Un raisonnement tout pareil à celui qui nous a conduit à établir l'espace fibré B_1 permet de montrer que sur B_1 peut être construit un espace fibré principal B_2, de groupe de structure Γ_2, tangent à B_1 et que cet espace peut être muni d'une connexion affine L_2 dont les équations de structure peuvent être mises sous la forme suivante:

$$d\overset{(2)}{\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}[du_2^{h_2}\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu]$$

ou encore sous la forme équivalente

$$d\overset{(2)}{\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}[\overset{(3)}{\omega}{}^{h_2}\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

les $\overset{(3)}{\omega}{}^{h_2}$ désignant des formes différentielles linéaires définies dans tout l'espace B_2; les $\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu} = -\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\mu\lambda}$ sont les composantes de la torsion de L_2.

60. Connexions prolongées (suite). Nous avons vu au n° 49 que les groupes associés à un groupe linéaire Γ forment une suite

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r, \ldots \tag{54}$$

qui peut être finie ou infinie; en poursuivant nos raisonnements nous pouvons montrer qu'à la suite (54) correspond une suite

$$B, B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots \tag{55}$$

des espaces fibrés principaux dont chacun est tangent à celui qui le précède, le groupe de structure de B_r étant Γ_r. L'espace B_r peut être muni d'une connexion affine L_r dont les équations de structure peuvent être écrites comme il suit:

$$d\overset{(r)}{\omega}{}^{h_{r-1}} = \overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{i_r\mu}[\overset{(r+1)}{\omega}{}^{i_r}\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

les $\overset{(r)}{\omega}{}^{h_{r-1}}$ et les $\overset{(r+1)}{\omega}{}^{i_r}$ désignant des formes différentielles linéaires définies dans tout l'espace B_r; les $\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\lambda\mu} = -\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\mu\lambda}$, composantes de la torsion de L_r, sont des invariants différentiels de l'espace B_r.

CHAPITRE V

CONNEXIONS CLASSIQUES

Le présent Chapitre, divisé en cinq paragraphes, est consacré aux connexions dont les groupes de structure sont les groupes linéaires classiques. En appliquant le raisonnement général développé dans le chapitre précédent je considère successivement la connexion linéaire, unimodulaire, euclidienne, weylienne et symplectique. Dans ces exposés, conformément au but principal de la géométrie différentielle, passe au premier plan la recherche des invariants différentiels dont on puisse faire usage pour résoudre les problèmes d'équivalence. Pour atteindre ce but j'emploie la méthode suggérée par les travaux d'E. Cartan sur les groupes continus et finis (v. par exemple [6]); cette méthode, qui peut aussi être appliquée à la théorie des connexions (v. S. S. Chern [16]), permet de déduire d'une connexion, dont le groupe de structure est un sous-groupe quelconque de $GL(n,R)$, d'autre connexions du même groupe de structure. En se servant de cette méthode on montre que d'une connexion linéaire, unimodulaire ou symplectique peut être obtenue une suite infinie des connexions que j'appelle connexions prolongées; ceci trouve une application dans la théorie des groupes continus infinis en montrant ainsi un lien entre les théories de connexions et des groupes infinis de Lie.

En terminant ce chapitre je considère (n° 81) l'intéressante connexion dont le groupe de structure est le sous-groupe commun aux groupes O_n^+ et $Sp(n)$.

§ 1. Connexions linéaires

61. Définition. Une connexion affine définie dans une variété V^n est dite *linéaire*, si son groupe de structure est le groupe $GL(n, R)$ représenté par l'ensemble des matrices régulières $[a_\lambda^\varkappa]$.

62. Connexion linéaire sans courbure. Pour établir les fondements des connexions linéaires nous appliquons les raisonnements du n° 51. Imaginons pour cela une variété V^n (1) munie d'un recouvrement et envisageons dans un voisinage quelconque U_i du recouvrement le champs de repères naturels (n° 32) formés des vecteurs contravariants. Soit R_{ix} le repère du champs attaché à un point $x \in U_i$. En assujettissant les vecteurs, dont R_{ix} est formé, aux transformations du groupe $GL(n, R)$ on obtient un ensemble de repères $R_{ix}^u = uR_{ix}$ $(u \in GL(n, R))$ tangents en x à V^n.

---

(1) Dans tout ce Chapitre et deux chapitres suivants les variétés et les fonctions dont il sera question sont supposées C^∞.

Supposons maintenant que x appartient à deux voisinages U_i et U_j du recouvrement. On aura alors en ce point deux systèmes de coordonnées locales x_i^λ (en U_i), $x_j^\varkappa$ (en U_j) et deux ensembles de repères tangents $R_{i\varkappa}^{u_i}$ et $R_{j\varkappa}^{u_j}$ $(u_i, u_j \in GL(n, R))$. Soit $\gamma_{ji}(x)$ la matrice $[\partial x_j^\varkappa / \partial x_i^\lambda]$; comme elle est un élément du groupe $GL(n, R)$ vérifiant les équations (4) du n° 51, elle nous permettra d'établir sur V^n un espace fibré B tangent à V^n. Convenons pour cela de regarder (x, u_i) et (x, u_j) comme le même point d'un espace B, si les deux éléments u_i et u_j du groupe $GL(n, R)$ satisfont à la condition

$$u_i = \gamma_{ji}(x) u_j,$$

autrement dit, si en vertu de cette équation est verifiée l'égalité $R_{i\varkappa}^{u_i} = R_{j\varkappa}^{u_j}$ (cf. n° 51).

Maintenant, en appliquant le raisonnement tout semblable à celui du n° 53, nous pouvons munir tout l'espace B d'un système de n formes différentielles linéaires $\omega^\varkappa$; si U est un voisinage quelconque du recouvrement de V^n, les $\omega^\varkappa$ sont définis dans le voisinage $U \times GL(n, R)$ de B par les formules

$$\omega^\varkappa = a_\varrho^\varkappa \Theta^\varrho, \tag{1}$$

où les Θ^ϱ désignent des formes différentielles linéaires et indépendantes données dans U.

Les équations (1) permettent d'établir dans l'espace B une connexion affine dont les équations de structure s'obtiennent en prenant la différentielle extérieure de (1). On aura ainsi les équations

$$d\omega^\varkappa + [\pi_\mu^\varkappa \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} [\omega^\lambda \omega^\mu] \qquad (T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = -T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}), \tag{2}$$

où les $\pi_\mu^\varkappa$ sont définis par les formules suivantes

$$\pi_\mu^\varkappa = -b_\mu^\varrho d a_\varrho^\varkappa, \tag{3}$$

où $[b_\mu^\varrho]$ est l'inverse de la matrice $[a_\varrho^\varkappa]$, ou par les formules équivalentes

$$d a_\lambda^\varkappa = -a_\lambda^\mu \pi_\mu^\varkappa; \tag{3'}$$

les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$, composantes de la torsion, sont des fonctions définies dans le voisinage $U \times GL(n, R)$ de l'espace B.

La courbure de la connexion est donnée par les formules

$$\Omega_\mu^\varkappa = d\pi_\mu^\varkappa + [\pi_\varrho^\varkappa \pi_\mu^\varrho]$$

(équ. (30) du n° 55); en y portant les expressions (3) on obtient $\Omega_\mu^\varkappa = 0$, d'où il résulte

$$d\pi_\mu^\varkappa = -[\pi_\varrho^\varkappa \pi_\mu^\varrho]. \tag{4}$$

En résumant nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *Sur toute variété connexe V^n, de classe C^∞, peut être déterminé l'espace fibré tangent de groupe de structure $GL(n, R)$, muni d'une connexion linéaire sans courbure.*

Nous désignerons par la notation L_0 la connexion définie au moyen des équations (2); comme elle est à courbure nulle, dans chaque section locale de l'espace B peut être établi le parallélisme absolu déterminé par la connexion (v. n° 57).

Il est évident que la connexion linéaire L_0 est liée intrinsèquement à l'espace fibré B; par conséquent les composantes $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ de sa torsion sont des invariants différentiels du premier ordre de cet espace. Comme ces invariants sont fonctions des coordonnées du point $b = (x, [a_\lambda^\varkappa])$, leurs différentielles s'expriment au moyen des formes $\omega^\varkappa$ et des différentielles $d a_\lambda^\varkappa$; en tenant compte des formules (3') on peut donc écrire

$$dT_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = (T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_\nu \omega^\nu + (T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_\varrho^\sigma \pi_\sigma^\varrho; \tag{5}$$

les coefficients de cette formule sont des invariants différentiels du second ordre de l'espace B. Soit I l'un quelconque de ces invariants; en le différentiant on obtient la formule de la forme suivante

$$dI = I_\nu \omega^\nu + I_\varrho^\sigma \pi_\sigma^\varrho \tag{5'}$$

dont les coefficients sont des invariants du troisième ordre. En poursuivant ce procédé on obtient ainsi une suite infinie des invariants différentiels de l'espace fibré B.

63. Connexion linéaire sans torsion. De la connexion linéaire sans courbure on peut déduire une infinité d'autres connexions linéaires en ajoutant aux formes (3) des sommes $l_{\mu\lambda}^\varkappa \omega^\lambda$, où les $l_{\mu\lambda}^\varkappa$ sont des fonctions quelconques définies dans le voisinage $U \times GL(n, R)$ de l'espace B (v. la fin du n° 53).

Si l'on pose

$$\omega_\mu^\varkappa = \pi_\mu^\varkappa + l_{\mu\lambda}^\varkappa \omega^\lambda, \tag{6}$$

les équations de structure de l'une quelconque de ces connexions prendront la forme suivante

$$d\omega^\varkappa + [\omega_\mu^\varkappa \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} [\omega^\lambda \omega^\mu], \tag{7}$$

où

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + l_{\lambda\mu}^\varkappa - l_{\mu\lambda}^\varkappa. \tag{8}$$

Les formules (6) contenant des fonctions arbitraires il est bien clair que les connexions ainsi définies ne sont pas, en général, liées intrinsèquement à l'espace B. Pour trouver parmi elles une connexion bien

déterminée nous nous proposons de choisir les indéterminées $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ de telle manière que la torsion de la connexion cherchée soit nulle: $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = 0$. Parmi les choix possibles il y a un bien déterminé:

$$l^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda};$$

on aura alors

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \pi^{\varkappa}_{\mu} + \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda}\,\omega^{\lambda} \tag{9}$$

et les équations (7) deviendront maintenant

$$d\omega^{\varkappa} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = 0. \tag{10}$$

En les différentiant extérieurement on obtient

$$[d\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] - [\omega^{\varkappa}_{\mu} d\omega^{\mu}] = 0;$$

si l'on y remplace $d\omega^{\mu}$ par son expression $-[\omega^{\mu}_{\lambda}\omega^{\lambda}]$ tirée des équations (10), on trouve

$$[d\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}_{\lambda}\omega^{\lambda}] = 0$$

ou, en changeant dans le premier terme l'indice μ en λ,

$$\left[\left(d\omega^{\varkappa}_{\lambda} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}_{\lambda}]\right)\omega^{\lambda}\right] = 0.$$

Si l'on se reporte à la formule pour les composantes du tenseur de courbure

$$\Omega^{\varkappa}_{\lambda} = d\omega^{\varkappa}_{\lambda} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}_{\lambda}] \tag{11}$$

n° 54, équ. (23)), la dernière équation devient

$$[\Omega^{\varkappa}_{\lambda}\omega^{\lambda}] = 0. \tag{12}$$

Nous avons ainsi déterminé une seconde connexion linéaire liée intrinsèquement à l'espace fibré B; nous la désignerons par la notation L_1. D'après (9) cette connexion est définie globalement dans l'espace B et par conséquent les formes quadratiques $\Omega^{\varkappa}_{\lambda}$ sont liées invariablement à B, leurs coefficients étant des invariants différentiels du second ordre; il résulte des formules (11) et (9) que ces invariants s'expriment au moyen des composantes $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de la torsion de la connexion L_0 et de leurs dérivées. Il s'en suit que l'ensemble d'invariants différentiels de l'espace B est composé des composantes de la torsion de la connexion L_0.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le suivant

THÉORÈME 2. *Sur toute variété connexe de classe C^{∞} peut être déterminé l'espace de groupe de structure $GL(n, R)$ munie globalement d'une connexion L_1 à torsion nulle.*

64. Connexions linéaires prolongées. De la connexion L_0 définie au n° 62 on peut déduire une infinité de connexions linéaires en faisant sur les formes $\pi^{\varkappa}_{\mu}$ qui figurent dans les équations (2)

$$d\omega^{\varkappa} + [\pi^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}]$$

du n° 62 une substitution

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \pi^{\varkappa}_{\mu} + t^{\varkappa}_{\mu\lambda}\,\omega^{\lambda} \tag{13}$$

dont les coefficients $t^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ sont symétriques en leurs indices inférieurs; remarquons que cette substitution n'altère pas les composantes $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de la torsion de L_0. Les équations (2) peuvent donc s'écrire

$$d\omega^{\varkappa} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}], \tag{14}$$

Les équations (13), complétées par les équations $'\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$, forment l'ensemble de transformations d'un groupe linéaire Γ_1, de dimension $m_1 = n^2(n+1)/2$, qui est le premier groupe associé au groupe $GL(n, R)$ (n° 49). On en conclut, d'après le résultat général obtenu au n° 59, que sur l'espace B peut être défini un espace fibré B_1, de groupe de structure Γ_1, tangent à l'espace B et que, par suite, B_1 peut être muni d'une connexion linéaire (première connexion prolongée). Remarquons d'abord qu'un point b_1 de l'espace B_1 a les coordonnées $(x, [a^{\varkappa}_{\lambda}], t^{\varkappa}_{\mu\lambda})$ et que les formes (13) sont définies globalement dans B_1. En les différentiant extérieurement on trouve

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu} = d\pi^{\varkappa}_{\mu} + [dt^{\varkappa}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}] + t^{\varkappa}_{\mu\lambda} d\omega^{\lambda}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (2) et de l'équation (4) du n° 62, la dernière relation peut être ramenée à la forme suivante

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu} = [dt^{\varkappa}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}] - [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] + K^{\varkappa\sigma}_{\mu\lambda\varrho}[\omega^{\varrho}_{\sigma}\omega^{\lambda}] + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{T}{}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\nu}[\omega^{\lambda}\omega^{\nu}] \tag{15}$$

$$\left(\overset{(1)}{T}{}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\nu} + \overset{(1)}{T}{}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\nu\lambda} = 0\right),$$

où les coefficients sont des invariants liés à l'espace B_1. Cette équation peut être présentée sous une forme abrégée, si l'on pose

$$\pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} = dt^{\varkappa}_{\mu\lambda} + K^{\varkappa\sigma}_{\mu\lambda\varrho}\,\omega^{\varrho}_{\sigma} \tag{16}$$

et que l'on remplace dans (15) les différentielles $dt^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ par leurs expressions tirées des relations (16); on obtient alors les équations de structure de la première connexion prolongée sous la forme suivante

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu} = [\pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}] - [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{T}{}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\nu}[\omega^{\lambda}\omega^{\nu}]. \tag{17}$$

On en déduit d'autres connexions prolongées, si l'on remplace les formes $\pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ par les formes $\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ définies par les formules

$$\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda} = \pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} + t^{\varkappa}_{\mu\lambda\nu}\,\omega^{\nu}, \qquad t^{\varkappa}_{\mu\lambda\nu} = t^{\varkappa}_{\mu\nu\lambda}. \tag{18}$$

On aura alors

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu} = [\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}\,\omega^{\lambda}] - [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] + \tfrac{1}{2}T^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\nu}[\omega^{\lambda}\omega^{\sigma}].$$

Les équations (18), complétées par les transformations identiques $'\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$, forment l'ensemble de transformations d'un groupe linéaire Γ_2 (le second groupe associé au groupe $GL(n, R)$); sa dimension est égale au nombre $n^3(n+1)/2$ de paramètres arbitraires $t^{\varkappa}_{\mu\lambda\nu} = t^{\varkappa}_{\mu\nu\lambda}$. Ce groupe permet d'établir sur B_1 un espace fibré tangent B_2 de groupe de structure Γ_2; B_2 peut être muni d'une connexion affine dont les équations de structure auront la forme

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda} = [\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda\nu}\,\omega^{\nu}] - [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] + \tfrac{1}{2}T^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\varrho\sigma}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}];$$

on les obtient par un même procédé que plus haut.

En poursuivant ces raisonnements on peut montrer par induction qu'au groupe $GL(n, R)$ peut être associée une suite infinie de groupes linéaires

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r, \ldots$$

la dimension de Γ_r étant égale à $n^{r+1}(n+1)/2$. De même, à l'aide de ces groupes, peut être déterminée une suite d'espaces fibrés

$$B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots$$

dont le premier a pour base la variété V^n et dont chacun des suivants est tangent à celui qui le précède. L'espace B_r peut être muni d'une connexion affine dont les équations de structure s'écriront

$$d\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_r-1} = [\omega^{\varkappa}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}\lambda_r}\,\omega^{\lambda_r}] - [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] + \tfrac{1}{2}T^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}\varrho\sigma}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}].$$

65. Connexion linéaire sans courbure et torsion. Il était sousentendu dans les considérations précédentes que la torsion de la connexion définie au n° 62 soit différente de zéro. Supposons maintenant qu'il soit $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = 0$.

Or, d'après la seconde des équations (14) du n° 53 on a

$$T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = b^{\varkappa}_{\varrho}\,a^{\sigma}_{\lambda}\,a^{\tau}_{\mu}\,p^{\cdot\cdot\varrho}_{\sigma\tau}[\Theta^{\sigma}\Theta^{\tau}],$$

où les coefficients $p^{\cdot\cdot\varrho}_{\sigma\tau}$ sont définie par l'équation

$$d\Theta^{\varrho} = \tfrac{1}{2}p^{\cdot\cdot\varrho}_{\sigma\tau}[\Theta^{\sigma}\Theta^{\tau}].$$

De l'hypothèse $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = 0$ résulte donc qu'il doit être $d\Theta^{\varrho} = 0$. On en conclut que dans chaque voisinage d'un recouvrement, convenablement choisi, de la variété V^n puisse être choisi un système de coordonnées

locales tel qu'il soit $\Theta^{\varrho} = dx^{\varrho}$ et que, par suite, les formes (1) deviennent

$$\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\varrho}\,dx^{\varrho}. \tag{19}$$

Remarquons encore que d'après (2) et (4) les équations de structure de la connexion envisagée ont la forme suivante:

$$d\omega^{\varkappa} + [\pi^{\varkappa}_{\mu}\,\omega^{\mu}] = 0, \qquad d\pi^{\varkappa}_{\mu} + [\pi^{\varkappa}_{\varrho}\pi^{\varrho}_{\mu}] = 0. \tag{20}$$

Comme les équations (19) et (20) sont, abstraction faite de notations, identiques aux équations (42), (44) et (45) du n° 50, il en résulte que la variété V^n, munie d'une connexion dont la torsion et la courbure sont nulles, est localement un espace affine basé sur le groupe $GL(n, R)$.

66. Compléments. Nous reviendrons ici à la connexion L_1 à torsion nulle pour expliciter en coordonnées locales diverses formules et relations qui au n° 63 ont été présentées relativement à un repère arbitraire dans l'espace fibré tangent à la variété V^n.

Supposons pour cela que sur un voisinage U de V^n soit faite la section locale S_{e_0}, e_0 étant l'élément unité du groupe $GL(n, R)$: $a^{\varkappa}_{\lambda} = \delta^{\varkappa}_{\lambda}$; la formule (1) devient alors $\omega^{\varkappa} = \Theta^{\varkappa}$. Supposons encore que l'on ait choisi les coordonnées locales dans U de manière qu'il soit $\Theta^{\varkappa} = dx^{\varkappa}$ en un point déterminé $x \in U$; on aura par suite

$$\omega^{\varkappa} = dx^{\varkappa}. \tag{21}$$

Les formes de la connexion $\omega^{\varkappa}_{\mu}$, définies par les formules (9), s'exprimeront dans la section envisagée au moyen des coordonnées du point x; on peut donc poser

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}\,dx^{\lambda}, \tag{22}$$

où les $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ sont fonctions du point x. En portant les expressions (21) et (22) dans les équations de structure de la connexion L_1

$$d\omega^{\varkappa} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\,\omega^{\mu}] = 0$$

(n° 63, équ. (10)) on obtient

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}[dx^{\lambda}\,dx^{\mu}] = 0,$$

d'où il résulte que les $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ sont symétriques en leurs indices inférieurs

$$\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}. \tag{23}$$

Considérons maintenant dans le voisinage U un champ de vecteurs contravariants $\vec{X} = \{X^{\varkappa}\}$ et la différentielle absolue de la composante $X^{\varkappa}$ calculée au point x; d'après l'équation (26) du n° 55 on aura

$$DX^{\lambda} = dX^{\lambda} + \omega^{\lambda}_{\pi}X^{\pi} \tag{24}$$

ou

$$DX^{\lambda} = dX^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\pi\nu}X^{\pi}\,dx^{\nu}. \tag{24'}$$

Cette formule peut s'écrire

$$DX^\lambda = \left(\frac{dX^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\pi\nu} X^\pi\right) dx^\nu;$$

l'expression en parenthèses porte le nom de dérivée covariante de la composante X^λ et on la désigne par la notation

$$\nabla_\nu X^\lambda = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\pi\nu} X^\pi. \tag{25}$$

On trouve facilement à l'aide de l'équation (27) du n° 55 une formule analogue pour la dérivée covariante des composantes d'un vecteur covariant

$$\nabla_\nu Y_\mu = \frac{\partial Y_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu} Y_\varrho. \tag{25'}$$

Les deux formules ci-dessus se généralisent facilement pour le cas d'un tenseur arbitraire; on a par exemple la formule suivante

$$\nabla_\nu A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} = \frac{\partial A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\varrho_{\alpha\nu} A^{\cdot\cdot\gamma}_{\varrho\beta\cdot} - \Gamma^\varrho_{\beta\nu} A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\varrho\cdot} + \Gamma^\gamma_{\varrho\nu} A^{\cdot\cdot\varrho}_{\alpha\beta\cdot}.$$

pour les dérivées covariantes des composantes d'un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant.

Imaginons qu'on a introduit dans U un nouveau système arbitraire de coordonnées locales $\bar{x}^\varkappa$. Nous aurons les équations

$$D\bar{X}^\varkappa = d\bar{X}^\varkappa + \bar{\omega}^\varkappa_\mu \bar{X}^\mu, \quad \bar{\omega}^\varkappa_\mu = \bar{\Gamma}^\varkappa_{\mu\pi} d\bar{x}^\pi.$$

Les différentielles absolues DX^λ étant les composantes d'un vecteur contravariant infinitésimal on a $D\bar{X}^\varkappa = \dfrac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} DX^\lambda$ ou

$$d\bar{X}^\varkappa + \bar{\Gamma}^\varkappa_{\mu\pi} \bar{X}^\mu d\bar{x}^\pi = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda}\left(dX^\lambda + \Gamma^\lambda_{\pi\nu} X^\pi dx^\nu\right).$$

Si l'on tient compte des formules

$$\bar{X}^\varkappa = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} X^\lambda \quad \text{et} \quad d\bar{x}^\pi = \frac{\partial \bar{x}^\pi}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

la dernière équation devient

$$d\left(\frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} X^\lambda\right) + \bar{\Gamma}^\varkappa_{\mu\pi} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\pi}{\partial x^\nu} X^\lambda dx^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} dX^\lambda + \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\pi\nu} X^\pi dx^\nu$$

ou

$$\frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} dX^\lambda + X^\lambda \frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\pi}{\partial x^\nu} \bar{\Gamma}^\varkappa_{\mu\pi} X^\lambda dx^\nu =$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} dX^\lambda + \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\pi\nu} X^\pi dx^\nu.$$

Si dans le dernier terme du second membre on change le rôle des indices λ et π, il en résultera la relation

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\pi}{\partial x^\nu} \bar{\Gamma}^\varkappa_{\mu\pi} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\pi} \Gamma^\pi_{\lambda\nu}.$$

En multipliant ses deux membres par $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} \dfrac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma}$ et en sommant par rapport à λ et ν il vient, en vertu des identités

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} = \delta^\mu_\varrho \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{x}^\pi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} = \delta^\pi_\sigma,$$

l'équation suivante

$$\bar{\Gamma}^\varkappa_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\pi} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \Gamma^\pi_{\lambda\nu} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}. \tag{26}$$

Cette équation exprime la loi d'après laquelle se transforment les paramètres $\Gamma^\pi_{\lambda\nu}$ de la connexion linéaire à torsion nulle pour un changement arbitraire de coordonnées locales. On la présente fréquemment sous une forme un peu différente que l'on obtient de la manière suivante. Différentions par rapport à x^λ l'identité

$$\frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} = \delta^\varkappa_\sigma;$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} + \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\sigma}\right) = 0.$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\partial x^\lambda / \partial \bar{x}^\varrho$ et que l'on somme par rapport à λ, on en déduit

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma}\right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} = 0$$

ou

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = -\frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\varrho \partial \bar{x}^\sigma}$$

et l'équation (26) peut maintenant s'écrire

$$\bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \bar{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\pi}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\varrho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\sigma}} \Gamma^{\pi}_{\lambda\nu} + \frac{\partial \bar{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\varrho} \partial \bar{x}^{\sigma}}. \tag{27}$$

Il résulte de cette équation la relation suivante

$$\bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} - \bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\sigma\varrho} = \frac{\partial \bar{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\pi}} \left(\frac{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\varrho} \partial \bar{x}^{\sigma}} - \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\varrho}} \right) \Gamma^{\pi}_{\lambda\mu};$$

comme l'expression en parenthèses est antisymétrique et le coefficient $\Gamma^{\pi}_{\lambda\nu}$ est symétrique en les indices λ et ν, il vient $\bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} = \bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\sigma\varrho}$; on voit donc que la propriété des coefficients $\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ exprimée par la relation (23) est indépendante du choix des coordonnées locales dans le voisinage U.

Nous allons maintenant calculer en coordonnées locales les composantes du tenseur de courbure de la connexion linéaire à torsion nulle. D'après les équations (11) du n° 63 on a

$$\Omega^{\varkappa}_{\nu} = d\omega^{\varkappa}_{\nu} + [\omega^{\varkappa}_{\varrho} \omega^{\varrho}_{\nu}];$$

si l'on y porte les expressions (22), on obtient

$$\Omega^{\varkappa}_{\nu} = \tfrac{1}{2} R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu} [dx^{\lambda} dx^{\mu}] \qquad (R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda\nu} = 0), \tag{28}$$

où l'on a posé

$$R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\varkappa}_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\varkappa}_{\varrho\mu} \Gamma^{\varrho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\varkappa}_{\varrho\lambda} \Gamma^{\varrho}_{\nu\mu}; \tag{29}$$

les $R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu}$ sont appelés *composantes du tenseur de courbure en coordonnées locales*. Si l'on porte les expressions (28) et (21) dans l'équation (12) du n° 63, on obtient la relation

$$R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu} [dx^{\lambda} dx^{\mu} dx^{\nu}] = 0,$$

d'où

$$R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu} = 0, \tag{30}$$

cette équation étant vraie dans tout système de coordonnées locales.

Le tenseur de courbure admet deux tenseurs contractés

$$V_{\lambda\mu} = R^{\cdot\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\mu\varrho} \quad \text{et} \quad R_{\mu\nu} = R^{\cdot\cdot\cdot\varrho}_{\varrho\mu\nu}, \tag{31}$$

dont le premier est antisymétrique en ses deux indices et dont le second porte le nom de *tenseur de Ricci*.

§ 2. Connexions unimodulaires

67. Définition et structure. Supposons qu'une variété V^n, munie d'un recouvrement, soit la base de l'espace fibré tangent B dont le groupe de structure est le groupe unimodulaire $SL(n, R)$ (n° 46); les connexions dont l'espace B peut être doué s'appellent *connexions unimodulaires*.

En appliquant le raisonnement général du n° 53 nous pouvons déterminer dans l'espace B un ensemble de n formes différentielles linéaires $\omega^{\varkappa}$ qui dans un ouvert $U \times SL(n, R)$, où U est un voisinage quelconque de V^n, ont la forme

$$\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\varrho} \Theta^{\varrho}, \qquad [a^{\varkappa}_{\varrho}] \in SL(n, R), \tag{1}$$

les Θ^{ϱ} étant des formes différentielles linéaires définies dans U en coordonnées locales.

La différentiation extérieure des équations (1) conduit aux relations

$$d\omega^{\varkappa} + [\pi^{\varkappa}_{\mu} \omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} [\omega^{\lambda} \omega^{\mu}], \tag{2}$$

où $\pi^{\varkappa}_{\mu} = -b^{\varkappa}_{\varrho} da^{\varrho}_{\mu}$ sont des formes différentielles définies dans l'espace du groupe $SL(n, R)$; d'après l'équation (19) du n° 46, où les notations sont différentes, les $\pi^{\varkappa}_{\mu}$ vérifient la relation

$$\pi^{\varkappa}_{\varkappa} = 0. \tag{3}$$

Les équations (2) définissent dans l'espace B une connexion unimodulaire dont la torsion a pour composantes les fonctions $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = -T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda}$ du point de l'espace B. La courbure de la connexion est donnée par les formules

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\pi^{\varkappa}_{\mu} + [\pi^{\varkappa}_{\varrho} \pi^{\varrho}_{\mu}];$$

si l'on y remplace le $\pi^{\varkappa}_{\mu}$ par leurs expressions données plus haut, on trouve $\Omega^{\varkappa}_{\mu} = 0$.

De cette connexion à courbure nulle on peut obtenir dans B d'autres connexions unimodulaires en remplaçant dans les équations (2) les formes de structure $\pi^{\varkappa}_{\mu}$ par les expressions

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \pi^{\varkappa}_{\mu} + l^{\varkappa}_{\mu\lambda} \omega^{\lambda}, \tag{4}$$

où les coefficients $l^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ sont des fonctions définies dans l'ouvert $U \times SL(n, R)$ et vérifiant les relations

$$l^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} = 0; \tag{5}$$

il en résulte que les formes $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ de chacune de ces nouvelles connexions satisfont à la condition

$$\omega^{\varkappa}_{\varkappa} = 0. \tag{6}$$

Posons $l^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda} - l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$, où les $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ sont des fonctions satisfaisant aux conditions $l^{\varkappa}_{\lambda\mu} = l^{\varkappa}_{\mu\lambda}$, $l^{\varkappa}_{\varkappa\mu} = \frac{1}{2}T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\varkappa}$: d'ailleurs arbitraires. Un calcul tout semblable à celui du n° 63 permet de montrer que la torsion de la nouvelle connexion est nulle. Les coefficients $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ n'étant pas complètement déterminés cette connexion n'est pas intrinsèquement liée à l'espace B, contrairement à ce qui se passe dans le cas des connexions linéaires générales.

En revenant aux équations de structure (2) de la connexion unimodulaires à courbure nulle faisons sur les formes $\Pi^{\varkappa}_{\mu}$ la substitution

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \Pi^{\varkappa}_{\mu} + t^{\varkappa}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}, \tag{7}$$

dont les coefficients sont des indéterminées vérifiant les conditions $t^{\varkappa}_{\mu\lambda} = t^{\varkappa}_{\lambda\mu}$, $t^{\varkappa}_{\varkappa\lambda} = 0$; cette substitution n'altère pas les composantes de la torsion. En complétant les équations (7) par les équations identiques $'\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$ on obtient les transformations d'un groupe linéaire Γ_1 qui est le premier groupe associé au groupe $SL(n, R)$ (n° 49); sa dimension m_1 est égale au nombre des paramètres arbitraires $t^{\varkappa}_{\lambda\mu}$: $m_1 = n^2(n+1)/2 - n$. Il en résulte que sur l'espace B peut être construit un espace fibré tangent B_1 de groupe de structure Γ_1 (n° 59). En poursuivant les calculs d'une manière analogue aux raisonnements du n° 64 on peut montrer que les groupes linéaires associés au groupe $SL(n, R)$ forment une suite infinie

$$SL(n, R), \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r, \ldots$$

et que, à l'aide de ces groupes, peut être déterminée une suite des espaces fibrés

$$B, B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots$$

dont le premier est tangent à V^n et dont chacun des suivants est tangent à celui qui le précède.

67 bis. Propriétés. 1° Considérons l'une quelconque des connexions unimodulaires dont la structure est définie au moyen des équations (4) et (6). Il est facile de voir que la courbure

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\omega^{\varkappa}_{\mu} + [\omega^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\varrho}_{\mu}]$$

de cette connexion vérifie, en vertu de (6), la relation suivante

$$\Omega^{\varkappa}_{\varkappa} = 0. \tag{8}$$

2° Supposons maintenant que dans un voisinage U de la variété V^n soient donnés n champs du vecteurs contravariants indépendants $\vec{X}_{\varkappa} = (X^{\varrho}_{\varkappa})$ et considérons le parallélépipède P construit sur les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$, issus d'un point $x \in U$; nous donnerons le nom de *mesure du volume* de P au déterminant $|X^{\varrho}_{\varkappa}|$. Cette mésure, affectée d'un signe qui change, si l'on fait une permutation impaire sur les vecteurs dont P est formé, est donc égale à l'expression

$$P^{12\ldots n} = \frac{1}{n!} X^{[1}_1 X^2_2 \ldots X^{n]}_n$$

qu'on peut regarder comme l'une des composantes du n-vecteur

$$P^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n} = \frac{1}{n!} X^{[\varkappa_1}_1 X^{\varkappa_2}_2 \ldots X^{\varkappa_n]}_n; \tag{9}$$

inversement, si l'on se donne un n-vecteur arbitraire, ses composantes peuvent toujours être mises sous la forme (9). Si en particulier on choisit les vecteurs $\vec{X}_{\varkappa}$ de manière qu'il soit $P^{12\ldots n} = 1$ en tous les points de V^n, on dira que la variété V^n a été douée d'une unité de volume. Nous allons montrer que cette définition de l'unité de volume est indépendante du choix des coordonnées locales. Pour simplifier les calculs nous nous bornerons au cas $n = 3$, le raisonnement étant général.

Or, considérons la différentielle absolue du trivecteur $P^{\varkappa\lambda\mu}$; d'après la formule (28″) du n° 55, qui peut être facilement généralisée, on a

$$DP^{123} = dP^{123} + \omega^1_{\varrho}P^{\varrho 23} + \omega^2_{\varrho}P^{1\varrho 3} + \omega^3_{\varrho}P^{12\varrho}$$

ou

$$DP^{123} = dP^{123} + \omega^{\varrho}_{\varrho}P^{123}.$$

De la même manière on trouve la formule générale

$$DP^{\varkappa\lambda\mu} = dP^{\varkappa\lambda\mu} + \omega^{\varrho}_{\varrho}P^{\varkappa\lambda\mu}, \tag{10}$$

d'où il résulte, en vertu de (6), l'équation $DP^{\varkappa\lambda\mu} = dP^{\varkappa\lambda\mu}$. Ceci montre que l'équation $dP^{\varkappa\lambda\mu} = 0$ est covariante pour les changements des coordonnées locales dans U et que par conséquent on a démontré le suivant

THÉORÈME 1. *La connexion unimodulaire admet une unité de volume.*

Ce résultat suggère le problème suivant: supposons qu'une variété V^n soit munie d'une connexion affine arbitraire; nous nous proposons de trouver les conditions pour que V^n admette un n-vecteur qui soit constant relativement à la connexion envisagée, c'est-à-dire un n-vecteur tel que sa différentielle absolue soit nulle; si une connexion jouit de cette propriété on dit qu'elle *préserve les volumes*. Bornons nous au cas $n = 3$ en conservant les notations adoptées plus haut. D'après (10) le problème proposé revient à étudier les équations

$$dP^{\varkappa\lambda\mu} + \omega^{\varrho}_{\varrho}P^{\varkappa\lambda\mu} = 0 \tag{11}$$

que doivent vérifier les composantes du trivecteur cherché. En différentiant extérieurement les équations (11) on trouve les relations

$$P^{\varkappa\lambda\mu}d\omega_\varrho^\varrho+[\omega_\varrho^\varrho dP^{\varkappa\lambda\mu}]=0.$$

Si l'on tient compte des équations (11), ces relations deviennent

$$P^{\varkappa\lambda\mu}d\omega_\varrho^\varrho=0$$

d'où il résulte qu'il doit être $d\omega_\varrho^\varrho=0$, c'est-à-dire que la forme linéaire ω_ϱ^ϱ doit être fermée pour que la connexion préserve les volumes. On vérifie facilement sur la formule $\Omega_\lambda^\varkappa=d\omega_\lambda^\varkappa+[\omega_\varrho^\varkappa\omega_\lambda^\varrho]$ que la condition $d\omega_\varrho^\varrho=0$ est équivalente à l'équation $\Omega_\varkappa^\varkappa=0$. Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 2. *Pour qu'une connexion affine préserve les volumes, il faut et il suffit que son tenseur de courbure vérifie la relation* $\Omega_\varkappa^\varkappa=0$.

§ 3. Connexions euclidiennes

68. Structure. Supposons que sur une variété V^n, munie d'un recouvrement, puisse être établi l'espace fibré tangent B dont le groupe de structure est le groupe orthogonal O_n^+; les connexions affines dont B peut être doué portent le nom de *connexions euclidiennes*.

Pour obtenir les équations de structure de ces connexions formons un ensemble de n formes différentielles linéaires $\omega^\varkappa$ définies dans l'espace B (n° 53). Si U est un voisinage quelconque du recouvrement de V^n, les formes $\omega^\varkappa$ définies dans le voisinage $U\times O_n^+$ seront données par les formules

$$\omega^\varkappa=a_\varrho^\varkappa(u)\Theta^\varrho, \tag{1}$$

où les Θ^ϱ sont des formes différentielles linéaires définies dans U, les $a_\varrho^\varkappa(u)$ étant des éléments d'une matrice orthogonale et u désignant un point de l'espace du groupe O_n^+ dont la dimension est égale à $m=n(n-1)/2$.

Les équations de structure peuvent alors s'écrire de façon

$$d\omega^\varkappa=a_{h\mu}^\varkappa[\tau^h\omega^\mu]+\tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu]\qquad(h=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

(n° 53, équ. (14)), où les $a_{h\mu}^\varkappa$ désignent des constantes vérifiant les relations

$$a_{h\mu}^\varkappa+a_{h\varkappa}^\mu=0$$

(n° 47, équ. (21)), les τ^h étant des formes différentielles linéaires définies dans l'espace de O_n^+. Posons

$$\pi_\mu^\varkappa=-a_{h\mu}^\varkappa\tau^h;$$

en vertu de l'équation précédente les $\pi_\mu^\varkappa$ satisfont aux relations

$$\pi_\mu^\varkappa+\pi_\varkappa^\mu=0.$$

Si l'on utilise les formes $\pi_\mu^\varkappa$, les équations (2) prendront la forme

$$d\omega^\varkappa+[\pi_\mu^\varkappa\omega^\mu]=\tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu]. \tag{3}$$

Rappelons que la courbure de la connexion euclidienne définie par les formes $\pi_\mu^\varkappa$ est nulle (n° 56) et que les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$, composantes de sa torsion, sont des invariantes différentiels du premier ordre de l'espace fibré B tangent à V^n.

Les équations (1) représentant une substitution orthogonale faite sur les formes Θ^ϱ définies dans un voisinage $U\subset V^n$ on a l'équation

$$\sum_{\varkappa=1}^n(\omega^\varkappa)^2=\sum_{\varrho=1}^n(\Theta^\varrho)^2, \tag{4}$$

dont le second membre est une forme quadratique définie positive: $g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda$ $(g_{\varkappa\lambda}=g_{\lambda\varkappa})$. Comme le premier membre de l'équation (4) est défini globalement dans l'espace fibré B, il en résulte que la forme $g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda$ est définie globalement dans la variété V^n. Une variété differentiable V^n dans laquelle existe une forme quadratique définie positive est dite *variété riemannienne*. Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *La base d'une connexion euclidienne est une variété riemanienne.*

Ce théorème admet une réciproque. En effet supposons que dans une variété différentiable V^n existe une forme quadratique définie positive. Dans un voisinage $U\subset V^n$ cette forme peut être décomposée, et d'une infinité de manière, en une somme des carrés de n formes différentielles linéaires indépendantes. Si l'on part d'une décomposition arbitraire mais fixe en la somme des carrés de n formes Θ^ϱ définies en coordonnées locales, la décomposition la plus générale s'obtient en faisant sur les Θ^ϱ la substitution la plus générale du groupe O_n^+; on arrive ainsi aux équations identiques avec les équations (1). On en conclut selon les raisonnements du n° 53 que sur V^n peut être établi l'espace fibré tangent de groupe de structure O_n^+ ce qui achève la démonstration du suivant

THÉORÈME 2. *Toute variété riemannienne peut servir de base d'un espace fibré tangent de groupe de structure* O_n^+.

D'après ce qui précède l'équation (4) peut être écrite comme il suit

$$\sum_{\varkappa=1}^n(\omega^\varkappa)^2=g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda. \tag{4'}$$

Cela nous montre que les coefficients $g_{\varkappa\lambda}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur covariant d'ordre deux pour un changement quelconque des coordonnées locales dans un voisinage arbitraire de la variété V^n; on le nomme tenseur métrique de la connexion euclidienne.

Comme le premier membre de l'équation (4′) peut être présenté sous la forme $\delta_{\varkappa\lambda}\omega^\varkappa\omega^\lambda$, les composantes du tenseur métrique par rapport au repère local R_x^u sont les nombres $\delta_{\varkappa\lambda}$ (n° 32). Dans l'étude des connexions euclidiennes on introduit aussi des grandeurs $g^{\varkappa\lambda} = g^{\lambda\varkappa}$ liées aux composantes $g_{\varkappa\lambda}$ par les relations

$$g^{\varkappa\varrho}g_{\lambda\varrho} = \delta_\lambda^\varkappa.$$

Il est facile de voir sur ces relations que, pour un changement arbitraire des coordonnées locales, les $g^{\varkappa\lambda}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur contravariant d'ordre deux; on leur donne le nom de composantes contravariantes du tenseur métrique.

Remarquons que les formes $\omega^\varkappa$ sont les composantes, par rapport au repère R_x^u, du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ tangent en x à V^n (n° 53, équ. (13)). Le repère R_x^u étant orthogonal dans le cas du groupe O_n^+ la longueur ds de ce vecteur est donnée par la formule $ds^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n}(\omega^\varkappa)^2$ ce qui, en vertu de la formule (4′), peut s'écrire

$$ds^2 = g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda.$$

Cette équation établit sur V^n une métrique de la même manière que le fait la forme classique $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ dans la théorie des surfaces de l'espace ordinaire. Si dans un voisinage de la variété V^n est donné un champ de vecteurs contravariants, la longueur X du vecteur $\vec{X}$ de ce champ est définie par la formule

$$X = \sqrt{g_{\varkappa\lambda}X^\varkappa X^\lambda}$$

les $X^\varkappa$ désignant les composantes du vecteur $\vec{X}$ par rapport au repère naturel. De même le produit scalaire de deux vecteurs contravariants $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ est défini par la formule

$$\vec{X}_1\cdot\vec{X}_2 = g_{\varkappa\lambda}X_1^\varkappa X_2^\lambda.$$

L'existence du tenseur métrique dans une connexion euclidienne rend possible l'opération d'abaissement et d'enlèvement des indices des tenseurs. Supposons d'abord qu'en un point $x \in V^n$ soient donnés un vecteur contravariant et un vecteur covariant, définis au moyen de leurs composantes par rapport au repère naturel: $X^\varkappa$, Y_λ. Posons

$$X_\lambda = g_{\lambda\varrho}X^\varrho \quad \text{et} \quad Y^\varkappa = g^{\varkappa\varrho}Y_\varrho.$$

On a déduit ainsi d'un vecteur contravariant (covariant) un vecteur covariant (contravariant); on dit qu'on a respectivement *abaissé* et *enlevé* l'indice d'un vecteur. Si l'on applique l'opération d'enlèvement aux composantes X_λ obtenues plus haut en posant $g^{\varkappa\lambda}X_\lambda = g^{\varkappa\lambda}g_{\lambda\varrho}X^\varrho$ on revient aux composantes $X^\varkappa$. On a de même $g_{\lambda\varkappa}Y^\varkappa = Y_\lambda$. Cela justifie la convention d'envisager les grandeurs $X^\varkappa$ et $X_\lambda = g_{\lambda\varrho}X^\varrho$ comme les composantes contravariantes et covariantes d'un même vecteur $\vec{X}$. Cette règle peut être étendue aux tenseurs arbitraires. Si l'on se donne par exemple en x un tenseur mixte aux composantes $A_\varkappa^{\cdot\lambda}$ on en déduit les grandeurs suivantes:

$$A_{\varkappa\lambda} = g_{\lambda\varrho}A_\varkappa^{\cdot\varrho}, \qquad A^{\varkappa\lambda} = g^{\varkappa\varrho}A_\varrho^{\cdot\lambda}, \qquad A_{\cdot\lambda}^\varkappa = g^{\varkappa\varrho}g_{\lambda\sigma}A_\varrho^{\cdot\sigma}$$

que l'on considère comme les composantes d'un même tenseur d'ordre deux.

Remarque. D'après le théorème de R. Whitney toute variété différentiable peut être munie d'une forme quadratique définie positive; on en conclut que sur toute variété différentiable peut être construit un espace fibré tangent dont le groupe de structure est le groupe O_n^+.

69. Connexion riemannienne. En outre de la connexion euclidienne sans courbure définie globalement l'espace fibré B admet des connexions euclidiennes définies localement (n° 53). Pour les obtenir nous ajouterons aux formes $\pi_\mu^\varkappa$ dans les équations (3) les expressions de la forme $l_{\mu\lambda}^\varkappa\omega^\lambda$ dont les coefficients, définis dans $U\times O_n^+$, vérifient les équations

$$l_{\mu\lambda}^\varkappa + l_{\varkappa\lambda}^\mu = 0. \tag{5}$$

Les $\pi_\mu^\varkappa$ doivent donc être remplacés dans les équations (3) par les expressions

$$\omega_\mu^\varkappa = \pi_\mu^\varkappa + l_{\mu\lambda}^\varkappa\omega^\lambda \tag{6}$$

qui, en vertu de (2) et (5), satisfont aux relations

$$\omega_\mu^\varkappa + \omega_\varkappa^\mu = 0. \tag{7}$$

Les composantes de la torsion seront alors données par les formules

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + l_{\mu\lambda}^\varkappa - l_{\lambda\mu}^\varkappa$$

et les équations de structure de la connexion locale déterminée dans le voisinage $U\times O_n^+$ par les formules (6) s'écriront de la manière suivante

$$d\omega^\varkappa + [\omega_\mu^\varkappa\omega^\mu] = \tfrac{1}{2}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu]. \tag{8}$$

Nous nous proposons maintenant de choisir les indéterminées $l^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ de manière que la torsion $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ s'annule:

$$T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+l^{\varkappa}_{\mu\lambda}-l^{\varkappa}_{\lambda\mu} = 0 \tag{9}$$

Or, en permutant circulairement les indices $\varkappa, \lambda, \mu$ dans l'équation (5) on trouve

$$l^{\lambda}_{\varkappa\mu}+l^{\varkappa}_{\lambda\mu} = 0;$$

si l'on tient compte de cette relation, les équations (9) deviennent

$$T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+l^{\varkappa}_{\mu\lambda}+l^{\lambda}_{\varkappa\mu} = 0.$$

Si l'on y permute deux fois circulairement les indices et que l'on ajoute les trois équations ainsi obtenues, on trouve l'équation suivante:

$$T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}+T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}+2(l^{\varkappa}_{\mu\lambda}+l^{\lambda}_{\varkappa\mu}+l^{\mu}_{\lambda\varkappa}) = 0.$$

En rapprochant les deux dernières équations on obtient

$$2l^{\mu}_{\lambda\varkappa} = T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}-T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}-T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda} \tag{10}$$

et par conséquent les formules (6) s'écriront maintenant

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \pi^{\varkappa}_{\mu}+\tfrac{1}{2}(-T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}-T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda})\,\omega^{\lambda}. \tag{11}$$

On voit ainsi que les équations (9) aux inconnues $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ admettent une seule solution bien déterminée et que, par suite, il existe dans l'espace B une seule connexion euclidienne à torsion nulle que l'on appelle *connexion riemanienne*. Ses équations de structure ont la forme

$$dx^{\varkappa}+[\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = 0; \tag{12}$$

les formes $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ qui y figurent sont déterminées par les formules (11). Il est facile de voir sur ces formules que les formes $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ vérifient les équations (7); remarquons aussi qu'elles sont définies dans tout l'espace B puisqu'elles s'expriment au moyen des grandeurs $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ qui sont des invariants différentiels donnés globalement dans B.

En résumant les considérations de ce numéro nous pouvons énoncer le suivant

THÉORÈME 3. *L'espace fibré de groupe de structure O^{+}_{n} tangent à une variété C^{∞} peut être muni de deux connexions euclidiennes dont l'une est à courbure nulle et l'autre à torsion nulle.*

Remarque 1. Les deux connexions dont il est question dans le Théorème 3, étant définies sur la base des mêmes formes (1), elles sont liées l'une à l'autre d'une manière intrinsèque.

Remarque 2. Comme les formes (12′) sont définies globalement dans l'espace B, il en est de même des composantes $\Omega^{\varkappa}_{\mu}$ du tenseur de courbure de la connexion riemannienne

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\omega^{\varkappa}_{\mu}+[\omega^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\varrho}_{\mu}] \tag{13}$$

(n° 54, équ. (23)). On en conclut que les coefficients de ces formes différentielles quadratiques, qui s'expriment au moyen des invariants $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées du premier ordre, sont des invariants différentiels du second ordre de l'espace B.

70. Propriétés des connexions euclidiennes. Envisageons l'une quelconque des connexions euclidiennes définie dans un voisinage arbitraire U de la variété V^{n} au moyen des formes (6) qui englobent le cas d'une connexion déterminée localement ($l^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ arbitraires), celui d'une connexion à courbure nulle ($l^{\varkappa}_{\mu\lambda} = 0$) et le cas de la connexion riemannienne (formules (12′)).

Supposons que sur U soit faite une section locale arbitraire $u = \varphi(x)$ (n° 52). Les $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ deviennent dans cette section des formes différentielles définies en coordonnées locales du voisinage U; on peut donc poser

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}dx^{\lambda}. \tag{14}$$

Il résulte des équations (7) que les coefficients $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ vérifient les relations suivantes

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} = 0. \tag{15}$$

Remarquons que les formes (1) deviennent aussi des formes différentielles linéaires définies dans U. Nous pouvons donc choisir les coordonnées locales dans U de manière qu'il soit

$$\omega^{\varkappa} = dx^{\varkappa} \tag{16}$$

en un point arbitraire $x \in U$. En portant les expressions (14) et (16) dans les équations (8) du n° 69 on trouve

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}[dx^{\lambda}dx^{\mu}] = \tfrac{1}{2}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[dx^{\lambda}dx^{\mu}],$$

d'où il suit

$$S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}-\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}.$$

Si la connexion est à courbure nulle on déduit de la même manière des équations (2) du n° 68 que sa torsion est donnée par les formules

$$T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}-\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}; \tag{17′}$$

si enfin la connexion est riemannienne, les équations (12); (14) et (16) conduisent aux relations

$$\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}. \tag{17''}$$

Nous montrerons plus loin que les relations ci-dessus sont invariables pour un changement arbitraire des coordonnées locales.

Supposons maintenant que dans le voisinage U soit donné un champ de vecteurs contravariants $\vec{X} = (X^{\varrho})$. D'après la formule (28') du n° 55 les différentielles absolues des composantes $X^{\varkappa}$ sont données par les formules

$$DX^{\varkappa} = dX^{\varkappa} + \omega^{\varkappa}_{\lambda} X^{\lambda}. \tag{18}$$

Si $DX^{\varkappa} = 0$, on dit que le champ est formé des vecteurs constants relativement à la connexion euclidienne. Les $DX^{\varkappa}$ étant les composantes d'un vecteur infinitésimal contravariant (n° 55) calculons leurs différentielles absolues que nous désignerons par la notation $D^2X^{\varkappa}$. On aura d'après (18)

$$D^2X^{\varkappa} = d(DX^{\varkappa}) + [\omega^{\varkappa}_{\varrho} DX^{\varrho}]$$

ou, si l'on tient compte de (18),

$$D^2X^{\varkappa} = d\omega^{\varkappa}_{\lambda} X^{\lambda} + [dX^{\lambda}\omega^{\varkappa}_{\lambda}] + [\omega^{\varkappa}_{\varrho} dX^{\varrho}] + [\omega^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\varrho}_{\lambda}] X^{\lambda}.$$

Comme le deuxième et le troisième terme du second membre se détruisent, il vient

$$D^2X^{\varkappa} = [d\omega^{\varkappa}_{\lambda} + \omega^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\varrho}_{\lambda}] X^{\lambda}$$

ou, d'après (13),

$$D^2X^{\varkappa} = \Omega^{\varkappa}_{\lambda} X^{\lambda}. \tag{19}$$

On démontre de la même manière des formules analogues

$$DY_{\lambda} = dY_{\lambda} - \omega^{\varrho}_{\lambda} Y_{\varrho}, \qquad D^2Y_{\lambda} = -\Omega^{\varrho}_{\lambda} Y_{\varrho} \tag{20}$$

pour les composantes Y_{λ} d'un vecteur covariant (Y_{λ}) donné dans U et les formules pour les composantes d'un tenseur arbitraire, par exemple du tenseur covariant $(A_{\mu\nu})$

$$\begin{aligned} DA_{\mu\nu} &= dA_{\mu\nu} - \omega^{\varrho}_{\mu} A_{\varrho\nu} - \omega^{\varrho}_{\nu} A_{\mu\varrho}, \\ D^2A_{\mu\nu} &= -\Omega^{\varrho}_{\mu} A_{\varrho\nu} - \Omega^{\varrho}_{\nu} A_{\mu\varrho}. \end{aligned} \tag{21}$$

Si dans les équations ci-dessus on remplace les $\omega^{\varkappa}_{\lambda}$ par les expressions (14), on trouve, entre autres, les formules suivantes:

$$DX^{\varkappa} = \left(\frac{\partial X^{\varkappa}}{\partial x^{\varrho}} + \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\varrho} X^{\lambda}\right) dx^{\varrho}, \qquad DY_{\lambda} = \left(\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial x^{\varrho}} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\varrho} Y_{\mu}\right) dx^{\varrho}.$$

En posant

$$\nabla_{\varrho} X^{\varkappa} = \frac{\partial X^{\varkappa}}{\partial x^{\varrho}} + \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\varrho} X^{\lambda}, \qquad \nabla_{\varrho} Y_{\lambda} = \frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial x^{\varrho}} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\varrho} Y_{\mu} \tag{22}$$

on aura

$$DX^{\varkappa} = dx^{\varrho} \nabla_{\varrho} X^{\varkappa}, \qquad DY_{\lambda} = dx^{\varrho} \nabla_{\varrho} Y_{\lambda}.$$

Les expressions $\nabla_{\varrho} X^{\varkappa}$ et $\nabla_{\varrho} Y_{\lambda}$ portent le nom de ***dérivées covariantes*** des composantes $X^{\varkappa}$ et Y_{λ}. On voit sur les équations (22) que $\nabla_{\varrho} X^{\varkappa}$ sont les composantes d'un tenseur une fois contravariant et une fois covariant pour un changement arbitraire des coordonnées locales dans le voisinage U. De même les dérivées covariantes des composantes $A^{\cdot\cdot\pi}_{\mu\nu}$ ont la forme suivante

$$\nabla_{\varrho} A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\varrho} A_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\varrho} A_{\mu\varrho}. \tag{23}$$

Nous convenons de dire que la dérivée covariante d'une fonction scalaire revient à la dérivée ordinaire. Il résulte immédiatement des formules précédantes que la dérivée covariante de la somme des tenseurs ou du produit tensoriel obéit aux mêmes lois que la différentiation ordinaire. Remarquons aussi que les formules (18) — (21) sont valables pour les composantes relatives à un repère quelconque tandis que les équations (22) et (23) se rapportent seulement aux repères naturels.

En se servant de l'équation (18) on peut montrer de la même manière qu'au n° 66 que, pour un changement arbitraire des coordonnées locales dans U, les coefficients $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ dans les formules (14) se transforment selon les équations (30) du paragraphe précédent

$$\overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \overline{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\pi}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\varrho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} \Gamma^{\pi}_{\lambda\nu} + \frac{\partial \overline{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\varrho} \partial \overline{x}^{\sigma}},$$

d'où

$$\overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} - \overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\sigma\varrho} = \frac{\partial \overline{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\pi}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\varrho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} - \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\varrho}}\right) \Gamma^{\pi}_{\lambda\nu}$$

ou

$$\overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\varrho\sigma} - \overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\sigma\varrho} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{x}^{\varkappa}}{\partial x^{\pi}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\varrho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} - \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\varrho}}\right) (\Gamma^{\pi}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\pi}_{\nu\lambda}).$$

On voit sur les dernières relations que les différences $\Gamma^{\pi}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\pi}_{\nu\lambda}$ se comportent comme les composantes d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant et antisymétrique en ses indices inférieures; on en conclut que les équations (17') et (17'') restent vraies dans tout système des coordonnées locales dans U.

Maintenant nous allons calculer la différentielle absolue du tenseur métrique d'une connexion euclidienne. Ses composantes par rapport au repère local R_x^u étant égales aux nombres $\delta_{\varkappa\lambda}$ (n° 68) on a en vertu de la formule (21)

$$D\delta_{\varkappa\lambda} = d\delta_{\varkappa\lambda} - \omega_\varkappa^\varrho \delta_{\varrho\lambda} - \omega_\lambda^\varrho \delta_{\varkappa\varrho},$$

d'où

$$D\delta_{\varkappa\lambda} = -\omega_\varkappa^\lambda - \omega_\lambda^\varkappa$$

et par conséquent, d'après les relations (7),

$$D\delta_{\varkappa\lambda} = 0.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *La différentielle absolue du tenseur métrique d'une connexion euclidienne est nulle.*

Nous allons expliciter les dernières équations en coordonnées locales du voisinage U, dans lequel nous nous avons placé au commencement de ce numéro. Les $g_{\varkappa\lambda}$ étant les composantes du tenseur métrique en coordonnées locales on a

$$Dg_{\varkappa\lambda} = dg_{\varkappa\lambda} - \omega_\varkappa^\varrho g_{\varrho\lambda} - \omega_\lambda^\varrho g_{\varkappa\varrho} = 0.$$

En y portant les expressions (14) et en remplaçant la différentielle $dg_{\varkappa\lambda}$ par son expression $\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\nu} dx^\nu$ il vient

$$\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\varkappa\nu}^\varrho g_{\varrho\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^\varrho g_{\varkappa\varrho} = 0. \tag{24}$$

En vertu de la formule (23) ceci peut s'écrire

$$\nabla_\nu g_{\varkappa\lambda} = 0. \tag{25}$$

Il en est évidemment de même des composantes contravariantes du tenseur métrique: $\nabla_\nu g^{\varkappa\lambda} = 0$. Nous pouvons donc énoncer le Théorème 4 sous la forme suivante:

THÈORÈME 5. *Le tenseur métrique est constant relativement à la connexion euclidienne.*

Grâce à ce théorème la différentiation covariante et l'enlèvement ou l'abaissement des indices d'un tenseur deviennent des opérations échangeables; on a par exemple

$$\nabla_\lambda(g_{\varkappa\varrho} X^\varrho) = g_{\varkappa\varrho} \nabla X^\varrho \quad \text{et} \quad \nabla_\lambda(g^{\varkappa\varrho} Y_\varrho) = g^{\varkappa\varrho} \nabla_\lambda Y_\varrho;$$

cette propriété du tenseur métrique simplifie beaucoup les calculs tensoriels dans la connexion euclidienne.

71. Propriétés de la connexion riemannienne. 1) Nous allons appliquer à la connexion à courbure nulle les developpements du numéro précédent en nous proposant de montrer que dans un voisinage quelconque U de la variété V^n peut être déterminé un champ de vecteurs contravariants $\vec{X}$, constants relativement à la connexion. D'après l'équation (18) il doit donc être

$$dX^\varkappa + \omega_\varrho^\varkappa X^\varrho = 0. \tag{26}$$

Le problème proposé revient ainsi à l'étude du système des équations pfaffiennes aux inconnues $X^\varkappa$. En fermant les équations (26) on obtient les relations

$$X^\varrho d\omega_\varrho^\varkappa + [dX^\varrho \omega_\varrho^\varkappa] = 0.$$

Si l'on remplace les différentielles dX^ϱ par les expressions $-\omega_\sigma^\varrho X^\sigma$, tirées des équations (26), il vient

$$d\omega_\varrho^\varkappa X^\varrho - [\omega_\sigma^\varrho \omega_\varrho^\varkappa] X^\sigma = 0.$$

En changeant dans le premier membre l'indice ϱ en σ on en déduit l'équation

$$\{d\omega_\sigma^\varkappa + [\omega_\varrho^\varkappa \omega_\sigma^\varrho]\} X^\sigma = 0$$

ou, en vertu de la formule (13), $\Omega_\sigma^\varkappa X^\sigma = 0$. Comme par hypothèse la courbure de la connexion est nulle ($\Omega_\sigma^\varkappa = 0$), la dernière équation devient une idéntité, c'est-à-dire le système des équations (26) est complètement intégrable d'après le théorème de Frobenius (n° 8). Imaginons en un point $x_0 \in G$ un repère formé de n vecteurs contravariants indépendants. En vertu des propriétés d'un système pfaffien complètement intégrable nous pouvons en déduire sur U un champ des repères formé des vecteurs constants relativement à la connexion, autrement dit le voisinage devient parallélisable (n° 33). Remarquons que le moyen, présenté ci-dessus, de munir un voisinage des vecteurs parallèles est intrinsèquement lié à la connexion euclidienne à courbure nulle et, par conséquent, aussi à la connexion riemannienne (n° 69, Remarque).

Ce résultat a été obtenu par E. Cartan [10].

2) Nous avons vu que dans toute connexion euclidienne la différentielle absolue du tenseur métrique est nulle (n° 70, Th. 4). En nous plaçant dans le cas d'une connexion riemannienne nous allons expliciter les formules de cette différentielle en coordonnées locales introduites au commencement du n° 70, dans un voisinage d'un point $x \in U$.

En vertu de l'équation (24) du n° 70 on a

$$\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\varkappa\nu}^\varrho g_{\varrho\lambda} + g_{\lambda\nu}^\varrho \Gamma_{\varkappa\varrho}; \tag{27}$$

la connexion étant riemannienne les coefficients $\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ qui figurent dans cette équation sont symétriques en leurs indices inférieurs. Si dans l'équation on permute deux fois les indices $\varkappa, \lambda, \mu$ et que l'on retranche de la somme des équations ainsi obtenues l'équation (27), on trouve, en tenant compte des relations $\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$, l'équation suivante

$$2\Gamma^{\varrho}_{\varkappa\lambda} g_{\varrho\nu} = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}} + \frac{\partial g_{\nu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^{\nu}}.$$

Multiplions ses deux membres par la composante contravariante $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique et sommons par rapport à l'indice ν; en vertu des relations $g_{\varrho\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\varrho}$ il viendra

$$\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}} + \frac{\partial g_{\nu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right). \tag{28}$$

L'expression qui figure dans le second membre de (28) porte le nom de *symbole de Christoffel de seconde espèce* et dans la notation de E. B. Christoffel elle a été désignée par le symbole $\{{}^{\varkappa\lambda}_{\mu}\}$; on a donc

$$\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} = \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{Bmatrix}.$$

Nous avons ainsi montré que les coefficients $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$, qui, en vertu des formules (14) du n° 70, déterminent la connexion riemannienne, s'expriment par les composantes du tenseur métrique et de leurs dérivées partielles du premier ordre.

72. Géométrisation d'une forme quadratique définie. Au n° 69 la connexion riemannienne a été déduite d'une connexion euclidienne à courbure nulle. Maintenant nous allons montrer que la théorie d'une connexion riemannienne peut être développée d'une façon autonome, indépendante des considérations précédentes de ce paragraphe. Imaginons à cet effet une forme quadratique

$$F = g_{\varkappa\lambda}\, dx^{\varkappa} dx^{\lambda}$$

donnée pour les repères naturels d'une variété V^n de classe C^{∞} et supposons que F soit aussi de classe C^{∞} et qu'elle soit portout définie positive. Dans un voisinage quelconque $U \subset V^n$ F peut être mis sous la forme

$$F = \delta_{\varkappa\lambda}\Theta^{\varkappa}\Theta^{\lambda},$$

où les $\Theta^{\varkappa}$ sont des formes différentielles linéaires et indépendantes, définies dans U. Supposons maintenant que la forme F, restreinte à un point x commun à deux voisinage U_i, $U_j \subset V^n$ soit présentée par les expressions

$$F = \delta_{\varkappa\lambda}\Theta^{\varkappa}_i\Theta^{\lambda}_i, \qquad F = \delta_{\varrho\sigma}\Theta^{\varrho}_j\Theta^{\sigma}_j, \tag{29}$$

où les $\Theta^{\varkappa}_i$ et Θ^{ϱ}_j soient deux systèmes des formes différentielles linéaires indépendantes définies respectivement dans U_i et U_j et restreintes au point x. Nous pouvons donc poser

$$\Theta^{\varrho}_j = a^{\varrho}_{ji,\varkappa}(x)\Theta^{\varkappa}_i, \qquad \Theta^{\sigma}_j = a^{\sigma}_{ji,\lambda}(x)\Theta^{\lambda}_i,$$

la matrice $[a^{\varrho}_{ji,\varkappa}(x)]$ étant l'élément du groupe $GL(n, R)$. En portant ces expressions dans la deuxième des équations (29) on trouve

$$F = \delta_{\varrho\sigma} a^{\varrho}_{ji,\varkappa} a^{\sigma}_{ji,\lambda}\Theta^{\varkappa}_i\Theta^{\lambda}_i.$$

En rapprochant cette équation de la première des équations (29) on obtient la relation

$$\delta_{\varrho\sigma} a^{\varrho}_{ji,\varkappa} a^{\sigma}_{ji,\lambda} = \delta_{\varkappa\lambda}$$

qui peut s'écrire

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a^{\varrho}_{ji,\varkappa} a^{\varrho}_{ji,\lambda} = \delta_{\varkappa\lambda}.$$

On en conclut, selon l'équation (20′) du n° 47, que la matrice $[a^{\varrho}_{ji,\varkappa}]$ est un élément $\gamma_{ji}(x)$ du groupe O^{+}_{n}. La transformation $\gamma_{ji}(x)$ satisfait évidemment aux relations (1) du n° 51 ce qui prouve que sur V^n peut être établi un espace fibré tangent B de groupe de structure O^{+}_{n}. L'espace B peut être doué de n formes différentielles linéaires qui dans l'ouvert $U \times O^{+}_{n}$ $(U \subset V^n)$ ont la forme suivante:

$$\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\varrho}\Theta^{\varrho}, \qquad [a^{\varkappa}_{\varrho}] \in O^{+}_{n}.$$

En effectuant sur ces formes les calculs tout semblables à ceux du n° 69 on obtient les équations de structure

$$d\omega^{\varkappa} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = 0$$

de la connexion riemannienne liée intrinsèquement à la forme F. Par conséquent le problème de l'équivalence de deux formes différentielles quadratiques définies positives se ramène au problème de l'équivalence de deux connexions riemanniennes. Nous exprimons le résultat des considérations de ce numéro en disant que la forme quadratique F a été géométrisée au moyen de la connexion riemannienne.

73. Problèmes d'équivalence. Considérons deux espaces fibrés B et $\bar{B}$, de groupe de structure O^{+}_{n}, tangents respectivement aux variétés V^n et $\bar{V}^n$. (Dans la suite les variables et les grandeurs qui se rapportent à $\bar{B}$ seront distinguées par les symboles affectés d'une barre). A l'égard de ces espaces on peut se poser divers problèmes d'équivalence que nous allons considérer successivement en appliquant la méthode d'E. Cartan ([15], Partie II, vol. II, p. 1311).

1° Désignons par $b = (x, u)$ et $\bar{b} = (\bar{x}, \bar{u})$ $(x \in V^n,\ \bar{x} \in \bar{V}^n,\ u,\ \bar{u} \in O_n^+)$ deux points appartenant respectivement à B et $\bar{B}$. Nous savons que B peut être muni d'une connexion euclidienne à courbure nulle dont les équations de structure ont la forme

$$(30) \qquad d\omega^\varkappa + [\pi^\varkappa_\mu \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} [\omega^\lambda \omega^\mu]$$

(n° 68, équ. (3)). De même, à l'espace $\bar{B}$ est liée aussi une connexion à courbure nulle dont les équations de structure s'obtiennent en affectant d'une barre tous les symboles dans les équations ci-dessus. Nous dirons que les espaces B et $\bar{B}$ sont équivalents avec les connexions dont ils sont munis, si l'on peut établir entre les points b et $\bar{b}$ une correspondance telle, qu'il soit

$$(31) \qquad \omega^\varkappa = \bar{\omega}^\varkappa, \qquad \bar{\pi}^\varkappa_\mu = \pi^\varkappa_\mu;$$

comme les formes $\omega^\varkappa(\bar{\omega}^\varkappa)$ sont linéaires et homogènes en les différentielles des coordonnées du point $x(\bar{x})$, il résulte du premier ensemble des équations (31) que cette correspondance, si elle existe, doit avoir la forme

$$(32) \qquad \bar{x} = \bar{x}(x), \qquad \bar{u} = \bar{u}(u, x).$$

Eu égard aux équations de structure les équations (30) entraînent les relations finies

$$(33) \qquad T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = \bar{T}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$$

que l'on doit adjoindre aux équations (30). Les composantes $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de la torsion qui s'expriment au moyen des coefficients des formes $\omega^\varkappa$ et de leurs dérivées du premier ordre sont des invariants du premier ordre de l'espace B (n° 67). Les $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ étant fonctions du point $b = (x, u)$ leurs différentielles ont la forme

$$(34) \qquad dT^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = (T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})_\nu \omega^\nu + (T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})^\varrho_\sigma \pi^\sigma_\varrho;$$

les dérivées pfaffiennes des grandeurs $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ étant, en vertu des équations (31), des invariants du deuxième ordre de l'espace B on arrive ainsi aux relations

$$(\bar{T}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})_\nu = (T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})_\nu, \qquad (\bar{T}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})^\varrho_\sigma = (T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu})^\varrho_\sigma$$

qui s'associent aux équations (33). On doit remarquer que les invariants du deuxième ordre sont liés par certaines relations que l'on déduit des équations de structure. En effet en différentiant extérieurement les équations (30) on trouve

$$[d\pi^\varkappa_\mu \omega^\mu] - [\pi^\varkappa_\mu d\omega^\mu] = \tfrac{1}{2}[dT^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} \omega^\lambda \omega^\mu] + T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} [d\omega^\lambda \omega^\mu].$$

Si l'on y remplace les différentielles $d\omega^\lambda$ et $dT^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ par leurs expressions tirées respectivement des équations (30) et (33) et que l'on tient compte des équations $d\pi^\varkappa_\mu + [\pi^\varkappa_\varrho \pi^\varrho_\mu] = 0$ qui expriment que la courbure de la connexion envisagée est nulle (n° 53, équ. (24)), on en déduit des relations entre les dérivées pfaffiennes des composantes $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$.

Supposons maintenant que la dimension n de la variété V^n est égale ou supérieur à 3; le cas $n = 2$ sera traité séparément plus loin. Remarquons que les grandeurs $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ ne sont pas liées par aucune relation imposée par le problème. Comme leur nombre est égal à $n^2(n-1)/2$ et celui des coordonnées du point $b = (x, u)$ est égal à $N = n(n+1)/2$, dans le cas extrême, que nous allons considérer d'abord, il existe N grandeurs indépendantes parmi les invariants $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ désignées dans la suite par $J^{(a)}$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$; toutes les composantes $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ peuvent donc être exprimées par les invariants $J^{(a)}$. En différentiant les $J^{(a)}$ on obtient les formules de la forme

$$(35) \qquad dJ^{(a)} = J^{(a)}_\varkappa \omega^\varkappa + J^{(a)\mu}_\varkappa \pi^\varkappa_\mu$$

dont les coefficients sont fonctions des invariants $J^{(a)}$.

Pour que les espaces B et $\bar{B}$ soient équivalents, il faut d'abord que parmi les $\bar{T}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ il y ait N indépendants $\bar{J}^{(a)}$ et que, de plus, tous les $\bar{J}^{(a)}_\varkappa$ et $\bar{J}^{(a)\varkappa}_\mu$ soient les mêmes fonctions des invariants $\bar{J}^{(a)}$ que pour l'espace B.

Ces conditions sont aussi satisfaisantes; en effet considérons le changement des variables défini par

$$(36) \qquad \bar{J}^{(a)} = J^{(a)} \qquad (a = 1, 2, \ldots, N);$$

si l'on différentie ces équations, on obtient

$$\bar{J}^{(a)}_\varkappa \bar{\omega}^\varkappa + \bar{J}^{(a)\mu}_\varkappa \bar{\pi}^\varkappa_\mu = J^{(a)}_\varkappa \omega^\varkappa + J^{(a)\mu}_\varkappa \pi^\varkappa_\mu$$

ou, d'après l'hypothèse adoptée pour les invariants $\bar{J}^{(a)}_\varkappa$, $\bar{J}^{(a)\mu}_\varkappa$ et en vertu des équations (36),

$$J^{(a)}_\varkappa (\bar{\omega}^\varkappa - \omega^\varkappa) + J^{(a)\mu}_\varkappa (\bar{\pi}^\varkappa_\mu - \pi^\varkappa_\mu) = 0.$$

Comme les $J^{(a)}$ sont indépendants, le déterminant de la matrice des coefficients des equations (35) est différent de zéro et, par suite, les dernières équations entraînent les égalités

$$\bar{\omega}^\varkappa = \omega^\varkappa, \qquad \bar{\pi}^\varkappa_\mu = \pi^\varkappa_\mu$$

ce qui démontre que les équations (36) établissent l'équivalence des espaces B et $\bar{B}$ dans le cas extrême envisagé ici.

Prenons maintenant un autre cas extrême, où tous les invariants $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ ont des valeurs constantes $c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda}$. Pour que B et $\bar{B}$ soient équivalents,

il faut que les $\overline{T}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ aient les mêmes valeurs constantes $c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$. Si ces conditions sont satisfaites, le système des équations (31) est complètement intégrable; pour s'en convaincre il suffit de le fermer et de tenir compte des équations (29) et des relations

$$d\pi_\mu^\varkappa + [\overline{\pi}_\varrho^\varkappa \pi_\mu^\varrho] = 0, \qquad d\overline{\pi}_\mu^\varkappa + [\overline{\pi}_\varrho^\varkappa \overline{\pi}_\mu^\varrho] = 0$$

qui expriment que les deux connexions, dont B et $\overline{B}$ sont munis, sont à courbure nulle (n° 53, équ. (24)). Le changement des variables qui établit l'équivalence de ces deux espaces dépend par conséquent de N constantes arbitraires. On peut aussi remarquer que l'espace B admet un groupe continu et fini des transformations qui le laissent invariant.

Passons maintenant au cas, où les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ n'ayant pas tous des valeurs constantes le nombre de ces d'entre eux qui sont indépendants est inférieur à N. En les différentiant selon (34) on trouve des nouveaux invariants dont chacun donne à son tour naissance à des invariants dérivés et ainsi de suite. On trouve ainsi une suite illimitée des invariants différentiels. Deux cas peuvent alors se présenter: ou bien on aboutit à obtenir un système de N invariants indépendants ou l'on trouve un système de $m < N$ invariants $J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(m)}$ tel que tous les invariants que l'on obtient par différentiations successives des invariants $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ peuvent être exprimés par $J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(m)}$. A chacun de ces deux cas peut être appliqué le même raisonnement dont nous nous avons servi dans les deux cas extrêmes considérés plus haut.

2° Aux considérations précédentes se lie un autre problème d'équivalence: on peut se proposer de trouver les conditions pour que deux variétés V^n et $\overline{V}^n$ puissent servir de bases des espaces équivalents B et $\overline{B}$. Nous nous bornons au cas, où parmi les composantes $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ ($\overline{T}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$) il y a N indépendants et nous supposons que le problème de l'équivalence des espaces B et $\overline{B}$ admette une solution. Nous avons déjà remarqué que les équations (36) qui établissent l'équivalence peuvent être ramenées à la forme (32). Il en résulte qu'il existe n fonctions de $J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(N)}$ qui ne dépendent que des coordonnées du point x et qui, par conséquent, sont des invariants différentiels de la variété V^n. En les égalant aux invariants correspondants de $\overline{V}^n$ on arrive à la solution du problème proposé.

Soit $\Phi(J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(n)})$ l'une quelconque des fonctions cherchées; en la différentiant on trouve l'équation

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial J^{(a)}} dJ^{(a)}$$

qui, en vertu de (35), peut s'écrire

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial J^{(a)}} J_\varkappa^{(a)} \omega^\varkappa + \frac{\partial \Phi}{\partial J^{(a)}} J_\varkappa^{(a)\mu} \pi_\mu^\varkappa.$$

La fonction Φ ne devant dépendre que des coordonnées du point x on voit sur la dernière équation qu'elle doit vérifier les équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$J_\varkappa^{(a)\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial J^{(a)}} = 0 \tag{37}$$

pour toutes les combinaisons binaires des valeurs des indices $\varkappa$ et μ. Le système (37) contient donc $n(n-1)/2$ équations indépendantes dont les coefficients dépendent de $N = n(n+1)/2$ variables $J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(N)}$. Comme ce système doit admettre n solutions indépendantes, on en conclut qu'il est un système complet. Ses intégrales, que l'on peut obtenir par des méthodes bien connues (1), donnent n fonctions qui permettent de résoudre le problème envisagé.

3° Des considérations précédentes nous avons écarté le cas $n = 2$ que nous allons maintenant traiter d'une manière détaillée.

Soit V^2 la base de l'espace fibré tangent B, de dimension 3, dont O_2^+ est le groupe de structure; comme ce groupe se compose des rotations du plan euclidien, les formes $\pi_\mu^\varkappa$ dans les équations (30) se réduisent à une seule π_2^1 que nous notons $d\varphi$; remarquons encore que parmi les composantes $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ il y a maintenant deux indépendantes $T_{12}^{\cdot\cdot 1}$ et $T_{12}^{\cdot\cdot 2}$ que nous désignerons par K et L. Les équations (30) prendront alors la forme

$$d\omega^1 + [d\varphi\, \omega^2] = K[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^2 - [d\varphi\, \omega^1] = L[\omega^1\omega^2]. \tag{38}$$

Les deux invariants K et L étant fonctions du point $b = (x, \varphi)$ leurs différentielles peuvent être présentées sous la forme

$$dK = K_0 d\varphi + K_1\omega^1 + K_2\omega^2, \qquad dL = L_0 d\varphi + L_1\omega^1 + L_2\omega^2. \tag{39}$$

Les invariants du deuxième ordre que l'on déduit ainsi de K et L ne sont pas indépendants de K et L. En effet, si l'on différentie extérieurement les équations (38), on trouve les relations

$$-[d\varphi\, d\omega^2] = [dK\omega^1\omega^2] + K[d\omega^1\omega^2] - K[\omega^1 d\omega^2],$$
$$[d\varphi\, d\omega^1] = [dL\omega^1\omega^2] + L[d\omega^1\omega^2] - L[\omega^1 d\omega^2].$$

En les rapprochant des équations (38) et (39) on trouve facilement les deux relations suivantes:

$$K_0 = -L, \qquad L_0 = K$$

et par conséquent les équations (39) prendront la forme

$$dK = -L d\varphi + K_1\omega^1 + K_2\omega^2, \qquad dL = K d\varphi + L_1\omega^1 + L_2\omega^2. \tag{40}$$

(1) V. par exemple [28].

Calculons maintenant les invariants du troisième ordre en posant

$$(41)\qquad dK_i = K_{i0}\,d\varphi + K_{i1}\,\omega^1 + K_{i2}\,\omega^2, \qquad dL_i = L_{i0}\,d\varphi + L_{i1}\,\omega^1 + L_{i2}\,\omega^2.$$

Si l'on différentie extérieurement les équations (39) et que l'on y porte ensuite les expressions (41), on obtient les relations suivantes entre les invariants du deuxième et troisième ordre

$$(42)\qquad \begin{gathered} K_{12}-K_{21} = KK_1+LK_2, \qquad L_{12}-L_{21} = KL_1+LK_2, \\ K_{10} = -K_2-L_1, \qquad K_{20} = -L_2+K_1, \qquad L_{10} = K_1-L_2, \\ L_{20} = K_2+L_1. \end{gathered}$$

On voit sur ces équations que les six grandeurs K, L, K_1, K_2, L_1, L_2 ne sont liées par aucune relation, on peut donc admettre qu'en général il y a parmi eux trois indépendantes; supposons que ce soient les invariants K, L, K_1. Si une autre variété $\overline{V}^2$ jouit de la même propriété, les espaces fibrés correspondants sont équivalents et l'on établit l'équivalence par

$$\overline{K} = K, \qquad \overline{L} = L, \qquad \overline{K}_1 = K_1.$$

Considérons encore les invariants

$$I = K^2+L_1^2, \qquad J = K_1-L_2;$$

il résulte des relations (42) que les dérivées pfaffiennes I_0 et J_0 de ces invariants sont nulles et que, par suite, I et J ne dépendent que du point x, ils sont donc des invariants de la variété V^2.

4° Supposons que sur chacune de deux variétés V^n et $\overline{V}^n$ de classe C^∞ soit donnée une forme quadratique définie positive de classe C^∞ et que ces formes aient, pour les repères naturels, la forme suivante

$$F = g_{\varkappa\lambda}\,dx^\varkappa dx^\lambda, \qquad \overline{F} = \overline{g}_{\varkappa\lambda}\,d\overline{x}^\varkappa d\overline{x}^\lambda.$$

Nous nous proposons de trouver les conditions pour qu'il existe une application de V^n sur $\overline{V}^n$ qui transforme la forme F dans la forme $\overline{F}$. Or nous avons vu (n° 72) que les formes F et $\overline{F}$ peuvent être géometrisées au moyen des connexions riemanniennes dont les équations de structure ont respectivement la forme

$$(43)\qquad d\omega^\varkappa + [\omega^\varkappa_\mu\omega^\mu] = 0, \qquad d\overline{\omega}^\varkappa [\overline{\omega}^\varkappa_\mu\overline{\omega}^\mu] = 0$$

et que, par suite, le problème proposé revient à l'étude du système des équations de Pfaff

$$(44)\qquad \overline{\omega}^\varkappa = \omega^\varkappa, \qquad \overline{\omega}^\varkappa_\mu = \omega^\varkappa_\mu.$$

Si l'on ferme le système des équations (44) en les différentiant extérieurement, on obtient les relations

$$d\overline{\omega}^\varkappa = d\omega^\varkappa, \qquad d\overline{\omega}^\varkappa_\mu = d\omega^\varkappa_\mu$$

qui, en vertu des équations (43) et des formules (13) du n°69, peuvent être ramenées à la forme

$$[\overline{\omega}^\varkappa_\mu\overline{\omega}^\mu] = [\omega^\varkappa_\mu\omega^\mu], \qquad \overline{\Omega}^\varkappa_\mu - [\overline{\omega}^\varkappa_\varrho\overline{\omega}^\varrho_\mu] = \Omega^\varkappa_\mu - [\omega^\varkappa_\varrho\omega^\varrho_\mu].$$

On voit que les équations du premier ensemble de ces relations sont des conséquences des équations (44) et que celles du second se réduisent aux relations

$$(45)\qquad \overline{\Omega}^\varkappa_\mu = \Omega^\varkappa_\mu$$

que l'on doit adjoindre aux équations (44).

Remarquons que les formes quadratiques $\Omega^\varkappa_\mu$, définies par les formules (13) du n° 69, se déduisent des formes $\omega^\varkappa_\mu$ qui, d'après les formules (11) du n° 69, sont des expressions linéaires en les différentielles du point $x \in V^n$ et du point $u \in O^+_n$. Il en résulte que les expressions $\Omega^\varkappa_\mu$ sont des formes en $\omega^\varkappa$, $\omega^\varkappa_\mu$. Posons donc

$$(46)\qquad \begin{gathered} \Omega^\varkappa_\mu = \tfrac{1}{2} R^{\cdots\varkappa}_{\nu\lambda\mu}[\omega^\nu\omega^\lambda] + P^{\varkappa\sigma}_{\mu\nu\varrho}[\omega^\nu\omega^\varrho_\sigma] + Q^{\varkappa\sigma\tau}_{\mu\varrho\pi}[\omega^\varrho_\sigma\omega^\pi_\tau], \\ R^{\cdots\varkappa}_{\nu\lambda\mu} + R^{\cdots\varkappa}_{\lambda\nu\mu} = 0. \end{gathered}$$

Différentions maintenant les équations du premier ensemble des équations de structure (43); on aura

$$[d\omega^\varkappa_\mu\omega^\mu] - [\omega^\varkappa_\mu d\omega^\mu] = 0.$$

Si l'on y remplace la différentielle $d\omega^\varkappa_\mu$ par son expression tirée de la formule $\Omega^\varkappa_\mu = d\omega^\varkappa_\mu + [\omega^\varkappa_\varrho\omega^\varrho_\mu]$ et la différentielle $d\omega^\mu$ par son expression déduite des équations (43), on trouve la relation

$$(47)\qquad [\Omega^\varkappa_\mu\omega^\mu] = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée par l'expression (46) il en résulte en premier lieu que tous les coefficients Q sont nuls. En considérant dans l'équation (47) les termes en $[\omega^\mu\omega^\nu\omega^\varrho_\sigma]$ on trouve que les coefficients P sont symétriques en leurs deux premiers indices inférieurs; on voit d'autre part que l'échange des indices ϱ et σ entraîne le changement de signe du coefficient P. Il en résulte que tous les coefficients P sont nuls; remarquons enfin que la considération dans l'équation (47) des termes en $[\omega^\lambda\omega^\mu\omega^\nu]$ conduit à la relation

$$(48)\qquad R^{\cdots\varkappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\cdots\varkappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\cdots\varkappa}_{\nu\lambda\mu} = 0.$$

Nous arrivons donc finalement à la formule

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = \tfrac{1}{2} R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}],$$

dont les coefficients, antisymétriques en leurs deux premiers indices, sont assujettis aux relations (48). Il en résulte que les relations (45) que nous avons obtenu en fermant le système pfaffien (44) peuvent s'écrire

$$\bar{R}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu}[\bar{\omega}^{\nu}\bar{\omega}^{\lambda}] = R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu}[\omega^{\nu}\omega^{\lambda}];$$

en vertu des équations (44) elles donnent les relations finies

$$\bar{R}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu} = R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu}. \tag{49}$$

Les $R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda\mu}$ sont donc des invariants différentiels de la connexion riemennienne liée à la forme différentielle F. Soit I l'un quelconque de ces invariants; en le différentiant on obtient la formule

$$dI = I_{\varkappa}\omega + I^{\mu}_{\varkappa}\omega^{\varkappa}_{\mu}$$

dont les coefficients sont des nouveaux invariants différentiels d'ordre supérieur. En raisonnant comme dans le cas 1° considéré au commencement de ce numéro on trouve ainsi une suite illimitée des invariants différentiels de la connexion. Ces invariants sont fonctions du point x de la variété V^n et du point u du groupe O^+_n qui est le groupe de structure de la connexion; le nombre des variables dont dépendent les invariants est donc égal à $N = n(n+1)/2$. Dans le cas le plus général la connexion admet N invariants indépendants [1]. La recherche de ces invariants est le premier pas pour résoudre le problème proposé; il faut ensuite trouver n fonctions de ces invariants qui ne dépendent que du point x de la variété V^n. La recherche de ces fonctions revient, comme dans le cas 1° considéré plus haut, à la solution d'un système complet des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (Dans le travail d'E. Cartan, cité plus haut, cette question a été résolue d'une autre façon.)

§ 4. Connexions weyliennes

74. Connexion weylienne à courbure nulle. Supposons qu'une variété V^n de classe C^{∞} puisse servir de base d'un espace fibré tangent B dont le groupe de structure est le groupe linéaire O'_n défini au n° 47; les connexions dont B peut être muni seront appelées *connexions weyliennes*.

[1] Nous renvoyons le lecteur pour la démonstration au travail d'E. Cartan [8], p. 28.

Le groupe O'_n est formé des transformations

$$\vec{I}_{\varrho} = e^{u_0} a^{\varkappa}_{\varrho} \vec{I}^{\mu}_{\varkappa}, \qquad [a^{\varkappa}_{\varrho}] \in O^+_n, \qquad -\infty < u_0 < \infty,$$

de l'espace vectoriel et les composantes relatives de son repère mobile, que nous désignerons ici par la notation $\pi^{\varkappa}_{\mu}$ au lieu de la notation $\bar{\omega}^{\varkappa}_{\mu}$, vérifient les relations suivantes:

$$\pi^{\varkappa}_{\mu} = \begin{cases} -\pi^{\mu}_{\varkappa} & \text{pour} \quad \varkappa \neq \mu, \\ n\,du_0 & \text{pour} \quad \varkappa = \mu \end{cases} \tag{1}$$

(équ. (24′) du n° 47).

L'espace B peut être muni d'un système de n formes différentielles $\omega^{\varkappa}$ qui dans un ouvert $U \times O'_n$, où U est un voisinage quelconque d'un recouvrement de V^n, ont la forme

$$\omega^{\varkappa} = e^{u_0} a^{\varkappa}_{\varrho} \Theta^{\varrho}, \tag{2}$$

les Θ^{ϱ} étant des formes linéaires indépendantes définies dans U (v. n° 53). En différentiant extérieurement les équations (2) on obtient les équations de structure d'une connexion weylienne $\overset{\circ}{W}_n$ à courbure nulle

$$d\omega^{\varkappa} + [\pi^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}].$$

où les $T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$, fonctions du point de l'espace B, désignent les composantes de la torsion de $\overset{\circ}{W}_n$.

Pour développer la théorie des connexions weyliennes nous nous servirons des formes $\overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu}$ qui vérifient les relations $\overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu} + \overset{\circ}{\pi}{}^{\mu}_{\varkappa} = 0$ pour toutes les valeurs des indices $\varkappa$ et μ et qui sont par suite nulles, si $\varkappa = \mu$. Les équations de structure de la connexion $\overset{\circ}{W}_n$, données ci-dessus, s'écriront maintenant

$$d\omega^{\varkappa} + [(\overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu} + n\,du_0)\,\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}]. \tag{3}$$

Remarquons que les formes $\overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu}$ définissent une connexion euclidienne (n° 68).

75. Connexions weyliennes distinguées. De la connexion $\overset{\circ}{W}_n$ on déduit d'autres connexions weyliennes en faisant sur les formes $\overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu}$ et $n\,du_0$ la substitution

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu} = \overset{\circ}{\pi}{}^{\varkappa}_{\mu} + l^{\varkappa}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}, \qquad \omega = n\,d\mu_0 + l_{\lambda}\omega^{\lambda}, \tag{4}$$

où les $l^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ et l_{λ} sont des fonctions définies dans $U \times O'_n$ vérifiant les relations

$$l^{\varkappa}_{\mu\lambda} + l^{\mu}_{\varkappa\lambda} = 0 \tag{5}$$

et d'ailleurs arbitraires. Les équations de structure d'une quelconque de ces connexions auront la forme

$$d\omega^{\varkappa}+[(\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+n\,du_0)\,\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}]$$

et sa torsion sera définie par les formules

$$S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+l^{\varkappa}_{\mu\lambda}-l^{\varkappa}_{\lambda\mu}+\delta^{\varkappa}_{\lambda}l_{\mu}-\delta^{\varkappa}_{\mu}l_{\lambda}.$$

Nous nous proposons maintenant de choisir les indéterminées $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ et $l^{\varkappa}_{\lambda}$ de manière que le plus grand nombre possible des composantes $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ s'annulent; ceci revient à considérer le système des équations

$$l^{\varkappa}_{\lambda\mu}-l^{\varkappa}_{\mu\lambda}+\delta^{\varkappa}_{\lambda}l_{\mu}-\delta^{\varkappa}_{\mu}l_{\lambda} = T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$$

aux inconnues $l^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ et l_{λ}; en vertu de (5) ces équations peuvent être remplacées par les suivantes

$$l^{\varkappa}_{\lambda\mu}+l^{\mu}_{\varkappa\lambda}+\delta^{\varkappa}_{\lambda}l_{\mu}-\delta^{\varkappa}_{\mu}l_{\lambda} = T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}. \tag{6}$$

En permutant dans cette équation deux fois circulairement les indices $\varkappa, \lambda, \mu$ on trouve

$$\begin{aligned} l^{\lambda}_{\mu\varkappa}+l^{\varkappa}_{\lambda\mu}+\delta^{\lambda}_{\mu}l_{\varkappa}-\delta^{\lambda}_{\varkappa}l_{\mu} &= T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa},\\ l^{\mu}_{\varkappa\lambda}+l^{\lambda}_{\mu\varkappa}+\delta^{\mu}_{\varkappa}l_{\lambda}-\delta^{\mu}_{\lambda}l_{\varkappa} &= T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}. \end{aligned} \tag{6'}$$

Si l'on ajoute les équations (6) et (6'), on trouve

$$l^{\varkappa}_{\lambda\mu}+l^{\lambda}_{\mu\varkappa}+l^{\mu}_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}+T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}).$$

En y remplaçant la somme $l^{\lambda}_{\mu\varkappa}+l^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ par son expression tirée de la deuxième des équations (6') on arrive finalement à l'équation suivante:

$$l^{\varkappa}_{\lambda\mu}+\delta^{\mu}_{\lambda}l_{\varkappa}-\delta^{\mu}_{\varkappa}l_{\lambda} = \tfrac{1}{2}(T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}-T^{\cdot\cdot\mu}_{\lambda\varkappa}).$$

Si l'on pose successivement $\mu \neq \varkappa$, $\mu \neq \lambda$; $\mu = \varkappa$, $\varkappa \neq \lambda$ et $\mu = \lambda$, $\varkappa \neq \lambda$, on en déduit respectivement les formules

$$\left\{\begin{aligned} l^{\varkappa}_{\lambda\mu} &= \tfrac{1}{2}(T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}+T^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\varkappa}-T^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}),\\ l^{\varkappa}_{\lambda\varkappa} &= l_{\lambda}-T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varkappa\lambda},\\ l^{\varkappa}_{\lambda\lambda} &= l_{\varkappa}-T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\varkappa\lambda} \end{aligned}\right\} \text{(ne sommer par rapport à } \varkappa) \tag{7}$$

à lesquelles on doit adjoindre les relations (5). Les expressions ainsi obtenues vérifient les équations (6), quelles que soient les fonctions que l'on prenne pour les $l_{\varkappa}$, c'est-à-dire elles annulent toutes les composantes $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de la torsion. Si l'on fait un choix déterminé des fonctions $l_{\varkappa}$, ce qui veut dire que l'on prend arbitrairement la forme ω définie par la seconde des équations (4) et que l'on porte ensuite les expressions (7) dans l'é-

quation (4), on obtient une connexion weylienne à torsion nulle dont les équations de structure auront la forme

$$d\omega^{\varkappa}+[\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+\delta^{\varkappa}_{\mu}\omega)\,\omega^{\mu}] = 0;$$

si l'on pose

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = \overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+\delta^{\varkappa}_{\mu}\omega, \tag{8}$$

elles s'écriront de la manière plus simple

$$d\omega^{\varkappa}+[\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = 0.$$

Calculons maintenant la courbure de cette connexion selon la formule $\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\omega^{\varkappa}_{\mu}+[\omega^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\varrho}_{\mu}]$; en remplaçant les $\omega^{\varkappa}_{\mu}$, $\omega^{\varkappa}_{\varrho}$, ω^{ϱ}_{μ} par leurs expressions tirées des équations (8), on obtient

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+\delta^{\varkappa}_{\mu}d\omega+[(\omega^{\varkappa}_{\varrho}+\delta^{\varkappa}_{\varrho}\omega)(\overset{\circ}{\omega}{}^{\varrho}_{\mu}+\delta^{\varrho}_{\mu}\omega)]$$

ou

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+\delta^{\varkappa}_{\mu}d\omega+[\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\varrho}\overset{\circ}{\omega}{}^{\varrho}_{\mu}]+\delta^{\varrho}_{\mu}[\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\varrho}\omega]+\delta^{\varkappa}_{\varrho}[\omega\overset{\circ}{\omega}{}^{\varrho}_{\mu}].$$

Comme les deux derniers termes du second membre se détruisent, on aura

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = d\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+[\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\varrho}\overset{\circ}{\omega}{}^{\varrho}_{\mu}]+\delta^{\varkappa}_{\mu}d\omega.$$

Si l'on pose

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^{\varkappa}_{\mu} = d\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+[\overset{\circ}{\omega}{}^{\varkappa}_{\varrho}\overset{\circ}{\omega}{}^{\varrho}_{\mu}], \qquad \Omega = d\omega,$$

la dernière équation prendra la forme

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu} = \overset{\circ}{\Omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+\delta^{\varkappa}_{\mu}\Omega.$$

On voit donc que la courbure de la connexion se compose de deux parties dont la première vérifie, en vertu de (4) et (5), les équations $\overset{\circ}{\Omega}{}^{\varkappa}_{\mu}+$ $+\overset{\circ}{\Omega}{}^{\mu}_{\varkappa} = 0$.

La connexion W^n à torsion nulle que nous avons déduit de la connexion $\overset{\circ}{W}{}^n$ c'est la connexion weylienne proprement dite que H. Weyl a introduit pour développer sa théorie du champs unitaire.

Les coefficients $a^{\varkappa}_{\varrho}$ dans les équations (2) étant des éléments de la matrice orthogonale il en résulte l'équation suivante

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(\omega^{\varkappa})^2 = e^{2\mu_0}\sum_{\varrho=1}^{n}(\Theta^{\varrho})^2,$$

où la somme $\sum_{\varrho=1}^{n}(\Theta^\varrho)^2$ représente dans les coordonnées locales du voisinage $U \subset V^n$ une forme quadratique définie positive $F = g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda$. Cette forme est donnée à un facteur près dans la variété V^n; on peut dire aussi que dans toute la variété V^n est donnée pour les repères naturels l'équation $g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa \times dx^\lambda = 0$. La donnée de cette équation ne suffit pas à déterminer la connexion de Weyl. Nous avons vu que pour cela il faut lui associer la forme linéaire $l_\lambda \omega^\lambda$. Par un raisonnement analogue à celui du n° 71 on peut montrer que la donnée de l'équation $g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda = 0$ et d'une forme linéaire suffit pour développer la théorie de la connexion de Weyl.

§ 5. Connexions symplectiques

76. Formes extérieures quadratiques. Soit U un ouvert connexe de l'espace $R^n(x^\varkappa)$ de dimension paire: $n = 2r$. Supposons que dans U soit donnée une forme extérieure quadratique

$$\Omega = \tfrac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda], \qquad a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0$$

de rang n:

$$[\Omega^r] \neq 0 \tag{1}$$

(vol. I, n° 21).

Nous savons que pour toute transformation admissible des coordonnées les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ se transforment comme les composantes d'un bivecteur covariant. Le déterminant $a = |a_{\varkappa\lambda}|$ étant différent de zéro en vertu de (1) posons

$$a^{\varkappa\lambda} = \partial \log a / \partial a_{\varkappa\lambda},$$

où les éléments $a_{\varkappa\lambda}$ doivent être regardées comme variables indépendantes. Il est facile de voir que les $a^{\varkappa\lambda}$ sont antisymétriques en leurs indices et qu'elles se transforment comme les composantes d'un bivecteur contravariant (vol. I, n° 35). Remarquons que les composantes $a_{\varkappa\lambda}$ et $a^{\varkappa\lambda}$ sont liées par les relations

$$a^{\varkappa\varrho}a_{\lambda\varrho} = \delta^\varkappa_\lambda, \tag{2}$$

d'où il résulte l'égalité

$$a^{\varkappa\varrho}a_{\varkappa\varrho} = n. \tag{3}$$

Supposons maintenant qu'en un point $x \in U$ soit donné un vecteur contravariant $(u^\varkappa)$ tangent à U. En posant

$$u_\varkappa = a_{\varrho\varkappa}u^\varrho \tag{4}$$

nous obtenons ainsi les composantes d'un vecteur covariant; de même les formules

$$v^\varkappa = a^{\varkappa\varrho}v_\varrho, \tag{5}$$

permettent de déduire d'un vecteur covariant tangent en x à U un vecteur contravariant. Il est facile de voir qu'en vertu des relations (2) le vecteur contravariant déduit du vecteur $(u_\varkappa)$, défini au moyen des formules (4), est identique avec le vecteur (u^ϱ). Ceci nous permet de regarder les grandeurs $u_\varkappa$ et u^ϱ, liées par les relations (4), comme composantes covariantes et contravariantes d'un même vecteur d'origine x. De même, si par exemple en x est donné un tenseur covariant $(a_{\varkappa\lambda\mu})$, les grandeurs

$$a_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = a^{\mu\varrho}a_{\varkappa\lambda\varrho} \quad \text{et} \quad a_\varkappa^{\lambda\mu} = a^{\lambda\varrho}a^{\mu\sigma}a_{\varkappa\varrho\sigma}$$

seront considérées comme les composantes mixtes d'un même tenseur du troisième degré; en particulier nous dirons que les $a_{\varkappa\lambda}$ et les $a^{\varkappa\lambda}$ sont les composantes d'un même bivecteur qui sera désigné par A. Ses composantes pouvant servir pour lever ou abaisser les indices des composantes d'un tenseur il jouera dans la suite un rôle analogue à celui que joue le tenseur symétrique $g_{\varkappa\lambda}$ dans la théorie des variétés riemanniennes. Les composantes de A étant antisymétriques il faut établir l'ordre des indices de sommations: nous convenons d'abaisser à l'aide du premier indice de $a_{\varkappa\lambda}$ et de lever à l'aide du second indice de $a^{\varkappa\lambda}$ (vol. I, n° 35).

La forme Ω restreinte à un point $x \in U$ peut être envisagée comme expression algébrique aux variables $dx^\varkappa$; nous pouvons donc la mettre sous la forme

$$\Omega = \tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\omega^\varkappa\omega^\lambda], \tag{6}$$

où les $I_{\varkappa\lambda}$ désignent des constantes déterminées par les relations

$$I_{\varkappa\lambda} + I_{\lambda\varkappa} = 0, \qquad I_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda - \varkappa = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda - \varkappa| \neq r \end{cases} \tag{7}$$

(vol. I, n° 20) et les $\omega^\varkappa$ sont des formes différentielles linéaires indépendantes par rapport aux différentielles des coordonnées du point x; en vertu de (1) on aura donc

$$[\omega^1\omega^2\ldots\omega^n] \neq 0.$$

D'après les formules (7) l'équation (6) peut s'écrire aussi de la manière suivante:

$$\Omega = \sum_{h=1}^{r}[\omega^h\omega^{r+h}].$$

L'expression (6) de la forme Ω étant invariante pour les transformations du groupe symplectique $Sp(n)$ (vol. I, n° 38) il en résulte que les formes $\omega^\varkappa$ ne sont définies qu'à une transformation près de $Sp(n)$.

Imaginons maintenant en un point $x \in U$ un repère R_x, tangent à U, formé de n vecteurs contravariants I_λ choisis de manière qu'il soit

$$\omega^\varkappa[I_\lambda] = \delta^\varkappa_\lambda$$

et le repère dual R^*_x (n° 32). Les composantes du bivecteur A par rapport au repère R^*_x sont égales aux coefficients $I_{\varkappa\lambda}$ de la forme (6) et ses composantes par rapport à R_x sont égales aux nombres $I^{\varkappa\lambda}$ déterminés par les équations suivantes

$$(7') \qquad I^{\varkappa\lambda}+I^{\lambda\varkappa} = 0, \quad I^{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda-\varkappa = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda-\varkappa| \neq r \end{cases}$$

analogues aux relations (7) (vol. I, n° 36); remarquons que les équations (2) et (3) prendront maintenant la forme

$$(7'') \qquad I^{\varkappa\varrho}I_{\lambda\varrho} = \delta^\varkappa_\lambda, \quad I_{\varkappa\varrho}I^{\varkappa\varrho} = n.$$

A l'aide des composantes $I_{\varkappa\lambda}$ du bivecteur A on peut abaisser les indices des formes $\omega^\varkappa$ en posant

$$(8) \qquad \omega_\varkappa = I_{\varrho\varkappa}\omega^\varrho$$

ce qui permet de remplacer (6) par l'équation équivalente

$$\Omega = \tfrac{1}{2}I^{\varkappa\lambda}[\omega_\varkappa\omega_\lambda].$$

Deux vecteurs de composantes $X^\varkappa$ et $Y^\varkappa$ par rapport au repère R_x sont dits involutifs relativement à la forme Ω, s'ils vérifient l'équation

$$I_{\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda = 0.$$

La différentielle extérieure de la forme Ω est une forme différentielle du troisième degré

$$(9) \qquad \Omega = \frac{1}{3!}A_{\varkappa\lambda\mu}[\omega^\varkappa\omega^\lambda\omega^\mu]$$

dont les coefficients, antisymétriques en leurs indices, sont les composantes covariantes, par rapport au repère R_x, d'un trivecteur. En levant le troisième l'indice de ces composantes selon les formules

$$A^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\lambda} = I^{\nu\varrho}A_{\varkappa\lambda\varrho}$$

on en déduit les composantes covariantes d'un vecteur

$$(10) \qquad A_\varkappa = A^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\nu}$$

et la forme différentielle linéaire

$$(11) \qquad \omega = A_\varkappa\omega^\varkappa.$$

Introduisons maintenant les dérivées pfaffiennes $\partial_\lambda f$ d'une fonction différentiable f donnée dans U en posant

$$(12) \qquad df = \omega^\lambda\partial_\lambda f.$$

En différentiant extérieurement la forme (11) on trouve l'équation suivante

$$d\omega = \tfrac{1}{2}A_{\varkappa\lambda}[\omega^\varkappa\omega^\lambda]$$

dont les coefficients sont donnés par les formules

$$A_{\varkappa\lambda} = \partial_\lambda A_\varkappa - \partial_\varkappa A_\lambda.$$

Nous voyons ainsi qu'à la forme Ω sont liées intrinsèquement une forme linéaire et une forme quadratique; ces deux formes deviennent nulles, si la forme Ω est fermée ($d\Omega = 0$).

77. Forme extérieure quadratique conforme à une forme fermée. Supposons que dans l'ouvert U soit donnée une seconde forme extérieure quadratique Ω' de rang n; les formes Ω et Ω' seront dites conformes l'une à l'autre, s'il existe dans U une fonction h partout différente de zéro et telle qu'il soit

$$(13) \qquad \Omega' = h\Omega.$$

Nous nous proposons de trouver les conditions pour que la forme Ω soit conforme à une forme fermée. Supposons à cet effet qu'il soit $d\Omega' = 0$; en différentiant extérieurement l'équation (13) on trouve

$$(14) \qquad d\Omega + [\Omega\, d\log h] = 0.$$

Si l'on y remplace $d\Omega$ par son expression (9) et que l'on applique à $d\log h$ la formule (12), on trouve

$$\tfrac{1}{3!}A_{\varkappa\lambda\mu}[\omega^\varkappa\omega^\lambda\omega^\mu]+\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}\partial_\mu\log h[\omega^\varkappa\omega^\lambda\omega^\mu] = 0,$$

d'où il résulte l'équation suivante

$$I_{\varkappa\lambda}\partial_\mu\log h+I_{\lambda\mu}\partial_\varkappa\log h+I_{\mu\varkappa}\partial_\lambda\log h+A_{\varkappa\lambda\mu} = 0.$$

En la multipliant par $I^{\nu\mu}$ et en sommant par rapport à μ on obtient

$$I_{\varkappa\lambda}I^{\nu\mu}\partial_\mu\log h+I_{\lambda\mu}\partial_\varkappa\log h+I_{\mu\varkappa}\partial_\lambda\log h+A_{\varkappa\lambda\mu} = 0.$$

Si l'on pose $\nu = \lambda$ et que l'on somme par rapport à λ, on trouve en vertu de (7'') et (10)

$$(n-2)\partial_\varkappa\log h+A_\varkappa = 0$$

ce qui, d'après (11) et (12), conduit à l'équation

$$(15) \qquad \omega = -(n-2)\,d\log h;$$

il en résulte

$$d\omega = 0. \tag{16}$$

En portant l'expression $d\log h = -1/(n-2)\omega$ dans l'équation (14) on arrive à la relation

$$(n-2)d\Omega - [\Omega\omega] = 0 \tag{17}$$

qui en vertu de la formule (15) est équivalente à l'équation (14). Nous avons ainsi démontré le suivant

THÉORÈME 1. *Pour que la forme Ω soit conforme à une forme fermée, il faut et il suffit que la forme linéaire ω vérifie les équations* (16) *et* (17).

Si $n = 4$, l'équation (17) est identiquement vérifiée. En effet, les formules (10) prennent dans ce cas la forme

$$A_\varkappa = 2(A_{\varkappa 13} + A_{\varkappa 24})$$

et, par suite,

$$A_1 = 2A_{124}, \quad A_2 = 2A_{213}, \quad A_3 = 2A_{324}, \quad A_4 = 2A_{413}.$$

L'équation (11) devient alors

$$\omega = 2(A_{124}\omega^1 + A_{231}\omega^2 + A_{324}\omega^3 + A_{413}\omega^4)$$

et comme l'équation (6′) s'ecrit maintenant

$$\Omega = [\omega^1\omega^3] + [\omega^2\omega^4],$$

on aura

$$[\Omega\omega] = 2\{A_{124}[\omega^1\omega^2\omega^4] + A_{231}[\omega^2\omega^3\omega^1] + \\ + A_{324}[\omega^3\omega^2\omega^4] + A_{431}[\omega^4\omega^3\omega^1]\}$$

ou, en vertu de (9),

$$[\Omega\omega] = 2\,d\Omega;$$

cette relation étant pour $n = 4$ identique avec l'équation (17) nous voyons ainsi que l'équation (16) exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique régulière à quatre variables soit conforme à une forme fermée.

THÉORÈME 2. *Pour que la forme Ω à quatre variables soit conforme à une forme fermée, il faut et il suffit que la forme linéaire ω soit fermée.*

Les Théorèmes 1 et 2 sont dus à H.-Ch. Lee [33].

78. Connexions symplectiques à courbure nulle. Soit V^n une variété C^∞ de dimension paire: $n = 2r$. Supposons qu'à la variété V^n comme base puisse être attaché l'espace fibré tangent B dont le groupe de structure est le groupe symplectique $Sp(n)$ représenté par les transformations

$$\vec{I}_\varrho = a^\varkappa_\varrho(u)\vec{I}^u_\varkappa$$

d'un espace vectoriel E_n, u désignant un point de l'espace de $Sp(n)$. Les composantes relatives du repère mobile dans E_n ont été calculées au n° 48 sous deux formes équivalentes; en changeant les notations adoptées au n° 48 désignons ces composantes respectivement par π^α_μ et $\pi_{\varkappa\lambda}$; on aura alors

$$da^\alpha_\sigma = -a^\mu_\sigma\pi^\alpha_\mu, \quad \pi_{\varkappa\lambda} = -I_{\varkappa\beta}\pi^\beta_\lambda, \tag{1}$$

d'où il vient

$$\pi^\lambda_\mu = -b^\lambda_\sigma da^\sigma_\mu, \tag{2}$$

les coefficients b^λ_σ étant liés aux coefficients a^α_μ par les relations

$$a^\varkappa_\varrho b^\varrho_\lambda = a^\varrho_\lambda b^\varkappa_\varrho = \delta^\varkappa_\lambda; \tag{3}$$

rappelons que

$$\pi_{\varkappa\lambda} = \pi_{\lambda\varkappa}. \tag{4}$$

D'après le Théorème 1 du n° 53 l'espace fibré B peut être muni des connexions affines que nous appellerons connexions symplectiques. Donc, si $x \in V^n$, au point $b = (x, u)$ de l'espace B peuvent être formées n formes différentielles linéaires

$$\omega^\varrho = a^\varrho_\sigma(u)\Theta^\sigma, \tag{5}$$

où les Θ^σ désignent des formes pfaffiennes indépendantes définies dans un voisinage $U \subset V^n$, contenant le point x, et restreintes à ce point (n° 48, équ. (12)); en abbaissant dans l'équation (5) l'indice ϱ au moyen du bivecteur $I_{\varkappa\varrho}$ on obtient un second système des formes linéaires

$$\omega_\varkappa = I_{\varkappa\varrho}a^\varrho_\sigma\Theta^\sigma; \tag{6}$$

les deux systèmes $\{\omega^\varrho\}$ et $\{\omega_\varkappa\}$ sont définis dans tout l'espace B.

Pour obtenir les équations de structure d'une connexion symplectique différentions extérieurement les équations (6); il viendra

$$d\omega_\varkappa = I_{\varkappa\varrho}[da^\varrho_\sigma\Theta^\sigma] + I_{\varkappa\varrho}a^\varrho_\sigma d\Theta^\sigma.$$

Si l'on y tient compte de la première des équations (1) et que l'on exprime les formes Θ^σ et leurs différentielles $d\Theta^\sigma$ au moyen des formes ω^λ, ces équations seront ramenées à la forme suivante:

$$d\omega^\varkappa + I_{\varkappa\varrho}[\pi^\varrho_\mu \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\varrho} T^{\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu],$$

$$T^{\cdot\cdot\varrho}_{\lambda\mu} + T^{\cdot\cdot\varrho}_{\mu\lambda} = 0,$$

ce qui peut s'écrire de la manière suivante:

$$d\omega_\varkappa + [\pi_{\varkappa\mu}\omega^\mu] = \tfrac{1}{2} T_{\lambda\mu\varkappa}[\omega^\lambda \omega^\mu]; \tag{7}$$

si l'on multiplie cette équation par $I^{\nu\varkappa}$ et que l'on somme par rapport à $\varkappa$, on obtient

$$d\omega^\nu + [\pi^\nu_\mu \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu]. \tag{7'}$$

Les relations (7) et (7′) représentent deux formes équivalentes des équations de structure de la connexion envisagée dont la torsion est définie par ses composantes covariantes et mixtes $(T_{\lambda\mu\varkappa}, T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu})$.

D'après le raisonnement général fait au n° 56 la courbure de la connexion déterminée par les équations (7′) est nulle et, par suite, les composantes de sa torsion sont des invariants différentiels du premier ordre de l'espace fibré B; la nullité de la courbure peut d'ailleurs être vérifiée au moyen de la formule générale

$$\Omega^\varkappa_\mu = d\pi^\varkappa_\mu + [\pi^\varkappa_\varrho \pi^\varrho_\mu],$$

si l'on tient compte des équations (2) et (3).

79. Connexions symplectiques et les formes extérieures quadratiques. Considérons la forme extérieure quadratique

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}[\omega_\varkappa \omega_\lambda]; \tag{8}$$

les $\omega_\varkappa$ étant définies dans tout l'espace fibré B il en est de même de la forme Ω. Si dans (8) on remplace les formes $\omega_\varkappa$ et ω_λ par leurs expressions $\omega_\varkappa = I_{\varkappa\varrho} a^\varrho_\alpha \Theta^\alpha$ et $\omega_\lambda = I_{\lambda\sigma} a^\sigma_\beta \Theta^\beta$, tirées des équations (6), on trouve

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda} I_{\varkappa\varrho} I_{\lambda\sigma} a^\varrho_\alpha a^\sigma_\beta [\Theta^\alpha \Theta^\beta].$$

Eu égard à la relation $I^{\varkappa\lambda} I_{\varkappa\varrho} = \delta^\lambda_\varrho$ tirée de l'équation (7′) du n° 76 on ramène la dernière équation à la forme suivante:

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\varrho\sigma} a^\varrho_\alpha a^\sigma_\beta [\Theta^\alpha \Theta^\beta].$$

Or, d'après l'équation (26) du n° 48 on a

$$I_{\varrho\sigma} a^\varrho_\alpha a^\sigma_\beta = I_{\alpha\beta}$$

et par suite

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\alpha\beta}[\Theta^\alpha \Theta^\beta]. \tag{9}$$

On voit donc que, bien que les formes Θ^α sont données localement dans les voisinages d'un recouvrement de V^n, la forme (9) est définie dans toute cette variété. Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 1. *La variété V^n, de dimension paire, qui sert de base de l'espace fibré tangent, de groupe de structure $Sp(n)$, peut être douée d'une forme extérieure quadratique de rang n.*

Nous démontrerons maintenant la réciproque suivante de ce Théorème:

THÉORÈME 2. *Si une variété V^n $(n = 2r)$ de classe C^∞ est douée d'une forme extérieure quadratique Ω de rang n, sur V^n peut être construit un espace fibré tangent de groupe de structure $Sp(n)$.*

En effet, admettons que pour les repères naturels de la variété V^n soit donnée une forme

$$\Omega = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$$

de rang n; dans un voisinage quelconque U du recouvrement de V^n cette forme peut être représentée par l'expression

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\lambda}[\Theta^\varkappa \Theta^\lambda],$$

où les $\Theta^\varkappa$ désignent des formes linéaires indépendantes définies dans U. Supposons maintenant que la forme Ω restreinte à un point x commun à deux voisinages U_i, $U_j \subset V^n$ soit donnée par les expressions

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\lambda}[\Theta^\varkappa_i \Theta^\lambda_i] \quad \text{et} \quad \Omega = \tfrac{1}{2} I_{\alpha\beta}[\Theta^\alpha_j \Theta^\beta_j], \tag{10}$$

où $\{\Theta^\varkappa_i\}$ et $\{\Theta^\alpha_j\}$ sont deux systèmes des formes différentielles linéaires indépendantes données respectivement dans U_i et U_j et restreintes au point x. Nous pouvons donc poser

$$\Theta^\alpha_j = a^\alpha_{ji\varkappa}(x)\Theta^\varkappa_i, \qquad \Theta^\beta_j = a^\beta_{ji\lambda}(x)\Theta^\lambda_i$$

la matrice $[a^\alpha_{ji\varkappa}(x)]$ étant un élément du groupe $GL(n, R)$. En portant ces expressions dans la deuxième des équations (10) on trouve

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\alpha\beta} a^\alpha_{ji\varkappa}(x) a^\beta_{ji\lambda}(x)[\Theta^\varkappa_i \Theta^\lambda_i].$$

En comparant cette équation avec la première des équations (10) on obtient la relation

$$I_{\alpha\beta} a^\alpha_{ji\varkappa}(x) a^\beta_{ji\lambda}(x) = I_{\varkappa\lambda},$$

d'où il résulte que les éléments $a^\alpha_{ji\varkappa}(x)$ sont des coefficients d'une transformation $\gamma_{ji}(x)$ du groupe $Sp(n)$ (n° 48, équ. (26)); la transformation $\gamma_{ji}(x)$ satisfait évidemment aux relations (1) du n° 51, ce qui prouve que, conformément au Théorème à démontrer, sur V^n peut être établi un espace fibré tangent de groupe de structure $Sp(n)$. Si une variété

V^n peut être munie d'une forme extérieure quadratique régulière, nous dirons qu'elle est une variété symplectique.

La forme (8) étant liée intrinsèquement à l'espace fibré B tangent à la variété V^n il en est de même de sa différentielle extérieure que nous pouvons mettre sous la forme

$$d\Omega = \tfrac{1}{3!} A_{\varkappa\lambda\mu}[\omega^\varkappa \omega^\lambda \omega^\mu]; \tag{11}$$

par conséquent les coefficients $A_{\varkappa\lambda\mu}$, symétriques gauches en tous leurs indices, sont des invariants différentiels du premier ordre de l'espace B. Ces invariants peuvent être exprimés par les composantes $T_{\varkappa\lambda\mu}$ de torsion de la connexion symplectique définie dans le numéro précédent. Pour le faire voir différentions la forme (8); on aura

$$d\Omega = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}[d\omega_\varkappa \omega_\lambda] - \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}[\omega_\varkappa d\omega_\lambda]$$

ou

$$d\Omega = I^{\varkappa\lambda}[d\omega_\varkappa \omega_\lambda].$$

Si l'on y remplace la différentielle $d\omega_\varkappa$ par son expression (7), on trouve

$$d\Omega = -I^{\varkappa\lambda}[\pi_{\varkappa\mu}\omega^\mu \omega_\lambda] + \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda} T_{\nu\mu\varkappa}[\omega^\nu \omega^\mu \omega_\lambda];$$

en élévant l'indice de la forme ω_λ au moyen de $I^{\varkappa\lambda}$ on en déduit l'équation

$$d\Omega = [\pi_{\varkappa\mu}\omega^\mu \omega^\varkappa] + \tfrac{1}{2} T_{\nu\mu\varkappa}[\omega^\nu \omega^\mu \omega^\varkappa].$$

Les $\pi_{\varkappa\mu}$ étant, d'après (4), symétriques en leurs indices il en résulte finalement

$$d\Omega = \tfrac{1}{2} T_{\nu\mu\varkappa}[\omega^\nu \omega^\mu \omega^\varkappa].$$

Si l'on y remplace l'indice ν par λ et que l'on rapproche l'équation (11), on trouve

$$A_{\varkappa\lambda\mu} = T_{\varkappa\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\varkappa} + T_{\mu\varkappa\lambda}, \tag{12}$$

c'est ce que nous avions à montrer. Si la forme (8) est fermée ($A_{\varkappa\lambda\mu} = 0$), la relation (12) devient

$$T_{\varkappa\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\varkappa} + T_{\mu\varkappa\lambda} = 0. \tag{12'}$$

80. Connexions symplectiques distinguées. Au n° 78 nous avons déterminé la connexion symplectique sans courbure; pour obtenir l'ensemble des connexions symplectiques dans l'espace fibré B, on doit faire une substitution de la forme suivante:

$$\pi_{\varkappa\mu} = \omega_{\varkappa\mu} + l_{\varkappa\mu\lambda}\omega^\lambda,$$

où les $l_{\varkappa\mu\lambda}$ sont des fonctions arbitraires définies dans un voisinage du point $b = (x, u) \in B$ et vérifiant les conditions

$$l_{\varkappa\mu\lambda} = l_{\mu\varkappa\lambda}. \tag{13}$$

Les équations de structure des nouvelles connexions se déduisent des équations (7), si l'on fait sur les $\pi_{\varkappa\mu}$ la substitution ci-dessus; on obtient ainsi les équations

$$d\omega_\varkappa + [\omega_{\varkappa\mu}\omega^\mu] = \tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu\varkappa}[\omega^\lambda \omega^\mu \omega^\varkappa],$$

où

$$S_{\lambda\mu\varkappa} = T_{\lambda\mu\varkappa} + l_{\varkappa\lambda\mu} - l_{\varkappa\mu\lambda}. \tag{14}$$

Les composantes $S_{\lambda\mu\varkappa}$ de la torsion des connexions envisagées vérifient évidemment les équations

$$S_{\lambda\mu\varkappa} + S_{\mu\lambda\varkappa} = 0.$$

Or nous nous proposons de déterminer les $l_{\varkappa\mu\lambda}$ de manière que le plus grand nombre possible des composantes $S_{\lambda\mu\varkappa}$ s'annule. Considérons pour ce but le système des équations linéaires

$$l_{\varkappa\lambda\mu} - l_{\varkappa\mu\lambda} = T_{\mu\lambda\varkappa} \tag{15}$$

aux inconnues $l_{\varkappa\lambda\mu}$ et introduisons des inconnues auxiliaires en posant

$$l_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} T_{\mu\lambda\varkappa} + a_{\varkappa\lambda\mu}. \tag{16}$$

D'après (15) il doit donc être

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\varkappa\mu\lambda} = 0 \tag{17}$$

et des équations (13) et (16) résultent d'autre part les relations

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\varkappa\mu} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\varkappa\lambda} + T_{\lambda\mu\varkappa}). \tag{18}$$

Les inconnues auxiliaires $a_{\varkappa\lambda\mu}$ doivent donc vérifier les deux systèmes des équations linéaires (17) et (18). Nous allons d'abord considérer le cas, où la variété V^n admet une forme extérieure quadratique fermée. Nous avons vu que dans ce cas les composantes $T_{\varkappa\lambda\mu}$ vérifient les relations (12'); par conséquent les équations (18) peuvent être remplacées par les suivantes

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\varkappa\mu} = -\tfrac{1}{2} T_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Comme en vertu de (17) les $a_{\varkappa\lambda\mu}$ sont symétriques en leurs deux derniers indices, les dernières équations peuvent s'écrire de la manière suivante

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\mu\varkappa} = -\tfrac{1}{2} T_{\varkappa\lambda\mu}.$$

En y permutant circulairement les indices $\varkappa, \lambda, \mu$ on obtient trois équations

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\mu\varkappa} = -\tfrac{1}{2} T_{\varkappa\lambda\mu},$$

$$a_{\lambda\mu\varkappa} - a_{\mu\varkappa\lambda} = -\tfrac{1}{2} T_{\lambda\mu\varkappa},$$

$$a_{\mu\varkappa\lambda} - a_{\varkappa\lambda\mu} = -\tfrac{1}{2} T_{\mu\varkappa\lambda}$$

à trois inconnues $a_{\varkappa\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\varkappa}$, $a_{\mu\varkappa\lambda}$. Ce système étant compatible en vertu de la relation (12′) on peut prendre arbitrairement l'une de ces trois inconnues, par exemple l'inconnue $a_{\varkappa\lambda\mu}$ et ensuite exprimer les deux autres inconnues $a_{\lambda\mu\varkappa}$ et $a_{\mu\varkappa\lambda}$ au moyen de $a_{\varkappa\lambda\mu}$. Les $a_{\varkappa\lambda\mu}$ étant symétriques en leurs deux derniers indices, toutes ces inconnues et, par suite, tous les coefficients (15) $l_{\varkappa\lambda\mu}$ seront donnés en fonction de $a_{\varkappa\lambda\mu}$. Nous voyons ainsi que, si la variété V^n admet une forme extérieure quadratique fermée, l'espace fibré tangent B de groupe de structure $Sp(n)$ peut être muni d'une connexion symplectique déterminée à courbure nulle et d'une infinité des connexions symplectiques à torsion nulle (*connexions distinguées*).

Considérons maintenant le cas, où la forme extérieure quadratique dont la variété V^n est douée n'est pas fermée ($d\Omega \neq 0$) et revenons aux équations (18). En tenant compte des équations (17) on peut les écrire comme il suit:

$$a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\mu\varkappa} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\lambda\varkappa} + T_{\lambda\mu\varkappa}).$$

En permutant circulairement les indices $\varkappa$, λ, μ on obtient un système des équations linéaires

$$(19)\qquad \begin{cases} a_{\varkappa\lambda\mu} - a_{\lambda\mu\varkappa} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\lambda\varkappa} + T_{\lambda\mu\varkappa}), \\ a_{\lambda\mu\varkappa} - a_{\mu\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(T_{\varkappa\mu\lambda} + T_{\mu\varkappa\lambda}), \\ a_{\mu\varkappa\lambda} - a_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(T_{\lambda\varkappa\mu} + T_{\varkappa\lambda\mu}). \end{cases}$$

En sommant ces équations on trouve $T_{\varkappa\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\varkappa} + T_{\mu\varkappa\lambda} = 0$ contrairement à l'hypothèse faite sur la forme Ω (v. l'équ. (12)). Les équations (19) n'étant pas compatibles on peut trouver des solutions qui vérifient deux seulement d'elles, par exemple la première et la troisième, d'où il suit que l'on ne peut pas déterminer les coefficients $l_{\varkappa\lambda\mu}$ de manière que toutes les composantes $S_{\varkappa\lambda\mu}$ définies par les équations (14) s'annulent. En résumé nous pouvons dire que, si la forme Ω dont la variété V^n est douée n'est pas fermée, l'espace fibré B ne peut pas être muni des connexions symplectiques distinguées à torsion nulle.

En résumant les considérations de ce numéro nous pouvons énoncer le suivant

THÉORÈME. *Si une variété V^n ($n = 2r$) est douée d'une forme quadratique régulière Ω ($[\Omega^r] \neq 0$), elle peut être munie d'une connexion symplectique à courbure nulle; si de plus, la forme Ω est fermée, elle admet aussi une infinité des connexions à torsion nulle.*

81. Sur une connexion qui est riemannienne et symplectique. On sait que les groupes O_n^+ et $Sp(n)$, où n est un nombre paire ($n = 2r$), ont en commun un sous-groupe de dimension r^2 (Vol. I, p. 113); nous

le désignerons par la notation Γ_{r^2}. Supposons que Γ_{r^2} soit le groupe de structure d'un espace fibré B tangent à une variété V^n de classe C^∞. En raisonnant de la même manière qu'au n° 78 et en se servant des notations qui y ont été adoptées nous pouvons munir l'espace B de n formes différentielles

$$\omega^\varkappa = a_\varrho^\varkappa \Theta^\varrho, \qquad [a_\varrho^\varkappa] \in \Gamma_{r^2}$$

construites à l'aide des repères duaux R_x et R_x^* tangents à V^n en un point x. Comme la matrice $[a_\varrho^\varkappa]$ est orthogonale et symplectique, nous pouvons douer l'espace B de deux formes quadratiques

$$(20)\qquad F = \delta_{\varkappa\lambda}\omega^\varkappa\omega^\lambda, \qquad \Omega = \tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\omega^\varkappa\omega^\lambda]$$

dont l'une est une forme ordinaire définie positive et l'autre symplectique. Pour les repères naturels de la variété V^n elles auront la forme

$$(20')\qquad F = g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda, \qquad \Omega = \tfrac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

Remarquons que ces deux formes, qui sont définies dans toute la variété V^n, peuvent aussi être introduites dans la variété qui sert de base de l'espace fibré tangent de groupe de structure $Sp(n)$; mais il y a une différence importante entre ces deux cas qui consiste en ce que les deux formes (20) sont invariantes pour les transformations du groupe Γ_{r^2} faites sur les formes $\omega^\varkappa$, pendant qu'il en est autrement, si $Sp(n)$ est le groupe de structure. Autrement dit dans le cas actuel la forme F est indépendante de la transformation de Γ_{r^2} que l'on fait sur les $\omega^\varkappa$ dans la forme Ω.

Posons maintenant

$$(21)\qquad \varphi_{\cdot\lambda}^\varkappa = I_{\varrho\lambda}\delta^{\varrho\varkappa};$$

les grandeurs $\varphi_{\cdot\lambda}^\varkappa$ sont les composantes mixtes par rapport aux repères R_x et R_x^* d'un tenseur défini dans tout l'espace B. Si l'on se sert des coordonnées locales dans un voisinage quelconque de V^n, elles auront la forme

$$\varphi_\lambda^\varkappa = a_{\varrho\lambda}g^{\varrho\varkappa};$$

nous voyons donc qu'elles sont définies pour tous les repères naturels de V^n.

Les équations (21) peuvent être écrites d'une façon plus simple

$$(22)\qquad \varphi_{\cdot\lambda}^\varkappa = I_{\varkappa\lambda}$$

d'où il résulte l'égalité

$$(23)\qquad \varphi_{\cdot\lambda}^\varkappa + \varphi_{\cdot\varkappa}^\lambda = 0.$$

Considérons maintenant l'expression $\varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\varrho}_{\cdot\lambda}$; en tenant compte des formules (22), on trouve

$$\varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\varrho}_{\cdot\lambda} = \sum_{\varrho=1}^{n} I_{\varkappa\varrho} I_{\varrho\lambda}$$

ou, comme les nombres $I_{\varkappa\varrho}$ et $I^{\varkappa\varrho}$ sont égaux,

$$\varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\varrho}_{\cdot\lambda} = I^{\varkappa\varrho} I_{\varrho\lambda}.$$

D'après la première des égalites (7'') on obtient finalement

$$\varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\varrho}_{\cdot\lambda} = -\delta^{\varkappa}_{\lambda}. \tag{24}$$

Le tenseur $(\varphi^{\varkappa}_{\cdot\lambda})$ permet de définir une transformation T dans l'espace vectoriel tangent en un point à la variété V^n; l'équation (23) s'exprimera alors par l'égalité $T^2 = -I$, où I désigne la transformation identique. Si une variété différentiable à un nombre paire de dimensions peut être munie d'un tenseur mixte vérifiant les équations (24), on dit qu'elle a une *structure presque complexe* (1); nous voyons ainsi que la variété V^n qui fait l'objet des considérations précédentes jouit de trois propriétés suivantes: elle est 1) riemannienne, 2) symplectique et 3) elle a une structure presque complexe.

La transformation T que nous avons définie ci-dessus conserve l'orthogonalité et l'involutivité des vecteurs tangents à V^n. En effet considérons deux vecteurs de composantes $X^{\varkappa}$ et $Y^{\varkappa}$ par rapport au repère R_x introduit au commencement de ce numéro et supposons qu'ils soient orthogonaux: $\sum_{\varkappa=1}^{n} X^{\varkappa} Y^{\varkappa} = 0$. En les transformant au moyen de T on trouve

$$'X^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho} X^{\varrho}, \qquad 'Y^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}_{\cdot\sigma} Y^{\sigma},$$

d'où il vient

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} {}'X^{\varkappa\prime} Y^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\varkappa}_{\sigma} X^{\varrho} Y^{\sigma}$$

ou, si l'on tient compte de la relation (23),

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} {}'X^{\varkappa\prime} Y^{\varkappa} = -\sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\sigma}_{\varkappa} X^{\varrho} Y^{\sigma}.$$

Comme, d'après (24), $\varphi^{\varkappa}_{\cdot\varrho}\varphi^{\sigma}_{\varkappa} = -\delta^{\sigma}_{\varrho}$, on aboutit à l'équation

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} {}'X^{\varkappa\prime} Y^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{n} X^{\varrho} Y^{\varrho}$$

ce qui démontre la proposition.

(1) V. par exemple [36].

Supposons maintenant que les vecteurs $(X^{\varkappa})$ et $(Y^{\varkappa})$ soient involutifs par rapport à la forme Ω défini par la deuxième des équations (20); on aura donc l'égalité

$$I_{\varkappa\lambda} X^{\varkappa} Y^{\lambda} = 0.$$

On démontre de la même manière que plus haut que, si l'on transforme ces vecteurs par T, on obtient l'égalité $I_{\varkappa\lambda}{}' X^{\varkappa\prime} Y^{\lambda} = 0$ ce qui prouve que les vecteurs transformés sont involutifs.

Dans la suite nous développerons la théorie des connexions de groupe de structure Γ_{r^2} en nous bornant au cas $n = 4$ $(r = 2)$. Le groupe Γ_4 admet quatre transformations infinitésimales que l'on peut présenter sous la forme (1)

$$X_{\mu} f = a^{\varkappa}_{\mu\lambda} x^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}},$$

où les coefficients $a^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} &a^1_{13} = 1, \quad a^2_{24} = 1, \quad a^3_{11} = -1, \quad a^4_{22} = -1, \\ &a^1_{32} = -1, \quad a^2_{31} = 1, \quad a^3_{34} = -1, \quad a^4_{33} = -1, \\ &a^1_{44} = 1, \quad a^2_{43} = 1, \quad a^3_{42} = -1, \quad a^4_{41} = -1, \end{aligned} \tag{25}$$

tous les autre étant nulles, c'est ce qu'on peut vérifier à l'aide des équations données au vol. I, p. 114. Supposons maintenant que sur une variété V^4 puisse être déterminé l'espace fibré tangent B de groupe de structure Γ_4. Cet espace peut donc être muni d'une connexion à courbure nulle dont les équations de structure ont la forme

$$d\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\nu\mu}[\tau^{\nu}\omega^{\mu}] = \tfrac{1}{2} T^{\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}],$$

où les τ^{ν} sont des formes différentielles linéaires définies dans l'espace du groupe Γ_4 (n° 53, équ. (14)).

En appliquant la méthode dont nous avons fait usage dans les considérations précédentes sur les connexions, remplaçons le τ^{ν} par les formes $\pi^{\nu} = \tau^{\nu} + l^{\nu}_{\lambda}\omega^{\nu}$; nous obtenons alors une nouvelle connexion dans l'espace B dont les équations de structure ont la forme

$$d\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\nu\mu}[\pi^{\nu}\omega^{\mu}] + \tfrac{1}{2} S^{\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}],$$

où

$$S^{\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = T^{\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} + a^{\varkappa}_{\nu\lambda} l^{\nu}_{\mu} - a^{\varkappa}_{\nu\mu} l^{\nu}_{\lambda}. \tag{26}$$

(1) Dans tout ce qui suit les indices grecs parcourent les valeurs 1, 2, 3, 4.

Nous nous proposons de déterminer l^ν_λ de façon que le plus grand nombre possible des composantes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ s'annulent. Nous formons pour ce but les équations

$$a^\varkappa_{\nu\mu} l^\nu_\lambda - a^\varkappa_{\nu\lambda} l^\nu_\mu = T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} \tag{27}$$

aux inconnues l^ν_λ. Le nombre des équations (27) est égal à 24 et celui des inconnues l^ν_λ est égal à 16. On obtient une solution de ce problème en posant

$$\begin{cases} l^1_1 = T_{31}^{\cdot\cdot 1}, \quad l^1_2 = T_{32}^{\cdot\cdot 1} + T_{43}^{\cdot\cdot 3} \quad l^1_3 = T_{31}^{\cdot\cdot 3}, \quad l^1_4 = T_{23}^{\cdot\cdot 3} + T_{34}^{\cdot\cdot 1}, \\ l^2_1 = T_{34}^{\cdot\cdot 4} + T_{41}^{\cdot\cdot 2}, \quad l^2_2 = T_{24}^{\cdot\cdot 2}, \quad l^2_3 = T_{43}^{\cdot\cdot 2} + T_{41}^{\cdot\cdot 4}, \quad l^2_4 = T_{42}^{\cdot\cdot 4}, \\ l^3_1 = T_{12}^{\cdot\cdot 1} = l^3_2 = T_{12}^{\cdot\cdot 2}, \quad l^3_3 = T_{34}^{\cdot\cdot 3}, \quad l^3_4 = T_{34}^{\cdot\cdot 4}, \\ l^4_1 = T_{41}^{\cdot\cdot 1}, \quad l^4_2 = T_{23}^{\cdot\cdot 2}, \quad l^4_3 = T_{23}^{\cdot\cdot 3}, \quad l^4_4 = T_{41}^{\cdot\cdot 4}. \end{cases} \tag{28}$$

Ces valeurs des inconnues l^ν_λ annulent, en vertu de (25), seize des composantes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ et elles permettent d'exprimer les huit autres par les grandeurs $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$; si on les porte dans les formules $\pi^\nu = \tau^\nu + l^\nu_\lambda \omega^\nu$ on obtient une connexion distinguée définie dans l'espace B, dont la courbure et la torsion sons déterminées par les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$.

Les formules (28) donnent ainsi une solution du problème d'annuler le plus grand nombre possible des composantes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$; on obtient une autre solution, si dans (28) on remplace les valeurs de l^1_2, l^1_4, l^2_1 et l^2_3 par les suivantes:

$$l^2_1 = T_{23}^{\cdot\cdot 2} + T_{12}^{\cdot\cdot 4}, \quad l^1_4 = T_{12}^{\cdot\cdot 1} + T_{42}^{\cdot\cdot 3}, \quad l^2_1 = T_{23}^{\cdot\cdot 2} + T_{12}^{\cdot\cdot 4}, \quad l^2_3 = T_{32}^{\cdot\cdot 4} + T_{21}^{\cdot\cdot 2}.$$

Nous voyons ainsi qu'une variété qui est riemannienne et symplectique peut être munie de deux connexions distinguées bien déterminées.

CHAPITRE VI

PSEUDO-GROUPES CONTINUS INFINIS

Ce chapitre constitue une exposition de la théorie des pseudo-groupes de transformations continus et infinis édifiée par E. Cartan. En me bornant, pour simplifier, aux pseudo-groupes transitifs dont les équations de définition de Lie sont du premier ordre je déduis des équations de Lie les équations de définition de Cartan qui forment un système de Pfaff en involution. Je développe ensuite les équations de structure des pseudo-groupes envisagés et les systèmes de leurs constantes de structure. La rectification d'une faute de calcul dans les équations de Cartan m'a permis d'améliorer un peu l'exposé et de montrer que tous les coefficients qui figurent dans les équations (24)-(27) du n° 86 ont des valeurs constantes. Je montre ensuite le rôle important que joue dans la théorie des pseudo-groupes continus infinis un groupe linéaire appelé le groupe de structure d'un pseudo-groupe infini. Le § 2 contient quelques indications sur les pseudo-groupes d'ordres supérieurs et les pseudo-groupes intransitifs. Dans le § 3 j'expose les fondements de la théorie des groupes continus infinis abstraits, indépendante de la théorie des pseudo-groupes de transformations.

§1. Pseudo-groupes transitifs d'ordre un

82. Définition. Soit E un ouvert connexe de $R^n(x^\varkappa)$ et F_1 un ouvert connexe de $R^{m_1}(u_1^{h_1})$ (1). Supposons que sur E soit donné un système des équations aux dérivées partielles du premier ordre, tel que dans le produit $U \times \overline{U}$ des voisinages de deux points arbitraires $x^\varkappa$ et $\overline{x}^\varkappa$ de E il soit représenté par les équations de la forme

$$\frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda} = \Psi^\varkappa_\lambda(x, \overline{x}, u_1), \tag{D}$$

où les arguments $u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{m_1}$ $(0 \leqslant m_1 < n^2)$ désignent un ensemble des dérivées partielles du premier ordre des inconnues $\overline{x}^\varkappa$.

Nous admettons que les équations (D) jouissent des propriétés suivantes:

1° $\Psi^\varkappa_\lambda$ sont des fonctions analytiques dans l'ensemble $U \times \overline{U} \times F_1$ telles qu'il soit $|\Psi^\varkappa_\lambda| \neq 0$ et que le rang de la matrice $[\partial\psi^\varkappa_\lambda / \partial u_1^{h_1}]$ soit égal à m_1.

---

(1) Dans tout ce chapitre les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et les indices latins h_r, i_r, j_r les valeurs $1, 2, \ldots, m_r$. Les symboles $f(x)$, $f(x, \overline{x}, u_1)$ désignent respectivement fonctions des variables $x^\varkappa$ et de $x^\varkappa, \overline{x}^\varkappa, u_1^{h_1}$.