t_1) = f^\varkappa(x_1, t_2)$$

ou, d'après (5),

$$f^\varkappa(x_0, t_1 + t_2) = f^\varkappa[f(x_0, t_1), t_2].$$

On voit ainsi que, si la transformation

$$\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x, t), \tag{7}$$

où t est un paramètre variable et x un point du domaine D, applique pour $t = t_1$ le point x_0 en un point x_1 et pour $t = t_2$ le point x_1 en un point x_2, elle transforme pour $t = t_1 + t_2$ le point x_0 en un point x_2. Les transformations (7) forment donc un pseudo-groupe de Lie à un paramètre; nous le désignerons par g.

Remarquons que les équations de définition du pseudo-groupe g, que nous écrirons dans la suite de la manière suivante:

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = dt,$$

peuvent être envisagées comme définissant un mouvement continu d'un liquide, si l'on prend la variable t comme mésure du temps. La ligne représentée par les équations (4) porte le nom de *trajectoire du mouvement* ou du *pseudo-groupe* g passant par le point x_0. Le vecteur $\vec{X}$, qui représente la vitesse d'une particule au point x, étant indépendant du temps le mouvement du liquide est stationnaire.

104. La transformation infinitésimale du pseudo-groupe g. Le pseudo-groupe g peut être représenté par le vecteur $\vec{X}$ ou par l'opérateur $Xf = X^\varkappa \dfrac{\partial f}{\partial x^\varkappa}$ qui porte le nom de sa *transformation infinitésimale*. En

posant $Xf = 0$ on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction f; considérons l'une quelconque de ses intégrales: $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$; si l'on y remplace les variables $x^\varkappa$ par les solutions (4) des équations (3) et qu'on la différentie en suite par rapport à t, on obtient

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{dt}dt$$

ou

$$df = X^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} dt.$$

En vertu de l'équation $Xf = 0$ on a donc $df = 0$. Nous voyons ainsi que chaque intégrale de l'équation $Xf = 0$ reste invariante pour les transformations du pseudo-groupe g. On a donné à ces intégrales le nom *d'intégrales premières* du système des équations (3). On sait [1] que ce système admet $n-1$ intégrales premières indépendantes entre elles et une dernière intégrale $t = f^n + c$, où f^n est une fonction indépendante des integrales premières et c une constante.

Remarquons maintenant que, si dans le domaine D on introduit des nouvelles coordonnées $\bar{x}^\varkappa$, les composantes du vecteur $\vec{X}$ se changeront d'après les formules $\bar{X}^\varkappa = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\varrho} X^\varrho$ et le système des équations que l'on déduit des équations (3) sera équivalent au suivant:

$$\frac{d\bar{x}^1}{\bar{X}^1} = \frac{d\bar{x}^2}{\bar{X}^2} = \ldots = \frac{d\bar{x}^n}{\bar{X}^n} = dt.$$

Si en particulier on prend comme nouvelles variables les intégrales $f^\varkappa$ dont nous avons parlé plus haut et que l'on pose $\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa$, le système des équations (3) peut être ramené à la forme suivante:

$$\frac{d\bar{x}^1}{0} = \frac{d\bar{x}^2}{0} = \ldots = \frac{d\bar{x}^{n-1}}{0} = \frac{d\bar{x}^n}{1} = dt$$

et sa solution sera donnée par les formules

$$\bar{x}^1 = x_0^1, \quad \bar{x}^2 = x_0^2, \quad \ldots, \quad \bar{x}^{n-1} = x_0^{n-1}, \quad \bar{x}^n = x_0^n + t$$

qui représentent une translation dans l'espace R^n; remarquons encore que la transformation infinitésimale du pseudo-groupe prendra maintenant la forme $Xf = \partial f/\partial x^n$.

[1] V. par exemple [30], p. 403.

Remarque 1. Nous avons en même temps montré que, si dans un domaine D de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ est donné un champ de vecteurs contravariants $\vec{X}$, on peut trouver dans un voisinage d'un point arbitraire $x_0 \in D$ un système de coordonnées tel que les composantes du vecteur $\vec{X}$ prennent les valeurs $X^1 = X^2 = \ldots = X^{n-1} = 0$, $X^n = 1$.

Remarque 2. Dans la suite au lieu de dire du pseudo-groupe de Lie défini par les équations (3) nous dirons du pseudo-groupe Xf.

105. Existence des invariants intégraux. Maintenant nous allons montrer que le pseudo-groupe Xf admet dans un voisinage de tout point du domaine D une infinité d'invariants intégraux de tout degré inférieur ou égal à n. D'après le Théorème 1 du n° 102 il suffit pour cela de prouver qu'il y a une infinité de formes différentielles $\Phi_p (1 \leqslant p \leqslant n)$ invariantes pour les transformations du pseudo-groupe Xf.

Pour démontrer cette proposition nous supposons que les coordonnées dans un voisinage d'un point x soient choisies de manière que les équations finies prennent la forme

$$(8) \qquad \bar{x}^1 = x^1, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \ldots, \quad \bar{x}^{n-1} = x^{n-1}, \quad \bar{x}^n = x^n + t.$$

Considérons maintenant une forme différentielle

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

définie dans ce voisinage du point x; pour que Φ_p soit une forme invariante pour les transformations (8), il faut et il suffit que les équations (8) entraînent les équations

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}(x)[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}] = a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}(\bar{x})[d\bar{x}^{\varkappa_1} d\bar{x}^{\varkappa_2} \ldots d\bar{x}^{\varkappa_p}].$$

Si l'on y remplace les variables $\bar{x}^\varkappa$ par leurs expressions (8), on aura

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}(x^1, x^2, \ldots, x^n)[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$
$$= a_{\varkappa_1\varkappa_1\ldots\varkappa_p}(x^1, x^2, \ldots, x^n + t)[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}].$$

Les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ étant symétriques gauches en tous leurs indices il en résulte la relation suivante:

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n + t)$$

qui doit être satisfaite pour toute valeur de t dans un voisinage de la valeur zéro. Il s'en suit que les coefficients de la forme Φ_p doivent être indépendants de la variable x^n. Donc, pour obtenir une forme invariante pour les transformations (8), il suffit de prendre une forme arbitraire

dont les coefficients ne dépendent pas de la variable x^n. Nous voyons ainsi qu'il y a une infinité de formes invariantes et d'invariants intégraux pour les transformations (8).

Observons que les $n-1$ fonctions $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ sont des intégrales premières du système des équations

$$\frac{dx^1}{0} = \frac{dx^2}{0} = \ldots = \frac{dx^{n-1}}{0} = \frac{dx^n}{1} = dt;$$

les résultats obtenus plus haut peuvent donc être exprimés sous la forme indépendante du choix de variables.

THÉORÈME 3. *Pour qu'une forme différentielle soit invariante pour le pseudo-groupe* $Xf = X^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}$, *il faut et il suffit qu'elle puisse être exprimée au moyen de* $n-1$ *intégrales premières* $f^1, f^2, \ldots, f^{n-1}$ *du système des équations*

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = dt, \tag{9}$$

de leurs différentielles et de la différentielle d'une fonction f^n *indépendante des fonctions* $f^1, f^2, \ldots, f^{n-1}$.

Ajoutons que ce théorème reste vrai pour les formes de degré zéro, puisque une fonction arbitraire des intégrales premières du système des équations (9) est invariante pour le pseudo-groupe Xf.

THÉORÈME 4. *Tout invariant intégral relatif pour le pseudo-groupe* Xf *est égal à la somme d'un invariant intégral absolu et d'une intégrale d'une forme fermée.*

Pour démontrer ce théorème supposons que l'intégrale $\int \Phi_p$ soit un invariant relatif pour les transformations (8). L'intégrale $\int d\Phi_p$ étant alors, d'après le Théorème 2, un invariant absolu la différentielle $d\Phi_p$ peut être présentée sous la forme

$$d\Phi_p = \Psi_{p+1} + [X_p dx^n] \tag{10}$$

où Ψ_{p+1} et X_p sont des formes qui ne contiennent pas la variable x^n et la différentielle dx^n. En différentiant extérieurement l'équation (10) on obtient la relation

$$d\Psi_{p+1} + [dX_p dx^n] = 0.$$

Comme dans les deux formes $d\Psi_{p+1}$ et dX_p la différentielle dx^n ne figure pas, il s'en suit qu'il doit être séparement $d\Psi_{p+1} = 0$ et $dX_p = 0$.

Les formes Ψ_{p+1} et X_p étant fermées il existe dans un voisinage d'un point arbitraire du domaine D des formes Ω_p et Π_{p-1} telles qu'il soit

$$\Psi_{p+1} = d\Omega_p, \qquad X_p = d\Pi_{p-1};$$

la formule (10) peut donc être écrite de la manière suivante:

$$d\Phi_p = d\Omega_p + [d\Pi_{p-1} dx^n]$$

ou

$$d\Phi_p = d\{\Omega_p + [\Pi_{p-1} dx^n]\}.$$

Il en résulte que les expressions Φ_p et $\Omega_p + [\Pi_{p-1} dx^n]$ ne diffèrent que par une forme fermée Λ_p; on aura donc la formule

$$\Phi_p = \Omega_p + [\Pi_{p-1} dx^n] + \Lambda_p, \qquad d\Lambda_p = 0.$$

La forme $\Omega_p + [\Pi_{p-1} dx^n]$ ne renfermant pas la variable x^n l'intégrale $\int \Omega_p + [\Pi_{p-1} dx^n]$ est un invariant absolu et l'intégrale $\oint \Phi_p$ est égale à la somme d'un invariant intégral absolu et de l'intégrale $\oint \Lambda$ d'une forme fermée.

Il résulte des Théorèmes 3 et 4 que le pseudo-groupe Xf admet une infinité d'invariants intégraux absolus et relatifs.

§ 3. Dérivée de Lie

106. Dérivée de Lie d'une forme différentielle. Pour trouver des critères qui permettraient de reconnaitre si une intégrale est un invariant du pseudo-groupe Xf nous nous servirons de la notion de dérivée de Lie d'une forme différentielle; nous exposerons dans les numéros suivants la définition et les propriétés de cette dérivée dont nous avons bésoin dans la suite [1].

En conservant les notations et les conventions adoptées au paragraphe précédent supposons que dans le domaine D de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ soit donnée la transformation infinitésimale Xf et une intégrale

$$I = \int_{E_2} \Omega, \qquad \Omega = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda] \tag{1}$$

étendue à un champ orienté E_2 défini par les équations

$$x^\nu = \varphi^\nu(u^1, u^2), \tag{2}$$

[1] On trouvera dans le livre de K. Yano [48] un exposé détaillé de la dérivation de Lie.

où les φ^ν sont des fonctions données dans un ouvert connexe Δ de $R^2(u^1, u^2)$. On a donc

$$I = \tfrac{1}{2}\int_\Delta a_{\varkappa\lambda}\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}\,du^1du^2,$$

où dans les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ les variables x^ν ont été remplacées par les fonctions (2). Imaginons maintenant que l'on a assujettit les points du champ d'intégration E_2 aux transformations (7) du n° 103; du champ E_2 on obtient ainsi un nouveau champ orienté E_2^t, t désignant un nombre suffisamment voisin de la valeur zéro. On trouve les équations du champ E_2^t en remplaçant dans les équations (7) du n° 103 les variables x^ν par les fonctions (2). La valeur de l'intégrale de la forme Ω, étendue au champ E_2^t sera une fonction $I(t)$ de la variable t que l'on obtient en calculant l'intégrale double

$$(3)\qquad I(t) = \tfrac{1}{2}\int_\Delta a_{\varkappa\lambda}(x)\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}\,du^1du^2,$$

où au lieu des variables $x^\varkappa$ ont été substituées les fonctions $f^\varkappa(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n, t)$ déduites des intégrales (7). Nous allons calculer la dérivée $I'(t)$ de l'intégrale en appliquant le théorème sur la dérivation sous le signe d'intégration.

Remarquons d'abord que l'on a

$$\frac{da_{\varkappa\lambda}}{dt} = \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}$$

ou, en vertu des équations (3) du n° 103,

$$\frac{da_{\varkappa\lambda}}{dt} = X^\mu\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu}.$$

On a de même

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{dx^\varkappa}{dt} = \frac{\partial X^\varkappa}{\partial u^1},$$

d'où il résulte la formule suivante:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial X^\varkappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^1}.$$

D'une manière analogue on trouve une seconde formule

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^2}.$$

En tenant compte de ces expressions on obtient pour la dérivée de la fonction (3) la formule

$$I'(t) = \frac{1}{2}\int_\Delta\left[X^\mu\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu} + a_{\mu\lambda}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\varkappa} + a_{\varkappa\mu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\lambda}\right]\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}\,du^1du^2.$$

L'expression en parenthèses porte le nom de dérivée de Lie, relative à la transformation infinitésimale Xf, du bivecteur $a_{\varkappa\lambda}$ et on la désigne par la notation $L_X(a_{\varkappa\lambda})$; on a donc

$$(4)\qquad L_X(a_{\varkappa\lambda}) = X^\mu\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu} + a_{\mu\lambda}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\varkappa} + a_{\varkappa\mu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\lambda}$$

et par suite

$$I'(t) = \frac{1}{2}\int_\Delta L_X(a_{\varkappa\lambda})\frac{\partial x^\varkappa}{\partial u^1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^2}\,du^1du^2$$

ou encore

$$(5)\qquad I'(t) = \frac{1}{2}\int_{E_2^t} L_X(a_{\varkappa\lambda})[dx^\varkappa dx^\lambda],$$

En particulier, pour $t = 0$, on en obtient la formule

$$(5')\qquad I'(0) = \tfrac{1}{2}\int_{E_2} L_X(a_{\varkappa\lambda})[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

On voit sur la formule (4) que

$$L_X(a_{\lambda\varkappa}) = -L_X(a_{\varkappa\lambda}).$$

Supposons maintenant que l'on change le système des coordonnées dans le domaine D en le remplaçant par le système des variables $\bar{x}^\varkappa$; les coefficients de la forme Ω et les composantes du vecteur $\vec{X}$ se changeront alors d'après les formules

$$a_{\varkappa\lambda} = \bar{a}_{\varrho\sigma}\frac{\partial\bar{x}^\varrho}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial\bar{x}^\sigma}{\partial x^\lambda},\qquad \bar{X}^\varkappa = \frac{\partial\bar{x}^\varkappa}{\partial x^\varrho}X^\varrho$$

et la dérivée $I'(t)$ sera donnée par la formule suivante:

$$I'(t) = \int_{E_2^t} L_X(\bar{a}_{\varrho\sigma})[d\bar{x}^\varrho d\bar{x}^\sigma].$$

En la comparant avec la formule (5) et en posant ensuite $t = 0$, on trouve l'équation

$$\int_{E_2} L_X(\bar{a}_{\varrho\sigma})[d\bar{x}^\varrho d\bar{x}^\sigma] = \int_{E_2} L_X(a_{\varkappa\lambda})[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

qui doit être vraie pour un arbitraire champ E_2. Il en résulte donc la relation suivante:

$$L_X(\bar{a}_{\varrho\sigma}) = \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \bar{x}^\varrho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\sigma} L_X(a_{\varkappa\lambda});$$

nous avons ainsi montré que la dérivée de Lie d'un bivecteur covariant est également un bivecteur covariant.

A la forme différentielle $\frac{1}{2}L_X(a_{\varkappa\lambda})[dx^\varkappa dx^\lambda]$ qui figure sous le signe intégral de la formule (5') nous donnerons le nom de *dérivée de Lie* de la forme différentielle $\Omega = \frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$ et nous écrirons

$$L_X(\Omega) = \tfrac{1}{2}L_X(a_{\varkappa\lambda})dx^\varkappa dx^\lambda;$$

la formule (5') devient alors

$$I'(0) = \int_{E_2} L_X(\Omega).$$

Tous les raisonnements précédents s'étendent facilement à une forme différentielle de degré quelconque. Si la forme

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_p}]$$

est donnée dans le domaine D, sa dérivée de Lie relativement au pseudo-groupe Xf est égale à l'expression

$$L_X(\Phi_p) = \frac{1}{p!} L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p})[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_p}], \tag{6}$$

dont les coefficients sont les composantes de la dérivée de Lie du p-vecteur $\{a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$ déterminées par les formules

$$L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) = X^\varrho \frac{\partial a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}}{\partial x^\varrho} + \sum_{i=1}^{p} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_p}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^{\varkappa_i}} \tag{7}$$

Il est commode de convenir que la dérivée de Lie relativement au pseudo-groupe $Xf = X^\varrho \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho}$ d'une fonction $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (forme de degré zéro) est égale à l'expression $XF = X^\varrho \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho}$.

On peut se convaincre de la même manière que dans le cas $p = 2$ que la dérivée $L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p})$ est un p-vecteur et que, si l'on pose

$$I(t) = \int_{E_p^t} \Phi_p,$$

E_p^t étant un champ déduit d'un champ arbitraire E_p du domaine D par la transformation (7) du n° 103, on a

$$I'(t) = \int_{E_p^t} L_X(\Phi_p). \tag{8}$$

Exemples. 1° Soit $\omega = a_\varkappa dx^\varkappa$; d'après (6) et (7) on a $L_X(\omega) = L_X(a_\varkappa)dx^\varkappa$ et

$$L_X(a_\varkappa) = X^\varrho \frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\varrho} + a_\varrho \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varkappa}. \tag{9}$$

2° Considérons la forme

$$\Omega = \frac{1}{n!} M_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_n}]$$

qui peut être écrite d'une manière plus simple

$$\Omega = M[dx^1 dx^2\ldots dx^n], \qquad M = M_{12\ldots n}.$$

On a en vertu de (7) la formule suivante:

$$L_X(M_{12\ldots n}) = X^\varrho \frac{\partial M_{12\ldots n}}{\partial x^\varrho} + M_{12\ldots n}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varrho}$$

ou

$$L_X(M_{12\ldots n}) = X^\varrho \frac{\partial M}{\partial x^\varrho} + M\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varrho}$$

et par suite

$$L_X(\Omega) = \frac{\partial M X^\varrho}{\partial x^\varrho}[dx^1 dx^2\ldots dx^n]. \tag{10}$$

Remarque. Dans la suite, si aucune confusion n'est à craindre, nous omettrons l'indice X dans le symbole L_X.

107. Propriétés de la dérivée $L(\Phi_p)$. Nous prouvons le suivant

THÉORÈME 1. *La dérivée de Lie d'une forme différentielle jouit des propriétés suivantes:*

a) $L(c_1\Phi_p + c_2\Psi_p) = c_1 L(\Phi_p) + c_2 L(\Psi_p)$ (c_1, c_2 *constantes*).

b) $L([\Phi_p\Psi_q]) = [L(\Phi_p)\Psi_q] + [\Phi_p L(\Psi_q)]$.

La première de ces propriétés résulte immediatemment des équations (6) et (7); la deuxième est facile de vérifier au moyen de ces mêmes équations; nous le montrerons pour le produit $[\omega^1\omega^2]$ de deux formes linéaires $\omega^1 = a_\varkappa dx^\varkappa$ et $\omega^2 = b_\lambda dx^\lambda$.

On a

$$[\omega^1\omega^2] = \tfrac{1}{2}(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)[dx^\varkappa dx^\lambda]$$

et par suite, selon (6),

$$L(\omega^1) = L(a_\varkappa)dx^\varkappa, \quad L(\omega^2) = L(b_\lambda)dx^\lambda, \tag{11'}$$

$$L([\omega^1\omega^2]) = \tfrac{1}{2}L(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)[dx^\varkappa dx^\lambda]. \tag{11''}$$

En calculant la dérivée $L(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)$ on trouve d'après l'équation (4) du n° 106

$$L(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa) = X^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho}(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa) + \\ + (a_\varrho b_\lambda - a_\lambda b_\varrho)\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varkappa} + (a_\varkappa b_\varrho - a_\varrho b_\varkappa)\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\lambda}$$

ou, si l'on tient compte de l'équation (9),

$$L(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa) = L(a_\varkappa)b_\lambda - L(a_\lambda)b_\varkappa + a_\varkappa L(b_\lambda) - a_\lambda X(b_\varkappa).$$

En multipliant les deux membres par $[dx^\varkappa dx^\lambda]$ et en sommant par rapport aux indices $\varkappa$ et λ, on en déduit la relation suivante:

$$L(a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa)[dx^\varkappa dx^\lambda] = 2L(a_\varkappa)b_\lambda[dx^\varkappa dx^\lambda] + 2a_\varkappa L(b_\lambda)[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

Si l'on porte cette expression dans l'équation (11'') et que l'on tient compte des équations (11') on obtient finalement

$$L([\omega^1\omega^2]) = [L(\omega^1)\omega^2] + [\omega^1 L(\omega^2)]$$

c'est ce qui démontre la seconde partie du Théorème 1 dans ce cas particulier. Il est évident qu'un calcul semblable au précédent permet de vérifier la seconde partie du Théorème 1 pour deux formes Φ_p et Ψ_q de degrés arbitraires.

Imaginons maintenant dans le domaine D de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ un champ d'intégration orienté E_{p+1} limité par une variété ∂E_{p+1} qui est munie d'un hyperplan tangent variant continûment sur ∂E_{p+1} et supposons que la variété ∂E_{p+1} soit orientée d'une manière cohérente avec l'orientation du champ E_p (n° 101). En assujettissant le champ E_{p+1} et sa frontière ∂E_{p+1} à la transformation (7) du n° 103

$$\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x, t)$$

du pseudo-groupe Xf on obtient dans D un nouveau champ E^t_{p+1} limité par une variété ∂E^t_{p+1}. Supposons encore que dans D soit donnée une forme différentielle Φ_p et considérons l'intégrale

$$I(t) = \oint_{\partial E^t_{p+1}} \Phi_p. \tag{12}$$

D'après la formule (8) on a

$$I'(t) = \oint_{\partial E^t_{p+1}} L(\Phi_p)$$

ou, selon le théorème de Stokes,

$$I'(t) = \int_{E^t_{p+1}} dL(\Phi_p). \tag{13}$$

D'autre part le même théorème appliqué à l'intégrale (12) conduit à l'équation suivante

$$I(t) = \int_{E^t_{p+1}} d\Phi_p,$$

d'où, en vertu de la formule (8), résulte la relation

$$I'(t) = \int_{E^t_{p+1}} L(d\Phi_p). \tag{14}$$

Le champ d'intégration E_{p+1} étant arbitraire le rapprochement des équations (13) et (14) donne l'égalité suivante:

$$L(d\Phi_p) = dL(\Phi_p).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La dérivation de Lie et la dérivation extérieure sont des opérations permutables.*

108. La dérivée de Lie d'un vecteur contravariant. Nous définirons maintenant la dérivée de Lie d'un vecteur contravariant, cette notion étant aussi d'un usage utile dans l'étude des invariants intégraux.

Considérons à cet effet dans le domaine D, défini au n° 99, un champ des vecteurs contravariants $\{b^\varkappa\}$ et un champ des vecteurs covariants

$\{a_\varkappa\}$. En appliquant l'opérateur différentiel $Xf = X^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}$ au produit scalaire $a_\varkappa b^\varkappa$ on obtient

$$X(a_\varkappa b^\varkappa) = \left(X^\varrho \frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\varrho}\right) b^\varkappa + a_\varkappa X^\varrho \frac{\partial b^\varkappa}{\partial x^\varrho}.$$

Si l'on y remplace la somme $X^\varrho \frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\varrho}$ par l'expression

$$L(a_\varkappa) - a_\varrho \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varkappa},$$

tirée de l'équation (9) du n° 106, on trouve

$$X(a_\varkappa b^\varkappa) = L(a_\varkappa) b^\varkappa - a_\varrho \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varkappa} b^\varkappa + a_\varkappa X^\varrho \frac{\partial b^\varkappa}{\partial x^\varrho}.$$

En changeant le rôle des indices $\varkappa$ et ϱ dans la deuxième terme du second membre il vient

$$X(a_\varkappa b^\varkappa) = L(a_\varkappa) b^\varkappa + a_\varkappa \left(X^\varrho \frac{\partial b^\varkappa}{\partial x^\varrho} - b^\varrho \frac{\partial X^\varkappa}{\partial x^\varrho}\right).$$

Les expressions $X(a_\varkappa b^\varkappa)$ et $L(a_\varkappa) b^\varkappa$ étant invariantes pour tout changement de variables il en est de même de la somme

$$a_\varkappa \left(X^\varrho \frac{\partial b^\varkappa}{\partial x^\varrho} - b^\varrho \frac{\partial X^\varkappa}{\partial x^\varrho}\right).$$

Ceci étant vrai quelque soit le vecteur $a_\varkappa$ il s'en suit que les expressions en parenthèses sont les composantes d'un vecteur contravariant. On les désigne par les notations

$$L(b^\varkappa) = X^\varrho \frac{\partial b^\varkappa}{\partial x^\varrho} - b^\varrho \frac{\partial X^\varkappa}{\partial x^\varrho} \tag{15}$$

et on les nomme les *composantes* de la dérivée de Lie du vecteur contravariant.

Il est évident qu'on a en particulier

$$L(X^\varkappa) = 0,$$

d'où le

THÉORÈME 3. *Le vecteur $\vec{X}$ qui définit la transformation infinitésimal $Xf = X^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}$ se comporte comme un vecteur constant relativement à la dérivée de Lie déduite de ce vecteur.*

Envisageons maintenant dans le domaine D un champs de p-vecteurs covariants $\{a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$. Les produits contractés $a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma$ étant les composantes d'un $(p-1)$-vecteur covariant les composantes de sa dérivée de Lie s'écriront (équ. (7))

$$L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma) = X^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho}(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma) + \sum_{i=1}^{p-1} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^{\varkappa_i}}$$

ou

$$L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma) = b^\sigma X^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} + a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} X^\varrho \frac{\partial b^\sigma}{\partial x^\varrho} + \sum_{i=1}^{p-1} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^{\varkappa_i}}. \tag{16}$$

D'autre part en vertu des formules (7) et (15) on a respectivement

$$L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma) = b^\sigma X^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} + a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} X^\varrho \frac{\partial b^\sigma}{\partial x^\varrho} + \sum_{i=1}^{p-1} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{p+1}\sigma} b^\sigma \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^{\varkappa_i}}$$

et

$$L(b^\sigma) = X^\varrho \frac{\partial b^\sigma}{\partial x^\varrho} - b^\varrho \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\varrho}.$$

Si l'on porte ces expressions dans l'équation (16), il viendra

$$L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} b^\sigma) = L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma}) b^\sigma + a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma} L(b^\sigma). \tag{17}$$

Ceci nous permet d'énoncer le

THÉORÈME 4. *La dérivée de Lie du produit contracté d'un p-vecteur covariant et d'un vecteur contravariant obéit à la même loi que la dérivée absolue dans le Calcul tensoriel.*

De ce théorème résulte en particulier, conformément au Théorème 3, la relation suivante

$$L(a_{\varkappa_1\ldots a_{p-1}\sigma} X^\sigma) = X^\sigma L(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\sigma}).$$

Remarque. La formule (15) pour la dérivée de Lie d'un vecteur contravariant se généralise facilement; pour la dérivée de Lie d'un p-vecteur contravariant on a la formule

$$L(b^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) = X^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho} b^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} - \sum_{i=1}^{p} b^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_p} \frac{\partial X^{\varkappa_i}}{\partial x^\varrho}.$$

109. Critères d'invariance. En revenant aux considérations des numéros précédents reprenons la formule (8) du n° 106

$$I'(t) = \int_{E_p^t} L(\Phi_p)$$

de laquelle résulte en particulier

$$I'(0) = \int_{E_p} L(\Phi_p).$$

Pour que l'intégrale $\int \Phi_p$ soit invariante pour le pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit, d'après ces formules, qu'il soit $I'(0)$ quelque soit le champ d'intégration. Cette dernière condition étant équivalente à la relation $L(\Phi_p) = 0$, on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Pour que l'intégrale $\int \Phi_p$ soit un invariant du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit que la dérivée de Lie de la forme Φ_p soit nulle.*

Eu égard à la formule (6) du n° 106 on peut dire aussi

THÉORÈME 5'. *Pour que l'intégrale de la forme différentielle*

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} [dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

soit un invariant du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'il soit

$$L(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) = 0.$$

Exemple. Considérons l'intégrale $\int \Omega$, où $\Omega = M[dx^1 dx^2 \ldots dx^n]$. Pour que cette intégrale reste invariante par les transformations du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'il soit $L(\Omega) = 0$. Or, d'après la formule (10) du n° 106, cette condition est équivalente à la relation $\partial M X^\varrho / \partial x^\varrho = 0$. Si en particulier $M = 1$, il doit être $\partial X^\varrho / \partial x^\varrho = 0$, c'est-à-dire la divergence du vecteur $\vec{X}$ doit s'annuler.

Si E_p est un champ fini de l'espace euclidien ayant la frontière assez régulière, l'intégrale $\int_E [dx^1 dx^2 \ldots dx^n]$ représente son volume. Nous pouvons

donc dire: pour que le pseudo-groupe Xf conserve les volumes dans l'espace euclidien, il faut et il suffit que la divergence du vecteur $\vec{X}$ soit nulle.

Du Théorème 5 et du Théorème 1 du n° 102 résulte immédiatement le

THÉORÈME 6. *Pour qu'une forme différentielle soit invariante par les transformations du pseudo-groupe $Xf = X^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}$, il faut et il suffit que sa dérivée de Lie relative au vecteur $\vec{X} = \{X^\varrho\}$ soit nulle.*

Ajoutons encore que la seconde partie du Théorème 1 (n° 107) permet d'énoncer le

THÉORÈME 7. *Si les formes différentielles Φ_p et Ψ_q sont invariantes pour le pseudo-groupe Xf, il en est de même de leur produit extérieur.*

110. Produit intérieur d'une forme et d'un vecteur contravariant. Nous avons vu que la différentiation extérieure permet de déduire de toute forme invariante de degré p une autre forme invariante de degré $p+1$. Nous définirons maintenant une opération algébrique qui à une forme invariante de degré p fait correspondre une forme invariante de degré $p-1$.

Considérons pour cela dans un ouvert U de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ une forme différentielle

$$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} [dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

et un champ de vecteurs contravariants $\vec{X} = \{X^\varkappa\}$. Les produits contractés $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}\varrho} X^\varrho$ étant les composantes d'un $(p-1)$-vecteur on peut leur associer une forme différentielle de degré $p-1$ que l'on désigne par la notation

$$\underline{\vec{X}} \big| \Phi_p = \frac{1}{(p-1)!} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho} X^\varrho [dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_{p-1}}] \tag{18}$$

et que l'on appelle le *produit intérieur* de la forme Φ_p et du vecteur $\vec{X}$ (1). Il sera commode de convenir que le produit intérieur d'une fonction f (forme de degré zéro) et d'un vecteur est égale à zéro:

$$\underline{\vec{X}} \big| f = 0.$$

(1) Le produit contracté a été introduit par E. Cartan [7] et son symbole par N. Bourbaki [1].

Il est évident que le produit intérieur est une opération linéaire par rapport à $\vec{X}$ et qu'il est indépendant du choix des variables.

THÉORÈME 8. *Si une forme Φ_p satisfait à la relation $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$, son rang est au plus égal à $n-1$.*

Remarquons pour le montrer que les coordonnées $x^\varkappa$ peuvent être choisies de telle manière qu'il soit $X^1 = X^2 = \ldots = X^{n-1} = 0$, $X^n = 1$ dans un voisinage d'un point arbitraire $x \in U$ (n° 104, Remarque). On aura par suite d'après (18)

$$\underline{\vec{X}}|\Phi_p = \frac{1}{(p-1)!}\, a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}n}[dx^{\varkappa_1}dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_{p-1}}].$$

L'hypothèse $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$ entraînera donc les égalités $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}n} = 0$; ceci montre que Φ_p ne contient que les différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^{n-1}$ et que, par suite, son rang est au plus égal à $n-1$ (vol. I, n° 14).

THÉORÈME 9. *On a $\underline{\vec{X}}|\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$ quelque soit la forme Φ_p.*

En effet on a d'après (18)

$$\underline{X}|\underline{X}|\Phi_p = \frac{1}{(p-2)!}\, a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-2}\varrho\sigma}X^\varrho X^\sigma[dx^{\varkappa_1}dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_{p-2}}].$$

Comme les coefficients $a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho\sigma}$ sont antisymétriques en les indices ϱ et σ, tous les coefficients du second membre sont nuls.

THÉORÈME 10. *On a*

$$\underline{\vec{X}}|[\Phi_p\Psi_q] = [(\underline{\vec{X}}|\Phi_p)\Psi_q] + (-1)^p[\Phi_p\underline{X}|\Psi_q] \tag{19}$$

quelles que soient les formes différentielles Φ_p et Ψ_q.

Ce théorème est évidemment vrai, si l'un des facteurs du produit $[\Phi_p\Psi_q]$ est une fonction; pour le démontrer dans le cas général posons

$$\Phi_p = \frac{1}{p!}\, a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1}\ldots dx^{\varkappa_p}] \quad \text{et} \quad \Psi_q = \frac{1}{q!}\, b_{\lambda_1\ldots\lambda_q}[dx^{\lambda_1}\ldots dx^{\lambda_q}].$$

La formule (19) deviendra alors équivalente à la relation suivante

$$X^\varrho a_{[\varrho\varkappa_2\ldots\varkappa_p}b_{\varkappa_{p+1}\ldots}b_{\varkappa_{p+q}]} = X^\varrho a_{\varrho[\varkappa_2\ldots\varkappa_p}b_{\varkappa_{p+1}\ldots}b_{\varkappa_{p+q}]} + \\ + (-1)^p X^\varrho a_{[\varkappa_2\ldots\varkappa_{p+1}}b_{\varrho\varkappa_{p+2}\ldots\varkappa_{p+q}]}$$

qui peut être facilement vérifiée.

THÉORÈME 11. *Les opérateurs $\underline{\vec{X}}|$ et L_X sont permutables:*

$$\underline{\vec{X}}|L_X(\Phi_p) = L_X(\underline{\vec{X}}|\Phi_p).$$

Pour démontrer ce théorème il suffit de faire voir que l'on a

$$X^\varrho L_X(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho}) = L_X(X^\varrho a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho}).$$

Or, d'après la formule (17) du n° 108 on a

$$L_X(X^\varrho a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho}) = a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho}L_X(X^\varrho) + X^\varrho L_X(a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-1}\varrho});$$

le facteur $L_X(X^\varrho)$ étant nul en vertu du Théorème 3 du n° 108 il en résulte la relation demandée.

Nous avons vu (n° 107, Th. 2) que les opérateurs d et L_X sont aussi permutables, il en est autrement des opérateurs d et $\underline{\vec{X}}|$ comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 12. *Les trois opérateurs d, $\underline{\vec{X}}|$ et L_X sont liés par la relation suivante:*

$$d(\underline{\vec{X}}|\Phi_p) - \underline{\vec{X}}|d\Phi_p = L_X(\Phi_p),$$

où Φ_p est une forme différentielle arbitraire.

Nous vérifierons cette équation en nous bornant au cas d'une forme du second degré, la méthode du calcul étant générale. En posant $\Phi_2 = \frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$ on aura

$$d\Phi_2 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial a_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu}\right)[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]$$

et, par suite, d'après la formule (18)

$$\underline{\vec{X}}|d\Phi_2 = \frac{1}{2!}X^\varrho\left(\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial a_{\mu\varrho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\varrho\lambda}}{\partial x^\mu}\right)[dx^\lambda dx^\mu],$$

ce qui peut être écrit

$$\underline{\vec{X}}|d\Phi_2 = \frac{1}{2}X^\varrho\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varrho}[dx^\lambda dx^\mu] + \frac{1}{2}X^\varrho\left(\frac{\partial a_{\mu\varrho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\varrho\lambda}}{\partial x^\mu}\right)[dx^\lambda dx^\mu]. \tag{20}$$

D'autre part on a

$$\underline{\vec{X}}|\Phi_2 = -X^\varrho a_{\varrho\lambda}dx^\lambda$$

et par suite

$$d(\underline{\vec{X}}|\Phi_2) = -\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\mu}a_{\varrho\lambda}[dx^\mu dx^\lambda] - X^\varrho\frac{\partial a_{\varrho\lambda}}{\partial x^\mu}[dx^\mu dx^\lambda].$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$d(\underline{\vec{X}}|\Phi_2) = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\mu}a_{\varrho\lambda} - \frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\lambda}a_{\varrho\mu}\right) + \frac{1}{2}X^\varrho\left(\frac{\partial a_{\varrho\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a_{\varrho\mu}}{\partial x^\lambda}\right)\right\} \times [dx^\lambda dx^\mu].$$

En retranchant de cette équation l'équation (20) il vient

$$d(\underline{\vec{X}}|\Phi_2) - \underline{\vec{X}}|d\Phi_2 = \frac{1}{2}\left(X^\varrho\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varrho} + a_{\varrho\mu}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\lambda} + a_{\lambda\varrho}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\mu}\right)[dx^\lambda dx^\mu].$$

L'expression en parenthèses étant égale à $L_X(a_{\lambda\mu})$ (n° 106, équ. (4)) on arrive ainsi à la relation demandée pour $p = 2$.

Corollaire. *Si une forme différentielle Φ_p est fermée et si elle satisfait à la relation $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$, elle est invariante pour les transformations du pseudo-groupe Xf.*

Remarque. Au cours de ce livre nous avons connu trois opérateurs suivants d, L_X et $\underline{\vec{X}}|$ qui permettent d'obtenir d'une forme différentielle de degré p une forme de degré respectif $p+1$, p et $p-1$. En désignant par D l'une quelconque de ces opérateur on peut exprimer son action sur une forme par la formule suivante

$$D\Phi_p = \Phi_{p+r},$$

r étant respectivement égal à $+1$, 0 et -1. Les trois opérations envisagées sont linéaires et appliquées au produit extérieur de deux formes différentielles Φ_p et Ψ_q elles obéissent à une loi de la forme suivante:

$$D[\Phi_p\Psi_q] = [(D\Phi_p)\Psi_q] + (-1)^{pr}[\Phi_p D\Psi_q] \qquad (r = 1, 0, -1)$$

comme le montrent les équations (13) du n° 4, le Théorème 1 du n° 107 et le Théorème 10 du n° 110. Les opérations jouissant de cette propriété ont été l'objet d'une étude de A. Frölicher et A. Nijenhuis [25].

§ 4. Invariants attachés aux trajectoires

111. Définition. Désignons, comme au n° 99, par D un domaine formé d'un ouvert connexe de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ et de sa frontière et supposons que dans D soit donné un pseudo-groupe à un paramètre représenté par la transformation infinitésimale $Xf = X^\varrho\frac{\partial f}{\partial x^\varrho}$. L'expression μXf, où μ est une fonction arbitraire du point donné dans D, représente un faisceau des transformations infinitésimales. Les équations finies des

transformations du pseudo-groupe à un paramètre attachées à μXf sont les intégrales du système des équations

$$(1) \qquad \frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = \mu dt$$

qui admet les mêmes intégrales premières pour tous les choix du facteur μ; il s'en suit que les trajectoires du pseudo-groupe μXf sont les mêmes que celles du pseudo-groupe Xf, bien qu'elles sont parcourues avec des vitesses différentes qui dépendent du choix de la fonction μ.

Si une intégrale ou une forme différentielle est invariante pour les transformations du tout pseudo-groupe μXf, quelque soit μ, on dit qu'elle est un *invariant attaché aux trajectoires* du pseudo-groupe Xf (v. [29], p. 236). Pour faire mieux voir la différence en les invariants proprement dits et les invariants attachés aux trajectoires imaginons dans D l'arc L d'une ligne défini par les équations $x^\varkappa = x^\varkappa(u)$ $(u_0 \leqslant u \leqslant u_1)$ et les trajectoires du pseudo-groupe Xf issues des points de L; celles-ci forment une espèce de surface cylindrique S dont les génératrices sont les trajectoires. Si l'on assujettit les points de L aux transformations du pseudo-groupe μXf, on obtient sur S, pour chaque valeur de t, une nouvelle ligne L^t. Le facteur μ étant arbitraire on peut le choisir de manière que L^t coincide avec un arc simple donné à l'avance sur la surface S et reliant les trajectoires issues des extrémités de l'arc L. Si, ω étant une forme différentielle linéaire, l'intégrale $\int_L \omega$ est un invariant attaché aux trajectoires, elle a la même valeur pour tout arc de cette espèce. Si l'arc L est fermé, la surface S devient un tube, et si l'intégrale $\oint_L \omega$ est un invariant attaché aux trajectoires, elle a la même valeur pour toute ligne fermée homéomorphe à un cercle, faisant le tour de tube.

112. Critères d'invariance. Remarquons maintenant que le système des équations (1) a les mêmes intégrales premières que celui que l'on obtient en posant $\mu = 1$ (n° 104). Désignons les comme auparavant par $f^1, f^2, \ldots, f^{n-1}$ et par f^n une fonction arbitraire indépendante des intégrales premières. Si l'on prend ces fonctions comme nouvelles variables dans un voisinage d'un point arbitraire du domaine D, le système (1) pourra être remplacé par les équations

$$\frac{dx^1}{0} = \frac{dx^2}{0} = \ldots = \frac{dx^{n-1}}{0} = \frac{dx^n}{1} = \nu dt,$$

ν étant fonction quelconque des variables $x^\varkappa$. Un raisonnement tout semblable à celui du n° 105 permet de montrer qu'une forme invariante attachée aux trajectoires du pseudo-groupe Xf ne doit contenir ni x^n

ni dx^n, et qu'inversement une forme satisfaisante à cette condition est un invariant attaché aux trajectoires. En revenant aux variables anciennes nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour qu'une forme différentielle Φ_p (l'intégrale $\int\Phi_p$) soit un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'elle puisse s'exprimer au moyen des intégrales premières du systèmes des équations* (1) *et de leurs différentielles.*

Nous présenterons maintenant un autre critère dans l'application plus commode.

THÉORÈME 2. *Pour que l'intégrale $\int\Phi_p$ d'une forme différentielle $\Phi_p = \frac{1}{p!}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1}\ldots dx^{\varkappa_p}]$ soit un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'il soit*

$$L_X(\Phi_p) = 0 \quad \textit{et} \quad \underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0.$$

Pour démontrer ce théorème remarquons que, d'après la définition et le Théorème 5 du n° 109, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\int\Phi_p$ soit un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf s'expriment par les relations

$$L_{\mu X}(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) = 0$$

qui, développées suivant la formule (7) du n° 106, auront la forme

$$\mu X^\varrho \frac{\partial a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}}{\partial x^\varrho} + \sum_{i=1}^{p} a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_p}\frac{\partial(\mu X^\varrho)}{\partial x^{\varkappa_i}} = 0$$

ou, d'après la même formule,

$$\mu L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) + \sum_{i=1}^{p} X^\varrho a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_p}\frac{\partial\mu}{\partial x^{\varkappa_i}} = 0.$$

Pour $\mu = 1$ on obtient la condition $L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) = 0$ ou $L_X(\Phi_p) = 0$ et par suite la relation précédente se réduit à la suivante:

$$\sum_{i=1}^{p} X^\varrho a_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_p}\frac{\partial\mu}{\partial x^{\varkappa_i}} = 0.$$

En posant successivement $\mu = x^{\varkappa_1}, x^{\varkappa_2}, \ldots, x^{\varkappa_p}$ on trouve qu'il doit être

$$X^\varrho a_{\varrho\varkappa_2\ldots\varkappa_p} = 0, \quad X^\varrho a_{\varkappa_1\varrho\varkappa_2\ldots\varkappa_p} = 0, \quad \ldots, \quad X^\varrho a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}\varrho} = 0.$$

Il est évident que ces conditions seront englobées par la dernière, si l'on demande qu'elle soit verifiée par toutes des combinaisons $p-1$ à $p-1$ des éléments $1, 2, \ldots, n$. D'après la formule (18) du n° 110 elle est équivalente à la relation $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$ ce qui achève la démonstration.

Du Théorème 2 résultent plusieurs conséquences.

THÉORÈME 3. *Si l'intégrale $\int\Phi_p$ est un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf, il en est de même de l'intégrale $\int d\Phi_p$.*

En effet, on a par hypothèse $L_X(\Phi_p) = 0$ et $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$. En vertu du Théorème 12 du n° 110 il en résulte la relation $\underline{\vec{X}}|d\Phi_p = 0$. D'autre part, les opérations L_X et d étant permutables (Th. 2. du n° 107) de la relation $dL_X(\Phi_p) = 0$ on obtient $L_X(d\Phi_p) = 0$; on voit ainsi que la forme $d\Phi_p$ vérifie les conditions du Théorème 2.

THÉORÈME 4. *Si l'intégrale $\int\Phi_p$ est un invariant absolu du pseudo-groupe Xf, l'intégrale $\int\underline{\vec{X}}|\Phi_p$ est un invariant aux trajectoires.*

Posons $\Psi_{p-1} = \underline{\vec{X}}|\Phi_p$; la forme Ψ_{p-1} vérifie la relation $\underline{\vec{X}}|\Psi_{p-1} = 0$ (Th. 9 du n° 110). Les opérations L_X et $\underline{\vec{X}}|$ étant permutables (Th. 11 du n° 110) on a

$$L_X(\underline{\vec{X}}|\Phi_p) = \underline{\vec{X}}|L_X(\Phi_p)$$

ou

$$L_X(\Psi_{p-1}) = \underline{\vec{X}}|L_X(\Phi_p).$$

Φ_p satisfaisant par hypothèse à la relation $L_X(\Phi_p) = 0$ on en déduit l'équation $L_X(\Psi_{p-1}) = 0$ qui avec l'équation $\underline{\vec{X}}|\Psi_{p-1} = 0$ prouve que Ψ_{p-1} est un invariant attaché aux trajectoires.

THÉORÈME 5. *Pour que l'intégrale d'une forme fermée Φ_p soit un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'il soit $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$.*

Si les conditions $d\Phi_p = 0$ et $\underline{\vec{X}}|\Phi_p = 0$ sont vérifiées, on a $L_X(\Phi_p) = 0$ (Th. 12 du n° 110) et, par conséquent, l'intégrale $\int\Phi_p$ est un invariant attaché aux trajectoires (Th. 2); on démontre de la même manière le suivant

THÉORÈME 6. *Pour que l'intégrale d'une forme Ω_n de degré n soit un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe Xf, il faut et il suffit qu'il soit $\underline{\vec{X}}|\Omega_n = 0$.*

Le degré de Ω_n étant égal au nombre des variables on a $d\Omega_n = 0$, d'où, d'après le Théorème 12 du n° 110, résulte la proposition à démontrer.

§ 5. Invariants intégraux de la Mécanique

113. Préliminaires. Soit donné un système des équations

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = dt \tag{1}$$

dont les dénominateurs $X^\varkappa$ contiennent, en outre des variables $x^\varkappa$, la variable t que nous continuerons d'appeler le temps. Pour étendre à ce cas, qui se présente en particulier dans la Mécanique, les notions et les méthodes exposées dans ce Chapitre, il faut s'imaginer que l'on se trouve dans l'espace-temps R^{n+1} qui est le produit de l'espace euclidien $R^n(x^\varkappa)$ et de la droite $R^1(t)$ et que les coefficients $X^\varkappa$ et les fonctions dont nous aurons affaire soient données dans un ouvert connexe de R^{n+1}.

Nous admettrons aussi, comme dans la théorie de la Relativité généralisée, que la distinction entre les variables $x^\varkappa$ et t n'a rien d'essentiel et nous donnerons aux résultats d'investigations une forme indépendante de tout môde de repérage de l'espace-temps. Nous remplacerons pour cela le système des équations (1) par les équations

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = \frac{dt}{1} = \mu\, du, \tag{2}$$

où u désigne une variable auxiliaire, indépendante des variables $x^\varkappa$ et t, et μ une fonction du point $(x^\varkappa, t)$ de l'espace R^{n+1}. Au lieu du vecteur $\vec{X} = \{X^\varkappa\}$ on doit donc se servir du vecteur

$$\vec{T} = (X^1, X^2, \ldots, X^n, 1) \tag{3}$$

et la transformation infinitésimale Xf doit être remplacée par

$$Tf = Xf + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \left(Xf = X^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}\right).$$

Si une courbe $x = x(u)$, $t = t(u)$ satisfait aux équations (2), nous dirons qu'elle est une *trajectoire du pseudo-groupe* Tf.

114. Formes complétées. Supposons que dans un ouvert U de l'espace R^{n+1} soient données deux formes différentielles

$$\Phi_p = \frac{1}{p!}\, a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

et

$$\Psi_p = \Phi_p + \frac{1}{(p-1)!}\, b_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}}[dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_{p-1}} dt].$$

Pour que la forme Ψ_p soit un invariant absolu du pseudo-groupe Tf, il faut et il suffit qu'il soit

$$L_T(\Psi_p) = 0; \tag{4}$$

si l'on veut qu'elle soit un invariant attaché aux trajectoires de ce pseudo-groupe, il faut demander qu'il soit aussi

$$\underline{\vec{T}}\,\Big|\,\Psi_p = 0 \tag{5}$$

(n° 112, Th. 2); eu égard à la définition (3) du vecteur $\vec{T}$ la relation (5) peut être écrite

$$\underline{\vec{X}}\,\Big|\,\Phi_p + \frac{1}{(p-1)!}\, b_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_{p-1}}].$$

Si dans la forme Ψ_p ne figure pas la différentielle dt, c'est-à-dire si l'on a $b_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}} = 0$, les deux relations (4) et (5) se réduiront aux suivantes:

$$L_X(a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}) + \frac{\partial a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}}{\partial t} = 0, \qquad \underline{\vec{X}}\,\Big|\,\Phi_p = 0.$$

Pour s'en convaincre il s'suffit d'appliquer la formule (7) du n° 106, en admettant que le nombre de variables soit égal à $n+1$ et en posant $x^{n+1} = t$ et $X^{n+1} = 1$.

On doit à E. Cartan une élégante méthode qui permet de déduire d'une forme invariante du pseudo-groupe Tf un invariant attaché à ses trajectoires ([7], p. 28). Pour présenter cette méthode nous supposons que dans un ouvert de l'espace-temps R^{n+1} soit donnée la forme

$$\Phi_p = \frac{1}{p!}\, a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}]$$

et nous lui associerons la forme

$$\tilde{\Phi}_p = \frac{1}{p!}\, a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[(dx^{\varkappa_1} - X^{\varkappa_1} dt)(dx^{\varkappa_2} - X^{\varkappa_2} dt) \ldots \times (dx^{\varkappa_p} - X^{\varkappa_p} dt)].$$

Nous convenons de dire que $\tilde{\Phi}_p$ s'obtient en complétant la forme Φ_p au moyen des équations (1); de même nous donnerons à l'intégrale $\int \tilde{\Phi}_p$,

étendue à un domaine de l'espace R^{n+1} le nom *d'intégrale complétée*. On voit bien que $\tilde{\Phi}_p$ est liée à Φ_p d'une manière indépendante du choix de variables.

Prenons pour simplifier l'écriture une forme du troisième degré

$$\Phi = \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]; \tag{6}$$

on aura donc

$$\tilde{\Phi} = \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu}[(dx^\varkappa - X^\varkappa dt)(dx^\lambda - X^\lambda dt)(dx^\mu - X^\mu dt)].$$

En developpant le produit extérieur du second membre on trouve

$$\tilde{\Phi} = \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu] - \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu} X^\mu [dx^\varkappa dx^\lambda dt] -$$
$$- \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu} X^\lambda [dx^\varkappa dt dx^\mu] - \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu} X^\varkappa [dt dx^\lambda dx^\mu].$$

Si l'on change le rôle des indices $\varkappa$ et μ dans le dernier terme du second membre, on obtient l'expression $\frac{1}{3!} a_{\mu\lambda\varkappa} X^\mu [dt dx^\lambda dx^\varkappa]$ qui est évidemment égale au second terme; on peut faire voir d'une manière analogue qu'il en est de même de l'avant dernier terme. On arrive ainsi à la formule

$$\tilde{\Phi} = \tfrac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu] - \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda\mu} X^\mu [dx^\varkappa dx^\lambda dt].$$

Remarquons maintenant que la forme $\frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda\mu} X^\mu [dx^\varkappa dx^\lambda]$ est égale à l'expression $\underline{\vec{X}}|\Phi$ (n° 110, équ. (18)), on aura donc

$$\tilde{\Phi} = \Phi - [(\underline{\vec{X}}|\Phi) dt];$$

la formule (6) ne contenant pas la différentielle dt on a $\underline{\vec{X}}|\Phi = \underline{\vec{T}}|\Phi$ et par suite

$$\tilde{\Phi} = \Phi - [\underline{\vec{T}}|\Phi) dt]. \tag{7}$$

Cette formule est valable quel que soit le degré de la forme Φ.

THÉORÈME 1. *La forme $\tilde{\Phi}$ satisfait à la relation*

$$\underline{\vec{T}}|\tilde{\Phi} = 0.$$

En effet, si l'on soumet l'équation (7) à l'operation $\underline{\vec{T}}|$, on trouve

$$\underline{\vec{T}}|\tilde{\Phi} = \underline{\vec{T}}|\Phi - \underline{\vec{T}}|[(\vec{T}\Phi) dt].$$

Si l'on applique le Théorème 10 du n° 110 au deuxième terme du second membre, il viendra

$$\underline{\vec{T}}|\tilde{\Phi} = \underline{\vec{T}}|\Phi - [(\underline{\vec{T}}|\underline{\vec{T}}|\Phi) dt - (\underline{\vec{T}}|\Phi)(\underline{\vec{T}}|dt)].$$

Comme on a $\underline{\vec{T}}|\underline{\vec{T}}|\Phi = 0$ (Th. 9 du n° 110) et $\underline{\vec{T}}|dt = 1$, on aboutit à l'équation $\vec{T}\tilde{\Phi} = 0$ conformément au théorème à démontrer.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si une forme différentielle Φ, ne contenant pas la différentielle dt, est invariante pour les transformations du pseudo-groupe Tf ($L_T\Phi = 0$), la forme complétée $\tilde{\Phi}$ est un invariant attaché aux trajectoires du pseudo-groupe $Tf = 0$.*

En effet, supposons qu'on ait

$$L_T(\Phi) = 0. \tag{8}$$

En vertu du Théorème 1 on a $\underline{\vec{T}}|(\tilde{\Phi}) = 0$; il suffit donc de prouver la relation $L_T(\tilde{\Phi}) = 0$ pour démontrer le théorème (n° 112, Th. 2). Or, en tenant compte de l'hypothèse (8) et de l'équation (7) on a

$$L_T(\tilde{\Phi}) = -L_T[(\underline{\vec{T}}|\Phi) dt].$$

Eu égard au Théorème 1 du n° 107 ceci s'écrira comme il suit

$$L_T(\tilde{\Phi}) = -[L_T(\underline{\vec{T}}|\Phi) dt] - [\underline{\vec{T}}|\Phi L_T(dt)]$$

ou, en vertu de la relation $L_T(dt) = 0$,

$$L_T(\tilde{\Phi}) = -[L_T(\underline{\vec{T}}|\Phi) dt].$$

Les opérations L_T et $\underline{\vec{T}}|$ étant permutables (Th. 11 du n° 110) on en déduit

$$L_T(\tilde{\Phi}) = -[\underline{\vec{T}}|L_T(\Phi) dt]$$

et par suite, d'après l'hypothèse (8), on a

$$L_T(\tilde{\Phi}) = 0,$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

115. Théorèmes de Poincaré et de Cartan. Soit donné un système matériel (S) soumis aux liaisons holonomes et tel que la somme des travaux élémentaires des forces de liaison est nulle à chaque instant t pour

tout déplacement compatible avec les liaisons et qu'il en est de même de la somme des travaux élémentaires des forces aux quelles le système (S) est soumis. On sait ([6], p. 7-12) que, dans ces hypothèses, les équations différentielles du mouvement d'un point matériel du système peuvent être présentées sous la forme canonique de Hamilton

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où H (l'énergie généralisée) est une fonction des coordonnées généralisées q^i, des composantes de la quantité de mouvement p_i et du temps t.

Nous allons démontrer le théorème suivant de Poincaré:

THÉORÈME 3. *Les intégrales $\int\Omega$ et $\int\omega$ des formes différentielles*

$$\Omega = dp^i dq_i \quad \text{et} \quad \omega = p_i dq^i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

sont respectivement l'invariant absolu et l'invariant relatif du système des équations de Hamilton quelle que soit la fonction H.

Pour démontrer ce théorème nous changerons de notations en posant

$$x^i = q^i, \quad x^{r+i} = p_i, \quad x^{2r+1} = t \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

ce qui rendra plus commode l'application des formules et des relations établies précédemment. Avec ces notations le système de Hamilton s'écrira

$$\frac{dx^i}{\dfrac{\partial H}{\partial x^{r+i}}} = \frac{dx^{r+i}}{-\dfrac{\partial H}{\partial x^i}} = \frac{dt}{1}; \tag{10}$$

l lui correspondra donc le vecteur

$$\vec{T} = \left(\frac{\partial H}{\partial x^{r+1}}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x^{2r}}, -\frac{\partial H}{\partial x^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial x^r}, 1\right) \tag{11}$$

et la transformation infinitésimale (v. n° 104)

$$Tf = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial H}{\partial x^{r+i}}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{12}$$

Les formes Ω et ω s'écriront maintenant

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r}[dx^{r+i}dx^i] \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{i=1}^{r} x^{r+i}dx^i;$$

comme on a

$$d\omega = \Omega, \tag{13}$$

il suffit, pour démontrer le théorème de Poincaré, de faire voir que Ω est un invariant absolu du pseudo-groupe Tf. Remarquons pour cela que la forme Ω peut s'écrire comme il suit

$$\Omega = -\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda] \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 2r),$$

où les coefficients $I_{\varkappa\lambda}$ sont définis par les relations

$$I_{\varkappa\lambda} + I_{\lambda\varkappa} = 0, \quad I_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda - \varkappa = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda - \varkappa| \neq r. \end{cases} \tag{14}$$

Pour calculer les expressions $L_T(I_{\varkappa\lambda})$ nous ferons usage des formules (4) du n° 106 en y posant $n = 2r+1$, $X^i = \partial H/\partial x^{r+1}$, $X^{r+1} = -\partial H/\partial x^i$, $X^{2r+1} = 1$. Les coefficients $I_{\varkappa\lambda}$ étant des constantes on aura

$$L_T(I_{\varkappa\lambda}) = \sum_{i=1}^{r}\left\{I_{i\lambda}\frac{\partial H}{\partial x^{r+i}} - I_{r+i\lambda}\frac{\partial H}{\partial x^i} + I_{\varkappa i}\frac{\partial H}{\partial x^{r+i}} - I_{\varkappa r+i}\frac{\partial H}{\partial x^i}\right\};$$

on verra facilement qu'en vertu des relations (14) on a $L_T(I)_{\varkappa\lambda} = 0$ et que par suite (n° 109, Th. 5) $L_T(\Omega) = 0$ ce qui démontre que Ω est un invariant absolu du système de Hamilton. Il en résulte, d'après le Théorème 2 du n° 102 et de la relation (13), que $\int\omega$ est un invariant absolu ou relatif du même système; l'expression $L_T(\omega)$ étant différente de zéro, comme il est facile de s'en convaincre, l'intégrale $\int\omega$ est un invariant relatif.

Nous démontrerons maintenant la réciproque du Théorème de Poincaré:

THÉORÈME 4. *Pour que l'intégrale*

$$\int \tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda] \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 2r)$$

soit un invariant absolu du système des équations

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^{2r}}{X^{2r}} = dt,$$

il faut et il suffit que ce système soit hamiltonien.

Supposons pour démontrer ce théorème que l'on ait $L_T(I_{\varkappa\lambda}) = 0$, où $\vec{T}$ désigne le vecteur de composantes $X^1, X^2, \ldots, X^{2r}, 1$. En développant cette équation d'après la formule (4) du n° 106 on trouve

$$I_{\varrho\lambda}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\varkappa} + I_{\varkappa\varrho}\frac{\partial X^\varrho}{\partial x^\lambda} = 0;$$

si l'on y pose successivement $\varkappa, \lambda = h, i$; $h, r+i$ et $r+h$, $r+i$ et que l'on tient compte des formules (14), les relations ci-dessus prendront respectivement la forme

$$\frac{\partial X^{r+i}}{\partial x^h} - \frac{\partial X^{r+h}}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial X^i}{\partial x^h} + \frac{\partial X^{r+h}}{\partial x^{r+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^{r+h}} - \frac{\partial X^h}{\partial x^{r+i}} = 0 \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, r)$$

Il est facile de voir que la solution générale de ces équations a la forme

$$X^i = \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}}, \qquad X^{r+i} = -\frac{\partial H}{\partial x^i},$$

où H est une fonction arbitraire de $x^\varkappa$, t, c'est ce qui achève la démonstration.

Complétons maintenant la forme $\Omega = \sum_{i=1}^{r} [dx^{r+i} dx^i]$ au moyen des équations (11); il viendra (v. n° 113)

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{r} \left[\left(dx^{r+1} + \frac{\partial H}{\partial x^i} dt\right)\left(dx^i - \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}} dt\right)\right].$$

Si l'on développe le produit extérieur dans le second membre, on trouve

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{r} \left\{\left[dx^{r+i} dx^i\right] - \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}} dx^{r+i}\right) dt\right]\right.,$$

ce qui peut s'écrire

$$\tilde{\Omega} = \Omega - [dH\, dt]. \tag{15}$$

Posons encore

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{r} x^{r+i} dx^i - H\, dt;$$

on a évidemment

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}. \tag{16}$$

THÉORÈME 5 (Cartan). *Les intégrales complétées*

$$\int \tilde{\Omega} \quad \text{et} \quad \oint \tilde{\omega}$$

sont des invariants attachés aux trajectoires des équations canoniques (10) *de Hamilton.*

La première partie de ce théorème est une conséquence immédiate du Théorème 2 du n° 114 et du Théorème 3 de ce numéro et la seconde résulte de la relation (16) et du théorème de Stokes.

A la forme $\tilde{\omega}$, qui dans les notations classiques est égale à l'expression $p_i dq^i - H\, dt$, E. Cartan a donné le nom deten seur quantité de mouvement-energie. L'intégrale de ce tenseur étendue à une ligne fermée d'états (q^i, p_i, t) a la même valeur pour toute ligne faisant un tour du tube des trajectoires des équations canoniques de Hamilton, tandis que l'intégrale de Poincaré $\oint p_i dq^i$ ne jouit de cette propriété que si la ligne faisant le tour des trajectoires est une suite d'états correspondants à une même valeur du temps t (Th. 3 de ce numéro).

Le Théorème 5 de Cartan admet une réciproque:

THÉORÈME 6. *Si un système d'équations admet l'intégrale* $\oint \tilde{\omega}$ *comme un invariant relatif attaché à ses trajectoires, il a nécesairement la forme canonique de Hamilton.*

Supposons que l'intégrale $\oint \tilde{\omega}$ soit un invariant attaché aux trajectoires des équations

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n} = dt;$$

il en sera donc de même de l'intégrale $\int d\tilde{\omega} = \int \tilde{\Omega}$ où $\tilde{\Omega}$, définie par la formule (15), est une forme fermée. Elle doit donc, d'après le Théorème 2 du n° 114, vérifier la relation

$$\underline{\vec{T}} \,|\, \tilde{\Omega} = 0, \tag{17}$$

où $\vec{T}$ est le vecteur des composantes $X^1, X^2, \ldots, X^{2r}, 1$. Comme la formule (15) developpée peut être écrite de la manière suivante:

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{r} \left\{\left[dx^{r+i} dx^i\right] - \frac{\partial H}{\partial x^i} [dx^i dt] - \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}} [dx^{r+i} dt]\right\},$$

la relation (17) prendra, d'après l'équation (18) du n° 109, la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \left\{ -\left(X^{r+i} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\right) dx^i + \left(X^i - \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}}\right) dx^{r+i} + \right.$$
$$\left. + \left(X^i \frac{\partial H}{\partial x^i} - X^{r+i} \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}}\right) dt \right\} = 0.$$

Les différentielles dx^i, dx^{r+i}, dt étant indépendantes cette relation entraîne les équations

$$X^i = \frac{\partial H}{\partial x^{r+i}}, \qquad X^{r+i} = -\frac{\partial H}{\partial x^i},$$

ce qui démontre le théorème.

E. Cartan a donné aux derniers théorèmes le nom de principe généralisé de la conservation de la quantité du mouvement et de l'énergie. Ce principe, indépendant du mode de repérage de l'espace-temps, caractérise complètement les équations du mouvement du système matériel (S), il est donc équivalent au principe de Hamilton. Remarquons en terminant qu'au principe de Cartan obéit aussi le mouvement d'un point matériel soumis aux forces de gravitation dans la théorie de la Relativité généralisée d'Einstein.

§ 6. Compléments

116. Différentielle extérieure généralisée. Le théorème de Stokes (n° 101) met en évidence un lien étroit entre la dérivation extérieure et l'intégration d'une forme différentielle extérieure; cela permet de définir la différentielle extérieure d'une manière indépendante de l'hypothèse de différentiabilité des coefficients de la forme.

Nous dirons qu'une forme différentielle Ψ_{p+1}, de degré $p+1$, définie dans un ouvert connexe U de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ est la *différentielle extérieure généralisée* d'une forme Φ_p de degré p et nous écrirons $\Psi_{p+1} = d\Phi_p$, si l'on a

$$\oint_{\partial E_{p+1}} \Phi_p = \int_{E_{p+1}} \Psi_{p+1},$$

quel que soit le champ orienté E_{p+1} plongé dans U. Si Φ_p est de classe $c \geqslant 1$, la nouvelle définition est bien d'accord avec celle qui a été donnée au n° 4; comme elle n'exige pas que les coefficients de Φ_p soient différentiables, elle est plus générale et elle peut être appliquée aux formes d'une classe plus étendue que la classe de formes dérivables dans le sens ordinaire.

Posons par exemple $\omega = a_\varkappa dx^\varkappa$, $a_\varkappa$ désignant une fonction de la seule variable $x^\varkappa$, définie et continue dans un intervalle ouvert. On sait qu'il existe une fonction $u(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ de classe C^1 telle qu'il soit $du = \omega$. Il en résulte la relation $\oint_L \omega = 0$, quelle que soit la ligne fermée L dans un ouvert, où ω est définie. D'après la définition généralisée de la différentielle extérieure nous pouvons donc poser $d\omega = 0$ et dire que la forme ω est *fermée* dans le sens généralisé.

La généralisation de la différentielle extérieure est également due à E. Cartan qui a montré aussi que le théorème de Poincaré (n° 5) est valable si $d\Phi_p$ est la différentielle généralisée, c'est-à-dire que $d\Phi_p$ est une forme fermée: $d(d\Phi_p) = 0$. On a montré aussi que la réciproque du théorème de Poincaré (n° 5) et les théorèmes sur la différentielle d'une somme ou d'un produit restent vrais pour la différentielle généralisée.

Les démonstrations de ces théorèmes sont données par A. Szües, H. Poincaré et P. Gillis (v. [13], p. 41 et [26]).

On doit à B. Segre les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme différentielle extérieure possède une différentielle généralisée [43].

117. Transformations infinitésimales d'un groupe de Lie. Au n° 40 nous avons considéré les opérateurs infinitésimaux qui sont les éléments de l'algèbre d'un groupe de Lie. Nous allons maintenant reprendre l'étude de ces opérateurs pour mettre en évidence leur rôle dans la théorie des groupes continus et finis (v. la fin du n° 40).

En changeant un peu les notations adoptées dans le § 1 du Ch. IV considérons les équations de définition du premier groupe des paramètres G_1, d'un groupe continu et fini G:

$$\bar{\omega}^\varkappa = \omega^\varkappa \tag{1}$$

(n° 39, équ. (2)). Imaginons dans un voisinage G_e de l'élément unité e du groupe G un champ des vecteurs contravariants $\vec{I} = (\xi^\varkappa)$, tangents à G, et la transformation infinitésimale $If = \xi^\varrho \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho}$, les ξ^ϱ étant supposés analytiques. Elle donne naissance à un pseudo-groupe γ à un paramètre t (n° 103); soient

$$\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x, t) \tag{2}$$

es transformations finies de γ définies dans un intervalle $(-\tau, \tau)$ $(\tau > 0)$ et telles qu'il soit $x^\varkappa = f^\varkappa(x, 0)$ et que les points obtenus par les équations (2) pour $-\tau < t < \tau$ appartiennent au voisinage G_e convenablement rétréci. Si les transformations (2) du pseudo-groupe γ font partie du premier groupe des paramètres G_1, nous dirons que If est une transformation infinitésimale de G_1.

118. Equations de définition des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie. Nous nous proposons de déterminer les conditions aux quelles doit satisfaire une transformation infinitésimale $If = \xi^\varrho \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho}$ de G_1 (v. la fin du n° 40). D'après la définition elle doit laisser invariantes les formes $\omega^\varkappa$; or il résulte de Théorème 5′ du n° 109 que cette hypothèse est équivalente aux relations

$$L_I(\omega^\varkappa) = 0. \tag{3}$$

Posons

$$\omega^\varkappa = a^\varkappa_\varrho dx^\varrho; \tag{4}$$

nous supposons que les coordonnées du point e soient toutes nulles et que les $x^\varkappa$ soient choisies de manière que les formes $\omega^\varkappa$ restreintes au point e prennent la forme

$$\omega^\varkappa = \delta^\varkappa_\lambda dx^\lambda. \tag{4'}$$

D'après le Théorème 5′ du n° 109 les équations (3) sont équivalentes aux relations $L_I(a^\varkappa_\lambda) = 0$ qui, en vertu de la formule (9) du n° 106, peut s'écrire

$$\xi^\varrho \frac{\partial a^\varkappa_\lambda}{\partial x^\varrho} + a^\varkappa_\varrho \frac{\partial \xi^\varrho}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{5}$$

Posons

$$I^\varkappa = a^\varkappa_\varrho \xi^\varrho, \tag{6}$$

d'où résulte la formule

$$\frac{\partial I^\varkappa}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma}\xi^\varrho + a^\varkappa_\varrho \frac{\partial \xi^\varrho}{\partial x^\sigma}.$$

Si l'on y remplace la somme $a^\varkappa_\varrho \dfrac{\partial \xi^\varrho}{\partial x^\sigma}$ par son expression tirée de l'équation (5), il vient

$$\frac{\partial I^\varkappa}{\partial x^\sigma} = \left(\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho}\right)\xi^\varrho$$

ce qui peut être résumé par la formule

$$dI^\varkappa = \left(\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho}\right)\xi^\varrho dx^\sigma. \tag{7}$$

Rappelons que les $\omega^\varkappa$ vérifient les équations de structure du groupe G:

$$d\omega^\varkappa = \tfrac{1}{2} c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu] \tag{8}$$

(n° 39, équ. (3)). En différentiant extérieurement les formes (4) on obtient $d\omega^\varkappa = [da^\varkappa_\varrho dx^\varrho]$ ou

$$d\omega^\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho}\right)[dx^\varrho dx^\sigma].$$

En rapprochant les équations (8) on en déduit les relations suivantes:

$$-\left(\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho}\right)[dx^\varrho dx^\sigma] = c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu]$$

ou, si l'on tient compte des formules (4),

$$-\left(\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho}\right)[dx^\varrho dx^\sigma] = c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} a^\lambda_\varrho a^\mu_\sigma [dx^\varrho dx^\sigma],$$

d'où il vient

$$\frac{\partial a^\varkappa_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial a^\varkappa_\sigma}{\partial x^\varrho} = -c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} a^\lambda_\varrho a^\mu_\sigma.$$

En vertu de cette relation l'équation (7) peut être mise sous la forme

$$dI^\varkappa = -c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} a^\lambda_\varrho a^\mu_\sigma \xi^\varrho dx^\sigma.$$

En vertu de (4) et (6) on arrive ainsi aux équations

$$dI^\varkappa + c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} I^\lambda \omega^\mu = 0. \tag{9}$$

Nous allons montrer que le système (9) est complètement intégrable. Différentions pour le montrer les équations du système (9); on aura

$$c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[dI^\lambda \omega^\mu] + c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} I^\lambda d\omega^\mu = 0. \tag{10}$$

Si l'on y porte les expressions $dI^\lambda = -c^{\cdot\cdot\lambda}_{\varrho\nu} I^\varrho \omega^\nu$ et $d\omega^\mu = \frac{1}{2} c^{\cdot\cdot\mu}_{\varrho\nu}[\omega^\varrho \omega^\nu]$, tirées respectivement des équations (9) et (8), on aura

$$-c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} c^{\cdot\cdot\lambda}_{\varrho\nu} I^\varrho [\omega^\nu \omega^\mu] + \tfrac{1}{2} c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} c^{\cdot\cdot\mu}_{\varrho\nu} I^\lambda [\omega^\varrho \omega^\nu] = 0;$$

en changeant dans le premier terme le rôle des indices ϱ, λ et dans le second celui des indices ϱ, μ on en déduit la relation

$$(c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varrho\mu} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\nu} - c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varrho\nu} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\mu} + c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\varrho} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\mu\nu}) I^\lambda [\omega^\mu \omega^\nu] = 0$$

ou

$$(c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varrho\mu} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\nu\lambda} + c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varrho\nu} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\mu} + c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varrho\lambda} c^{\cdot\cdot\varrho}_{\mu\nu}) I^\lambda [\omega^\mu \omega^\nu] = 0.$$

La somme en parenthèse étant nulle (n° 39, équ. (4)) on voit que la relation (10) est une conséquence des équations (9) et que, par suite, le système (9) est complètement intégrable, c'est ce que nous avions à montrer.

Le système (9) étant complètement intégrable il admet n solutions $I^\varkappa_\lambda$ telles qu'il soit $(I^\varkappa_\lambda)_e = \delta^\varkappa_\lambda$ et, comme il est linéaire, sa solution générale peut être présentée sous la forme suivante:

$$I^\varkappa = c^\lambda I^\varkappa_\lambda,$$

où les c^λ désignent des constantes arbitraires. On vérifie immédiatement sur les formules (4′) qu'au point e les vecteurs $\vec{I}_\lambda$ satisfont aux relations $\omega^\varkappa[I_\lambda] = \delta^\varkappa_\lambda$ et que, par conséquent, ils sont identiques avec les éléments de l'algèbre de Lie.

Considérons maintenant le système des équations

$$\frac{dx^1}{c^\lambda I_\lambda^1} = \frac{dx^2}{c^\lambda I_\lambda^2} = \ldots = \frac{dx^n}{c^\lambda I_\lambda^n} = dt \tag{11}$$

et imaginons qu'on a déterminé une solution de (11) qui prend les valeurs nulles pour $t = 0$:

$$x^\varkappa = f^\varkappa(t, c^1, c^2, \ldots, c^n), \qquad f^\varkappa(0, c^1, c^2, \ldots, c^n) = 0.$$

Ces équations représentent l'arc d'une ligne située dans le voisinage G_e et passant par le point e; or on peut disposer de la variable t et des constantes c^λ de manière que cette ligne passe par un point voisin du point e et d'ailleurs arbitrairement choisi dans un voisinage de ce point; autrement dit les équations (11) permettent d'obtenir dans G_e les générateurs de tout le groupe G.

Aux équations (9) qui établissent un lien entre la théorie d'E. Cartan des groupes continus et finis et celle de S. Lie nous donnerons le nom *d'équations de définition des transformations infinitésimales des groupes de Lie.*