

Nous nous proposons de déterminer l_i^* de façon que le plus grand nombre possible des composantes $S_{\lambda\mu}^*$ s'annulent. Nous formons pour ce but les équations

$$(27) \quad a_{\nu\mu}^* l_\mu^* - a_{\nu\lambda}^* l_\mu^* = T_{\lambda\mu}^*$$

aux inconnues l_i^* . Le nombre des équations (27) est égal à 24 et celui des inconnues l_i^* est égal à 16. On obtient une solution de ce problème en posant

$$(28) \quad \begin{cases} l_1^* = T_{31}^1, & l_2^* = T_{32}^1 + T_{43}^3, & l_3^* = T_{31}^3, & l_4^* = T_{23}^3 + T_{34}^1, \\ l_1^2 = T_{34}^4 + T_{41}^2, & l_2^2 = T_{24}^2, & l_3^2 = T_{43}^2 + T_{41}^4, & l_4^2 = T_{42}^4, \\ l_1^3 = T_{12}^1 = l_2^3 = T_{12}^2, & l_3^3 = T_{34}^3, & l_4^3 = T_{34}^4, \\ l_1^4 = T_{41}^1, & l_2^4 = T_{23}^2, & l_3^4 = T_{23}^3, & l_4^4 = T_{41}^4. \end{cases}$$

Ces valeurs des inconnues l_i^* annulent, en vertu de (25), seize des composantes $S_{\lambda\mu}^*$ et elles permettent d'exprimer les huit autres par les grandeurs $T_{\lambda\mu}^*$; si on les porte dans les formules $\pi^\nu = \tau^\nu + l_\lambda^\nu \omega^\lambda$ on obtient une connexion distinguée définie dans l'espace B , dont la courbure et la torsion sont déterminées par les $T_{\lambda\mu}^*$.

Les formules (28) donnent ainsi une solution du problème d'annuler le plus grand nombre possible des composantes $S_{\lambda\mu}^*$; on obtient une autre solution, si dans (28) on remplace les valeurs de l_2^1 , l_4^1 et l_3^2 par les suivantes:

$$l_2^1 = T_{23}^2 + T_{12}^4, \quad l_4^1 = T_{12}^1 + T_{42}^3, \quad l_3^2 = T_{23}^2 + T_{12}^4, \quad l_3^2 = T_{32}^4 + T_{21}^2.$$

Nous voyons ainsi qu'une variété qui est riemannienne et symplectique peut être munie de deux connexions distinguées bien déterminées.

CHAPITRE VI

PSEUDO-GROUPES CONTINUS INFINIS

Ce chapitre constitue une exposition de la théorie des pseudo-groupes de transformations continus et infinis édifée par E. Cartan. En me bornant, pour simplifier, aux pseudo-groupes transitifs dont les équations de définition de Lie sont du premier ordre je déduis des équations de Lie les équations de définition de Cartan qui forment un système de Pfaff en involution. Je développe ensuite les équations de structure des pseudo-groupes envisagés et les systèmes de leurs constantes de structure. La rectification d'une faute de calcul dans les équations de Cartan m'a permis d'améliorer un peu l'exposé et de montrer que tous les coefficients qui figurent dans les équations (24)-(27) du n° 86 ont des valeurs constantes. Je montre ensuite le rôle important que joue dans la théorie des pseudo-groupes continus infinis un groupe linéaire appelé le groupe de structure d'un pseudo-groupe infini. Le § 2 contient quelques indications sur les pseudo-groupes d'ordres supérieurs et les pseudo-groupes intransitifs. Dans le § 3 j'expose les fondements de la théorie des groupes continus infinis abstraits, indépendante de la théorie des pseudo-groupes de transformations.

§1. Pseudo-groupes transitifs d'ordre un

82. Définition. Soit E un ouvert connexe de $R^n(x^*)$ et F_1 un ouvert connexe de $R^{m_1}(u_1^{m_1})$ ⁽¹⁾. Supposons que sur E soit donné un système des équations aux dérivées partielles du premier ordre, tel que dans le produit $U \times \bar{U}$ des voisinages de deux points arbitraires x^* et $\bar{x}^*$ de E il soit représenté par les équations de la forme

$$(D) \quad \frac{\partial \bar{x}^*}{\partial x^*} = \Psi_i^*(x, \bar{x}, u_1),$$

où les arguments $u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^{m_1}$ ($0 \leq m_1 < n^2$) désignent un ensemble des dérivées partielles du premier ordre des inconnues $\bar{x}^*$.

Nous admettons que les équations (D) jouissent des propriétés suivantes:

1° Ψ_i^* sont des fonctions analytiques dans l'ensemble $U \times \bar{U} \times F_1$ telles qu'il soit $|\Psi_i^*| \neq 0$ et que le rang de la matrice $[\partial \Psi_i^* / \partial u_1^{m_1}]$ soit égal à m_1 .

⁽¹⁾ Dans tout ce chapitre les indices grecs parcourent les valeurs 1, 2, ..., n et les indices latins i, r, j, p les valeurs 1, 2, ..., m_r . Les symboles $f(x)$, $f(x, \bar{x}, u_1)$ désignent respectivement fonctions des variables x^* et de $x^*, \bar{x}^*, u_1^{m_1}$.

2^0 (D) est un système en involution ([30], p. 664).

3^0 Si les formules

$$\bar{x}^* = f^*(x), \quad \frac{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)}{D(x^1, x^2, \dots, x^n)} \neq 0,$$

représentent une solution analytique à n dimensions du système (D), définie dans un voisinage d'un point de U , les formules inverses établissent aussi une solution de (D) définie dans un voisinage d'un point de $\bar{U}$.

4^0 Le produit de deux solutions du système (D) représente, s'il existe, une solution de (D) définie dans un voisinage d'un point de E .

Soient x^* et $\bar{x}^*$ deux points arbitraires de E ; le système (D) étant en involution il résulte des hypothèses faites ci-dessus qu'il existe une infinité de solutions à n dimensions des équations (D) dont chacune établit une homéomorphie analytique entre les voisinages convenablement choisis de ces points. L'ensemble G de ces solutions porte le nom de *pseudo-groupe des transformations de Lie* et les équations (D) sont appelées ses *équations de définition*; ces équations étant du premier ordre on dit que le pseudo-groupe est du *premier ordre* ou qu'il est *normal*. Comme dans G il y a des transformations qui appliquent un point arbitraire de E sur un autre point de cet ouvert, on voit que G opère *transitivement sur E*. Le pseudo-groupe G est dit *fini* ou *infini* suivant que la solution générale à n dimensions de ses équations de définition dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires ou de fonctions arbitraires. Remarquons que le premier cas arrive, si les fonctions Ψ_λ^x ne dépendent pas des variables $u_1^{h_1}$ ($m_1 = 0$). Dans la suite nous nous bornons à envisager les pseudo-groupes infinis.

Remarque 1. Il résulte des hypothèses 3^0 et 4^0 que le pseudo-groupe G contient la transformation identique qui applique l'ouvert E sur lui-même.

Remarque 2. Soit $S \in G$ une transformation appliquant un voisinage de $x^* \in E$ sur un voisinage d'un autre point $\bar{x}^* \in E$; on peut alors trouver, et même d'une infinité de manières, une autre transformation $T \in G$, définie dans un voisinage de $\bar{x}^*$ et telle que le produit TS existe. La transformation T peut être construite au moyen d'une transformation $T_1 \in G$ arbitrairement choisie. En effet, si T_1 est une transformation quelconque de G appliquant le point x_1^* sur le point $\bar{x}_1^*$, il suffit de déterminer une transformation $T_2 \in G$ appliquant $\bar{x}^*$ sur $\bar{x}_1^*$ et de faire le produit $T_1 T_2$ pour obtenir la transformation demandée.

83. Prolongement de (D). En différentiant les équations (D) on obtient le premier système prolongé des équations de définition du pseudo-groupe G . Comme toutes les dérivées $\partial^2 \bar{x}^* / \partial x^* \partial x^*$ peuvent être exprimées par les dérivées des fonctions $u_1^{h_1}$, on peut se borner aux formules pour les

dérivées $\partial u_1^{h_1} / \partial x^*$, qui peuvent être présentées sous la forme suivante

$$(D_1) \quad \frac{\partial u_1^{h_1}}{\partial x^*} = \Psi_\lambda^{h_1} (x, \bar{x}, u_1, u_2),$$

où u_2 désigne un ensemble $u_2^1, u_2^2, \dots, u_2^{m_2}$ ($0 < m_2 < m_1 n$) des dérivées des fonctions $u_1^{h_1}$ choisis de telle façon que le rang de la matrice $[\partial \Psi_\lambda^{h_1} / \partial u_2^{h_2}]$ soit égal à m_2 dans le produit $U \times \bar{U} \times F_1 \times F_2$, F_2 désignant un ouvert de $R^{m_2}(u_2^{h_2})$.

En continuant ce procédé on obtient ainsi une suite illimitée des prolongements de (D)

$$(D_r) \quad \frac{\partial u_r^{h_r}}{\partial x^*} = \Psi_\lambda^{h_r} (x, \bar{x}, u_1, u_2, \dots, u_{r+1}) \quad (r = 1, 2, \dots),$$

où $u_{r+1}^1, u_{r+1}^2, \dots, u_{r+1}^{m_{r+1}}$ désignent les dérivées d'ordre $r+1$ de $\bar{x}^k$, choisis de telle manière que le rang de la matrice

$$\left[\frac{\partial \Psi_\lambda^{h_r}}{\partial u_{r+1}^{h_{r+1}}} \right]$$

soit égal à m_{r+1} . Les équations (D) et (D_r) peuvent être écrites sous une forme équivalente comme les équations pfaffiennes

$$(D') \quad d\bar{x}^* - \Psi_\lambda^* dx^* = 0,$$

$$(D'_r) \quad du_r^{h_r} - \Psi_\lambda^{h_r} dx^* = 0 \quad (r = 1, 2, \dots).$$

84. Théorèmes fondamentaux. L'étude du pseudo-groupe G défini par les équations (D) repose sur deux théorèmes de Lie ([37], p. 317, 319).

THÉOREME 1. Pour qu'une transformation S

$$(1) \quad \bar{x}^* = \varphi^*(x), \quad \frac{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)}{D(x^1, x^2, \dots, x^n)} \neq 0,$$

définie dans un voisinage d'un point $x^* \in E$ appartienne au pseudo-groupe G , il faut et il suffit que la substitution

$$(2) \quad \bar{x}^* = \bar{x}^*, \quad \bar{x}^* = \varphi^*(x),$$

faite sur les variables indépendantes et dépendantes, conserve le système des équations (D).

a) Supposons que la transformation S appartienne au pseudo-groupe G et imaginons une autre transformation $T \in G$ définie par les équations

$$(3) \quad \bar{x}^* = f^*(x)$$

et telle qu'il existe le produit TS^{-1} . Rappelons que la transformation T peut être déduite d'une transformation arbitraire du pseudo-groupe G (n° 82, Remarque 2). Si l'on fait dans les équations (3) la substitution (2), on obtient les formules de la forme

$$(4) \quad \bar{x}^* = f^*(x)$$

représentant une solution d'un système (D) des équations que l'on forme en faisant la substitution (2) sur les variables du système (D). Remarquons que d'autre part les formules (4) représentent la transformation $W = TS^{-1}$ qui, faisant partie de G en vertu de l'hypothèse 4° du n° 82, doit satisfaire les équations (D) écrites de la manière suivante:

$$\frac{\partial \bar{x}^*}{\partial x^1} = \Psi_1^*(x, \bar{x}, u_1).$$

Comme de toute solution du système (D) on peut obtenir une solution W du système (D) au moyen de la substitution (2) et, réciproquement, de toute solution W du système (D) on déduit la solution $T = WS$ du système (D) au moyen de la même substitution, il en résulte que les systèmes (D) et (D) sont équivalents ce qui démontre que la substitution (2) laisse invariant le système des équations (D).

b) Admettons maintenant que la substitution (2) laisse invariant le système (D) et considérons la transformation $T \in G$ définie par les équations (3). La transformation TS^{-1} doit donc aussi appartenir à G , d'où il résulte que S est une transformation du pseudo-groupe ce qui démontre la réciproque du résultat précédent.

Remarque. Comme les équations (D_r) du n° 83 sont des prolongements du système (D) obtenus par différentiation, il s'en suit que la substitution (2) laisse invariants tous les systèmes (D_r).

THÉOREME 2. Pour que la transformation (1) appartienne au pseudo-groupe G , il faut et il suffit que la substitution

$$x^* = x, \quad \bar{x}^* = \varphi^*(\bar{x})$$

laisse invariant le système des équations (D') et (D_r).

La démonstration de ce théorème, dont nous n'allons pas faire usage dans la suite, se fait d'une manière analogue.

85. Prolongements du pseudo-groupe G . Le pseudo-groupe infini G opérant transitivement sur E n'admet pas d'invariants finis; il ne peut aussi admettre des formes différentielles aux variables x^1 , car dans le cas contraire il serait un pseudo-groupe fini. Or, E. Cartan a montré qu'il en est autrement, si l'on prolonge G aux transformations des dérivées

partielles des inconnues $\bar{x}^*$. En effet, en choisissant pour chaque prolongement un ensemble de dérivées convenablement choisies et en les associant comme variables auxiliaires aux variables x^1 on peut construire une suite illimitée de formes différentielles linéaires invariantes pour les prolongements successifs de G . C'est sur cette féconde idée que repose la méthode d'E. Cartan qui lui a permis de développer une nouvelle théorie des groupes continus infinis, indépendante de la théorie de Lie et plus portant en ce qui concerne la structure de ces groupes. Le présent numéro sera consacré à définir les prolongements de G et à construire les formes différentielles invariantes pour ces prolongements. Comme le système (D) est équivalent au système pfaffien (D') du n° 83

$$d\bar{x}^* - \psi_1^*(x, \bar{x}, u_1) dx^1 = 0,$$

le Théorème 1 peut être énoncé comme il suit. Pour que la transformation S définie par les formules (1) appartienne au pseudo-groupe G , il faut et il suffit que la substitution (2) conserve les formes $\psi_1^*(x, \bar{x}, u_1) dx^1$, autrement dit que les relations

$$\psi_1^*(x, \bar{x}, u_1) d\bar{x}^1 = \psi_1^*(x, \bar{x}, u_1) dx^1$$

soient des conséquences des relations (2). Remarquons que la substitution (2) laisse inaltérées les variables $\bar{x}^*$; on peut donc dans l'énoncé précédent remplacer les fonctions ψ_1^* par celles que l'on obtient en donnant aux variables $\bar{x}^* = \bar{x}^*$ des valeurs numériques arbitraires. Désignons ces fonctions respectivement par $a_1^*(x, u_1)$ et par $a_1^*(x, u_1)$; si l'on change encore de notations en remplaçant x^* , u_1^* par $\bar{x}^*$, $\bar{u}_1$, le Théorème 1 prendra la forme suivante:

THÉOREME 1^a. Pour que la transformation S définie par

$$(5) \quad \bar{x}^* = \varphi^*(x)$$

soit une transformation du pseudogroupe G , il faut et il suffit qu'elle entraîne les relations

$$(6) \quad a_1^*(\bar{x}, \bar{u}_1) d\bar{x}^1 = a_1^*(x, u_1) dx^1.$$

Si l'on substitue aux différentielles $d\bar{x}^1$ dans (6) leurs valeurs $\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\mu} dx^\mu$, tirées des formules (5), on trouve

$$(7) \quad a_1^*(\bar{x}, \bar{u}_1) \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\mu} = a_\mu^*(x, u_1),$$

où dans le premier membre les variables $\bar{x}^{\lambda}$ doivent être exprimées par les variables x^{λ} au moyen des formules (5). Les rangs des matrices

$$\left[\frac{\partial a_{\lambda}^{\alpha}(\bar{x}, \bar{u}_1)}{\partial \bar{u}_1^{\lambda}} \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial a_{\lambda}^{\alpha}(x, u_1)}{\partial u_1^{\lambda}} \right]$$

étant égaux à m_1 , en vertu de l'hypothèse 1° du n° 82, on peut tirer des équations (7) les formules bien déterminées de la forme suivante:

$$(8) \quad \bar{u}_1^{\lambda} = \chi_1^{\lambda}(x, u_1).$$

Nous pouvons donc faire abstraction de la signification que nous avons donné aux variables u_1^{λ} et les regarder, s'il nous est commode, comme variables indépendantes qui se transforment selon les formules (8). L'ensemble des égalités

$$(9) \quad \bar{x}^{\lambda} = \varphi^{\lambda}(x), \quad \bar{u}_1^{\lambda} = \chi_1^{\lambda}(x, u_1)$$

forme donc une transformation d'un pseudo-groupe G_1 qui est le *premier prolongement* de G . Comme à toute transformation (5) du pseudo-groupe G correspond une transformation bien déterminée de la forme (8), on voit donc bien que ce prolongement est *holodéorique* ⁽¹⁾ et que dans G_1 il existe des transformations qui appliquent un point arbitraire de $E \times F_1$ sur un autre point arbitraire de ce produit; le pseudo-groupe G_1 opère donc transitivement sur $E \times F_1$.

Le pseudo-groupe G_1 peut être défini comme ensemble de transformations des variables x^{λ} et u_1^{λ} laissant invariantes les formes différentielles

$$(10) \quad \omega^{\alpha} = a_{\lambda}^{\alpha}(x, u_1) dx^{\lambda}$$

qui sont indépendantes dans $U \times F_1$ en vertu de l'hypothèse 1° du n° 82 et de la définition des fonctions a_{λ}^{α} . Mais il y a d'autres systèmes différentiels invariants pour les transformations des prolongements de G . En effet, nous avons remarqué plus haut (n° 84, Remarque) que la substitution (2) déduite de la transformation (1) de G laisse invariants les

⁽¹⁾ Soit G un pseudo-groupe transformant les variables x^{λ} et G_1 un autre pseudo-groupe qui transforme les variables x^{λ} de la même manière que G et en outre m autres variables $y^1, y^2, \dots, y^m$. On dit alors que G_1 est un *prolongement* de G et que ce prolongement est *holodéorique*, si à la transformation identique de G ne correspond dans G_1 que la transformation identique; si à la transformation identique de G correspond un sous-groupe de G_1 différent de l'identité, le prolongement est dit *mériodéorique*.

prolongements du système des équations (D). Or, le premier prolongement a la forme

$$(D_1) \quad \frac{\partial u_1^{\lambda_1}}{\partial x^{\lambda}} = \psi_{\lambda}^{\lambda_1}(x, \bar{x}, u_1, u_2)$$

(n° 83). L'ensemble des équations (D) et (D₁) constitue le système des équations de définition de G_1 qui, par conséquent, est aussi un pseudo-groupe du premier ordre. Donnons aux variables $\bar{x}^{\lambda}$, qui restent inaltérées par la substitution (2), des valeurs numériques arbitraires et désignons par $b_{\lambda}^{\lambda_1}(x, u_1, u_2)$ les fonctions ainsi obtenues des fonctions $\varphi_{\lambda}^{\lambda_1}$. Les équations ci-dessus prendront alors la forme

$$\frac{\partial u_1^{\lambda_1}}{\partial x^{\lambda}} = b_{\lambda}^{\lambda_1}(x, u_1, u_2)$$

ou

$$du_1^{\lambda_1} - b_{\lambda}^{\lambda_1}(x, u_1, u_2) dx^{\lambda} = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que les deux systèmes des équations

$$d\bar{u}_1^{\lambda} - b_{\lambda}^{\lambda_1}(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) d\bar{x}^{\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad du_1^{\lambda_1} - b_{\lambda}^{\lambda_1}(x, u_1, u_2) dx^{\lambda} = 0$$

doivent être équivalents pour les transformations de G prolongé aux transformations des dérivées du second ordre. Ce fait peut être exprimé par les relations de la forme

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\lambda_1}^{k_1}(d\bar{u}_1^{\lambda_1} - \bar{b}_{\lambda}^{\lambda_1} d\bar{x}^{\lambda}) &= q_{\lambda_1}^{k_1}(du_1^{\lambda_1} - b_{\lambda}^{\lambda_1} dx^{\lambda}) \\ (\bar{b}_{\lambda}^{\lambda_1} &= b_{\lambda}^{\lambda_1}(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad k_1 = 1, 2, \dots, m_1), \end{aligned}$$

où $\bar{q}_{\lambda_1}^{k_1}$ et $q_{\lambda_1}^{k_1}$ sont deux systèmes des paramètres auxiliaires. Si l'on y substitue aux différentielles $d\bar{x}^{\lambda}$ et $d\bar{u}_1^{\lambda}$ leurs valeurs tirées des équations (9), et que l'on tient compte de l'indépendance des différentielles dx^{λ} et $du_1^{\lambda_1}$, on en déduit d'après les équations (8), les relations

$$(11) \quad \bar{q}_{\lambda_1}^{k_1} \frac{\partial \chi_1^{\lambda_1}}{\partial u_1^{\lambda_1}} = \bar{q}_{\lambda_1}^{k_1}$$

et les équations de la forme suivante:

$$(12) \quad \bar{u}_2^{\lambda_2} = \chi_2^{\lambda_2}(x, u_1, u_2).$$

Nous dirons alors que les formules

$$(13) \quad \bar{x}^{\lambda} = \varphi^{\lambda}(x), \quad \bar{u}_1^{\lambda_1} = \chi_1^{\lambda_1}(x, u_1), \quad \bar{u}_2^{\lambda_2} = \chi_2^{\lambda_2}(x, u_1, u_2)$$

définissent une transformation du pseudo-groupe G_2 qui est le *second prolongement* de G .

Il résulte du raisonnement précédent que les formes

$$(14) \quad \tau_1^{k_1} = q_{h_1}^{k_1} (du_1^{h_1} - b_1^{h_1} dx^1)$$

sont invariantes pour les transformations du pseudo-groupe G_2 prolongé au moyen des transformations (11) des paramètres auxiliaires $q_{h_1}^{k_1}$; nous désignerons ce prolongement, qui est holoédrique, par le même symbole G_2 . On voit que le pseudo-groupe G_2 peut être défini par la condition de laisser invariantes les formes pfaffiennes

$$(15) \quad \omega^*, \tau_1^{k_1} \quad (k_1 = 1, 2, \dots, m_1).$$

En continuant ces raisonnements on prolonge la transformation (13) en une suite illimitée des formules

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{x}^* = \varphi^*(x), \\ \bar{u}_1^{h_1} = \chi_1^{h_1}(x, u_1), \\ \bar{u}_2^{h_2} = \chi_2^{h_2}(x, u_1, u_2), \\ \dots \\ \bar{u}_r^{h_r} = \chi_r^{h_r}(x, u_1, u_2, \dots, u_r), \\ \dots \end{cases}$$

u_r désignant un point arbitraire d'un ouvert F_r de $R^{m_r}(u_r^r)$. Ajoutons que $u_r^1, u_r^2, \dots, u_r^{m_r}$ représentent ici des dérivées d'ordre r des inconnues $\bar{x}^*$, calculées au moyen des équations (D) et choisies de telle manière que toutes les autres dérivées du même ordre puissent être exprimées au moyen d'elles et des dérivées d'ordre inférieur à r . Les formules (16) représentent successivement les transformations des prolongements $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots$ du pseudo-groupe G . Comme dans le cas des équations (8) nous pouvons faire abstraction de la signification donnée ci-dessus des variables $u_r^{h_r}$ et les regarder comme variables indépendantes.

En déduisant les formules (16) on peut prolonger simultanément le système (15) en la suite

$$(17) \quad \omega^*, \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2}, \dots, \tau_r^{k_r}, \dots$$

$\tau_r^{k_r}$ désignant la forme

$$(17') \quad \tau_r^{k_r} = q_{h_r}^{k_r} (du_r^{h_r} - b_r^{h_r} dx^1),$$

où les coefficients $b_r^{h_r}$ sont fonctions de $x, u_1, u_2, \dots, u_{r+1}$ et $q_{h_r}^{k_r}$ sont des paramètres auxiliaires qui se transforment d'après les formules

$$(17'') \quad q_{h_r}^{k_r} \frac{\partial \chi_r^{k_r}}{\partial u_r^{h_r}} = q_{h_r}^{k_r}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. Pour le pseudo-groupe G_r des transformations (16), prolongé au moyen des transformations (17''), les formes $\omega^*, \tau_1^{k_1}, \tau_2^{k_2}, \dots, \tau_{r-1}^{k_{r-1}}$ sont invariantes.

86. Equations de structure. a) Il résulte de ce qui précède (n° 85, Th. 1^a) que les équations de définition (D) de G sont équivalentes au système des équations pfaffiennes

$$(18) \quad \bar{\omega}^* = \omega^*, \quad \omega^* = a_i^*(x, u_1) dx^i,$$

où $\bar{\omega}^*$ désigne ce qui devient la forme ω^* , si l'on y remplace les variables $x^*, u_1^{h_1}$ par les variables $\bar{x}^*, \bar{u}_1^{h_1}$ (1). Il résulte de cette équivalence que le système (18) est en involution, si l'on regarde les variables $x^*, u_1^{h_1}$ comme indépendantes et les variables $\bar{x}^*, \bar{u}_1^{h_1}$ comme inconnues. L'étude d'un pseudo-groupe infini de Lie, défini au moyen d'un système en involution des équations différentielles du premier ordre, est ainsi ramené à celle-ci d'un système pfaffien en involution.

Pour entreprendre cette investigation adjoignons aux équations (18) celles qui s'en déduisent par la différentiation extérieure

$$(19) \quad d\omega^* = d\omega^*$$

et désignons comme d'habitude par g le genre du système ainsi formé et par $s, s_1, s_2, \dots, s_p$ ses caractères; remarquons qu'il est $s = n$. Le système des équations étant en involution par rapport aux variables $x^*, u_1^{h_1}$, dont le nombre est égal à $p = n + m_1$, il doit admettre une intégrale ordinaire à p dimensions et par conséquent son genre g est au moins égal à p ($g \geq p$). Calculons maintenant les différentielles $d\omega^*$; il est

$$d\omega^* = \frac{\partial a_i^*}{\partial u_1^{h_1}} [du_1^{h_1} dx^i] + \frac{\partial a_i^*}{\partial x^i} [dx^i dx^j].$$

Comme les formes ω^* sont indépendantes relativement aux différentielles dx^i et les formes (14) sont résolubles par rapport aux différentielles $du_1^{h_1}$, les formules ci-dessus peuvent être présentées sous la forme

$$(20) \quad d\omega^* = a_{h_1 \mu}^* [\tau_1^{h_1} \omega^\mu] + \frac{1}{2} C_{\lambda \mu}^* [\omega^\lambda \omega^\mu],$$

où les coefficients $a_{h_1 \mu}^*$ sont fonctions des variables $x^*, u_1^{h_1}$ et des paramètres $q_{h_1}^{k_1}$ qui figurent dans les expressions (14), et les coefficients $C_{\lambda \mu}^*$ dépendent de $x^*, u_1^{h_1}$. Rappelons que les formes (15) sont invariantes pour G_2 ; il en résulte que tous les coefficients de la différentielle $d\omega^*$ sont in-

(1) Nous nous servons d'une convention analogue dans les pages suivantes.

variants pour ce pseudo-groupe et qu'ils ont, par suite, des valeurs constantes, G_2 opérant transitivement dans le produit $E \times F_1 \times F_2$. Les paramètres $g_{h1}^{(1)}$ peuvent donc être exprimés au moyen des variables x^*, u_1^{h1} et des valeurs des coefficients $a_{h\mu}^*$.

Aux relations (20) on a donné le nom d'équations de structure du pseudo-groupe G et les coefficients sont appelés ses constantes de structure.

Revenons aux équations (19); si l'on tient compte des équations (18) et des formules (20), elles prendront la forme suivante

$$(21) \quad a_{h\mu}^*[(\tau_1^h - \tau_1^h)\omega''] = 0.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut le système pfaffien (Σ) formé des équations (18) et (19) est en involution relativement aux variables x^*, u_1^h et, par suite, il admet une variété intégrale ordinaire à $p = n + m_1$ dimensions; il en résulte que le système des constantes $a_{h\mu}^*$ est involutif (n° 24). Le système pfaffien (Σ) étant équivalent au système des équations (D) et (D₁) sa solution quelconque à n dimensions peut être présentée comme il suit

$$(22) \quad \bar{x}^* = p^*(x), \quad \bar{u}_1^{h1} = \chi_1^{h1}(x_1, u_1),$$

ce qui résulte d'ailleurs de la forme des équations (18). Cette solution dépend du choix d'un certain nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans la solution générale d'un système de Pfaff. Comme la seconde des formules (22) se déduit de la première (n° 85), il en résulte que toutes ces fonctions arbitraires doivent figurer déjà dans la première des formules (22) et que par conséquent elles ne dépendent que de $x^1, x^2, \dots, x^n$. Il s'en suit que les caractères $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_p$ du système (Σ) sont tous nuls (v. la fin du n° 21).

b) En outre des équations (20) et des coefficients $a_{h\mu}^*, c_{\lambda\mu}^*$ il y a d'autres systèmes des équations et des constantes qui caractérisent la structure du pseudo-groupe G et celles de ses prolongements. On les obtient en différenciant extérieurement les formes de la suite (17). Commençons par τ_1^{k1} qui d'après (14) est une forme différentielle linéaire aux variables x^*, u_1^{h1}, u_2^{h2} . Remarquons que les variables u_2^{h2} ne figurent dans cette expression que dans les coefficients b_{λ}^{k1} ; comme les différentielles de toutes variables de la forme τ_1^{k1} peuvent être exprimées au moyen des formes $\omega^*, \tau_1^{h1}, \tau_2^{h2}$, sa différentielle peut être présentée sous la forme suivante ⁽¹⁾:

$$(23) \quad d\tau_1^{k1} = \frac{1}{2}\gamma_{i,j1}^{k1}[\tau_1^{i1}\tau_1^{j1}] + x_{i0}^{k1}[\tau_1^{i1}\omega^e] + \frac{1}{2}y_{00}^{k1}[\omega^e\omega^e] + a_{i,2\sigma}^{k1}[\tau_2^{i2}\omega^\sigma],$$

$$\gamma_{i,j1}^{k1} = -\gamma_{j,i1}^{k1}, \quad y_{00}^{k1} = -y_{00}^{k1};$$

entre les formes $a_{i,2\sigma}^{k1}\tau_2^{i2}$ il y a m_2 indépendantes, où m_2 désigne comme

⁽¹⁾ Il faut remarquer que dans la formule pour cette différentielle donnée par E. Cartan ([8], p. 288 équ. (16)) il manque le dernier terme du second membre.

auparavant le nombre des variables u_2^{h2} . Les formes $\omega^*, \tau_1^{h1}, \tau_2^{h2}$ étant invariantes pour le prolongement G_3 de G , il s'en suit que tous les coefficients de la forme (23) sont des invariants du pseudo-groupe G_3 et comme celui-ci est transitif (n° 85), ils ont des valeurs constantes. Observons que

les coefficients $a_{i,2\sigma}^{k1}$ sont fonctions des variables x^*, u_1^{h1}, u_2^{h2} et des paramètres g_{h2}^{k2} qui figurent dans l'expression de τ_2^{k2} (v. équ. (17')) ; ces paramètres peuvent donc être exprimés en fonction des variables x^*, u_1^{h1}, u_2^{h2} et des valeurs constantes des coefficients $a_{i,2\sigma}^{k1}$. Rappelons que les équations de définition de G_1 peuvent être écrites sous la forme des équations (D) et (D₁) ou des équations $\bar{\omega}^* = \omega^*, \bar{\tau}_1^{k1} = \tau_1^{k1}$; le premier de ces systèmes étant en involution il en est de même du second, d'où il suit que le système des constantes $a_{i,2\sigma}^{k1}$ est involutif.

Les équations (23) forment le second système des équations de structure du pseudo-groupe G et les coefficients $\gamma_{i,j1}^{k1}, x_{i0}^{k1}, y_{00}^{k1}, a_{i,2\sigma}^{k1}$ sont des nouvelles constantes de structure qui s'associent aux constantes $a_{h\mu}^*, c_{\lambda\mu}^*$. Entre les deux systèmes des constantes de structure que nous avons obtenu il y a des relations que nous allons maintenant établir. Différencions à cet effet les équations (20); on aura

$$(23') \quad a_{h\mu}^*[\bar{d}\tau_1^{h1}\omega^\mu] - a_{h\mu}^*[\tau_1^{h1}d\omega^\mu] + c_{\lambda\mu}^*[\bar{d}\omega^\lambda\omega^\mu] = 0.$$

Si l'on y substitue aux différentielles $\bar{d}\tau_1^{h1}$ et $\bar{d}\omega^\lambda$ leurs expressions tirées respectivement des formules (23) et (20), on obtient une relation dont le premier membre est une forme extérieure du troisième degré en les formes linéaires $\omega^*, \tau_1^{h1}, \tau_2^{h2}$. Ces formes étant entre elles indépendantes on en déduit les relations suivantes:

$$(24) \quad a_{i0}^*a_{j1\mu}^e - a_{j0}^*a_{i1\mu}^e = a_{h1\mu}^* \gamma_{i,j1}^{h1},$$

$$(25) \quad a_{h1\lambda}^{(1)} a_{i2\mu}^{h1} - a_{i1\mu}^{(1)} a_{h2\lambda}^{h1} = 0,$$

$$(26) \quad a_{h1\lambda}^* x_{i1\mu}^{h1} - a_{i1\mu}^* x_{h1\lambda}^{h1} = a_{h1\lambda}^* c_{\lambda\mu}^e + a_{h1\mu}^* c_{\lambda\lambda}^e - a_{i1\mu}^* c_{\mu\lambda}^e,$$

$$(27) \quad a_{h1\mu}^* y_{\lambda\lambda}^{h1} + a_{h1\mu}^* y_{\lambda\mu}^{h1} + a_{h1\lambda}^* y_{\mu\mu}^{h1} = c_{\lambda\mu}^e c_{\mu\mu}^* + c_{\mu\mu}^e c_{\lambda\lambda}^* + c_{\lambda\lambda}^e c_{\mu\mu}^*.$$

c) Un raisonnement tout semblable au précédent permet d'établir une suite des équations de structure de la forme

$$(28) \quad \bar{d}\tau_q^{i,q} = \Phi_q^{i,q}(\omega, \tau_1, \dots, \tau_q) + a_{i,q+1,\sigma}^{(q)}[\bar{d}\tau_{q+1}^{i,q+1}\omega^\sigma] \quad (q = 1, 2, 3, \dots),$$

où $\Phi_q^{i,q}$ est une forme extérieure quadratique en $\omega^*, \tau_1^{h1}, \tau_2^{h2}, \dots, \tau_q^{i,q}$; les coefficients de $\Phi_q^{i,q}$ et les coefficients $a_{i,q+1,\sigma}^{(q)}$ ont des valeurs constantes

(constantes de structure d'ordre q). Entre les constantes de structure d'ordres q et $q-1$ il y a des relations, analogues aux équations (24)-(27), qu'il est inutile d'expliquer ici; il nous suffit de noter seulement les relations suivantes:

$$(29) \quad a^{(q-1)}_{h\sigma} h^{(q)}_{\sigma} a^{(q)}_{q+1\sigma} - a^{(q-1)}_{h\sigma} h^{(q)}_{q+1\sigma} a^{(q)}_{q+1\sigma} = 0.$$

En résumant les raisonnements de ce numéro et du numéro précédent nous voyons que les transformations du prolongement G_q du pseudo-groupe G laissent invariantes les formes différentielles linéaires $\omega^*, \tau_1^1, \dots, \tau_{q-1}^{q-1}$ et que ses équations de définition ont la forme suivante:

$$(30) \quad \bar{\omega}^* = \omega^*, \quad \bar{\tau}_1^1 = \tau_1^1, \quad \dots, \quad \bar{\tau}_q^q = \tau_q^q;$$

le système (30) est en involution et les coefficients $a^{(q)}_{h\sigma}$ forment un système involutif. Les équations de structure de G_q se composent des relations (20) et de suivantes

$$(31) \quad d\tau_k^k = \Phi_k^k(\omega, \tau_1, \dots, \tau_k) + a^{(k)}_{q+1\sigma} [\tau_{k+1}^{k+1} \omega^\sigma] \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

dont les coefficients sont les constantes de structure de G_q .

Remarque. Il résulte de la formule (17') que chacune des formes τ_r ($r = 1, 2, \dots, k+1$) qui figurent dans l'équation (31) est linéaire et homogène en les différentielles $d\omega^*, du_r^r$, les coefficients de du_r^r dépendant des points $u_1, u_2, \dots, u_r$ et les coefficients de $d\omega^*$ renfermant en outre le point u_{r+1} .

87. Repère mobile. A la suite infinie des points

$$x, u_1, u_2, \dots, \\ x \in E, u_k \in F_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

où E et F_k désignent les ouverts définis au n° 85, nous donnerons le nom de *repère mobile* du pseudo-groupe G et nous le désignerons par R .

Considérons un repère arbitraire $R(x, u_1, u_2, \dots)$ et une transformation S ($\bar{x}^* = \varphi^*(x)$) du pseudo-groupe G appliquant le point x sur un autre point $\bar{x} \in E$ qui peut d'ailleurs se confondre avec x . Comme S entraîne la suite infinie des formules (16) qui déterminent successivement les points $\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$, nous dirons que S applique le repère donné sur un autre repère bien déterminé $\bar{R}(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots)$. En changeant arbitrairement la transformation de G qui applique x sur un même point $\bar{x}$ on obtient ainsi une famille des repères attachés à $\bar{x}$ (*repères d'ordre zéro*). Un repère mobile est invariant pour la transformation identique et, inversement, une transformation $S \in G$ laissant inaltéré un repère est une

identité; cela résulte du fait que S doit conserver le point x et toutes les dérivées d'une solution des équations (D) du n° 82. Nous voyons ainsi que le repère R joue le même rôle dans la théorie des pseudo-groupes infinis que celui des repères introduits par E. Cartan dans la théorie des groupes continus finis ([12], p. 70).

Soit $\hat{x}$ un point arbitraire de E ; avec ce point est liée la famille des repères $R(\hat{x}, u_1, u_2, \dots)$ d'ordre zéro, attachés à $\hat{x}$. Les transformations de G qui laissent fixe le point $\hat{x}$ ou, autrement dit, qui transforment l'un des repères de la famille en un autre, forment un sous-groupe $g_{\hat{x}} \subset G$ que l'on appelle le *sous-groupe de stabilité* du point $\hat{x}$. Les transformations de $g_{\hat{x}}$ dépendants d'une infinité des points u_k ($k = 1, 2, \dots$), ce sous-groupe est continu et infini mais, contrairement à ce qui se passe dans la théorie des groupes continus finis, il n'est pas un pseudo-groupe de Lie, ses transformations ne pouvant être définies comme solutions d'un système des équations en involution. Considérons maintenant un point arbitraire $(\hat{x}, \hat{u}_1)$ du produit $E \times F_1$ et la famille des repères $R(\hat{x}, \hat{u}_1, u_2, u_3, \dots)$, où u_k ($k > 1$) est un point arbitraire de l'ouvert F_k (*repères d'ordre un*). Les transformations de G qui appliquent l'un des repères d'ordre un en un autre, en laissant fixe le point $(\hat{x}, \hat{u}_1)$ de $E \times F_1$, forment un nouveau sous-groupe de G appelé *groupe de stabilité du point* $(\hat{x}, \hat{u}_1)$. D'une manière générale nous dirons que les repères $R(\hat{x}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r, u_{r+1}, \dots)$, où $\hat{x}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r$ sont des points choisis arbitrairement mais d'une façon déterminée, sont les *repères d'ordre r* et que les transformations de G qui laissent fixe le point $(\hat{x}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r)$ forment le *sous-groupe de stabilité* de ce point du produit $E \times F_1 \times \dots \times F_r$.

88. Groupes de structure d'un pseudo-groupe infini. Nous allons montrer dans ce numéro que dans la théorie de structure des pseudo-groupes infinis un rôle important joue une suite infinie de groupes linéaires finis de Lie qui portent le nom de *groupes de structure*. Pour introduire cette notion nous nous servirons d'un autre système des repères de divers ordres, formés des vecteurs.

Désignons à cet effet par $\vec{X}_x$ les vecteurs du repère naturel tangent à E au point $\hat{x}$ (n° 32) et considérons la famille des repères $T^{(1)}(u_1)$ composés des vecteurs $I_x(u_1)$ définis par les formules suivantes:

$$\vec{X}_x = \alpha_x^*(\hat{x}, u_1) \vec{I}_x(u_1)$$

$\alpha_{\circ}^*(\hat{x}, u_1)$ étant fonctions du point u_1 obtenues des coefficients de la forme

(10) du n° 85. Le vecteur infinitésimal $\vec{\sigma}_1 = \vec{X}_{\circ} d\hat{x}^{\circ}$ (n° 31, c)) peut donc être présenté sous la forme

$$(32) \quad \vec{\sigma}_1 = \vec{\alpha}_{\circ}^* I_{\kappa}(u_1),$$

où l'on a posé $\vec{\alpha}_{\circ}^* = \alpha_{\circ}^*(\hat{x}, u_1) d\hat{x}^{\circ}$.

Le groupe de stabilité $g_{\hat{x}}^{\circ}$ du point $\hat{x}$ (n° 87) induit un groupe des transformations du repère $\vec{T}(u_1)$ définies au moyen des formules $\vec{u}_1^{h_1} = \chi_1^{h_1}(\hat{x}, u_1)$ (v. équ. (16) du n° 85); nous lui donnerons le nom de *groupe de structure du premier ordre du pseudo-groupe G* et nous le désignerons par Γ_1 . Pour étudier de plus près ce groupe, qui est un groupe de transformations linéaires, revenons aux équations de structure (20)

$$d\omega^* = \alpha_{h_1\mu}^* [\tau_1^{h_1} \omega^{\mu}] + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^* [\omega^{\lambda} \omega^{\mu}]$$

et imaginons deux séries des différentielles $d\hat{x}^*$, $du_1^{h_1}$ et $\delta\omega^*$, $\delta u_1^{h_1}$. Or, nous savons (n° 4, Remarque) qu'à ces équations correspondent les relations suivantes entre les formes bilinéaires:

$$\delta\omega^*(\vec{d}) - d\omega^*(\delta) = \alpha_{h_1\mu}^* \{ \tau_1^{h_1}(\delta) \omega^{\mu}(\vec{d}) - \tau_1^{h_1}(\vec{d}) \omega^{\mu}(\delta) \} + c_{\lambda\mu}^* \omega^{\lambda}(\delta) \omega^{\mu}(\vec{d}).$$

Supposons que le premier système des différentielles soit choisi arbitrairement et que le second satisfasse aux conditions $\delta\hat{x}^* = 0$. Comme dans les formes ω^* ne figurent pas les différentielles $\delta u_1^{h_1}$, on a $\omega^*(\delta) = 0$ et, par conséquent, la dernière relation prend la forme

$$(33) \quad \delta\omega^*(\vec{d}) = \alpha_{h_1\mu}^* \tau_1^{h_1}(\delta) \omega^{\mu}(\vec{d}).$$

Appliquons maintenant l'opération δ à l'équation (32); comme on a $\delta\vec{\sigma}_1 = 0$, on obtient ainsi la relation suivante:

$$\delta \vec{\alpha}_{\circ}^* I_{\kappa}(u_1) + \vec{\alpha}_{\circ}^* (\delta) \delta I_{\kappa}(u_1) = 0$$

qui, en vertu de la formule (33), peut s'écrire comme il suit:

$$\vec{I}(u_1) \alpha_{h_1\mu}^* \tau_1^{h_1}(\delta) \omega^{\mu}(\vec{d}) + \vec{\alpha}_{\circ}^* (\delta) \delta I_{\mu}(u_1) = 0$$

ou

$$\delta I_{\mu} + \alpha_{h_1\mu}^* \tau_1^{h_1}(\delta) I_{\kappa} = 0,$$

$\tau_1^{h_1}(\delta)$ désignant les formes $\tau_1^{h_1}(\delta)$ restreintes à $\hat{x}$. Aux différentielles $\delta u_1^{h_1}$ dans les formes $\tau_1^{h_1}(\delta)$ nous pouvons substituer des expressions telles qu'il soit $\tau_1^{h_1}(\delta) = -\varepsilon^{h_2}$, ε^{h_1} étant des constantes arbitraires. La dernière relation prend alors la forme

$$\vec{\delta I}_{\mu} = \varepsilon^{h_1} \alpha_{h_1\mu}^* \vec{I}_{\kappa} \quad (h_1 = 1, 2, \dots, m_1).$$

Cette formule représente la transformation infinitésimale la plus générale du groupe linéaire Γ_1 ; on voit bien que ces transformations et, par conséquent, aussi le groupe Γ_1 ne dépendent pas du choix du point $\hat{x}$ ce qui justifie le nom de ce groupe. On voit de plus que Γ_1 est formé de m_1 transformations infinitésimales indépendantes

$$(34) \quad \vec{\delta I}_{\mu} = \alpha_{h_1\mu}^* \vec{I}_{\kappa} \quad (h_1 = 1, 2, \dots, m_1)$$

et que, par suite, son ordre est égal à m_1 . Pour déterminer la structure de Γ_1 nous présenterons ses transformations infinitésimales sous la forme

$$(35) \quad \vec{X}_{h_1} f = \alpha_{h_1\mu}^* v^{\mu} \frac{\partial f}{\partial v^{\mu}},$$

v^* désignant n variables indépendantes. Calculons maintenant les parenthèses de Poisson des transformations (35); un calcul facile conduit aux formules

$$(\vec{X}_{h_1} \vec{X}_{i_1}) f = (\alpha_{h_1\mu}^* \alpha_{i_1\kappa}^* - \alpha_{i_1\mu}^* \alpha_{h_1\kappa}^*) v^{\mu} \frac{\partial f}{\partial v^{\kappa}}.$$

Or, d'après les équations (24) du n° 86 on a la relation

$$\alpha_{h_1\mu}^* \alpha_{i_1\kappa}^* - \alpha_{i_1\mu}^* \alpha_{h_1\kappa}^* = \gamma_{h_1 i_1}^{j_1} \alpha_{j_1\mu}^*,$$

la formule ci-dessus peut donc s'écrire comme il suit

$$(36) \quad (\vec{X}_{h_1} \vec{X}_{i_1}) f = \gamma_{h_1 i_1}^{j_1} \alpha_{j_1\mu}^* v^{\mu} \frac{\partial f}{\partial v^{\mu}}.$$

On voit ainsi que les coefficients $\gamma_{h_1 i_1}^{j_1}$, qui font une partie des constantes de structure du pseudo-groupe G , sont les constantes de structure du groupe de structure Γ_1 du pseudo-groupe G .

Pour définir le groupe de structure du deuxième ordre du pseudo-groupe G considérons l'espace vectoriel tangent à E au point $\hat{x}$ et l'espace

vectorel tangent à l'ouvert F_1 au point $\hat{u}_1$; le produit de ces espaces est un espace vectoriel à $n + m_1$ dimensions tangent au produit $E \times F_1$ en $(\hat{x}, \hat{u}_1)$. Rapportons le premier de ces espaces au repère naturel composé des vecteurs $\vec{X}_\kappa^{(1)}$ et le second à son repère naturel composé des vecteurs $\vec{X}_{h_1}^{(2)}$. En désignant par $\vec{\sigma}_2$ le vecteur infinitésimal des composantes dx^* , $du_1^{h_1}$ on a

$$\vec{\sigma}_2 = \vec{X}_\kappa^{(1)} dx^* + \vec{X}_{h_1}^{(2)} du_1^{h_1}.$$

Si l'on y exprime les différentielles dx^* , $du_1^{h_1}$ par leurs expressions tirées des équations (10) et (14), on en déduit l'équation de la forme

$$(37) \quad \vec{\sigma}_2 = \vec{I}_\kappa^{(1)} \hat{\omega}^* + \vec{I}_{h_1}^{(2)} \hat{\tau}_1^{h_1}$$

où $\hat{\omega}^*$ et $\hat{\tau}_1^{h_1}$ désignent les formes que l'on obtient de ω^* et $\tau_1^{h_1}$ en y posant $x = \hat{x}$, $u_1 = \hat{u}_1$; les vecteurs $\vec{I}_\kappa^{(1)}, \vec{I}_{h_1}^{(2)}$ forment un repère T de l'espace vectoriel tangent au produit $E \times F_1$ en $(\hat{x}, \hat{u}_1)$ ⁽¹⁾. Rappelons que d'après la formule (14) la forme $\hat{\tau}_1^{h_1}$, qui est linéaire et homogène en les différentielles dx^* et $du_1^{h_1}$, dépend du point u_2 dont les coordonnées figurent seulement dans les coefficients des différentielles dx^* . Il s'en suit que les vecteurs $\vec{I}_\kappa^{(1)}$ dépendent aussi de ce point et que les vecteurs $\vec{I}_{h_1}^{(2)}$ ont des valeurs fixes au point $(\hat{x}, \hat{u}_1)$. On en conclut que le repère T dépend du point u_2 et que, par suite, les transformations du groupe de stabilité du point $(\hat{x}, \hat{u}_1)$ induisent des transformations de ce repère définies par les formules $\vec{w}_2^{h_2} = \chi_2^2(\hat{x}, \hat{u}_1, u_2)$ (v. équ. (16) du n° 85). Ces transformations forment un groupe auquel nous donnerons le nom de *groupe de structure du deuxième ordre* et le désignerons par Γ_2 . Pour déterminer la structure de Γ_2 , qui est un groupe linéaire et fini, nous allons utiliser le second système des équations de structure (23) du pseudo-groupe G

$$\delta \tau_1^{h_1} = \frac{1}{2} \gamma_{i_1 j_1}^{h_1} [\tau_1^{i_1} \tau_1^{j_1}] + x_{i_1 \sigma}^{h_1} [\tau_1^{i_1} \omega^\sigma] + \frac{1}{2} y_{\sigma \sigma}^{h_1} [\omega^\sigma \omega^\sigma] + a_{i_2 \sigma}^{h_1} [\tau_2^{i_2} \omega^\sigma].$$

En se servant de la même méthode que dans le cas du groupe Γ_1 nous introduirons deux séries des différentielles dx^* , $du_1^{h_1}$, $du_2^{h_2}$ et δx^* ,

⁽¹⁾ Les vecteurs $\vec{I}_\kappa^{(1)}$ ne sont pas identiques aux vecteurs désignés plus haut par le même symbole.

$\delta u_1^{h_1}$, $\delta u_2^{h_2}$, dont la seconde satisfait aux conditions $\delta x^* = \delta u_1^{h_1} = 0$, et nous remplacerons les dernières équations par les relations entre les formes bilinéaires. Comme les formes ω^* et $\tau_1^{h_1}$ ne contiennent pas les différentielles des variables $u_2^{h_2}$ ($\omega^*(\delta) = \tau_1^{h_1}(\delta) = 0$) ces relations bilinéaires se ramènent aux suivantes:

$$(38) \quad \delta \tau_1^{h_1}(\delta) = a_{i_2 \sigma}^{h_1} \tau_2^{i_2}(\delta) \omega^\sigma(\delta).$$

Assujettissons maintenant l'équation (37) à l'opération δ ; les vecteurs $\vec{\sigma}_2, \vec{I}_{h_1}^{(2)}$ et la forme $\hat{\omega}^*$ étant indépendants du point u_2 on obtient ainsi la relation

$$\hat{\omega}^*(\delta) \delta \vec{I}_\kappa^{(1)} + \delta \tau_1^{h_1}(\delta) \vec{I}_{h_1}^{(2)} = 0.$$

Si l'on y porte l'expression (38) de la grandeur $\delta \tau_1^{h_1}(\delta)$, on trouve

$$\hat{\omega}^*(\delta) \delta \vec{I}_\kappa^{(1)} + a_{i_2 \sigma}^{h_1} \tau_2^{i_2}(\delta) \hat{\omega}^*(\delta) \vec{I}_{h_1}^{(2)} = 0.$$

En changeant dans le second terme l'indice σ en κ et en tenant compte de l'indépendance des formes $\hat{\omega}^*$, on trouve la relation suivante:

$$\delta \vec{I}_\kappa^{(1)} + a_{i_2 \kappa}^{h_1} \tau_2^{i_2}(\delta) \vec{I}_{h_1}^{(2)} = 0.$$

Si l'on choisit pour les différentielles $\delta u_2^{h_2}$ des fonctions telles qu'il soit $\tau_2^{i_2}(\delta) = -\varepsilon^{i_2}$, ε^{i_2} étant des constantes arbitraires, on déduit de l'équation précédente la formule

$$(39') \quad \delta \vec{I}_\kappa^{(1)} = \varepsilon^{i_2} a_{i_2 \kappa}^{h_1} \vec{I}_{h_1}^{(2)}$$

à laquelle on doit adjoindre les équations

$$(39'') \quad \delta \vec{I}_{h_1}^{(2)} = 0.$$

Les deux formules (39') et (39'') représentent le mouvement infinitésimal le plus général du repère $T(\vec{I}_\kappa, \vec{I}_{h_1})$, accompli sous l'action du sous-groupe de G qui laisse fixe le point $(\hat{x}, \hat{u}_1)$. Ces mouvements forment le groupe Γ_2 composé de m_2 transformations linéaires indépendantes

$$\delta \vec{I}_\kappa^{(1)} = a_{i_2 \kappa}^{h_1} \vec{I}_{h_1}^{(2)}, \quad \delta \vec{I}_{h_1}^{(2)} = 0 \quad (i_2 = 1, 2, \dots, m_2).$$

Si l'on introduit n variables v_1^* et m_1 variables $v_2^{h_1}$, les transformations infinitésimales de Γ_2 peuvent être présentées sous la forme

$$(40) \quad X_{i_2} f = a_{i_2 v_1^*}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial v_2^{h_1}} \quad (i_2 = 1, 2, \dots, m_2).$$

Il est facile de voir que ces transformations satisfont à la relation

$$(X_{i_2} X_{j_2}) f = 0.$$

On voit ainsi que le groupe de structure Γ_2 est un groupe linéaire abélien d'ordre m_2 . Les coefficients dans les transformations infinitésimales de Γ_1 et de Γ_2 sont liées par les relations (25)

$$a_{h_1 \lambda}^{(1)} a_{i_2 \mu}^{h_1} - a_{h_1 \mu}^{(1)} a_{i_2 \lambda}^{h_1} = 0.$$

Les raisonnements précédents peuvent être généralisés; il faut se servir pour cela de l'espace vectoriel tangent en $\hat{x}$ à E et des espaces vectoriels tangent en $\hat{u}_h$ à F_h ($h = 1, 2, \dots, r$). Le sous-groupe de stabilité du point $(\hat{x}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{r-1})$ induit dans le produit de ces espaces vectoriels un groupe linéaire Γ_r ($r = 2, 3, \dots$) que nous appellerons *r^{ième} groupe de stabilité* du pseudo-groupe G . Les transformations infinitésimales de Γ_r ont la forme suivante:

$$(41) \quad X_{i_r} f = a_{i_r v_{r-1}^*}^{(r)} \frac{\partial f}{\partial v_{r-1}^{h_{r-1}}}.$$

L'ordre de Γ_r est égal à m_r et les coordonnées $u_r^{h_r}$ d'un point de F_r jouent le rôle de ses paramètres. Les parenthèses des transformations (41) étant toutes nulles Γ_r est un groupe abélien. Les coefficients des transformations infinitésimales de Γ_r et Γ_{r+1} satisfont aux relations (29)

$$a_{i_{r+1} v_r^*}^{(r-1)} a_{i_r \lambda}^{(r)} - a_{i_{r+1} \lambda}^{(r-1)} a_{i_r v_r^*}^{(r)} = 0.$$

Nous voyons ainsi qu'avec le pseudo-groupe G est liée la suite infinie des groupes linéaires de stabilité Γ_r ($r = 1, 2, \dots$), dont les transformations infinitésimales sont données par les formules (35) pour $r = 1$ et par les formules (41) pour $r > 1$. Rappelons que les coordonnées d'un point $u_r \in F_r$ sont les paramètres de Γ_r et que les coefficients $a_{i_r v_{r-1}^*}^{(r-1)}$ dans les formules (41) forment un système involutif.

89. Complément. Il résulte des considérations précédentes que le groupe Γ_1 détermine les autres groupes de structure $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ et que, par conséquent, son rôle dans l'étude de la structure du pseudo-groupe infini G est le plus important. En raison de cette propriété nous reviendrons ici sur ce groupe pour faire voir comme il entre dans les équations de définition.

Nous avons vu au n° 88 que Γ_1 est un groupe linéaire de Lie d'ordre m_1 agissant sur l'espace vectoriel tangent à l'espace — base E en un point $\hat{x}$ et qu'il est indépendant du choix de ce point. Les paramètres dont dépendent les transformations de Γ_1 sont les coordonnées $u_1^{h_1}$ d'un point $u_1 \in F_1$. Faisons pour un point arbitraire $x \in E$ un changement de ces coordonnées en les remplaçant par les paramètres canoniques $\bar{u}_1^{h_1}$ du groupe Γ_1 au moyen d'une substitution de la forme $u_1^{h_1} = p^{h_1}(x, \bar{u})$ et supposons que les valeurs nulles de ces paramètres correspondent à la transformation identique du groupe Γ_1 .

Revenons maintenant aux formules (10)

$$\omega^* = \alpha_i^*(x, u) dx^i$$

du n° 85 et admettons que les paramètres $u_1^{h_1}$ qui y figurent sont les paramètres canoniques. Si l'on pose $u_1^{h_1} = 0$ dans les seconds membres de ces formules, on obtient n formes pfaffiennes $\alpha_i^*(x, 0) dx^i$ qui ne dépendent que des variables x^i ; nous les désignerons par $\Theta^*(x, dx)$. En exprimant les différentielles dx^i au moyen des formes Θ^* et en portant les expressions ainsi obtenues dans les équations (10), rappelées plus haut, on obtient les formules de la forme suivante:

$$\omega^* = \alpha_i^* \Theta_i^*$$

représentant une substitution du groupe linéaire Γ_1 faite sur les formes $\Theta^*(x, dx)$. Comme ce groupe est indépendant du point x , il s'en suit que les coefficients α_i^* dépendent seulement des paramètres canoniques

$$\omega^* = \alpha_i^*(u) \Theta^i(x, dx)$$

et que les équations de définition du pseudo-groupe G peuvent être écrites de la manière suivante:

$$\alpha_i^*(\bar{u}) \Theta^i(\bar{x}, d\bar{x}) = \alpha_i^*(u) \Theta^i(x, dx).$$

THÉORÈME 4. *Tout pseudo-groupe infini transitif du premier ordre est formé des transformations qui effectuent une substitution d'un groupe linéaire sur n formes pfaffiennes indépendantes $\Theta^i(x, dx)$.*

§ 2. Généralisations

90. Pseudo-groupes d'ordres supérieurs. Soit G un pseudo-groupe infini de Lie dont les équations de définition sont du deuxième ordre. Nous supposons que le système de ces équations, que nous désignerons par (D), se compose des formules suivantes:

$$(D) \quad \frac{\partial \bar{x}^*}{\partial x^{\lambda}} = \psi_{\lambda}^*(x, \bar{x}, u_1),$$

$$(D_1) \quad \frac{\partial \bar{u}_1^{\lambda_1}}{\partial x^{\lambda}} = \psi_{\lambda}^{\lambda_1}(x, \bar{x}, u_1, u_2)$$

où nous nous avons servi des notations adoptées aux n°s 82 et 83. Nous conservons aussi les hypothèses faites au n° 82 avec deux changements suivants. Or, nous avons supposé au n° 83 que (D₁) se compose exclusivement des formules déduites des équations (D) au moyen de différentiation; nous admettons maintenant que (D₁) contient aussi d'autres formules qui sont indépendantes de celles qu'on obtient en différentiant les équations (D). Nous supposons en second lieu, contrairement à l'hypothèse 2° du n° 82, que le système (D) des équations aux dérivées partielles du premier ordre des inconnues $\bar{x}^*$ n'est pas en involution et que c'est le système (Δ) qui jouit maintenant de cette propriété.

Au système (Δ) peuvent être appliqués les raisonnements du n° 83 avec des changements convenables. Nous pouvons dire en particulier que les prolongements successifs du système (Δ) se composent des équations (D_r) ou (D_r') ($r = 2, 3, \dots$) de ce numéro et que ces équations ne permettent pas d'exprimer toutes les dérivées partielles d'un ordre quelconque k au moyen des dérivées d'ordres inférieurs à k .

Les Théorèmes 1 et 2 du n° 84 restent valables pour le pseudo-groupe du deuxième ordre, à condition de remplacer dans leurs énoncés le système (D) par le système (Δ), et on les démontre de la même manière que dans le cas des pseudo-groupes du premier ordre.

En poursuivant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent on établit les prolongements successifs de G qui peuvent être écrits sous la forme des formules (16) du n° 85 et on construit les formes différentielles (17) invariantes pour ces prolongements. On montre ensuite que les équations de structure ont la même forme que dans le cas des pseudo-groupes du premier ordre et que les équations de définition (D) et (D₁) peuvent être remplacées par les équations

$$(1) \quad \bar{\omega}^* = \omega^*, \quad \bar{\tau}_1^{\lambda_1} = \tau_1^{\lambda_1}$$

qui constituent un système de Pfaff en involution. En fermant ce système et en tenant compte des formules (20) et (23) du n° 86 on obtient les relations de la forme suivante:

$$a_{i_2 \sigma}^{k_1} [(\bar{\tau}_2^{i_2} - \tau_2^{i_2}) \omega^{\sigma}] = 0,$$

d'où l'on conclut que les coefficients $a_{i_2 \sigma}^{k_1}$ forment un système involutif. Il faut remarquer que les coefficients $a_{h_1 \mu}^{k_1}$ ne jouissent pas maintenant de cette propriété.

Il est visible que les pseudo-groupes d'ordres supérieurs à deux peuvent être traités de la même manière et que les résultats exposés ci-dessus peuvent être facilement généralisés.

91. Pseudo-groupes intransitifs. En conservant les notations et les conventions du n° 82 supposons que les équations de définition d'un pseudo-groupe infini G se composent des relations (D) et de $n-m$ relations finies analytiques

$$(D_0) \quad F^P(x, \bar{x}) = 0 \quad (P = m+1, m+2, \dots, n)$$

entre les variables x^* et $\bar{x}^*$. Nous admettons que les équations que l'on obtient en différentiant les relations (D₀) font partie des équations (D) et que le système composé des équations (D₀) et (D) est en involution; nous supposons de plus que les deux matrices

$$\left[\frac{\partial F^P}{\partial x^*} \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial F^P}{\partial \bar{x}^*} \right]$$

sont de rang $n-m$. Nous pouvons donc admettre que les équations (D₀) ont la forme

$$(2) \quad \bar{x}^P = \psi^P(x^1, \dots, x^n; \bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$$

et que la matrice

$$(3) \quad \left[\frac{\partial \psi^P}{\partial x^*} \right]$$

est de rang $n-m$.

On voit ainsi que pour chaque point $x \in E$ les équations (2) représentent une variété M_x à m dimensions. Les transformations de G devant satisfaire aux équations (2) il s'en suit qu'une transformation de ce pseudo-groupe ne peut appliquer un point $x \in E$ que sur un point de M_x ; le pseudo-groupe G agit donc intransitivement sur l'ouvert E .

Soit T une transformation de G appliquant le point $x \in E$ sur un point $\bar{x}_0$ choisi arbitrairement mais d'une manière déterminée sur M_x ; on aura alors la relation

$$(4) \quad \bar{x}_0^P = \psi^P(x^1, \dots, x^n; \bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^m) \quad (P = m+1, m+2, \dots, n),$$

où $\bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^m$ désignent des valeurs numériques fixes. Considérons maintenant une transformation arbitraire $S \in G$ appliquant le point x sur un point $'x \in M_x$. La transformation TS^{-1} transforme $'x$ en $\bar{x}_0$; comme TS^{-1} appartient à G les coordonnées de $'x$ et de $\bar{x}_0$ doivent satisfaire aux équations (4)

$$\bar{x}_0^P = \psi^P('x^1, \dots, 'x^n; \bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^m).$$

En comparant les deux dernières relations on trouve

$$\psi^P(x^1, \dots, x^n; \bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^m) = \psi^P('x^1, \dots, 'x^n; \bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^m).$$

Le point x et la transformation S qui applique x sur $'x$ étant arbitraires on en conclut que les fonctions

$$(5) \quad \psi^P(x^1, x^2, \dots, x^n; \bar{x}_0^1, \bar{x}_0^2, \dots, \bar{x}_0^m)$$

sont invariants pour le pseudo-groupe G . Il résulte de l'hypothèse (3) sur la matrice $[\partial \psi^P / \partial x^r]$ que l'on peut faire un changement de variables tel que les fonctions (5) deviennent égales à x^P ; les équations (2) s'écriront alors comme il suit

$$\bar{x}^P = x^P.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Les relations finies (D₀) des équations de définition d'un pseudo-groupe intransitif peuvent être ramenées au moyen d'une transformation des variables à la forme suivante:*

$$(D'_0) \quad \bar{x}^P = x^P.$$

Il résulte de ce théorème qu'une transformation du pseudo-groupe G peut être présentée sous la forme

$$(6) \quad \bar{x}^h = \varphi^h(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \bar{x}^P = x^P \\ (h = 1, 2, \dots, m; P = m+1, m+2, \dots, n).$$

En raisonnant comme aux n^{os} (82)–(85) on obtient les prolongements de G dont les transformations peuvent être présentées sous la forme des formules (16) du n^o 85, où la première ligne doit être remplacée par les équations (6). Il résulte des propriétés des fonctions χ^{hr} dans les équations (16) du n^o 85 que les fonctions x^P sont les seuls invariants des pseudo-groupes prolongés.

Remarquons encore que les équations de définition (18) du n^o 86 doivent être remplacées par le système suivant

$$\bar{x}^P = x^P, \quad \bar{\omega}^* = \omega^*,$$

où

$$\omega^h = a^h(x, u_1) dx^2, \quad \omega^P = dx^P$$

$$(h = 1, 2, \dots, m; P = m+1, m+2, \dots, n).$$

Les équations de structure du pseudo-groupe intransitif ont la même forme que celles des pseudo-groupes transitifs (n^o 86, équ. (20)), il faut seulement remarquer que les coefficients $a_{h\mu}^{x^*}$ et $C_{\gamma\mu}^{x^*}$, étant invariants pour le pseudo-groupe, sont fonctions des invariants x^P . Il en résulte que les équations (23') du n^o 86 que l'on obtient en différentiant extérieurement les équations (20), doivent être complétées par les termes qui contiennent les différentielles

$$da_{h\mu}^{x^*} = \frac{\partial a_{h\mu}^{x^*}}{\partial x^P} dx^P \quad \text{et} \quad dC_{\gamma\mu}^{x^*} = \frac{\partial C_{\gamma\mu}^{x^*}}{\partial x^P} dx^P.$$

Par conséquent les relations (24)–(27) du n^o 86 prennent maintenant une forme plus compliquée qu'il est inutile d'expliciter ici.

§ 3. Groupes continus infinis

92. Groupe de structure. Nous avons vu que dans la théorie des pseudo-groupes infinis de Lie un rôle important joue un groupe linéaire appelé le *groupe de structure*. Ce groupe jouant le même rôle dans la théorie des groupes continus infinis nous allons y résumer ses propriétés principales.

Soit Γ_0 un sous-groupe de $GL(n, R)$; en supposant que Γ_0 est un groupe connexe de Lie, de dimension m_0 , désignons par u_0 un point de son espace désigné par la même notation Γ_0 . Soient ⁽¹⁾

$$(1) \quad T_{h_0} f = a_{h_0\mu}^{x^*} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

les transformations infinitésimales, supposées linéairement indépendantes, du groupe Γ_0 (n^o 44); nous savons que les coefficients constants $a_{h_0\mu}^{x^*}$

⁽¹⁾ Dans tout ce chapitre les indices grecs parcourent les valeurs 1, 2, ..., n et les indices h_r, i_r, j_r les valeurs 1, 2, ..., m_r ($r = 0, 1, 2, \dots$).

sont liés aux constantes de structure $\gamma_{i_0^0}^{h_0}$ du groupe Γ_0 par les relations suivantes

$$(2) \quad \alpha_{i_0^0}^x \alpha_{i_0^0}^y - \alpha_{i_0^0}^y \alpha_{i_0^0}^x = \gamma_{i_0^0}^{h_0} \alpha_{i_0^0}^x$$

(équ. (13) au n° 44).

En reprenant les raisonnements du n° 49 formons la suite des groupes linéaires associés au groupe Γ_0 . Désignons à cet effet par A_0 le système $\{\alpha_{h_0^0}^x\}$ des coefficients des transformations (1). Ce système donne naissance à une suite des systèmes $A_r = \{\alpha_{h_r^r}^{x_r-1}\}$, liés l'un à l'autre par les relations suivantes

$$(2') \quad \alpha_{i_{r-1}^r}^{h_{r-2}^{r-1}} \alpha_{i_{r-1}^r}^{h_{r-1}^{r-1}} - \alpha_{i_{r-1}^r}^{h_{r-1}^{r-1}} \alpha_{i_{r-1}^r}^{h_{r-2}^{r-1}} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Rappelons que 1° les systèmes A_r ont été déduits du système A_0 au moyen des systèmes des équations extérieures quadratiques

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_{i_0^0}^x [x_1^0 x^1] = 0, \\ \alpha_{i_1^1}^x [x_2^1 x^2] = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{i_{r-1}^{r-1}}^x [x_r^{r-1} x^r] = 0 \end{cases}$$

aux inconnues $x^1, x_1^0, x_2^1, \dots, x_{r-1}^{r-1}$, et que 2° à la suite $A_0, A_1, A_2, \dots$ correspond une suite des groupes linéaires

$$(4) \quad \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r, \dots,$$

la dimension du groupe Γ_r étant égale à m_r . Les transformations du groupe Γ_r laissent invariants les variables $x^1, x_1^0, x_2^1, \dots, x_{r-1}^{r-1}$ et transforment les variables x_r^{r-1} selon les formules

$$(5) \quad \bar{x}_r^{r-1} = x_r^{r-1} - \alpha_{i_{r-1}^{r-1}}^{i_{r-1}^{r-1}} u_r^{r-1} x^1,$$

où les u_r^{r-1} désignent des paramètres arbitraires qui constituent un système des coordonnées d'un point u_r de l'espace du groupe Γ_r .

Hypothèse A. Nous supposons que

1° la suite (4) soit infinie aucun de ses éléments ne se réduisant à l'identité et que

2° les systèmes (3) des équations extérieures soient involutifs par rapport aux variables x^1 .

93. Espace d'un groupe continu infini. Soit V^n une variété analytique connexe de dimension n .

Hypothèse B. Nous supposons que sur V^n puisse être défini un espace fibré tangent B_0 dont le groupe de structure est le groupe Γ_0 (n° 51).

Or, il résulte des développements faits au n° 59 et de l'hypothèse A qu'en partant de l'espace B_0 on peut construire une suite infinie

$$(6) \quad B_0, B_1, \dots, B_r, \dots$$

des espaces dont chacun est un espace fibré tangent ayant pour base celui qui le précède et pour groupe de structure l'élément du même numéro de la suite (4). Les coordonnées du point b_r de l'espace B_r se composent donc des points $x, u_0, u_1, \dots, u_r$ et la dimension de B_r est égale au nombre $n + m_0 + m_1 + \dots + m_r$. Comme la variété V^n et les groupes (4) sont analytiques il en est de même des espaces (6).

Posons maintenant

$$(7) \quad G = V^n \times \Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \dots;$$

un point $g \in G$ a donc une infinité des coordonnées:

$$(8) \quad g = (x, u_0, u_1, u_2, \dots) \quad (x \in V^n, u_0 \in \Gamma_0, u_1 \in \Gamma_1, \dots).$$

Comme voisinage de g nous allons considérer le produit cartésien des voisinages des points $x, u_0, u_1, \dots$ dans les variétés dont ils font partie. Remarquons que la suite des points $x, u_0, u_1, \dots, u_r$, dérivée du point g , représente un point b_r de l'espace fibré B_r et de l'espace $G_r = V^n \times \Gamma_0 \times \dots \times \Gamma_r$:

$$g_r = (x, u_0, u_1, \dots, u_r), \quad g_r \in B_r, \quad g_r \in G_r.$$

Il en résulte que l'on a

$$p_0 b_0 = x, \quad p_r b_r = b_{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

p_r désignant la projection propre à l'espace B_r .

Considérons maintenant trois points a', a'', a''' de l'espace G :

$$a' = (x', u'_0, u'_1, \dots), \quad a'' = (x'', u''_0, u''_1, \dots),$$

$$a''' = (x''', u'''_0, u'''_1, \dots)$$

et les trois points a'_r, a''_r, a'''_r de l'espace G_r :

$$a'_r = (x', u'_0, \dots, u'_r), \quad a''_r = (x'', u''_0, \dots, u''_r),$$

$$a'''_r = (x''', u'''_0, \dots, u'''_r).$$

Nous dirons que a''' est une fonction analytique des points a' et a'' , donnée dans l'espace G , si x''' est une fonction analytique de x' et de x'' définie dans la variété V^n et si u_r''' ($r = 0, 1, 2, \dots$) est une fonction analytique de u_r' et de u_r'' définie dans l'espace fibré G_r .

On définit d'une manière analogue une fonction analytique d'un point de l'espace G et on dira qu'une telle fonction établit une *application* d'un domaine de l'espace G sur un autre domaine.

Ceci posé nous voyons que l'espace G est une variété analytique connexe à une infinité de dimensions; nous allons montrer dans le numéro suivant que G est l'espace d'un groupe continu infini qui sera désigné par la même lettre G ; les points de G seront appelés éléments du groupe.

94. THÉORÈME 1. Dans l'espace G peut être définie une opération, appelée *multiplication*, jouissant des propriétés suivantes:

1° à chaque paire ordonnée des points $a, b \in G$ correspond un élément déterminé $c \in G$, dit leur *produit*, qui est une fonction analytique de ses facteurs;

2° le produit des éléments de G est associatif:

$$(a b) c = a (b c) \quad (a, b, c \in G);$$

3° il existe un élément $e \in G$, appelé *unité* de G , tel qu'il soit

$$a e = e a = a$$

pour tout élément $a \in G$;

4° il existe pour tout $a \in G$ un élément a^{-1} , appelé *l'inverse* de a , qui satisfait aux relations:

$$a a^{-1} = a^{-1} a = e;$$

l'inverse a^{-1} est une fonction analytique de a .

La démonstration de ce Théorème repose sur les propriétés des groupes Γ_r et des espaces B_r établies précédemment.

Notons en premier lieu que dans B_0 peut être déterminé un système des formes linéaires ω^* et dans B_r ($r = 1, 2, \dots$) un système des formes linéaires ω^{hr-1} , les ω^* étant homogènes par rapport aux différentielles des coordonnées du point x et les ω^{hr-1} par rapport aux différentielles des coordonnées du point b_{r-1} (n° 60).

Les différentielles extérieures de ces formes peuvent être ramenées à la forme suivante

$$(9) \quad d\omega^* = a_{h\mu}^{(0)} [\omega^{h_0} \omega^\mu] + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^{(0)} [\omega^\lambda \omega^\mu],$$

$$(10) \quad d\omega^{h_0} = a_{\lambda\mu}^{(1)} [\omega^{\lambda_1} \omega^\mu] + \frac{1}{2} \gamma_{\rho\sigma}^{(2)} [\omega^{\rho_0} \omega^{\sigma_0}] + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^{(1)} [\omega^\lambda \omega^\mu],$$

$$(11) \quad d\omega^{(r)h_{r-1}} = a_{\lambda\mu}^{(r)} [\omega^{\lambda_r} \omega^\mu] + \frac{1}{2} C_{\lambda\mu}^{(r)} [\omega^\lambda \omega^\mu]$$

$$(r = 2, 3, \dots),$$

où les coefficients $c_{\lambda\mu}^{(0)}$ et $c_{\lambda\mu}^{(r)h_{r-1}}$ sont des fonctions analytiques définies respectivement dans B_0 et B_r (nos 59, 60).

Considérons maintenant le système (E) composé d'une suite infinie des systèmes des équations de Pfaff suivantes:

$$(E_0) \quad \omega^* = \omega^*,$$

$$(E_r) \quad \omega^{hr-1} = \omega^{(r)h_{r-1}} \quad (r = 1, 2, \dots),$$

où les premiers membres désignent ce que deviennent les seconds, si l'on y affecte d'une barre les symboles des variables.

En vertu de l'hypothèse B (n° 93) le système (E_0) est en involution par rapport aux coordonnées du point $x \in V^n$ et il en est de même de chaque système tronqué $(\mathcal{E}_k)$ formé des systèmes

$$(E_0), (E_1), \dots, (E_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Il résulte de la forme des expressions ω^*, ω^{hr-1} que l'intégrale quelconque du système $(\mathcal{E}_k)$ peut être présentée au moyen des équations de la forme suivante:

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \bar{u}_0 = \varphi_0(x, u_0), \quad \dots, \quad \bar{u}_k = \varphi_k(x, u_0, \dots, u_k)$$

que nous écrirons d'une façon condensée

$$(12) \quad \bar{g}_k = \Phi_k(g_k),$$

en désignant par g_k et $\bar{g}_k$ les points de l'espace B_k :

$$g_k = (x, u_0, \dots, u_k), \quad \bar{g}_k = (\bar{x}, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_k).$$

Imaginons maintenant dans l'espace G , défini par la formule (7), un point fixe d'ailleurs arbitraire

$$(13) \quad g^0 = (x^0, u_0^0, u_1^0, \dots)$$

et un point quelconque

$$(14) \quad \bar{g}^0 = (\bar{x}^0, \bar{u}_0^0, \bar{u}_1^0, \dots).$$

Or, d'après le théorème d'existence de la théorie d'un système des équations de Pfaff en involution, on peut déterminer, d'une infinité de manières, la solution (12) du système $(\mathcal{E}_k)$ tellement qu'il soit $\bar{g}_k = \bar{g}_k^0$ pour $g_k = g_k^0$, où g_k^0 et $\bar{g}_k^0$ désignent les points de l'espace B_k déduits respectivement des points (13) et (14). Soit

$$(15) \quad \bar{g}_k = \psi_k(g_k, \bar{g}_k^0)$$

la solution demandée. Nous pouvons la choisir de manière que les équations (15) contiennent les équations

$$\bar{g}_{k-1} = \psi_{k-1}(g_{k-1}, \bar{g}_{k-1}^0)$$

de la solution choisie pour le système $(\mathcal{E}_{k-1})$.

En appliquant ce raisonnement aux systèmes $(\mathcal{E}_k)$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$ on arrive à une solution analytique déterminée du système infini $(\mathcal{E})$ composé des équations (E_0) et (E_r) ($r = 1, 2, \dots$); nous la désignerons par la notation

$$(16) \quad \bar{g} = \Psi(g, \bar{g}^0).$$

Cette solution est telle qu'elle fait correspondre à chaque paire des points g et $\bar{g}^0$ de l'espace G un troisième point déterminé du même espace. Nous convenons de dire que la fonction $\Psi(g, \bar{g}^0)$ définit le produit $\bar{g}_0 \cdot g$ en écrivant

$$(17) \quad \bar{g} = \bar{g}_0 \cdot g.$$

Si le point $\bar{g}_0$ parcourt l'espace G , l'équation (16) donne l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les formes différentielles $\omega^x, \omega^{h_0}, \omega^{h_1}, \dots$. Il existe donc un point $e \in G$ tel qu'en posant $\bar{g}^0 = e$ dans (16), on obtient une transformation identique; on aura par suite

$$eg = g.$$

Il en résulte aussi qu'à chaque point $\bar{g}^0 \in G$ correspond un autre point $'\bar{g}^0 \in G$ tel que la transformation $\bar{g} = \Psi('g^0, g)$ soit l'inverse de (16); nous le désignerons par la notation $'\bar{g}^0 = (\bar{g}^0)^{-1}$. On voit d'après cela que l'opération (17) jouit des propriétés énoncées dans la thèse du Théorème 1 dont la démonstration est ainsi achevée.

Aux équations du système $(\mathcal{E})$ composé des systèmes (E_r) ($r = 0, 1, 2, \dots$) du numéro précédent nous donnerons le nom d'équations de définition du groupe infini G et les équations (9), (10) et (11) seront appelées ses équations de structure.

95. Constantes de structure. Remarquons maintenant que de (17) résulte l'équation suivante:

$$\bar{g}g^{-1} = \bar{g}^0;$$

on voit donc que le point $\bar{g}^0$ dans (16) peut être déterminé de manière que cette transformation applique un point arbitraire g de l'espace G sur un autre point arbitraire $\bar{g}$ de cet espace. L'équation (16) définit donc des transformations agissant transitivement sur l'espace G . On en conclut que les invariants $C_{\lambda\mu}^{(0)x}$ et $C_{\lambda\mu}^{(r)h_{r-1}}$, définis au moyen des équations de structure, ont des valeurs constantes.

Nous voyons ainsi que les équations de structure du groupe G contiennent une infinité des systèmes de constantes:

$$(18) \quad \gamma_{i_0^0}^{h_0}, \quad \alpha_{h_0\mu}^{(0)}, \quad \alpha_{i_r\mu}^{(r)h_{r-1}}, \quad C_{\lambda\mu}^{(0)x}, \quad C_{\lambda\mu}^{(r)h_{r-1}} \quad (r = 1, 2, \dots);$$

nous les appellerons les constantes de structure du groupe infini G .

Rappelons que les constantes de trois premiers de ces systèmes sont liées par les relations (2) et (2'); nous nous proposons maintenant d'établir les relations auxquelles sont assujetties les constantes $C_{\lambda\mu}^{(0)x}$ et $C_{\lambda\mu}^{(1)h_0}$.

Différentions à cet effet les équations (9) du premier système des équations de structure; on obtient ainsi les équations suivantes:

$$(0) \alpha_{h_0\mu}^x [\bar{d}\omega^{h_0}\omega^\mu] - \alpha_{h_0\mu}^{(0)} [\omega^{h_0}\bar{d}\omega^\mu] + C_{\mu\lambda}^{(0)x} [\bar{d}\omega^\mu\omega^\lambda] = 0.$$

Nous y remplacerons les différentielles $\bar{d}\omega^{h_0}$ par leurs expressions

$$\frac{1}{2} \gamma_{i_0^0}^{h_0} [\omega^{i_0^0}\omega^{h_0}] + \alpha_{i_r^r}^{h_0} [\omega^{i_1^1}\omega^r] + \frac{1}{2} C_{\sigma\sigma}^{h_0} [\omega^\sigma\omega^\sigma],$$

données par les équations (10) du n° 94, et les $\bar{d}\omega^\mu$ par les expressions

$$\alpha_{i_r^r}^{(0)} [\omega^{i_0^0}\omega^\mu] + \frac{1}{2} C_{\sigma\sigma}^{(0)} [\omega^\sigma\omega^\sigma]$$

tirées des équations (9).

En changeant convenablement les indices et en ralliant les termes semblables on trouve la relation suivante:

$$\begin{aligned} & (\gamma_{i_0^0}^{h_0} \alpha_{h_0\mu}^x + \alpha_{i_0^0}^{(0)} \alpha_{i_0\mu}^x) - \alpha_{i_0^0}^{(0)} \alpha_{j_0\mu}^{(1)} [\omega^{i_0^0}\omega^{j_0^0}\omega^\mu] + (\alpha_{h_0\mu}^{(1)h_0} \alpha_{i_1^1}^{h_0} - \\ & - \alpha_{h_0\mu}^{(0)} \alpha_{i_1^1}^{h_0}) [\omega^{i_1^1}\omega^{h_0}\omega^\mu] + (\alpha_{h_0\mu}^{(1)h_0} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{(1)h_0} + \\ & + \alpha_{h_0\sigma}^{(0)} C_{\mu\sigma}^{h_0} + C_{\lambda\mu}^{(0)x} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + C_{\lambda\sigma}^{(0)x} C_{\mu\sigma}^{h_0} + C_{\lambda\sigma}^{(0)x} C_{\mu\sigma}^{h_0}) [\omega^\sigma\omega^\sigma\omega^\mu] - \\ & - (\alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{(1)h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{(0)h_0}) [\omega^\sigma\omega^\sigma\omega^{h_0}] = 0. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte des équations (2) et (2'), cette relation se simplifie et, les formes ω^σ et ω^{h_0} étant indépendantes, on en déduit en suite les relations suivantes:

$$(19) \quad \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(1)h_0} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\mu\sigma}^{h_0} + C_{\lambda\mu}^{(0)x} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \\ + C_{\lambda\sigma}^{(0)x} C_{\mu\sigma}^{h_0} + C_{\lambda\sigma}^{(0)x} C_{\mu\sigma}^{h_0} = 0,$$

$$(20) \quad \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{(1)h_0} + \alpha_{h_0\mu}^{(0)} C_{\sigma\sigma}^{(0)h_0} = 0.$$

Pour obtenir les relations vérifiées par d'autres systèmes des constantes de structure il suffit de différentier successivement les équations (10) et (11) ($r = 2, 3, \dots$).

Le groupe abstrait que nous avons ainsi défini sur l'espace G sera désigné par la même lettre G .

96. Représentations d'un groupe infini abstrait. Soit g un élément arbitraire de G ; la formule $\bar{a} = ga$ définit une transformation analytique S_g agissant de gauche sur les points de G ; si g parcourt l'espace G , les transformations S_g engendrent un groupe G_1 opérant transitivement sur G et isomorphe au groupe G . De même l'équation $\bar{a} = ag$ conduit à un second groupe des transformations agissant transitivement sur les points de G et isomorphe à G . Nous dirons que ces deux groupes sont des représentations *fidèles* du groupe abstrait G et nous leur donnerons les noms de *premier* et de *second groupe des paramètres* du groupe infini G ; les coordonnées du point g (n° 93, équ. (8)) seront appelées les paramètres des transformations de G_1 et G_2 .

La notion d'une représentation du groupe infini G peut être généralisée. Soit G' un groupe des transformations analytiques opérant dans l'espace numérique à N dimensions; si entre les éléments de G' et de G il y a une correspondance biunivoque et si ces groupes sont isomorphes, on dit que G' est une *représentation fidèle* de G ou que G est l'*espace du groupe* G' .

Si l'on peut établir une correspondance biunivoque et isomorphe entre un voisinage U de l'élément-unité e de G d'une part, et les transformations dans un voisinage de la transformation identique d'un pseudo-groupe infini G' , d'autre part, on dit que G' est une *représentation locale* dans U du groupe infini G .

97. Propriétés d'un groupe infini de Lie. Soit $g = (x, u_0, u_1, \dots)$ un point de l'espace G . Imaginons une suite infinie

$$\vec{J} = (\vec{I}, \vec{I}_0, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_r, \dots)$$

des vecteurs contravariants dont le premier est tangent en x à V^n , le vecteur $\vec{I}_r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) étant tangent en u_r à l'espace du groupe linéaire Γ_r de la suite (4). Nous dirons que $\vec{J}$ est un *vecteur tangent en g* à l'espace G . De même nous dirons que la suite tronquée $(\vec{I}, \vec{I}_0, \dots, \vec{I}_r)$ est un *vecteur tangent au point $b_r = (x, u_0, u_1, \dots, u_r)$* à l'espace fibré B_r de la suite (6).

Les vecteurs tangents en g à G forment un espace vectoriel à une infinité de dimensions tangent à G ; nous le rapporterons à un repère R_g qui est le produit des repères des espaces vectoriels tangents respectivement en $x, u_0, u_1, \dots$ à $V^n, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots$. En orientant d'une manière arbitraire ces repères on obtient une orientation du repère R_g . Ajoutons qu'au repère R_g correspond un repère dual R_g^* formé des vecteurs covariants (n° 32).

Considérons en particulier un repère orienté R_e tangent en e à G ;

une transformation S_a ($a \in G$) du premier groupe des paramètres (n° 96) fait correspondre au repère R_e un repère orienté R_a tangent en a à G . Le point a pouvant être pris arbitrairement on obtient ainsi sur G un champ R des repères tangents orientés. Nous dirons que deux vecteurs tangents à G en deux points quelconques sont *égaux*, s'ils ont les mêmes composantes par rapport aux repères du champ R , attachés à ces points. On voit bien que l'égalité des vecteurs est indépendante du choix de repère tangent en e à G . Le parallélisme des vecteurs tangents à G étant ainsi établi nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *L'espace d'un groupe infini est parallélisable (cf. n° 33).*

En même temps nous avons démontré un second théorème qui résulte du fait que tous les facteurs du produit (7) sont des variétés orientables:

THÉORÈME 3. *L'espace d'un groupe infini de Lie est orientable.*

THÉORÈME 4. *Les éléments d'un voisinage quelconque de l'élément-unité d'un groupe infini de Lie sont des générateurs de ce groupe.*

On démontre ce théorème de la même manière que le théorème analogue dans la théorie des groupes finis de Lie (v. n° 38).