où $\omega^h$ désigne ici ce que devient l'expression $\eta^h_\varrho \dfrac{dx^\varrho}{dt}$ déduite de l'équation (5) du n° 32, si l'on y remplace les coordonnées locales par leurs fonctions de $t$.

Un arc $L$

$$x(s), \quad s_1 < s < s_2,$$

de classe $C^1$ de la variété parallélisable s'appelle *autoparallèle*, si le paramètre $s$ peut être choisi de telle manière que les vecteurs tangents à $L$, de composantes naturelles $dx^\varrho/ds$, soient parallèles. Il résulte de la définition du parallélisme donnée au commencement de ce numéro que les composantes $c^h$ de ces vecteurs par rapport aux repères $R_x$ doivent être constantes tout le long de $L$; ces constantes déterminent en chaque point la direction de l'arc. Comme les composantes naturelles en un point $x$ d'un vecteur $\{c^h\}$ sont égales aux expressions $c^h \xi^\varrho_h$, l'arc autoparallèle doit satisfaire aux équations suivantes:

$$\frac{dx^\varrho}{ds} = c^h \xi^\varrho_h. \tag{5}$$

La forme de ces équations reste inaltérée, si l'on fait sur le paramètre $s$ la substitution linéaire $\bar{s} = as + b$ et que l'on change convenablement les constantes $c^h$. Remarquons aussi qu'à chaque choix de $n$ constantes $c^h$ non toutes nulles correspond un système de la forme (5). Il s'ensuit que par tout point de la variété parallélisable part, dans chaque direction, un et un seul arc autoparallèle.

Les équations (5) des autoparallèles peuvent être écrites d'une manière plus simple; en multipliant leurs deux membres par $\eta^h_\varrho$ et en sommant par rapport à $\varrho$ il vient d'après les équations (4) du n° 32

$$\eta^h_\varrho \frac{dx^\varrho}{ds} = c^h.$$

En posant encore

$$\omega^h \left[\frac{dx^\varrho}{ds}\right] = \eta^h_\varrho \frac{dx^\varrho}{ds}$$

on obtient enfin

$$\omega^h \left[\frac{dx^\varrho}{ds}\right] = c^h. \tag{5'}$$

---

CHAPITRE IV

# CONNEXIONS AFFINES

La notion de connexion a été introduite presque simultanément par T. Levi-Civita (1917) et J. A. Schouten (1918). Depuis lors elle a reçu d'importantes généralisations dont l'étude était l'objet de recherche de nombreux géomètres. Pour les renseignements bibliographiques sur ce sujet nous renvoyons le lecteur au livre de J. A. Schouten ([40], p. 123).

Le progrès le plus important dans la théorie des connexions est dû à E. Cartan qui a appliqué à leur étude la méthode du repère mobile introduite par G. Darboux dans la théorie des courbes et surfaces de l'espace ordinaire. Or, Cartan en se servant des formes différentielles extérieures a montré que les équations que vérifient les composantes d'un mouvement infinitésimal du trièdre de Darboux sont au fond identiques avec les équations de structure du groupe des déplacements euclidiens. Cela a lui suggéré l'idée très féconde d'attacher à un groupe quelconque de Lie le mouvement d'un repère convenablement défini et de montrer qu'à chaque groupe $G$ correspond une connexion dont la structure est déterminée par $G$ (cf. [12]). Il a prouvé que de ce point de vue peuvent être envisagées, d'une façon uniforme, toutes les connexions déjà connues et que, de plus, sa méthode permet d'imaginer des nouvelles intéressantes connexions. Il a ensuite montré que le Programme d'Erlangen de Klein peut être étendu de manière que, outre les espaces de Klein, il englobe ceux des connexions basées sur les groupes de Lie.

Dans les deux dernières dizaines d'années la théorie de Cartan a été perfectionnée grâce à l'application des notions et méthodes de la théorie des espaces fibrés ce qui a permis en particulier de développer la théorie globale des variétés munies d'une connexion et de poser de nouveaux importants problèmes (1).

Le présent Chapitre a pour objet principal une exposition de la théorie des connexions que j'appelle *connexions affines* et dont le groupe de structure est un sous-groupe quelconque du groupe $GL(n, R)$. Il est divisé en trois paragraphes dont les deux premiers, qui servent d'introduction au troisième, contiennent les notions et les théorèmes de la théorie des groupes de Lie qui sont nécessaires pour exposer une théorie des connexions affines. Le premier d'eux contient une exposition des principes de la théorie des groupes continus et finis; le second est consacré aux groupes de Lie qui sont des sous-groupes du groupe linéaire général. J'introduis en particulier dans ce paragraphe le repère mobile dans l'espace vectoriel basé sur un sous-groupe $\Gamma$ du groupe $GL(n, R)$, les composantes relatives du mouvement de ce repère et les transformations infinitésimales de $\Gamma$. Je montre ensuite qu'avec le groupe $\Gamma$ peut être liée intrinsèquement une suite des groupes linéaires; ces groupes, appelés les *groupes associés à* $\Gamma$, jouent un rôle important dans la théorie des groupes continus infinis.

Le troisième paragraphe est consacré à la théorie des connexions affines que l'on définit dans l'espace fibré principal $B$ dont le groupe de structure est un sous-

(1) V. sur ce sujet l'intéressant article de S.S. Chern, *Some new viewpoints in differential geometry in the large,* Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 1-30.

-groupe $\Gamma$ de $GL(n, R)$. Je montre que cet espace peut être muni d'une connexion à courbure nulle de laquelle on peut déduire une infinité d'autres connexions et en particulier une connexion à torsion nulle. Je développe en suite les propriétés de ces connexions et je montre enfin que sur l'espace $B$ peut être construite une suite des espaces fibrés dont chacun sert de base pour le suivant et dont les groupes de structure sont les groupes associés à $\Gamma$.

De la théorie exposée dans ce Chapitre, en spécialisant le groupe $\Gamma$, on déduira dans les chapitres suivants les théories des connexions dont les groupes de structure sont les groupes linéaires classiques.

## § 1. Groupes finis de Lie

**36. Définition.** Une variété analytique $G$, de $n$ dimensions, est dite *l'espace d'un groupe fini abstrait de Lie*, ou tout court *le groupe de Lie*, si elle est douée des propriétés suivantes:

1° Á chaque paire ordonné de ses points $a$ et $b$, appelés dans la suite *éléments* de $G$, correspond un élément $c = ab$ dit leur *produit*; on suppose que $c$ est une fonction analytique de chacun de ses facteurs.

2° Le produit des éléments de $G$ est associatif; on a donc

$$(ab)c = a(bc), \qquad \text{si} \qquad a, b, c \in G.$$

3° Il existe un élément $e \in G$, appelé *unité* de $G$, tel qu'il soit

$$ae = ea = a$$

pour tout $a \in G$.

4° Il existe pour tout $a \in G$ un élément $a^{-1}$, appelé *l'inverse* de $a$, qui satisfait aux relations

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e;$$

l'inverse $a^{-1}$ est une fonction analytique de $a$.

Il résulte de ces hypothèses que, si l'on se donne deux éléments arbitraires $a, b \in G$, il existe deux éléments détérminés $c$ et $c'$ tels qu'il soit $a = cb$ et $c'a = b$, $c = ab^{-1}$, $c' = ba^{-1}$.

Deux groupes de Lie sont dits *isomorphes*, si l'on peut établir entre leurs éléments une correspondance biunivoque de manière que si trois éléments $a, b, c$ de l'un d'eux satisfont à la relation $ab = c$, les éléments $a', b', c'$ qui leur correspondent dans le second satisfont à $a'b' = c'$.

Un groupe de Lie est dit *connexe* ou *mixte* suivant que son espace est connexe ou composé d'un nombre fini ou dénombrable de variétés connexes; nous ne considérons dans la suite que des groupes connexes.

Un groupe de Lie est dit *compact* ou *ouvert* suivant que son espace est compact ou ouvert.

**37. Représentations d'un groupe abstrait.** Soit $g$ un élément de $G$ choisi d'ailleurs arbitrairement. La formule $\bar{a} = ga$, qui fait correspon-



dre à chaque élément $a \in G$ un autre élément déterminé $\bar{a} \in G$, définit une transformation analytique $S_g$ agissant sur $G$. Il est facile de voir que cette transformation satisfait aux relations suivantes:

$$S_{g_2} S_{g_1} = S_{g_2 g_1}, \qquad S_{g^{-1}} S_g = S_g S_{g^{-1}} = S_e \qquad (g, g_1, g_2 \in G);$$

$S_{g^{-1}}$, qui est l'inverse de $S_g$, sera désigné dans la suite par $S_g^{-1}$.

On voit donc sur ces équations que, si $g$ parcourt $G$, les $S_g$ forment un groupe $G_1$ agissant transitivement sur $G$; on dit que $G_1$ est une *représentation fidèle* du groupe abstrait $G$. A l'élément unité $e$ de $G$ correspond la transformation identique de $G_1$. Aux transformations de $G_1$ on a donné le nom de *translations de gauche* des points de l'espace $G$.

De même la formule $\bar{a} = ag$ $(a, \bar{a} \in G)$, où $g$ est un élément déterminé de $G$, représente une transformation de l'espace de $G$, opérant de droite sur ses points. Si $g$ parcourt tout l'espace du groupe, les opérations ainsi obtenues forment une seconde représentation $G_2$ du groupe abstrait dont les transformations agissent de droite sur les points de $G$ (*translations de droite*).

La notion de la représentation d'un groupe abstrait de Lie peut être généralisée de la manière suivante.

Soit $\Gamma$ un ensemble de transformations analytiques regulières de l'espace numérique $E$ à $N$ dimensions tel qu'il y ait une correspondence biunivoque entre les éléments de $\Gamma$ et les points de $G$. Si la transformation $S_g \in \Gamma$ correspondant au point $g \in G$ est une fonction analytique de $g$, si elle satisfait à la condition $S_{g_1} S_{g_2} = S_{g_1 g_2}$ $(g_1, g_2 \in G)$ et si de plus $S_e$ est une transformation identique, on dit que $\Gamma$ est une *représentation fidèle* du groupe abstrait $G$ et que les coordonnées locales de $g$ sont les *paramètres* de la transformation $S_g$.

Dans la théorie de S. Lie les deux représentations particulières $G_1$ et $G_2$, définies plus haut, portent les noms du *premier* et du *second groupe* des paramètres du groupe $G$ ([12], p. 92).

**38. Propriétés de l'espace d'un groupe abstrait fini.** Considérons dans l'espace d'un groupe fini $G$ un voisinage $U_e$ de l'identité $e$ et désignons par $R_e$ un repère de l'espace affine tangent à $G$ en $e$, formé de $e$ et de $n$ vecteurs contravariants $\vec{I}_h^e$. Soit $S_g$ $(g \in G)$ une transformation du groupe $G_1$ (n° 37) appliquant $U_e$ sur un voisinage $U_g$ du point $g$; cette transformation fait correspondre au repère $R_e$ un repère $R_g$ formé de $n$ vecteurs $\vec{I}_h$ tangents à $G$ au point $g$. Ce point pouvant être pris arbitrairement on obtient ainsi sur $G$ $n$ champs de vecteurs contravariants indépendants. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant (cf. n° 33):

THÉORÈME 1. *L'espace d'un groupe fini de Lie est une variété analytique parallélisable.*

Remarquons aussi que, si l'on oriente le repère $R_e$ en rangeant ses vecteurs dans un ordre déterminé, on obtient par l'intermédiaire de $S_g$ des repères orientés en tous les points de $G$; il en résulte le

THÉORÈME 2. *L'espace d'un groupe fini de Lie est une variété orientable.*

Soit $U$ un voisinage et $a$ un élément de $G$; nous désignerons par $aU$ l'ensemble de tous les produits $ab$, où $b \in U$. D'un voisinage quelconque $U_e$ de l'unité de $G$ on obtient ainsi un voisinage $U_a = aU_e$ du point $a$.

Ceci posé nous allons montrer qu'un point arbitraire $a \in G$ peut être mis sous la forme $a = e_1 e_2 \ldots e_r$ du produit d'un nombre fini d'éléments de $U_e$ qui s'appellent ses *générateurs*.

En effet, soit $g$ un élément arbitraire de $G$; nous le joignons à l'élément $e$ par un chemin continu $C$: $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tel qu'il soit $x(0) = e$, $x(1) = g$. Supposons que tous les points de $C$ ne puissent pas être exprimés par le produit d'un nombre fini d'éléments de $U_e$ et désignons par $t_0$ la borne inférieure des valeurs de $t$ correspondant aux points de $C$ qui ne jouissent pas de cette propriété. Considérons le voisinage $a_0 U_e$, où $a_0 = x(t_0)$ et imaginons un points $a' = x(t')$ $(t' > t_0)$ de $C$; si $t'$ est suffisamment voisin de $t_0$, le point $a'$ appartient à $a_0 U_e$. Il est donc égal au produit de $a_0$ et d'un élément de $U_e$; si le point $a_0$ puisse être mis sous la forme du produit d'un nombre $r$ des éléments de $U_e$, le point $a'$ serait égal au produit de $r+1$ éléments de $U_e$, contrairement à l'hypothèse faite sur $t_0$. Il s'en suit que le point $a_0$ n'a pas des générateurs dans $U_e$.

Considérons maintenant une valeur $t'' < t_0$ telle que le point $a'' = x(t'')$ de $C$ appartienne à $a_0 U_e$. Il peut donc être mis sous la forme $a'' = a_0 e_1$ $(e_1 \in U_e)$; il en résulte l'égalité $a_0 = a'' e_1^{-1}$. Nous pouvons choisir $t''$ de telle manière que le point $a''$ soit si voisin de $a_0$ qu'on le veut et que par suite $e_1$ soit voisin de l'unité $e$ de sorte que $e_1^{-1}$ appartienne à $U_e$. Comme $a''$ admet par hypothèse un système fini de générateurs dans $U_e$, il en serait de même de $a_0 = a'' e_1^{-1}$. Ceci étant contraire à ce que nous avons montré plus haut sur le point $a_0$ il en résulte que tous les points de $C$ s'obtiennent en multipliant un nombre fini d'éléments de $U_e$.

THÉORÈME 3. *Les éléments d'un voisinage quelconque de l'unité de $G$ sont les générateurs de tout le groupe.*

Remarque. Ce théorème, avec des changements convenables est valable pour toute représentation fidèle du groupe abstrait $G$ (nº 37).

**39. Structure d'un groupe fini.** Soit $U_e$ un voisinage quelconque de l'unité $e$ de $G$ et $R_e$ un repère tangent en $e$ à $G$. Nous avons montré au nº 38 qu'en agissant sur $U_e$ de gauche au moyen d'un élément $g \in G$ on obtient un voisinage $U_g = gU_e$ de $g$ et un système $\{\vec{I}_h\}$ composé de $n$ vecteurs contravariants tangents à $G$ en $g$. Au système $\{\vec{I}_h\}$ est associé



un système $\{\omega^h\}$ de $n$ formes pfaffiennes indépendantes telles qu'il soit

$$\omega^h(\vec{I}_i) = \delta_i^h \tag{1}$$

(v. nº 32, équ. (7)). En changeant $g$ on obtient ainsi sur toute la variété $G$ un champs $F_1$ des systèmes $\{\vec{I}_h\}$ et un champs $F_2$ des systèmes $\{\omega^h\}$. Ce deux champs étant déduits des vecteurs du repère tangent $R_e$, qui peut être pris arbitrairement, ils ne sont définis qu'à une substitution régulière à coefficients constants faite sur les vecteurs $\vec{I}_h$.

Si l'on fait sur $U_g$ une transformation $S_{\bar{g}}$ du groupe $G_1$, on en déduit un voisinage du point $\bar{g}g$ et les systèmes des formes pfaffiennes et des vecteurs attachés à $\bar{g}g$. Comme ces deux systèmes peuvent être obtenus des formes et des vecteurs attachés à $e$ par la transformation $S_{\bar{g}g}$, on voit que $F_1$ et $F_2$ s'obtiennent par les translations de gauche des systèmes attachés à un point arbitraire, autrement dit les deux champs $F_1$ et $F_2$ sont invariants pour les translations de gauche.

Si l'on suppose que le voisinage $U_g$ soit muni d'un système des coordonées locales $x^\varkappa$, les $\omega^h$ attachés à un point $x \in U_g$ prendront la forme des formes pfaffiennes en les variables $x^\varkappa$. Soit $(\bar{x}^\varkappa)$ un autre point quelconque de $U_g$; les formes différentielles attachées à $\bar{x}$ s'obtiennent des formes $\omega^h$ en y remplaçant les variables $x^\varkappa$ par $\bar{x}^\varkappa$. Nous les désignerons par $\bar{\omega}^h$. Or il existe une et une seule transformation du premier groupe des paramètres $G_1$ qui applique $x$ sur $\bar{x}$ en transformant en même temps un voisinage de $x$ sur un voisinage de $\bar{x}$. Les transformations du groupe $G_1$ qui permettent obtenir du point $x$ un point arbitraire $\bar{x} \in U_g$ sont donc définies par le système des équations pfaffiennes

$$\bar{\omega}^h = \omega^h. \tag{2}$$

Différentions extérieurement ces équations pour obtenir un système fermé. Comme les formes $\omega^h$ sont linéairement indépendantes, leurs différentielles extérieures peuvent être présentées sous la forme suivante (*équations de structure* de $G$):

$$d\omega^h = \tfrac{1}{2} c_{ij}^{\cdot\cdot h} [\omega^i \omega^j], \qquad c_{ij}^{\cdot\cdot h} + c_{ji}^{\cdot\cdot h} = 0; \tag{3}$$

on aura de même $d\bar{\omega}^h = \frac{1}{2} \bar{c}_{ij}^{\cdot\cdot h} [\bar{\omega}^i \bar{\omega}^j]$, les coefficients $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ et $\bar{c}_{ij}^{\cdot\cdot h}$ étant les mêmes fonctions respectivement des variables $x^\varkappa$ et $\bar{x}^\varkappa$. En fermant le système des équations (2) on obtient donc les relations suivantes:

$$\bar{c}_{ij}^{\cdot\cdot h} [\bar{\omega}^i \bar{\omega}^j] = c_{ij}^{\cdot\cdot h} [\omega^i \omega^j].$$

Il en résulte en vertu des équations (2) qu'il doit être

$$\bar{c}_{ij}^{\cdot\cdot h} = c_{ij}^{\cdot\cdot h}$$

et que par conséquent, le groupe $G_1$ agissant transitivement sur $G$, les coefficients $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ ont des valeurs constantes; on a leur donné le nom de *coefficients de structure* du groupe $G$.

En différentiant extérieurement les équations (3) on trouve

$$c_{ij}^{\cdot\cdot h}[d\omega^i\omega^j] = 0,$$

ou, si l'on y remplace les différentielles $d\omega^i$ par leurs expressions $\frac{1}{2}c_{kl}^{\cdot\cdot i}[\omega^k\omega^l]$ tirées des formules (3),

$$c_{ij}^{\cdot\cdot h}c_{kl}^{\cdot\cdot i}[\omega^k\omega^i\omega^j] = 0.$$

Les formes $\omega^h$ étant indépendantes il s'en suit que les coefficients $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ doivent satisfaire aux relations quadratiques

$$c_{ij}^{\cdot\cdot h}c_{kl}^{\cdot\cdot i} + c_{ik}^{\cdot\cdot h}c_{lj}^{\cdot\cdot i} + c_{il}^{\cdot\cdot h}c_{jk}^{\cdot\cdot i} = 0. \tag{4}$$

Envisageons en particulier le voisinage $U_e$; il résulte de ce qui précède que le système des équations (2) est complètement intégrable dans le produit cartésien des voisinages convenablement choisis de deux points arbitraires $x, \overline{x} \in U_e$. Il admet donc une et une seule variété intégrale passant par ces points et représentant la transformation du groupe $G_1$ qui applique le point $x$ sur le point $\overline{x}$ (nº 8). Ce système définit donc un ensemble des transformations de $G_1$ dans un voisinage de la transformation identique $\varepsilon$ ($\overline{x}^\varkappa = x^\varkappa$) du groupe $G_1$. Nous dirons que cet ensemble forme un *morceau* $G_\varepsilon$ du groupe $G_1$. Comme les groupes $G$ et $G_1$ sont isomorphes (*n*º 37), nous pouvons dire, en appliquant le Théorème 1 du nº 38, que les transformations du morceau $G_\varepsilon$, déterminées par les équations (2) dans le voisinage $U_e$ sont les générateurs du groupe $G_1$; ceci veut dire que l'on obtient l'ensemble des transformations de $G_1$ en formant les produits dont chacun est composé d'un nombre fini des transformations du morceau $G_\varepsilon$. Nous exprimons ce résultat sous la forme suivante:

Théorème 4. *Le premier groupe des paramètres du groupe fini de Lie $G$ est caractérisé par la propriété de laisser invariantes les formes $\omega^h$.*

Dans les raisonnements suivants les champs des formes $\omega^h$ et les champs des vecteurs $\vec{I}_h$ seront dits *invariants de gauche*.

Aux équations (2) on a donné le nom *d'équations de définition* du groupe $G$. Remarquons que ce système de Pfaff est équivalent au système des équations aux dérivées partielles du premier ordre aux inconnues $\overline{x}^\varkappa$ et aux variables indépendantes $x^\lambda$. Si l'on pose

$$\omega^h = a_\varrho^h(x)\,dx^\varrho, \tag{5}$$



les équations (2) prendront la forme

$$a_\varrho^h(\overline{x})\,d\overline{x}^\varrho = a_\sigma^h(x)\,dx^\sigma,$$

d'où l'on obtient les équations aux dérivées partielles

$$a_\varrho^h(\overline{x})\frac{\partial\overline{x}^\varrho}{\partial x^\sigma} = a_\sigma^h(x). \tag{6}$$

Les raisonnements précédents peuvent être résumés de la manière suivante. Dans l'espace d'un groupe fini $G$, de dimension $n$, il existe un champs $F_1$ des systèmes $\{\vec{I}_h\}$ et un champs lui associé $F_2$ des systèmes $\{\omega^h\}$, les deux champs étant invariantes de gauche. Les formes $\omega^h$ satisfont aux équations de structure (3) dont les coefficients $c_{ij}^{\cdot\cdot h} = -c_{ji}^{\cdot\cdot h}$ (constantes de structure) sont assujettis aux relations (4). Les transformations du premier groupe des paramètres $G_1$ du groupe $G$ dans un voisinage de sa transformation identique s'obtiennent comme les intégrales du système pfaffien complètement intégrable (2), défini en coordonnées locales d'un voisinage de l'élément $e$ du groupe $G$; en faisant les produits finis de ces transformations on en déduit tout le groupe $G_1$.

Nous avons construit le champs $\{\vec{I}_h\}$ et le champs $\{\omega^h\}$ en partant d'un repère arbitraire $R_e$ tangent à $G$ en $e$; si l'on remplace $R_e$ par un autre repère tangent en $e$, les vecteurs $\vec{I}_h$ seront assujettis à une substitution linéaire régulière à coefficients constants et les formes $\omega^h$ à son inverse. On obtient ainsi dans $G$ des expressions de la forme $c_h\omega^h$ ($c_h$ const.) invariantes de gauche. Nous allons montrer que ce sont dans $G$ les seules formes pfaffiennes invariantes de gauche.

En effet supposons que $\omega$ soit une forme différentielle linéaire invariante de gauche. Les formes $\omega^h$ étant indépendantes on peut poser

$$\omega = p_h(u)\,\omega^h, \quad u \in G.$$

Si l'on soumet le point $u$ à une translation de gauche en l'appliquant sur un point $\overline{u}$, cette relation prendra la forme suivante

$$\omega = p_h(\overline{u})\,\omega^h,$$

puisque $\omega$ et $\omega^h$ sont, par hypothèse, invariantes de gauche. Le rapprochement de deux dernières relations conduit à l'équation

$$\big(p_h(\overline{u}) - p_h(u)\big)\,\omega^h = 0,$$

d'où il résulte qu'il doit être $p_h(\overline{u}) = p_h(u)$. La translation de gauche agissant transitivement sur $G$ il en résulte que les coefficients $p_h$ ont des valeurs constantes. Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 5. *Toute forme pfaffienne dans $G$ invariante de gauche est une fonction linéaire à coefficients constants des formes $\omega^h$.*

**40. Algèbre d'un groupe fini de Lie.** En conservant les notations du nº 39 nous allons étudier de plus près les relations entre les deux systèmes duaux $\{\vec{I}_h\}$ et $\{\omega^h\}$ dont les éléments supposés définis dans un voisinage $U_g$ de $G$ sont liés par les relations (1).

Supposons que dans $U_g$ soit donnée une fonction analytique $f(x)$, $x \in U_g$, et rappelons qu'au vecteur $\vec{I}_h$ est associée la transformation infinitésimale $I_h f$ (nº 32). On aura alors selon la formule (8) du nº 32

$$df = \omega^h I_h f.$$

Aux éléments $\omega^h$ et $I_h f$ qui y entrent on peut appliquer les relations du nº 32 à condition de remplacer les équations (11) par les équations de structure (3) du nº 39 et les coefficients $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ par les constantes de structure $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$. Nous obtiendrons en particulier, d'après (14), la formule suivante

$$(I_i, I_j)f = -c_{ij}^{\cdot\cdot h} I_h f$$

pour la parenthèse de Poisson des transformations infinitésimales $I_i f$ et $I_j f$. En nous appuyant sur les raisonnements du nº 32 nous pouvons constater que dans l'espace vectoriel à $n$ dimensions formé par les vecteurs $\vec{I}_h$ du champs $F_1$ sur le corps des nombres réels peut être établie une algèbre dont la structure est déterminée par les relations

(7) $$\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j + c_{ij}^{\cdot\cdot h} \vec{I}_h = 0,$$

(8) $$\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j + \vec{I}_j \cdot \vec{I}_i = 0,$$

(9) $$(\vec{I}_i \vec{I}_j)\vec{I}_k + (\vec{I}_j \vec{I}_k)\vec{I}_i + (\vec{I}_k \vec{I}_i)\vec{I}_j = 0;$$

rappelons que les constantes $c_{ij}^{\cdot\cdot h} = -c_{ji}^{\cdot\cdot h}$ satisfont aux relations (4) du nº 39 qui peuvent d'ailleurs être obtenues directement des équations ci-dessus. Cette algèbre étant indépendante du choix du voisinage $U_g$ nous l'appellerons *algèbre du groupe fini $G$ de Lie.*

Observons maintenant que l'algèbre du groupe $G$, déterminée par les relations ci-dessus, définit la structure de $G$ au même titre que le champs $F_2$ des systèmes $\{\omega^h\}$ dont les éléments remplissent les équations (3); pour s'en convaincre il faudrait parcourir en sens inverse les raisonnements faits au nº 32. Nous voyons donc qu'il y a deux théories équivalentes de structure d'un groupe fini: la théorie de S. Lie basée sur le champs $F_1$ et la théorie d'E. Cartan basée sur le champs $F_2$. Pour faire voir que



l'équivalence est complète il faut encore montrer que la théorie de Lie jouit de la même propriété que la théorie de Cartan dont les équations de définition (2) ou (6) permettent d'obtenir les transformations du premier groupe de paramètres de $G$ dans un voisinage de sa transformation identique. Nous comblerons cette lacune dans le Ch. VII § 6, en nous servant de la dérivée de Lie.

**41. Sous-groupes.** Un groupe $\gamma$ dont tous les éléments appartiennent à un groupe fini abstrait $G$ porte le nom de son *sous-groupe.* Un sous-groupe de $G$ peut contenir une infinité ou un nombre fini d'éléments. Dans le premier cas il peut être continu ou discontinu; on peut démontrer ([10], p. 22) que, s'il est continu, il est un groupe de Lie.

Le sous-groupe $\gamma$ est dit *fermé dans $G$*, si tout élément d'accumulation dans $G$ d'un ensemble des éléments de $\gamma$ appartient à $\gamma$; dans le cas contraire il est dit *ouvert dans $G$.*

Soit $g$ un élément de $G$; l'élément $g' = aga^{-1}$, où $a \in G$, s'appelle le *transformé de $g$ par $a$.* Un sous-groupe $\gamma$ de $G$ est dit *invariant dans $G$*, si les transformations des éléments de $\gamma$ par les éléments de $G$ appartiennent à $\gamma$.

Nous nous bornerons à considérer les sous-groupes qui sont des groupes de Lie. Supposons donc qu'un sous-groupe $\gamma$ de $G$ soit un groupe de Lie; en désignant comme plus haut par la même lettre un groupe et son espace nous pouvons envisager $\gamma$ comme une sous-variété analytique, d'une dimension $m < n$, munie d'un recouvrement et plongée dans $G$. Soit $U'_e$ un voisinage quelconque du point-unité $e$ de ce recouvrement; nous pouvons le choisir de façon qu'il soit contenu dans un voisinage $U_e$ du recouvrement de $G$ et qu'il puisse être représenté par un système de $n-m$ équations qui expriment $n-m$ de coordonnées locales de $G$ dans $U_e$ comme fonctions analytiques de $m$ autres de ces coordonnées. Si l'on porte ces fonctions dans les formes $\omega^h$, qui ont été définies au nº 39, elles deviendront des formes en $m$ variables et, par conséquent, elles seront liées par $n-m$ relations linéaires

$$a_h^r \omega^h = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-m;\ h = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous voyons ainsi que les équations qui représentent un voisinage du point $e$ de la sous-variété $\gamma$ constituent une variété intégrale à $m$ dimensions d'un système des équations de Pfaff dont les premiers membres sont des combinaisons linéaires des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$. En changeant convenablement les numéros des formes $\omega^h$ nous pouvons écrire les équations de ce système comme il suit

(10) $$\omega^r + a_1^r \omega^1 + a_2^r \omega^2 + \ldots + a_m^r \omega^m = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Introduisons maintenant dans le voisinage $U_e$ un nouveau système des coordonnées locales au moyen d'une transformation quelconque d'un groupe des paramètres du groupe $G$ (n° 37). Soient

$$\overline{\omega}^r+\overline{a}_1^r\overline{\omega}^1+\overline{a}_2^r\overline{\omega}^2+\ldots+\overline{a}_m^r\overline{\omega}^m = 0.$$

les équations (10) écrites en nouvelles coordonnées; les transformations d'un groupe des paramètres laissant invariantes les formes $\omega^h$ (n° 39, Th. 4) on peut remplacer ces équations par les suivantes

$$\omega^r+\overline{a}_1^r\omega^1+\overline{a}_2^r\omega^2+\ldots+\overline{a}_m^r\omega^m = 0$$

qui, rapprochées des équations (10), conduisent aux relations

$$\overline{a}_1^r = a_1^r, \quad \overline{a}_2^r = a_2^r, \quad \ldots, \quad \overline{a}_m^r = a_m^r.$$

On voit ainsi que les coefficients des équations (10) sont invariants par les transformations du groupe des paramètres dont nous nous avons servi et que, par suite, ce groupe agissant transitivement sur l'espace $G$, ils ont des valeurs constantes.

Ceci établi nous pouvons donc faire sur les $\omega^h$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) une substitution linéaire à coefficients constants telle que les équations (10) prennent la forme

(11) $$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{n-m} = 0.$$

En fermant ce système des équations de Pfaff on trouve les relations $d\omega^h = 0$ ($h = 1, 2, \ldots, n-m$) qui, d'après les équations (3) du n° 39, peuvent s'écrire

(12) $$c_{ij}^{\cdot\cdot r}[\omega^i\omega^j] = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-m;\ i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Comme le système (11) doit admettre une solution à $m$ dimensions, il s'en suit qu'il doit être

(13) $$c_{pq}^{\cdot\cdot r} = 0 \quad (p, q = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

car autrement les équations (11) entraîneraient des relations entre les formes $\omega^{n-m+1}, \omega^{n-m+2}, \ldots, \omega^n$ et, par suite, contrairement à l'hypothèse admise, les dimensions de ses variétés intégrales seraient inférieures à $m$. Les équations (12) étant, en vertu de (13), des conséquences des équations du système (11) on en conclut que ce système est complètement intégrable. Nous pouvons donc énoncer le suivant théorème dû à E. Cartan ([12], p. 197):

THÉORÈME 6. *La recherche des sous-groupes de $G$, qui sont des groupes de Lie, se ramène à former les combinaisons linéaires, à coefficients constants, des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ qui, égalées à zéro forment un système complètement intégrable.*



Comme en particulier un système de $n-1$ équations

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{c^n},$$

où $c^1, c^2, \ldots, c^n$ sont des constantes non toutes nulles, est complètement intégrable, les intégrales de ces équations qui passent par le point $e$ représentent des sous-groupes à dimension un du groupe $G$.

## § 2. Groupes linéaires de Lie

**42. Définition.** Soit $G$ un groupe abstrait de Lie, de dimension $m$, et $E_n$ l'espace vectoriel à $n$ dimensions rapporté à un repère $R$ formé de $n$ vecteurs $\vec{I}_\varrho$ linéairement indépendants. Supposons que $G$ admette une représentation fidèle $\Gamma$ (n° 37) composée des transformations

(1) $$\gamma(u)\colon\ \vec{I}_\varrho = a_\varrho^\varkappa(u)\vec{I}_\varkappa^u, \quad u \in G,$$

où les $a_\varrho^\varkappa(u)$ désignent des fonctions analytiques définies dans un voisinage quelconque de $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ et telles, qu'il soit

(1') $$\Delta = |a_\varrho^\varkappa(u)| > 0, \quad a_\varrho^\varkappa(e) = \delta_\varrho^\varkappa \quad (e \text{ élément unité de } G)$$

et que la matrice

(1'') $$\left\| \frac{\partial a_\varrho^\varkappa(u)}{\partial u^h} \right\| \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

soit de rang $m$.

Soit

(2) $$\gamma^{-1}(u)\colon\ \vec{I}_\varkappa^u = b_\varkappa^\varrho(u)\vec{I}_\varrho$$

la transformation inverse de (1); il est donc

(3) $$a_\varrho^\varkappa b_\mu^\varrho = a_\mu^\varrho b_\varrho^\varkappa = \delta_\mu^\varkappa.$$

Nous dirons que $\Gamma$ est un *groupe linéaire de Lie* et qu'il est *compact* (*ouvert*), si $G$ est *compact* (*ouvert*).

**43. Repère mobile dans l'espace $E_n$.** Désignons par $R^u$ le repère composé des vecteurs $\vec{I}_\varkappa^u$ et appelé *repère mobile* de $E_n$. Si $u$ parcourt $G$, les repères $R^u$ forment un ensemble homéomorphe à $G$ et invariant par les translations de gauche dans $G$.

Différentions maintenant les équations (1); les vecteurs $\vec{I}_\varrho$ étant fixes on a

$$a^\varkappa_\varrho d\vec{I}^u_\varkappa + \vec{I}^u_\varkappa da^\varkappa_\varrho = 0.$$

Si l'on multiplie cette équation par $b^\varrho_\mu$ et que l'on somme par rapport $\varrho$, il vient selon (3)

(4) $$d\vec{I}^u_\mu + \vec{I}^u_\varkappa b^\varrho_\mu da^\varkappa_\varrho = 0.$$

Posons

(5) $$\omega^\varkappa_\mu = -b^\varrho_\mu da^\varkappa_\varrho,$$

d'où, d'après (3),

(5′) $$da^\varkappa_\lambda = -a^\mu_\lambda \omega^\varkappa_\mu.$$

Si l'on se sert de ces notations, les relations (4) deviennent

(6) $$d\vec{I}^u_\mu - \omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa = 0;$$

elles déterminent les accroissements, rapportés au repère mobile $R^u$, que subissent les vecteurs $\vec{I}^u_\varkappa$, quand on passe du repère $R^u$ au repère $R^{u+du}$.

Remarquons que les $\omega^\varkappa_\mu$ sont des formes différentielles linéaires aux variables $u^h$, indépendantes, d'après (1″), par rapport aux différentielles $du^h$; on a leur donné le nom de *composantes relatives du mouvement* du repère mobile $R^u$ (¹). Si l'on fait dans $G$ la translation de gauche en appliquant le point $u$ sur un autre point $\bar{u}$, les repères $R^u$ te $R^{u+du}$ se changent en $R^{\bar{u}}$ et $R^{\bar{u}+d\bar{u}}$ et les composantes relatives $\omega^\varkappa_\mu$ restent inaltérées. Il s'en suit que, en vertu du Théorème 5 du nº 39, les $\omega^\varkappa_\mu$ peuvent être mis sous la forme suivante

(7) $$\omega^\varkappa_\mu = -a^\varkappa_{h\mu}\tau^h,$$

où les $a^\varkappa_{h\mu}$ sont des constantes et les $\tau^h$ désignent des formes différentielles invariantes de gauche dans $G$, qui figurent dans les équations de structure du groupe $G$

(8) $$d\tau^h = \tfrac{1}{2}c_{ij}^{\cdot\cdot h}[\tau^i\tau^j]$$

(équ. (3) du nº 39); il résulte de ce qui précède que parmi les $\omega^\varkappa_\mu$ il y a $m$ formes qui ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients constants.

(¹) Pour la définition générale des composantes relatives d'un groupe de transformations de Lie v. [12], p. 79.



On peut donc choisir $m$ systèmes des valeurs pour les indices $\varkappa$ et $\mu$ dans les équations (7) de manière que l'on puisse résoudre ces équations par rapport aux formes $\tau^h$; autrement dit pour ce choix des indices les équations $a^\varkappa_{h\mu} l^h = 0$ aux inconnues $l^h$ admettront seulement la solution $l^h = 0$.

Revenons maintenant aux équations (6) qui peuvent être regardées comme un système des équations de Pfaff aux inconnues $\vec{I}^u_\varkappa$ et aux variables indépendantes $u^h$. Comme les formules (2) représentent l'intégrale de ce système, si l'on y considère les $\vec{I}_\varrho$ comme les valeurs des inconnues pour $u$ égal à l'unité $e$ de $G$, il s'en suit que le système (6) est complètement intégrable. Donc, si l'on différentie ses équations extérieurement et que l'on tient compte de ces équations elles-mêmes, on doit obtenir des identités. Or un calcul facile conduit à l'aide des formules (5), aux relations suivantes

(9) $$d\omega^\varkappa_\mu + [\omega^\varkappa_\varrho \omega^\varrho_\mu] = 0,$$

que nous appellerons les *équations de structure* du groupe linéaire $\Gamma$.

Nous allons maintenant établir des relations entre les coefficients $a^\varkappa_{h\mu}$ dans les expressions (7) et les constantes de structure $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ du groupe $G$. Considérons à cet effet un vecteur fixe $\vec{I}$ de l'espace vectoriel $E_n$ et désignons respectivement par $x^\varkappa$ et $\bar{x}^\varkappa$ ses coordonnées par rapport aux repères $R$ et $R^u$:

$$\vec{I} = x^\varrho \vec{I}_\varrho = \bar{x}^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa.$$

Il résulte des formules (1) et (2) que ces coordonnées sont liées par les relations suivantes

(10) $$\bar{x}^\varkappa = a^\varkappa_\varrho(u) x^\varrho$$

ou par les relations équivalentes

(10′) $$x^\varrho = b^\varrho_\mu(u)\bar{x}^\mu.$$

En différentiant les équations (10), on trouve

$$d\bar{x}^\varkappa = x^\varrho da^\varkappa_\varrho$$

ou, en vertu de (10′),

$$d\bar{x}^\varkappa = (b^\varrho_\mu da^\varkappa_\varrho)\bar{x}^\mu.$$

Si l'on y porte les expressions (5), on obtient un système des équations de Pfaff

(11) $$d\bar{x}^\varkappa + \omega^\varkappa_\mu \bar{x}^\mu = 0$$

aux inconnues $\bar{x}^{\varkappa}$, où les $u^h$ jouent le rôle des variables indépendantes. Comme les équations (10) représentent l'intégrale de ce système, si l'on y regarde les $x^{\varrho}$ comme les valeurs des inconnues pour $u = e$, il en résulte que le système (11) est complètement intégrable.

Si l'on tient compte des formules (7), les équations (11) deviennent

(12) $$d\bar{x}^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}\tau^h.$$

En les différentiant extérieurement on obtient

$$a^{\varkappa}_{h\mu}[d\bar{x}^{\mu}\tau^h] + a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}d\tau^h = 0;$$

si l'on y substitue aux différentielles $d\bar{x}^{\mu}$ leurs expressions $a^{\mu}_{i\nu}\bar{x}^{\nu}\tau^i$, tirées des équations (12), et aux différentielles $d\tau^h$ les expressions (8), on trouve

$$a^{\varkappa}_{h\mu}a^{\mu}_{i\nu}\bar{x}^{\nu}[\tau^i\tau^h] + \tfrac{1}{2}c_{ij}^{\cdot\cdot h}a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}[\tau^i\tau^j] = 0.$$

En remplaçant dans le premier terme l'indice $h$ par $j$ et en y changeant le rôle des indices $\mu$ et $\nu$ on en déduit la relation suivante:

$$(a^{\varkappa}_{j\nu}a^{\nu}_{i\mu} - a^{\varkappa}_{i\nu}a^{\nu}_{j\mu} + c_{ij}^{\cdot\cdot h}a^{\varkappa}_{h\mu})\bar{x}^{\mu}[\tau^i\tau^j] = 0.$$

Comme le système (12), équivalent au système (11), est complètement intégrable, cette relation doit être une identité, il vient donc

(13) $$a^{\varkappa}_{i\nu}a^{\nu}_{j\mu} - a^{\varkappa}_{j\nu}a^{\nu}_{i\mu} = c_{ij}^{\cdot\cdot h}a^{\varkappa}_{h\mu}.$$

Ces relations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système des équations (12) soit complètement intégrable; elles jouent un rôle important dans la théorie des groupes infinis de Lie (Ch. V).

**44. Transformations infinitésimales d'un groupe linéaire.** Supposons que dans un voisinage d'un vecteur $\vec{I} = x^{\varrho}\vec{I}_{\varrho} = \bar{x}^{\varkappa}\vec{I}^{u}_{\varkappa}$ soit donnée une fonction analytique $f$ des variables $\bar{x}^{\varkappa}$; si dans la différentielle $df = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^{\varkappa}}\,d\bar{x}^{\varkappa}$ on remplace les différentielles $d\bar{x}^{\varkappa}$ par les expressions (12), on aura

$$df = a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^{\varkappa}}\tau^h.$$

Les expressions

(14) $$T_h f = a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^{\varkappa}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

portent le nom de *transformations infinitésimales* du groupe linéaire $\Gamma$; on voit sur la dernière formule qu'elles sont linéairement indépendantes.



Comme on a en particulier $T_h\bar{x}^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{h\mu}\bar{x}^{\mu}$, les équations (12) peuvent s'écrire comme il suit

(15) $$d\bar{x}^{\varkappa} = T_h\bar{x}^{\varkappa}\tau^h.$$

On voit sur ces équations que, si les transformations infinitésimales du groupe linéaire $\Gamma$, qui représente un groupe abstrait $G$, sont données, les équations finies de $\Gamma$ s'obtiennent en intégrant le système complètement intégrable (15).

Si les coefficients de structure $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ du groupe abstrait $G$ sont connus, la recherche des transformations infinitésimales de la représentation linéaire $\Gamma$ de $G$ revient à un problème purement algébrique, et notamment à trouver le système $\{a^{\varkappa}_{h\mu}\}$ satisfaisant aux conditions (13) et tel que les expressions (14) soient linéairement indépendantes.

Ajoutons en terminant ce numéro que la parenthèse de Poisson de $T_i f$ et $T_j f$ est donnée par la formule

(16) $$(T_i T_j)f = -c_{ij}^{\cdot\cdot h}T_h f;$$

on obtient cette formule par un calcul facile en partant de la définition de la parenthèse de Poisson (n° 7) et tenant compte de la relation (13) au n° 43. A cause des équations (16) nous pouvons dire que les $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ sont les *constantes de structure* du groupe abstrait $G$ et du groupe linéaire $\Gamma$.

**45. Groupe linéaire général.** Si les coefficients d'un ensemble des transformations linéaires

$$\vec{I}_{\varrho} = a^{\varkappa}_{\varrho}\vec{I}'_{\varkappa}$$

sont réels et ne sont soumis qu'à la condition unique

(17) $$\Delta = |a^{\varkappa}_{\varrho}| \neq 0,$$

cet ensemble porte le nom de *groupe linéaire général* et il est désigné par le symbole $GL(n, R)$. L'espace du groupe abstrait $G$ représenté par $GL(n, R)$ est donc une variété, définie par l'inégalité (17), de l'espace cartésien $R^{n^2}$ aux coordonnées

$$u^P = a^{\varkappa}_{\lambda}, \quad P = \varkappa + (\lambda - 1)n.$$

Cette variété étant homéomorphe à l'espace des matrices régulières $\|a^{\varkappa}_{\lambda}\|$, si l'on associe le point $u^1, u^2, \ldots, u^{n^2}$ à la matrice $\|a^{\varkappa}_{\lambda}\|$, on peut se servir de celui-ci comme de l'espace de $G$, en regardant le produit de deux matrices comme produit des éléments de $G$.

Les composantes relatives $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ du repère mobile de $GL(n, R)$, définies par les formules (5), étant indépendantes et invariantes par les translations de gauche dans $G$, elles jouent ici le rôle des formes désignées par $\tau$ dans les n[os] 42 et 43 et les équations de structure du groupe $G$ se confondent avec les équations (9).

Les transformations infinitésimales du groupe $GL(n, R)$ peuvent être écrites de la manière suivante

$$T_h f = a^{\varkappa}_{h\mu} x^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n^2),$$

où les $a^{\varkappa}_{h\mu}$ sont des constantes choisies de telle manière que ces transformations soient indépendantes, et d'aileurs quelconques.

**46. Groupe linéaire unimodulaire.** Imaginons dans l'espace affine $A_n$ $n$ vecteurs indépendantes $\vec{I}_\varrho = \{p^\lambda_\varrho\}$, issus d'un point arbitraire de $A_n$. Nous désignerons par le symbole

$$D = [\vec{I}_1, \vec{I}_2, \ldots, \vec{I}_n]$$

la valeur du déterminant $|p^\lambda_\varrho|$ et nous lui donnerons le nom de *volume du parallélépipède* $P$ construit sur les vecteurs $\vec{I}_\varrho$; celui-ci reste invariant pour les translations dans l'espace $A_n$. Nous dirons que le groupe linéaire $\Gamma$ défini au n° 42 est *unimodulaire* ou groupe *linéaire spécial*, s'il laisse invariant le volume d'un parallélépipède quelconque à $n$ dimensions et on le désigne par $SL(n, R)$. Si l'on assoujettit les vecteurs $\vec{I}_\varrho$ aux transformations (1) du n° 42, le volume du parallélépipède obtenu ainsi de $P$ sera égal à $[\vec{I}^u_1, \vec{I}^u_2, \ldots, \vec{I}^u_n]$ et, d'après la règle de multiplication des déterminants, on aura la relation

$$[\vec{I}_1, \vec{I}_2, \ldots, \vec{I}_n] = \Delta [\vec{I}^u_1, \vec{I}^u_2, \ldots, \vec{I}^u_n] \quad \text{où} \quad \Delta = |a^{\varkappa}_\varrho|.$$

Donc, pour que le groupe $\Gamma$ soit unimodulaire, il faut et il suffit qu'il soit

$$\Delta = 1.$$

En se reportant au n° 45 on voit que le groupe $SL(n, R)$ est un sous-groupe de $GL(n, R)$ à dimension $n^2 - 1$ et que l'espace du groupe abstrait $G$ représenté par $SL(n, R)$ est l'espace des matrices dont les déterminants sont égaux à l'unité.

La valeur du déterminant $[\vec{I}^u_1, \vec{I}^u_2, \ldots, \vec{I}^u_n]$ devant être indépendante du point $u \in G$ il doit être

$$d[\vec{I}^u_1, \vec{I}^u_2, \ldots, \vec{I}^u_n] = 0, \tag{18}$$



où $d$ désigne la différentiation par rapport à $u$. D'après la règle de différentiation d'un déterminant on déduit de (18) la relation suivante:

$$\sum_{\mu=1}^{n} [\vec{I}^u_1, \ldots, \vec{I}^u_{\mu-1}, d\vec{I}^u_\mu, \vec{I}^u_{\mu+1}, \ldots, \vec{I}^u_n] = 0.$$

En y substituant à la différentielle $d\vec{I}^u_\mu$ son expression $d\vec{I}^u_\mu = -\omega^{\varkappa}_\mu \vec{I}^u_\varkappa$, tirée de l'équation (6) du n° 43, il vient

$$-\sum_{\mu=1}^{n} [\vec{I}^u_1, \ldots, \vec{I}^u_{\mu-1}, \omega^{\varkappa}_\mu \vec{I}^u_\varkappa, \vec{I}^u_{\mu+1}, \ldots, \vec{I}^u_n] = 0$$

ou

$$\omega^{\varkappa}_\varkappa [\vec{I}^u_1, \vec{I}^u_2, \ldots, \vec{I}^u_n] = 0.$$

Il en résulte la relation

$$\omega^{\varkappa}_\varkappa = 0 \tag{19}$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe linéaire soit unimodulaire. Le nombre des composantes relatives du repère mobile du groupe $SL(n, R)$ est donc égal à $n^2 - 1$.

**47. Groupe orthogonal.** Supposons que le groupe linéaire introduit au n° 42, laisse invariante la forme quadratique $\sum_{\varkappa=1}^{n} (x^{\varkappa})^2$, où les $x^{\varkappa}$ désignent les coordonnées d'un vecteur arbitraire de l'espace vectoriel $E_n$. Il résulte de cette hypothèse et des formules (10) du n° 43 que les coefficients de la transformation (1) du n° 42 doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a^{\varkappa}_\varrho a^{\varkappa}_\sigma = \delta_{\varrho\sigma} \tag{20'}$$

équivalentes aux relations

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a^{\varrho}_\varkappa a^{\sigma}_\varkappa = \delta^{\varrho\sigma}. \tag{20''}$$

Le groupe linéaire ainsi défini porte le nom de *groupe (réel) orthogonal* et on le désigne par $O_n$. L'espace du groupe abstrait $G$, représenté par $O_n$, est la variété de l'espace cartésien $R^{n^2}$, aux coordonnées $a^{\varkappa}_\varrho$, définie par les équations (20') ou (20''); cette variété peut être remplacée par l'espace, lui homéomorphe, des matrices orthogonales. Comme la dimension de $R^{n^2}$ est égale à $n^2$ et le nombre des équations (20') est égal à $n(n+1)/2$, il s'en suit que la dimension de $G$ est égale à $n(n-1)/2$.

Rappelons les choses bien connues que la matrice inverse d'une matrice orthogonale est identique avec la matrice transposée et que son déterminant est égal à $\pm 1$; les transformations orthogonales dont le déterminant est égal à $+1$ forment un sous-groupe de $O_n$ désigné par $O_n^+$. En vertu de la remarque ci-dessus on peut poser $b_\varrho^\varkappa = a_\varkappa^\varrho$ dans les équations des n$^{\text{os}}$ 42 et 43, si le groupe $\Gamma$ est le groupe orthogonal.

En différentiant les équations (20″) on trouve

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} (a_\varkappa^\varrho da_\varkappa^\sigma + a_\varkappa^\sigma da_\varkappa^\varrho) = 0 .$$

Si l'on y substitue aux différentielles les expressions

$$da_\varkappa^\sigma = a_\varkappa^\mu \omega_\mu^\sigma \quad \text{et} \quad da_\varkappa^\varrho = a_\varkappa^\mu \omega_\mu^\varrho ,$$

tirées des formules générales (5′) du n° 42, il viendra

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa^\varrho a_\varkappa^\mu \omega_\mu^\sigma + \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa^\sigma a_\varkappa^\mu \omega_\mu^\varrho = 0$$

ce qui, selon (20″), se ramène à la forme suivante

$$\delta^{\varrho\mu} \omega_\mu^\sigma + \delta^{\sigma\mu} \omega_\mu^\varrho = 0$$

d'où

$$\omega_\varrho^\sigma + \omega_\sigma^\varrho = 0 . \tag{21}$$

Si l'on se raporte aux formules (7), où $h$ parcourt maintenant les valeurs $1, 2, \ldots, n(n-1)/2$, on déduit des équations (21) que les constantes $a_{h\mu}^\varkappa$ satisfont dans le cas du groupe $O_n$ les relations

$$a_{h\mu}^\varkappa + a_{h\varkappa}^\mu = 0 . \tag{21′}$$

Les relations (21) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe abstrait fini soit représenté par le groupe $O_n$.

Au groupe $O_n$ s'associe un groupe linéaire formé des transformations

$$\vec{I}_\varrho = e^{u^0} a_\varrho^\varkappa(u) \vec{I}_\varkappa^u , \tag{22}$$

où, $u^0$ désignant un nombre quelconque réel, les $a_\varrho^\varkappa(u)$ sont les éléments de la matrice orthogonale générale; nous désignerons ce groupe, contenant $O_n$ comme un sous-groupe, par $O'_n$. L'espace du groupe abstrait représenté par $O'_n$ est le produit cartésien de l'espace du groupe $O_n$ et de l'ensemble des nombres: $-\infty < u^0 < \infty$; sa dimension est donc égale à $n(n-1)/2+1$.

Posons pour simplifier

$$\bar{a}_\varrho^\varkappa = e^{u^0} a_\varrho^\varkappa , \qquad \bar{b}_\lambda^\varrho = e^{-u^0} b_\lambda^\varrho , \tag{23}$$



$b_\lambda^\varrho$ désignant les éléments de la matrice inverse à $\|a_\varrho^\varkappa\|$; on aura donc $\bar{a}_\varrho^\varkappa \bar{b}_\lambda^\varrho = \delta_\lambda^\varkappa$ et par suite les composantes relatives $\overline{\omega}_\mu^\varkappa$ du repère mobile du groupe $O'_n$ seront données par les formules suivantes

$$\overline{\omega}_\mu^\varkappa = -\bar{b}_\varrho^\varkappa d\bar{a}_\mu^\varrho$$

qui, en vertu de (23), peuvent être présentées sous la forme

$$\overline{\omega}_\mu^\varkappa = b_\varrho^\varkappa a_\mu^\varrho du^0 + b_\varrho^\varkappa da_\mu^\varrho .$$

On a donc

$$\overline{\omega}_\mu^\varkappa = \delta_\mu^\varkappa du^0 + \omega_\mu^\varkappa , \tag{24}$$

les $\omega_\mu^\varkappa$ désignant les composantes relatives du repère mobile du groupe $O_n$. En rapprochant les équations (21), on en déduit les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\omega}_\mu^\varkappa + \overline{\omega}_\varkappa^\mu = 0 \quad (\varkappa \neq \mu), \\ &\overline{\omega}_\mu^\varkappa = n\, du^0 \quad (\varkappa = \mu) \end{aligned}\right. \tag{24′}$$

entre les composantes relatives du repère mobile du groupe $O'_n$.

Remarque. Le déterminant $|a_\varrho^\varkappa|$ des transformations du groupe orthogonal étant égal à $+1$ ou $-1$ ce groupe n'est pas connexe; son sous-groupe connexe formé des transformations de déterminant égal à $+1$ sera désigné par $O_n^+$.

**48. Groupe symplectique.** Nous appliquerons maintenant les résultats des n$^{\text{os}}$ 42 et 43 au groupe symplectique $Sp(n)$ agissant dans l'espace vectoriel à un nombre pair de dimensions ($n = 2r$). La dimension du groupe abstrait $G$ représenté par $Sp(n)$ est égale au nombre $m = r(2r+1)$ des paramètres dont dépend la transformation la plus générale de $Sp(n)$ (vol. I, n$^{\text{os}}$ 42, 43).

Si la transformation (1) au n° 42 appartient au group $Sp(n)$, ses coefficients satisfont aux relations

$$I_{\alpha\beta} a_\varrho^\alpha a_\sigma^\beta = I_{\varrho\sigma} \tag{26}$$

(vol. I, équ. (18″) du n° 38), où les $I_{\alpha\beta}$ sont les composantes du bivecteur fondamental de l'espace symplectique

$$I_{\alpha\beta} + I_{\beta\alpha} = 0, \qquad I_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \beta - \alpha = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\beta - \alpha| \neq r \end{cases}$$

(vol. I, n° 36). En différentiant les équations (26) on trouve

$$I_{\alpha\beta} a_\varrho^\alpha da_\sigma^\beta + I_{\alpha\beta} a_\sigma^\beta da_\varrho^\alpha = 0 .$$

Si l'on y introduit les expressions $da^\beta_\sigma = -a^\mu_\sigma \omega^\beta_\mu$ et $da^\alpha_\varrho = -a^\mu_\varrho \omega^\alpha_\mu$, tirées des équations (5′) du nº 42, on obtient

$$I_{\alpha\beta} a^\alpha_\varrho a^\mu_\sigma \omega^\beta_\mu + I_{\alpha\beta} a^\beta_\sigma a^\mu_\varrho \omega^\alpha_\mu = 0.$$

En changeant dans le second terme le rôle des indices $\alpha$ et $\beta$ et en tenant compte des égalités $I_{\beta\alpha} = -I_{\alpha\beta}$, on ramène la dernière relation à la forme

$$I_{\alpha\beta} a^\alpha_\varrho a^\mu_\sigma \omega^\beta_\mu - I_{\alpha\beta} a^\alpha_\sigma a^\mu_\varrho \omega^\beta_\mu = 0.$$

Si l'on multiplie cette équation par $b^\varrho_\varkappa b^\sigma_\lambda$ et que l'on somme par rapport à $\varrho$ et $\sigma$, on trouve

$$I_{\alpha\beta} \delta^\alpha_\varkappa \delta^\mu_\lambda \omega^\alpha_\mu - I_{\alpha\beta} \delta^\alpha_\lambda \delta^\mu_\varkappa \omega^\beta_\mu = 0$$

ou

(27) $$I_{\varkappa\beta} \omega^\beta_\lambda - I_{\lambda\beta} \omega^\beta_\varkappa = 0.$$

Dans l'étude du groupe symplectique il est commode de remplacer les composantes relatives $\omega^\varkappa_\mu$ du repère mobile par les grandeurs que l'on obtient en abaissant l'indice supérieur selon de la règle

(28′) $$\omega_{\varkappa\lambda} = -I_{\varkappa\beta} \omega^\beta_\lambda$$

équivalente aux relations

(28″) $$\omega^\varkappa_\mu = I^{\varkappa\gamma} \omega_{\gamma\mu},$$

où les $I^{\varkappa\gamma}$ désignent les composantes contravariantes du bivecteur fondamental de l'espace symplectique (vol. I, nº 36). En adoptant ces notations on ramène les équations (27) à la forme suivante

(29) $$\omega_{\varkappa\lambda} = \omega_{\lambda\varkappa}.$$

Le nombre des formes indépendantes dans le système $\{\omega_{\varkappa\gamma}\}$ est donc égal à $r(2r+1)$ ce qui était d'ailleurs à prévoir. Ajoutons que d'après (28″) on a $\omega^\varkappa_\varkappa = I^{\varkappa\gamma}\omega_{\gamma\varkappa}$; comme les $I^{\varkappa\gamma}$ sont antisymétriques et les $\omega_{\gamma\varkappa}$ symétriques en leurs indices, il en résulte $\omega^\varkappa_\varkappa = 0$; le groupe symplectique est donc un sous-groupe du groupe unimodulaire.

Remarquons que des formules (7) du nº 42 et des équations (28′) on déduit la relation suivante

$$\omega_{\varkappa\lambda} = -I_{\varkappa\beta} a^\beta_{h\lambda} \tau^h,$$

où les $\tau^h$ $(h = 1, 2, \ldots, r(2r+1))$ désignent les formes invariantes à gauche dans l'espace du groupe abstrait représenté par $Sp_n$; si l'on pose

(30) $$a_{h\varkappa\lambda} = -I_{\varkappa\beta} a^\beta_{h\lambda},$$



la dernière équation devient

$$\omega_{\varkappa\lambda} = a_{h\varkappa\lambda} \tau^h,$$

dont les coefficients constants $a_{h\varkappa\lambda}$ sont, en vertu de (29), symétriques entre les deux derniers indices. Comme les relations (30) sont équivalentes aux suivantes

$$a^\varkappa_{h\mu} = I^{\varkappa\varrho} a_{h\varrho\mu},$$

les transformations infinitésimales du groupe symplectique peuvent être présentées, d'après (14), sous la forme suivante

(31) $$Tf = a_{h\varrho\mu} I^{\varkappa\varrho} x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa},$$

où les coefficients $a_{h\varrho\mu}$ sont des constantes quelconques symétriques en les indices $\varrho$ et $\mu$.

**49. Groupes linéaires associés à un groupe linéaire.** Nous allons exposer ici un procédé qui associe, d'une manière intrinsèque, une suite finie ou infinie des groupes linéaires à un groupe linéaire donné. Ces suites jouent un rôle important dans la théorie des connexions affines et dans celle des groupes infinis de Lie.

Soit $\Gamma$ un groupe linéaire de Lie, de dimension $m$, donné au moyen de ses transformations infinitésimales

$$T_h f = a^\varkappa_{h\mu} x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Considérons le système de $n$ équations extérieures

(32) $$a^\varkappa_{h\mu} [x^h_1 x^\mu] = 0$$

à $n+m$ variables indépendantes $x^\varkappa$ et $x^h_1$. Remarquons que ce système se change en un système équivalent, si l'on fait sur les transformations $T_h f$ une substitution linéaire à coefficients constants. La forme des équations (32) reste inaltérée, si l'on introduit des nouvelles variables par la substitution

(33) $$\bar{x}^\varkappa = x^\varkappa, \qquad \bar{x}^h_1 = x^h_1 + l^h_\lambda x^\lambda,$$

à condition que les coefficients $l^h_\lambda$ vérifient les relations suivantes

(34) $$a^\varkappa_{h\mu} l^h_\lambda - a^\varkappa_{h\lambda} l^h_\mu = 0.$$

Il peut arriver que le système des équations (34), aux inconnues $l^h_\lambda$, n'admet que la solution $l^h_\lambda = 0$, la substitution (33) se réduisant alors à la transformation identique. En excluant ce cas, où au groupe $\Gamma$ ne peut pas être associée la suite demandée, supposons que le système (34) admette $m_1$ solutions indépendantes exprimées par les formules

$$l^h_\lambda = \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda} u_1^{h_1} \quad (h_1 = 1, 2, \dots, m_1), \tag{35}$$

où les $u_1^{h_1}$ sont des paramètres arbitraires, le $\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda}$ étant des constantes remplissant les relations

$$a^\varkappa_{h\mu}\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda} - a^\varkappa_{h\lambda}\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\mu} = 0.$$

Si l'on porte les expressions (35) dans les formules (33), on obtient les transformations

$$\bar{x}^\varkappa = x^\varkappa, \quad \bar{x}_1^h = x_1^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda} u_1^{h_1} x^\lambda$$

dont l'ensemble fournit le premier groupe linéaire $\Gamma_1$ associé au groupe $\Gamma$. Remarquons que ce groupe est de dimension $m_1$ et qu'il est abélien. Ses transformations infinitésimales ayant la forme suivante

$$T_{h_1} f = \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda} x^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1^h},$$

on peut lui adjoindre le système de $m$ équations extérieures

$$\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\mu}[x_2^{h_1} x^\mu] = 0$$

à $n + m_1$ variables. En raisonnant sur ce système de la même manière que plus haut, on arrive soit à une transformation identique des variables $x^\varkappa, x_1^h, x_2^{h_1}$, soit à un groupe linéaire $\Gamma_2$ de dimension $m_2$, composé des équations

$$\bar{x}^\varkappa = x^\varkappa, \quad \bar{x}_1^h = x_1^h, \quad \bar{x}_2^{h_1} = x_2^{h_1} + \overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{h_2\lambda} u_2^{h_2} x^\lambda$$
$$(h_2 = 1, 2, \dots, m_2),$$

où les $u_2^{h_2}$ sont des paramètres arbitraires, les $\overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{h_2\lambda}$ étant des constantes verifiant les relations

$$\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda}\overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{h_2\mu} - \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\mu}\overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{h_2\lambda} = 0.$$

On peut continuer ainsi de proche en proche et l'on arrive à une suite finie des groupes linéaires $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\varkappa$, où $\Gamma_\varkappa$ se compose d'une transformation identique, ou à une suite infinie

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r, \dots, \tag{36}$$



où le groupe $\Gamma_r$ agit sur les variables $x^\varkappa, x_1^h, x_2^{h_1}, \dots, x_r^{h_{r-1}}$ $(h_i = 1, 2, \dots, m_i)$ en transformant les variables $x^\varkappa, x_1^h, \dots, x_{r-1}^{h_{r-2}}$ identiquement et les variables $x_r^{h_{r-1}}$ selon les formules suivantes

$$\bar{x}_r^{h_{r-1}} = x_r^{h_{r-1}} + \overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{h_r\lambda} u_r^{h_r} x^\lambda,$$

où les $u_r^{h_r}$ sont des paramètres arbitraires et les $\overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{h_r\lambda}$ des constantes; ces constantes sont liées aux constantes $\overset{(r-1)}{a}{}^{h_{r-2}}_{h_{r-1}\lambda}$ correspondant au groupe $\Gamma_{r-1}$ de la suite (36), par les relations suivantes:

$$\overset{(r-1)}{a}{}^{h_{r-2}}_{h_{r-1}\lambda}\overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{h_r\mu} - \overset{(r-1)}{a}{}^{h_{r-2}}_{h_{r-1}\mu}\overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{h_r\lambda} = 0.$$

Nous avons ainsi démontré qu'au groupe $\Gamma$ peut être attachée une suite des groupes linéaires déterminés par la structure du groupe $\Gamma$.

Nous allons appliquer le procédé développé plus haut au groupe orthogonal $O_n$. Permutons à cet effet circulairement les indices $\varkappa, \lambda$ et $\mu$ dans les équations (34); on obtient ainsi trois équations suivantes:

$$\begin{cases} a^\varkappa_{h\mu} l^h_\lambda - a^\varkappa_{h\lambda} l^h_\mu = 0, \\ a^\lambda_{h\varkappa} l^h_\mu - a^\lambda_{h\mu} l^h_\varkappa = 0, \\ a^\mu_{h\lambda} l^h_\varkappa - a^\mu_{h\varkappa} l^h_\lambda = 0. \end{cases} \tag{37}$$

En vertu de la relation (21') du n° 47 la première de ces équations peut s'écrire

$$-a^\mu_{h\varkappa} l^h_\lambda + a^\lambda_{h\varkappa} l^h_\mu = 0$$

d'où, en se reportant à la deuxième, il suit

$$a^\mu_{h\varkappa} l^h_\lambda - a^\lambda_{h\mu} l^h_\varkappa = 0.$$

Si l'on y applique la relation (21') du n° 47 au second terme, il viendra

$$a^\mu_{h\varkappa} l^h_\lambda + a^\mu_{h\lambda} l^h_\varkappa = 0.$$

En comparant cette égalité avec la troisième des équations (37) on obtient

$$a^\mu_{h\lambda} l^h_\varkappa = 0.$$

Il résulte des remarques faites sur les équations (7) du n° 43 que le système des équations ci-dessus n'admet que la solution $l^h_\varkappa = 0$. Nous voyons ainsi que dans le cas du groupe orthogonal la suite (36) se réduit au premier terme, le groupe $\Gamma_1$ se réduisant à la transformation identique. Les composantes relatives du repère mobile du groupe $O'_n$ (n° 47) vérifiant les relations $\omega^\varkappa_\mu + \omega^\mu_\varkappa = 0$ $(\varkappa \neq \mu)$, d'où il suit $a^\varkappa_{h\mu} + a^\mu_{h\varkappa} = 0$ $(\varkappa \neq \mu)$, la conclusion précédante est valable aussi pour le groupe $O'_n$.

**50. Equations de structure d'un espace affine.** Soit $A_n$ un espace affine rapporté à un repère cartésien $R$ formé d'un point $O$ comme origine et de $n$ vecteurs contravariants $\vec{I}_\varrho$. Nous introduirons au lieu de $R$ un repère mobile $R^u_x$ ayant comme origine un point arbitraire $x \in A_n$ et composé des vecteurs $I^u_\varkappa$ obtenus des vecteurs $\vec{I}_\varrho$ par une transformation $\gamma(u)$ d'un groupe linéaire $\Gamma$ de dimension $m$ (nº 42). En variant le point $x$ et la transformation $\gamma(u)$ on obtient dans $A_n$ un champs de repères qui se déduisent de l'un d'eux par une translation suivie d'une rotation affine; l'espace $A_n$ doué de ce champs sera dit espace basé sur le groupe $\Gamma$.

Rappelons les équations (1), (2), (5) et (7) des numéros précédents

$$\vec{I}_\varrho = a^\varkappa_\varrho(u)\vec{I}^u_\varkappa, \qquad \vec{I}^u_\varkappa = b^\varrho_\varkappa(u)\vec{I}_\varrho, \tag{38}$$

$$\omega^\varkappa_\mu = -b^\varrho_\mu da^\varkappa_\varrho, \tag{39}$$

$$\omega^\varkappa_\mu = a^\varkappa_{h\mu}\tau^h \tag{40}$$

et désignons par $x^\varkappa$ les coordonnées du point $x$ par rappoort au repère $R$. Le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ issu du point $x$ sera donc donné par la formule

$$\overrightarrow{dx} = \vec{I}_\varrho dx^\varrho$$

(v. nºs 31c et 32). Si l'on y remplace $\vec{I}_\varrho$ par son expression (38), il viendra

$$\overrightarrow{dx} = \omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa. \tag{41}$$

le coefficient $\omega^\varkappa$ étant défini par la formule

$$\omega^\varkappa = a^\varkappa_\varrho(u)dx^\varrho \tag{42}$$

qui est équivalente à la suivante

$$dx^\varrho = b^\varrho_\mu\omega^\mu. \tag{43}$$

En différentiant extérieurement l'équation (42), on obtient

$$d\omega^\varkappa = [da^\varkappa_\varrho(u)dx^\varrho]$$

ou, d'après (43) et (39),

$$d\omega^\varkappa = [\omega^\varkappa_\mu\omega^\mu]. \tag{44}$$

Aux équations (44) nous adjoignons les équations (9) du nº 43

$$d\omega^\varkappa_\mu = [\omega^\varkappa_\varrho\omega^\varrho_\mu]. \tag{45}$$

Les formes $\omega^\varkappa$ et $\omega^\varkappa_\mu$ s'appellent *composantes* d'un mouvement infinitésimal du repère mobile $R^u_x$; les $\omega^\varkappa$ étant les composantes de translation et $\omega^\varkappa_\mu$ les composantes de rotation affine. Remarquons que les $\omega^\varkappa$ sont des formes différentielles linéaires, aux variables $x^\varkappa$ et $u^i$, indépendantes par rapport aux différentielles $dx^\varkappa$; les $\omega^\varkappa_\mu$ sont des formes différentielles linéaires aux variables $u^i$, indépendantes par rapport aux différentielles $du^i$. Aux relations différentielles (44) et (45) entre les composantes du mouvement infinitésimal on a donné le nom *d'équations de structure* de l'espace affine basé sur le groupe $\Gamma$.



Supposons maintenant que l'on se donne arbitrairement un système des formes analytiques $\tilde{\omega}^\varkappa$ et $\tilde{\omega}^\varkappa_\mu$ aux variables $t^\varkappa$, $v^i$, jouissant des propriétés suivantes: dans le produit d'un ouvert $D$ de l'espace numérique aux variables $t^\varkappa$ et d'un ouvert $\Delta$ de l'espace numérique $\Delta$ aux variables $v^i$ les $\tilde{\omega}^\varkappa$ sont des formes différentielles linéaires homogènes par rapport aux différentielles $dt^\varkappa$ et les $\tilde{\omega}^\varkappa_\mu$ sont des formes différentielles linéaires indépendantes par rapport aux différentielles $dv^i$. Nous admettons de plus que ces formes vérifient les équations

$$d\tilde{\omega}^\varkappa = [\tilde{\omega}^\varkappa_\mu\tilde{\omega}^\mu], \qquad d\tilde{\omega}^\varkappa_\mu = [\tilde{\omega}^\varkappa_\lambda\tilde{\omega}^\lambda_\mu]. \tag{46}$$

Nous allons montrer que les formes $\tilde{\omega}^\varkappa$ et $\tilde{\omega}^\varkappa_\mu$ ainsi déterminées permettent de reconstruire localement l'espace affine $A_n$ basé sur le groupe $\Gamma$.

Considérons à cet effet le système des équations pfaffiennes suivantes

$$\omega^\varkappa = \tilde{\omega}^\varkappa, \qquad \omega^\varkappa_\mu = \tilde{\omega}^\varkappa_\mu \tag{47}$$

où les $\omega^\varkappa$ et $\omega^\varkappa_\mu$ sont donnés par les formules (42) et (39); nous y regardons les variables $x^\varkappa$ et $u^h$ comme des inconnues et les $t^h$ et $v^{n^2}$ comme des variables indépendantes. Or il résulte des équations (44), (45) et (46) que le système (47) est complètement intégrable et que sa solution générale a forme suivante

$$x^\varkappa = f^k(t^1, t^2, \ldots, t^n), \qquad u^h = \varphi^h(v^1, v^2, \ldots, v^m;\ t^1, t^2, \ldots, t^n).$$

On obtient ainsi dans un ouvert de l'espace $A_n$ le point $x$ déterminé au moyen des coordonnées curvilignes $t^\lambda$; les composantes $\vec{I}^u_\varkappa$ du repère $R^u_x$ s'obtiennent des équations (6) du nº 43, si l'on remplace les variables $u^h$ dans les formes $\omega^\varkappa_\mu$ par les fonctions $\varphi^h$. On réconstruit ainsi le champs des repères $R^u_x$ dans un ouvert de l'espace $A_n$ ce qui démontre la proposition.

## § 3. Connexions affines

**51. Espace fibré tangent à une variété.** Soit $V^n$ une variété connexe de classe $C^\infty$, munie d'un recouvrement, et soit $G$ un groupe abstrait de Lie, de dimension $m$, représenté fidèlement par un groupe $\Gamma$ des transformations de l'espace vectoriel $E_n$. En adoptant les notations des nºs 42-44 rappelons les formules pour les transformations finies et les transformations infinitésimales de $\Gamma$:

(1) $$\gamma(u)\colon \vec{I}_\varrho = a^\varkappa_\varrho(u)\vec{I}^u_\varkappa, \quad \gamma^{-1}(u)\colon \vec{I}^u_\varkappa = b^\varrho_\varkappa(u)\vec{I}_\varrho \quad (u\in G),$$

(2) $$T_h f = a^\varkappa_{h\mu} x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} \quad (h = 1, 2, \dots, m);$$

fes composantes relatives du repère mobile du groupe $\Gamma$ auront alors la lorme suivante (n° 43)

(3) $$\omega^\varkappa_\mu = b^\varkappa_\varrho da^\varrho_\mu = a^\varkappa_{h\mu}\tau^h.$$

Considérons maintenant un voisinage quelconque $U_i$ du recouvrement de $V^n$ et le champs des repères naturels dont chacun est composé de $n$ vecteurs contravariants tangents à $V^n$; on aura par suite sur $U_i$ $n$ champs de vecteurs contravariants. Désignons par $R_{ix}$ le repère du champs attaché à un point $x\in U_i$ et par $\vec{I}_{\lambda ix}$ les vecteurs dont il est formé; en faisant sur les vecteurs $\vec{I}_{\lambda ix}$ la substitution (1) on obtient un nouveau repère $R^u_{ix}$ tangent en $x$ à $V^n$: $R^u_{ix} = \gamma(u)R_{ix}$, $R^e_{ix} = R_{ix}$, $e$ désignant élément-unité de $G$. Si $u$ parcourt $G$, les $R^u_{ix}$ forment un ensemble $F_{ix}$, homéomorphe au produit $x\times G$; de même l'union $\bigcup F_{ix}$, où $x$ parcourt $U_i$ est homéomorphe au produit $U_i\times G$, composé des points $(x, u)$. Ce produit, de dimension $n+m$, peut être doué d'un système de coordonnées locales, les coordonnées du point $(x, u)$ étant formées de l'ensemble de $n$ coordonnées du point $x$ dans un système admissible dans $U_i$ et de $m$ coordonnées admissibles dans un voisinage de $G$ contenant $u$.

Ceci posé nous allons maintenant énoncer les hypothèses qui nous permettront de réunir en un même espace topologique tous les produits $U_i\times G$, où $i$ parcourt les indices du recouvrement de $V^n$.

Considérons à cet effet deux voisinages quelconques $U_i$, $U_j\subset V^n$ tels qu'il soit $U_i\cap U_j\neq 0$, et supposons que pour chaque paire de tels voisinages soit donné dans $U_i\cap U_j$ une fonction $u=\varphi_{ji}(x)$ de classe $C^\infty$ telle que les transformations $\gamma_{ji}(x) = \gamma(\varphi_{ji})$ du groupe $\Gamma$ satisfont aux conditions suivantes

(4) $$\gamma_{ii}(x) = \gamma(e), \quad \gamma_{ij}(x) = \gamma^{-1}_{ji}(x), \quad \gamma_{jk}(x) = \gamma_{ji}(x)\gamma_{ik}(x),$$

où la troisième équation se rapporte à un point $x$ commun à trois voisinages $U_i$, $U_j$, $U_k\subset V^n$.

Rappelons qu'au point $x$ ont été attachés deux ensembles $F_{ix}$ et $F_{jx}$ des repères tangents à $V^n$ suivant qu'il était considéré comme un point



de $U_i$ ou de $U_j$. Or nous supposons que ces ensembles soient liés l'un à l'autre par la relation suivante

(5) $$R^e_{jx} = \gamma_{ji}(x)R^e_{ix}.$$

Envisageons maintenant deux points $(x, u_h)\in U_i\times G$ et $(x, u_k)\in U_j\times G$ et deux repères $R^{u_h}_{ix}$ et $R^{u_k}_{jx}$ définis respectivement par les formules

(6) $$R^{u_h}_{ix} = \gamma(u_h)R^e_{ix}, \quad R^{u_k}_{jx} = \gamma(u_k)R^e_{jx}.$$

Nous convenons de regarder $(x, u_h)$ et $(x, u_k)$ comme un même point $b$ d'un espace $B$, si $u_k$ est choisi de manière qu'il soit

(7) $$\gamma^{-1}(u_k)\cdot\gamma(u_h) = \gamma_{ij}(x).$$

Des équations (6) et (7) résulte alors l'équalité

(8) $$R^{u_k}_{jx} = R^{u_h}_{ix}.$$

D'après la convention adoptée ci-dessus, si $x\in U_i\cap U_j$, le sous-ensemble de $U_i\times G$ composé des points $(x, u_h)$, où $u_h$ parcourt $G$, et le sous-ensemble de $U_j\times G$, composé des points $(x, u_k)$, où $u_k$ parcourt $G$ en satisfaisant à la condition (7), se confondent en un même sous-ensemble de l'espace $B$, homéomorphe à $x\times G$ et appelé sa fibre sur le point $x$ de $V^n$. On peut dire aussi que les deux ensembles $F_{ix}$ et $F_{jx}$ des repères tangents en $x$ à $V^n$ se confondent en un même ensemble représentant la fibre sur $x$. Le point $x$ porte le nom de projection de la fibre sur la variété $V^n$; si $b$ est un point arbitraire de la fibre, on écrit $x = p(b)$ pour indiquer que $x$ est la projection de $b$.

Nous voyons ainsi que, grâce aux hypothèses faites ci-dessus sur la fonction $\gamma_{ji}(x)$, nous pouvons regarder le produit $U_i\times G$, où $U_i$ est un voisinage quelconque de $V^n$, comme un voisinage de l'espace $B$ que nous douons de cette manière d'une topologie. Nous dirons que $(x, u_h)$ sont des coordonnées d'un point $b$ de l'espace $B$ dans le voisinage $U_i\times G$ et que $(x, u_k)$, où $u_k$ est lié à $u_h$ par la relation (7), sont les coordonnées du même point $b$ dans le voisinage $U_j\times G$. L'équation (7) exprime donc la loi d'après laquelle on passe de l'un de ces systèmes de coordonnées à l'autre. Il est sousentendu qu'en même temps les coordonnées du point $x$, propres aux voisinages $U_i$ et $U_j$ se changent selon la loi adoptée dans la variété $V^n$; une remarque analogue concerne les coordonnées locales des points $u_h$ et $u_k$ dans l'espace $G$. En résumant nous pouvons dire que les produits $U_i\times G$, où $i$ parcourt les indices d'un recouvrement de la variété $V^n$, forment un recouvrement de l'espace $B$. Donc pour obtenir un point de $B$ on choisit arbitrairement un point $x$ d'un voisinage quelconque de $V^n$ et on lui associe un élément quelconque du groupe $G$.

A l'espace $B$ ainsi défini nous donnerons le nom *d'espace fibré tangent à la variété* $V^n$ qui s'appelle sa *base*; le groupe $\Gamma$ porte le nom de *groupe de structure* de $B$. L'espace fibré tangent à une variété est un cas particulier de ce qu'on appelle espace fibré principal ayant pour base un espace topologique et pour groupe de structure un groupe topologique [1].

Comme $V^n$ est, par hypothèse, une variété $C^\infty$ et $G$ est une variété analytique, il s'en suit que l'espace fibré $B$ est une variété de classe $C^\infty$ à $n+m$ dimensions.

**52. Sections.** Supposons que dans un voisinage $U_i$ du recouvrement de $V^n$ soit donnée une fonction $u=\varphi(x)$ de classe $C^\infty$; cette fonction définit dans le voisinage $U_i\times G$ de l'espace $B$ une sous-variété à $n$ dimensions $S_\varphi$ dite sa *section* sur $U_i$. Un point de $S_\varphi$ ayant pour coordonnées $x$ et $u=\varphi(x)$ le point $x$ est donc sa projection sur $V^n$. Construire une section $S_\varphi$ sur $U_i$ revient à munir chaque point $x\in U_i$ du repère $R^u_{ix}$ $(u=\varphi(x))$. Tout vecteur tangent à $V^n$ en un point $x\in U_i$ est tangent à $S_\varphi$ et, en particulier, le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ tangent en $x$ à $V^n$ doit être considéré aussi comme le vecteur infinitésimal tangent à $S_\varphi$ quelque soit la fonction $\varphi(x)$.

On peut supposer en particulier que la fonction $\varphi(x)$ a la même valeur, par exemple la valeur $e_0$, pour tous les points de $U_i$; on obtient ainsi une section particulière dans laquelle $R^{e_0}_{xi}$ est un repère tangent au point $(x, e_0)$.

Remarquons que la notion de section a un caractère local, car, en général, elle ne peut pas être étendue à tout l'espace $B$.

**53. Connexions affines.** En poursuivants les raisonnements précédents considérons dans un $U_i\subset V^n$ le champs de repères $R^e_i$ tangents à $V^n$ (n° 51) et les $n$ champs des vecteurs $\vec{I}^{\,e}_{\lambda i}$ qui forment ces repères. Associons aux champs $\vec{I}^{\,e}_{\lambda i}$ $n$ champs duaux des formes pfaffiennes indépendantes $\Theta^\varkappa_i$, exprimées en coordonnées locales dans $U_i$ et définies par les relations suivantes

$$\Theta^\varkappa_i[\vec{I}^{\,e}_{\lambda i}]=\delta^\varkappa_\lambda$$

(n° 32). Les $\Theta^\varkappa_{ix}$ étant composantes par rapport au repère $R^e_{ix}$ du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ tangent en $x$ à $V^n$ on a

$$\overrightarrow{dx}=\Theta^\varrho_{ix}\vec{I}^{\,e}_{\varrho ix} \tag{9}$$

[1] Pour tout ce qui concerne la théorie générale des espaces fibrés et les espaces fibrés principaux v. [44].



(équ. (6) au n° 32). Si l'on fait sur les vecteurs $\vec{I}^{\,e}_{\varrho ix}$ la transformation (1)

$$\gamma(u_h):\ \vec{I}^{\,e}_{\varrho ix}=a^\varkappa_\varrho(u_h)\vec{I}^{\,u_h}_{\varkappa ix}\qquad (u_h\in G)$$

et que l'on substitue ces expressions dans l'équation (9), on obtient

$$\overrightarrow{dx}=\omega^\varkappa_{ix}\vec{I}^{\,u_h}_{\varkappa ix}; \tag{10}$$

où les coefficients $\omega^\varkappa_{ix}$ sont définis par les formules suivantes:

$$\omega^\varkappa_{ix}=a^\varkappa_\varrho(u_h)\Theta^\varrho_{ix}. \tag{11}$$

Les $\vec{I}^{\,u_h}_{\varkappa ix}$ étant vecteurs du repère $R^{u_h}_{ix}$ on voit sur l'équation (10) que les formes $\omega^\varkappa_{ix}$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{dx}$ par rapport au repère $R^{u_h}_{ix}$.

Imaginons maintenant un autre voisinage quelconque $U_j\subset V^n$ contenant le point $x$ et les deux repères $R^e_{jx}$ et $R^{u_k}_{jx}$ définis respectivement par les formules (5) et (6), où le point $u_k$ est lié au point $u_h$ par la relation (7). En désignant respectivement par $\Theta^\varrho_{jx}$ et $\omega^\varkappa_{jx}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{dx}$ par rapport aux repères $R^e_{jx}$ et $R^{u_k}_{jx}$ on a

$$\overrightarrow{dx}=\omega^\varkappa_{jx}\vec{I}^{\,u_k}_{\varkappa jx}\qquad\text{et}\qquad \omega^\varkappa_{jx}=a^\varkappa_\varrho(u_k)\Theta^\varrho_{jx}.$$

Comme en vertu de (8) les repères $R^{u_h}_{ix}$ et $R^{u_k}_{jx}$ se confondent la comparaison de deux dernières formules avec les équations (10) et (11) conduit à l'égalité suivante

$$\omega^\varkappa_{ix}=\omega^\varkappa_{jx}.$$

On voit ainsi que les $\omega^\varkappa_x$ ne dépendent pas du voisinage contenant le point $x$ et que, par suite, elles sont des formes différentielles définies dans un voisinage du point $b\in B$, dont les coordonnées dans les voisinages $U_i\times G$ et $U_j\times G$ sont respectivement $(x, u_h)$ et $(x, u_k)$.

En résumant nous pouvons dire que si $b=(x, u)$ est un point arbitraire de l'espace $B$, le procédé développé ci-dessus permet de construire en $b$ $n$ formes différentielles linéaires

$$\omega^\varkappa=a^\varkappa_\varrho(u)\Theta^\varrho, \tag{12}$$

où les $\Theta^\varrho$ sont des formes pfaffiennes indépendantes, définies dans un voisinage $U\in V^n$ contenant le point $x$, et où les $a^\varkappa_\varrho(u)$ sont les coefficients de la transformation (1) du groupe linéaire $\Gamma$. Comme les formes $\omega^\varkappa$ sont indépendantes du choix du voisinage $U$ entourant le point $x$, elles sont définies globalement dans l'espace fibré $B$. Ajoutons que des équations (12) résultent les relations équivalentes

$$\Theta^\varrho=b^\varrho_\varkappa(u)\omega^\varkappa, \tag{12'}$$

où les $b^{\varrho}_{\varkappa}(u)$ désignent les coefficients de la transformation inverse à $\gamma(u)$ (v. équ. (1)). Si l'on désigne par $\vec{I}^{u}_{\varkappa}$ les vecteurs du repère $R^{u}_{x}$ tangent en $x \in U$ à $V^n$, le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ tangent en $x$ à $V^n$ sera donné par la formule

$$\overrightarrow{dx} = \omega^{\varkappa}\vec{I}^{u}_{\varkappa}; \tag{13}$$

les $\omega^{\varkappa}$ représentent donc les composantes du vecteur $\overrightarrow{dx}$ par rapport au repère $R^{u}_{x}$.

Les formes $\omega^{\varkappa}$ étant définies dans tout l'espace fibré $B$ il en est de même de leurs différentielles extérieures

$$d\omega^{\varkappa} = [da^{\varkappa}_{\varrho}\Theta^{\varrho}] + a^{\varkappa}_{\varrho}d\Theta^{\varrho}.$$

Les $\Theta^{\varrho}$ étant indépendantes leurs différentielles extérieures peuvent être mises sous la forme suivante

$$d\Theta^{\varrho} = \tfrac{1}{2}p_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\varrho}[\Theta^{\sigma}\Theta^{\tau}], \qquad p_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\varrho} + p_{\tau\sigma}^{\cdot\cdot\varrho} = 0,$$

où les coefficients $p_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\varrho}$ sont fonctions du point $x$. Si encore on tient compte des formules (12′), les différentielles $d\omega^{\varkappa}$ seront ramenées à la forme

$$d\omega^{\varkappa} = b^{\varrho}_{\mu}[da^{\varkappa}_{\varrho}\omega^{\mu}] + \tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}],$$

où

$$T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = -T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = a^{\varkappa}_{\varrho}b^{\sigma}_{\lambda}b^{\tau}_{\mu}p_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\varrho}.$$

En vertu des équations (7) du n° 43 les dernières formules pour les différentielles $d\omega^{\varkappa}$ peuvent s'écrire comme il suit

$$d\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{h\mu}[\tau^{h}\omega^{\mu}] + \tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}], \tag{14}$$

où les $\tau^{h}$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ désignent des formes différentielles linéaires indépendantes, définies dans un voisinage du point $u \in G$ et invariantes de gauche; rappelons que les coefficients $a^{\varkappa}_{h\mu}$ sont des constantes et remarquons que les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ sont fonctions du point $b = (x, u)$ de l'espace $B$. Nous dirons que les expressions $a^{\varkappa}_{h\mu}\tau^{h}$ dans les équations (14) déterminent une *connexion affine* définie globalement dans l'espace fibré $B$ et que les équations (14) sont équations de structure de cette connexion que nous désignerons par $L_0$.

Remarquons que la forme des équations (14) sera conservée, si l'on fait sur les $\omega^{\varkappa}$ une substitution quelconque du groupe $\Gamma$. En effet, posons

$$\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\varrho}\overline{\omega}^{\varrho}$$

où les $a^{\varkappa}_{\varrho}$ désignent coefficients d'une transformation fixe $\gamma$ du groupe $\Gamma$; en portant ces expressions dans les équations (14) on obtient

$$a^{\varkappa}_{\varrho}d\overline{\omega}^{\varrho} = a^{\varkappa}_{h\mu}a^{\mu}_{\varrho}[\tau^{h}\overline{\omega}^{\varrho}] + \tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}a^{\lambda}_{\varrho}a^{\mu}_{\sigma}[\overline{\omega}^{\varrho}\overline{\omega}^{\sigma}].$$



Si l'on multiplie cette équation par $\beta^{\nu}_{\varkappa}$, où les $\beta^{\nu}_{\varkappa}$ sont les coefficients de l'inverse de $\gamma$, et que l'on somme par rapport à $\varkappa$, il viendra

$$d\overline{\omega}^{\nu} = \overline{a}^{\nu}_{h\varrho}[\tau^{h}\overline{\omega}^{\varrho}] + \tfrac{1}{2}\overline{T}_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\nu}[\overline{\omega}^{\varrho}\overline{\omega}^{\sigma}],$$

où

$$\overline{a}^{\nu}_{h\varrho} = a^{\varkappa}_{h\mu}a^{\mu}_{\varrho}\beta^{\nu}_{\varkappa}, \qquad \overline{T}_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\nu} = a^{\lambda}_{\varrho}a^{\mu}_{\sigma}\beta^{\nu}_{\varkappa}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa};$$

ceci justifie notre remarque. On voit sur les dernières formules que pour la transformation $\gamma$ les grandeurs $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant.

Les formules (14) pour les différentielles $d\omega^{\varkappa}$ peuvent être présentées sous une autre forme. En effet, posons

$$\pi^{h} = \tau^{h} - l^{h}_{\lambda}\omega^{\lambda}, \tag{15}$$

où les $l^{h}_{\lambda}$ désignent des indéterminées; si l'on y prend pour $l^{h}_{\lambda}$ des fonctions quelconques de la classe $C^{\infty}$, définies dans un voisinage du point $b = (x, u)$ et que l'on introduit ensuite les formes $\pi^{h}$ dans les équations (14), elles seront ramenées à la forme

$$d\omega^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{h\mu}[\pi^{h}\omega^{\mu}] + \tfrac{1}{2}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}] \tag{16}$$

dont les coefficients $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ sont donnés par les équations

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + a^{\varkappa}_{h\mu}l^{h}_{\lambda} - a^{\varkappa}_{h\lambda}l^{h}_{\mu}, \qquad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0; \tag{16′}$$

les formes $\pi^{h}$ et les coefficients $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ sont définis dans un voisinage du point $b = (x, u)$.

Posons

$$\Omega^{\varkappa} = \tfrac{1}{2}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}] \tag{17}$$

et

$$\omega^{\varkappa}_{\mu} = -a^{\varkappa}_{h\mu}\pi^{h}. \tag{18}$$

Les équations (16) prendront alors la forme

$$d\omega^{\varkappa} + [\omega^{\varkappa}_{\mu}\omega^{\mu}] = \Omega^{\varkappa}. \tag{19}$$

D'après les formules (15) et (18) les $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ sont des formes différentielles linéaires définies dans un voisinage du point $b = (x, u)$, indépendantes par rapport aux différentielles $du^{h}$ du point $u \in G$.

Nous dirons que pour chaque choix des coefficients $l^{h}_{\lambda}$ dans les équations (15) les formes $\omega^{\varkappa}_{\mu}$ déterminent une connexion affine définie localement dans un voisinage du point $b = (x, u)$ de l'espace fibré $B$ et que les relations (19) sont les équations de structure de cette connexion désignée par $L$.

Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *Tout espace fibré, de groupe de structure $\Gamma \subset GL(n, R)$, tangent à une variété de classe $C^\infty$, peut être muni d'un ensemble infini de connexions affines locales et d'une connexion $L_0$ définie globalement.*

**54. Repère mobile dans une section locale.** Considérons une connexion arbitraire $L$ dans l'espace fibré $B$ et imaginons une section locale $S_\varphi$ sur un voisinage $U$ du recouvrement de $V^n$ (n° 52). Chaque point $x \in U$ est donc muni d'un repère $R^u_x$ $(u = \varphi(x))$ auquel nous donnerons le nom de *repère mobile* de la section $S_\varphi$; maintenant nous allons étudier le mouvement de ce repère en nous servant de la connexion dont l'espace $B$ a été muni.

D'après l'équation (13) du n° 53 le déplacement de l'origine de $R^u_x$ est donné par la formule

(20) $$\overrightarrow{dx} = \omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa \quad (u = \varphi(x));$$

pour la section particulière $u = e_0$ (élément unité du groupe $\Gamma$) cette formule prend la forme

(20′) $$\overrightarrow{dx} = \Theta^\varrho \vec{I}^e_\varrho.$$

En différentiant extérieurement l'équation (20) on obtient

$$d(\overrightarrow{dx}) = d\omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa + [d\vec{I}^u_\varkappa \omega^\varkappa]$$

ou, si l'on tient compte des équations (19),

$$d(\overrightarrow{dx}) = -[\omega^\varkappa_\mu \omega^\mu]\vec{I}^u_\varkappa + \Omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa + [d\vec{I}^u_\varkappa \omega^\varkappa].$$

Si dans le dernier terme on remplace l'indice $\varkappa$ par $\mu$, il viendra

$$d(\overrightarrow{dx}) = [(d\vec{I}^u_\mu - \omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa)\omega^\mu] + \Omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa.$$

Il résulte de l'équation (20′) que la différentielle du vecteur $\overrightarrow{dx}$ doit s'exprimer seulement au moyen des formes $\omega^\varkappa$. Les expressions $d\vec{I}^u_\mu - \omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa$ étant des formes linéaires indépendantes par rapport aux différentielles des coordonnées du point $u$ il doit être

(21) $$d\vec{I}^u_\mu = \omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa$$

et par conséquent

(22) $$d(\overrightarrow{dx}) = \Omega^\varkappa \vec{I}^u_\varkappa.$$

Nous dirons que les équations (21) déterminent la *rotation affine instantanée* du repère mobile et que les formes $\omega^\varkappa_\mu(u = \varphi(x))$ sont les composantes relatives de cette rotation par rapport au repère mobile.



En différentiant extérieurement les équations (21) on trouve

$$d(\vec{I}^u_\mu) = d\omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa + [d\vec{I}^u_\varkappa \omega^\varkappa_\mu].$$

Si l'on y porte l'expression $d\vec{I}^u_\varkappa = \omega^\lambda_\varkappa \vec{I}^u_\lambda$, tirée de l'équation (21), on aura

$$d(\vec{I}^u_\mu) = d\omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa + [\omega^\lambda_\varkappa \omega^\varkappa_\mu]\vec{I}^u_\lambda.$$

En changeant le rôle des indices $\varkappa$ et $\lambda$ dans le dernier terme on arrive à l'équation suivante

$$d(d\vec{I}^u_\mu) = \{d\omega^\varkappa_\mu + [\omega^\varkappa_\lambda \omega^\lambda_\mu]\}\vec{I}^u_\varkappa.$$

Si l'on pose

(23) $$\Omega^\varkappa_\mu = d\omega^\varkappa_\mu + [\omega^\varkappa_\lambda \omega^\lambda_\mu],$$

la dernière formule pourra s'écrire de la manière suivante

(24) $$d(d\vec{I}^u_\mu) = \Omega^\varkappa_\mu \vec{I}^u_\varkappa.$$

Remarque. Les relations obtenues plus haut et, en particulier, les équations (22) et (24) restent vraies quelque soit la fonction $\varphi(x)$ qui définit la section. Nous pouvons donc les regarder comme relations entre les grandeurs liées à la connexion $L$ et valables dans un voisinage d'un point $b = (x, u)$ de l'espace fibré $B$.

**55. Différentielle absolue.** En conservant les notations du n° 54 supposons que sur le voisinage $U$ soit donné un champs de vecteurs contravariants; nous pouvons dire que ce champs soit donné dans la section $S_\varphi$ (n° 54) ce qui nous permet d'appliquer les notations du numéro précédent. Le vecteur du champs d'origine $x \in U$ soit défini par la formule

(25) $$\vec{X} = X^\mu \vec{I}^u_\mu, \quad u = \varphi(x),$$

où les $X^\mu$ sont les composantes par rapport au repère mobile $R^u_x$. En différentiant l'équation (25) on trouve

$$d\vec{X} = dX^\mu \vec{I}^u_\mu + X^\mu d\vec{I}^u_\mu.$$

En rapprochant l'équation (21) on en déduit la formule

$$d\vec{X} = dX^\mu \vec{I}^u_\mu + \omega^\lambda_\mu \vec{I}^u_\lambda X^\mu.$$

En remplaçant dans le dernier terme l'indice $\mu$ par $\varrho$ et l'indice $\lambda$ par $\mu$ on aura

$$d\vec{X} = (dX^\mu + \omega^\mu_\varrho X^\varrho)\vec{I}^u_\mu.$$

Aux expressions $dX^\mu + \omega^\mu_\varrho X^\varrho$, qui représentent les composantes du vecteur infinitésimal $d\vec{X}$ par rapport au repère $R^u_x$, on a donné le nom de *composantes de la différentielle absolue* du vecteur $\vec{X}$; en les désignant par $DX^\mu$ on aura alors la formule suivante

$$DX^\mu = dX^\mu + \omega^\mu_\varrho X^\varrho; \tag{26}$$

il est évident que la notion de la différentielle absolue a un caractère local.

Imaginons maintenant sur $U$ un champs de vecteurs covariants et désignons par $Y_\mu$ les composantes du vecteur de ce champs, attaché à $x$, par rapport au repère dual de $R^u_x$.

Considérons la somme $X^\mu Y_\mu$ qui est une fonctions scalaire définie dans $U$; en la différentiant on obtient

$$d(X^\mu Y_\mu) = Y_\mu dX^\mu + X^\mu dY_\mu.$$

Si l'on y remplace $dX^\mu$ par son expression $DX^\mu - \omega^\mu_\varrho X^\varrho$, tirée de l'équation (26), on obtient

$$d(X^\mu Y_\mu) = Y_\mu DX^\mu - \omega^\mu_\varrho X^\varrho Y_\mu + X^\mu dY_\mu.$$

En changeant le rôle des indices $\varrho$ et $\mu$ dans le deuxième terme du second membre on aura

$$d(X^\mu Y_\mu) = Y_\mu DX^\mu + (dY_\mu - \omega^\varrho_\mu Y_\varrho) X^\mu.$$

Comme les deux expressions $d(X^\mu Y_\mu)$ et $Y_\mu DX^\mu$ ont un caractère invariant, il en est de même de la somme $(dY_\mu - \omega^\varrho_\mu Y_\varrho) X^\mu$; le vecteur $\vec{X}$ pouvant être pris arbitrairement il s'en suit que les expressions $dY_\mu - \omega^\varrho_\mu Y_\varrho$ sont les composantes d'un vecteur infinitésimal covariant appelé *différentielle absolue du vecteur covariant* $\{Y_\mu\}$; en désignant ces composantes par $DY_\mu$ on aura

$$DY_\mu = dY_\mu - \omega^\varrho_\mu Y_\varrho. \tag{27}$$

La notion de différentielle absolue peut être étendue aux tenseurs arbitraires. Considérons par exemple sur $U$ un tenseur mixte de composantes $T^{\cdot\mu}_{\lambda}$ et deux champs arbitraires des vecteurs contravariants $\{X^\lambda\}$ et des vecteurs covariants $\{Y_\mu\}$. En différentiant la fonction scalaire $T^{\cdot\mu}_{\lambda} X^\lambda Y_\mu$ on démontre par un raisonnement analogue à celui qui est été fait plus haut que les expressions

$$DT^{\cdot\mu}_{\lambda} = dT^{\cdot\mu}_{\lambda} + \omega^\mu_\varrho T^{\cdot\varrho}_{\lambda} - \omega^\varrho_\lambda T^{\cdot\mu}_{\varrho} \tag{28}$$

sont les composantes d'un tenseur infinitésimal mixte que l'on appelle



différentielle absolue du tenseur $\{T^{\cdot\mu}_{\lambda}\}$. De même les différentielles absolues d'un tenseur covariant du second ordre et d'un tenseur contravariant du second ordre sont données respectivement par les formules

$$DT_{\varkappa\lambda} = dT_{\varkappa\lambda} - \omega^\varrho_\varkappa T_{\varrho\lambda} - \omega^\varrho_\lambda T_{\varkappa\varrho}, \tag{28'}$$

$$DP^{\varkappa\lambda} = dP^{\varkappa\lambda} + \omega^\varkappa_\varrho P^{\varrho\lambda} + \omega^\lambda_\varrho P^{\varkappa\varrho}. \tag{28''}$$

Il est facile de verifier que pour la différentielle absolue d'une somme ou d'un produit des tenseurs sont valables les règles de la différentiation ordinaire.

La différentiation absolu peut aussi être appliquée aux tenseurs infinitésimaux. Soit par exemple $\{\tau^\varkappa\}$ un vecteur infinitésimal contravariant dont les composantes dans $U$ sont des formes différentielles extérieures d'un degré $p$ (n° 31c). Si $\{Y_\varkappa\}$ est un vecteur covariant arbitraire défini également dans $U$, la somme $Y_\varkappa \tau^\varkappa$ est une forme différentielle scalaire de degré $p$. Sa différentielle extérieure est donnée par la formule suivante

$$d(Y_\varkappa \tau^\varkappa) = [(dY_\varkappa)\tau^\varkappa] + Y_\varkappa d\tau^\varkappa.$$

Si l'on y remplace la différentielle $dY_\varkappa$ par son expression $DY_\varkappa + \omega^\varrho_\varkappa Y$ tirée de l'équation (27), on trouve

$$d(Y_\varkappa \tau^\varkappa) = [(DY_\varkappa)\tau^\varkappa] + [\omega^\varrho_\varkappa \tau^\varkappa] Y_\varrho + Y_\varkappa d\tau^\varkappa.$$

En changeant dans le deuxième terme du second membre le rôle des indices $\varkappa$ et $\varrho$ on arrive à l'équation suivante

$$d(Y_\varkappa \tau^\varkappa) = [(DY_\varkappa)\tau^\varkappa] + \{d\tau^\varkappa + [\omega^\varkappa_\varrho \tau^\varrho]\} Y_\varkappa.$$

Nous en concluons que le dernier terme est une forme différentielle scalaire de degré $p+1$ et, comme le vecteur $\{Y_\varkappa\}$ peut être choisi arbitrairement, il s'en suit que l'expression $d\tau^\varkappa + [\omega^\varkappa_\varrho \tau^\varrho]$ est la composante de la différentielle absolue du vecteur $\{\tau^\varkappa\}$; nous désignerons par $D\tau^\varkappa$ cette composante qui est une forme différentielle extérieure de degré $p+1$:

$$D\tau^\varkappa = d\tau^\varkappa + [\omega^\varkappa_\varrho \tau^\varrho]. \tag{29}$$

On peut vérifier par le même raisonnement que les formules (27) et (28) sont valables aussi pour les différentielles absolues des tenseurs infinitésimaux. Nous avons vu (équ. (2)) que les composantes du déplacement infinitésimal de l'origine $x$ du repère mobile $R^u_x$ sont égales aux formes linéaires $\omega^\varkappa$; selon les formules (19) on a

$$d\omega^\varkappa + [\omega^\varkappa_\mu \omega^\mu] = \Omega^\varkappa. \tag{30}$$

En vertu de la formule (29) on peut dire que le premier membre de cette égalité représente les composantes de la différentielle absolue du vecteur $\{\omega^\varkappa\}$, on a donc

$$D\omega^\varkappa = \Omega^\varkappa. \tag{30'}$$

Il résulte de ces équations que les formes quadratiques extérieures $\Omega^\varkappa$ sont les composantes par rapport au repère mobile $R_x^u$ $\big(u = \varphi(x)\big)$ d'un vecteur infinitésimal. Nous pouvons regarder ce vecteur comme une grandeur déterminée par la connexion $L$ (nº 54, Remarque) et nous l'appellerons *vecteur de torsion de la connexion.*

Théorème 2. *La différentielle absolue du vecteur d'un déplacement infinitésimal de l'origine d'un repère mobile de la connexion affine $L$ est égale à la torsion de $L$.*

Calculons maintenant la différentielle absolue du vecteur de torsion $\{\Omega^\varkappa\}$. D'après la formule (29) on a

$$D\Omega^\varkappa = \boldsymbol{d}\Omega^\varkappa + [\omega^\varkappa_\varrho \Omega^\varrho];$$

d'autre part, en différentiant extérieurement l'équation (30) on trouve $\boldsymbol{d}\Omega^\varkappa = [\boldsymbol{d}\omega^\varkappa_\mu \omega^\mu] - [\omega^\varkappa_\mu \boldsymbol{d}\omega^\mu]$; si l'on porte cette expression dans l'équation précédente et que l'on fait usage de la formule $\Omega^\varrho = \boldsymbol{d}\omega^\varrho + [\omega^\varrho_\nu \omega^\nu]$, tirée de l'équation (19), on obtient

$$D\Omega^\varkappa = \big[\boldsymbol{d}\omega^\varkappa_\mu \omega^\mu] - [\omega^\varkappa_\mu \boldsymbol{d}\omega^\mu] + [\omega^\varkappa_\varrho(\boldsymbol{d}\omega^\varrho + [\omega^\varrho_\nu \omega^\nu])\big].$$

En changeant convenablement les indices de sommation on trouve

$$D\Omega^\varkappa = [(\boldsymbol{d}\omega^\varkappa_\mu + \omega^\varkappa_\varrho \omega^\varrho_\mu)\,\omega^\mu].$$

En vertu de l'équation (23) ceci peut s'écrire finalement comme il suit

$$D\Omega^\varkappa = [\Omega^\varkappa_\mu \omega^\mu]. \tag{31}$$

Comme $\{D\Omega^\varkappa\}$ est un vecteur infinitésimal et le vecteur $\{\omega^\mu\}$ peut être choisi arbitrairement, on en conclut que les $\Omega^\varkappa_\mu$ sont les composantes d'un tenseur mixte appelé *tenseur de courbure de la connexion.*

En terminant ce numéro déterminons encore la différentielle absolu du tenseur de courbure. Or d'après l'équation (28) on a

$$D\Omega^\varkappa_\mu = \boldsymbol{d}\Omega^\varkappa_\mu + [\omega^\varkappa_\varrho \Omega^\varrho_\mu] - [\omega^\varrho_\mu \Omega^\varkappa_\varrho].$$

Eu égard à la formule (23) on en déduit au moyen d'un calcul facile les relations suivantes

$$D\Omega^\varkappa_\mu = 0. \tag{32}$$



Théorème 3. *La différentielle absolue du tenseur de courbure est nulle.*

Les équations qui expriment ce théorème s'appelent *identités de Bianchi.*

Remarque. Les formes $\pi^h$ définies par les équations (15) dépendent du choix arbitraire des coefficients $l^h_\lambda$. Il en résulte, qu'en général, la torsion et la courbure d'une connexion affine définie dans l'espace fibré $B$ ne sont pas liées intrinsèquement à cet espace.

**56. Connexion à courbure nulle.** Les connexions affines dans l'espace fibré tangent $B$ ont été définies par les formes $\omega^\varkappa_\mu$ qui d'après les formules (18) et (15) peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\omega^\varkappa_\mu = -a^\varkappa_{h\mu}(\tau^h + l^h_\lambda \omega^\lambda).$$

Si l'on y pose $l^h_\lambda = 0$, on obtient la connexion $L_0$ définie par les formes

$$\overset{\circ}{\omega}{}^\varkappa_\mu = -a^\varkappa_{h\mu}\tau^h \tag{33}$$

(nº 53). Ses équations de structure (14) s'écriront donc de la manière suivante:

$$\boldsymbol{d}\omega^\varkappa + [\overset{\circ}{\omega}{}^\varkappa_\mu \omega^\mu] = \tfrac{1}{2} T^\varkappa_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu].$$

D'après les formules (23) les composantes du tenseur de courbure de $L$ sont égales aux expressions

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^\varkappa_\mu = \boldsymbol{d}\overset{\circ}{\omega}{}^\varkappa_\mu + [\overset{\circ}{\omega}{}^\varkappa_\varrho \overset{\circ}{\omega}{}^\varrho_\mu].$$

En tenant compte des formules (33) on en déduit

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^\varkappa_\mu = -a^\varkappa_{h\mu}\boldsymbol{d}\tau^h + a^\varkappa_{i\varrho}a^\varrho_{j\mu}[\tau^i\tau^j]$$

ce qui en vertu de l'équation (8) du nº 42, peut s'écrire comme il suit

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^\varkappa_\mu = -\tfrac{1}{2} a^\varkappa_{h\mu} c_{ij}^{\cdot\cdot h}[\tau^i\tau^j] + a^\varkappa_{i\varrho}a^\varrho_{j\mu}[\tau^i\tau^j],$$

où les $c_{ij}^{\cdot\cdot h}$ désignent les constantes de structure du groupe linéaire $\Gamma$. En réduisant les termes du second membre on trouve

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^\varkappa_\mu = \tfrac{1}{2}\{-a^\varkappa_{h\mu}c_{ij}^{\cdot\cdot h} + a^\varkappa_{i\varrho}a^\varrho_{j\mu} - a^\varkappa_{j\varrho}a^\varrho_{i\mu}\}[\tau^i\tau^j].$$

L'expression en parenthèses étant égale à zéro en vertu de l'équation (13) du nº 43 on arrive à l'équation $\overset{\circ}{\Omega}{}^\varkappa_\mu = 0$. Nous avons ainsi démontré que la connexion $\overset{\circ}{L}_0$ est à courbure nulle.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui complète le Théorème 1 du nº 53:

THÉORÈME 4. *L'espace fibré, de groupe de structure $\Gamma \subset GL(n, R)$, peut être muni d'une connexion à courbure nulle définie globalement.*

Parmi les connexions affines dont l'espace fibré tangent à la variété $V^n$ peut être muni la connexion $L_0$ se distingue par la propriété de ne dépendre d'aucun élément arbitraire. Elle est donc liée intrinsèquement à l'espace $B$ et par suite, les coefficients $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ de sa torsion, qui figurent dans les équations ce sa structure rappelées plus haut, sont des invariants différentiels du premier ordre de l'espace $B$. Cela nous permet de donner à la torsion de $L_0$ le nom de *torsion de l'espace fibré* $B$. Remarquons que, si les formes $\Theta^\varrho$ dans les formules (12) sont fermées ($d\Theta^\varrho = 0$), la torsion de l'espace $B$ est nulle.

La différentiation des composantes $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ conduit aux invariantes différentiels d'ordres supérieures. Les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ étant fonctions du point $b = (x, u)$ leur différentielles peuvent être mises sous la forme suivante

$$dT_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = (T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_h \tau^h + (T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_\nu^\varrho \overset{\circ}{\omega}{}_\varrho^\nu$$

d'où il suit que les coefficients $(T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_h$ et $(T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa})_\nu^\varrho$ sont des invariants différentiels du second ordre de l'espace $B$. En procédant de cette manière on déduit des invariants $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ une suite infinie des invariants différentiels d'ordre $2, 3, \ldots$ de l'espace $B$. Ces invariants dépendent en général du point $x \in V^n$ et du point $u \in \Gamma$, mais on peut d'eux déduire des invariants différentiels qui dépendent seulement du point $x$; E. Cartan a donné à ces invariants respectivement les noms d'invariants relatifs et d'invariants absolus ([8], p. 43).

Au moyen des invariants relatifs on peut résoudre le problème de l'équivalence de deux espace fibrés $B$ et $\overline{B}$, de même groupe de structure $\Gamma$, ayant pour base respectivement les variétés $V^n$ et $\overline{V}^n$; de même les invariants absolus peuvent être utilisés pour déterminer les propriétés locales et globales dont doit jouir une variété $V^n$ pour servir de base de l'espace fibré tangent de groupe de structure $\Gamma$. Pour résoudre ces problèmes il suffit d'appliquer la méthode générale d'Elie Cartan ([15], Partie II, vol. II, p. 1311).

**57. Connexion à courbure nulle (suite).** Supposons comme auparavant que l'espace fibré $B$ soit muni de la connexion $L_0$ sans courbure et admettons que sur un voisinage $U$ de sa base soit faite la section locale $S_\varphi$ au moyen d'une équation $u = \varphi(x)$. Le mouvement du repère mobile $R_x^u$ ($x \in U_i$, $u = \varphi(x)$) alors est déterminé par les équations suivantes

$$(34) \qquad d\vec{I}_\mu^u = \overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa \vec{I}_\varkappa^\mu \qquad (u = \varphi(x))$$



(équ. (21) du nº 54) qui forment un système de Pfaff aux inconnues $\vec{I}_\mu^u$ et aux variables indépendantes $x^\varkappa$. En différentiant extérieurement les équations (34) on obtient

$$(35) \qquad \vec{I}_\varkappa^u d\overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa + [d\vec{I}_\varkappa^\mu \overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa] = 0.$$

Si l'on y remplace $d\vec{I}_\varkappa^\mu$ par les expressions $\overset{\circ}{\omega}{}_\varkappa^\nu \vec{I}_\nu^\mu$ tirées des (34), on trouve

$$\vec{I}_\varkappa^\mu d\overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa + [\overset{\circ}{\omega}{}_\varkappa^\nu \overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa] \vec{I}_\nu^u = 0,$$

ce qui peut être présenté sous la forme

$$\{d\overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varkappa + [\overset{\circ}{\omega}{}_\varrho^\varkappa \overset{\circ}{\omega}{}_\mu^\varrho]\} \vec{I}_\varkappa^u = 0 \quad \text{ou} \quad \overset{\circ}{\Omega}{}_\mu^\varkappa \vec{I}_\varkappa^u = 0.$$

La courbure de la connexion $L_0$ étant nulle (nº 56) on en conclut que les équations (35) sont des conséquences de (34) et que par suite le système pfaffien (34) est complètement intégrable (nº 8).

Imaginons maintenant un point arbitraire $x_0 \in U$ et le repère $R_{x_0}^{u_0}$ ($u_0 = \varphi(x_0)$) tangent à $V^n$; l'ntégration du système complètement intégrable (34) permet de déduire de $R_{x_0}^{u_0}$ un repère bien déterminé $R_x^u$ ($u = \varphi(x)$) tangent à $V^n$ en un point $x$ arbitrairement choisi dans $U$ (nº 8). Nous en concluons que le voisinage $U$ peut être doué du parallèlisme absolu (nº 33) determiné intrinsèquement par la connexion $L$.

**58. Connexions distinguées.** Soit $L$ l'une quelconque des connexions affines locales dont l'espace $B$ peut être muni (nº 53); nous avons vu que ses équations de structure ont la forme suivante

$$(36) \qquad d\omega^\varkappa = a_{h\mu}^\varkappa [\pi^h \omega^\mu] + \tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} [\omega^\lambda \omega^\mu],$$

où les $\Pi^h$ et les $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ sont définies respectivement par les formules

$$\pi^h = \tau^h - l_\lambda^h \omega^\lambda$$

et

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + a_{h\mu}^\varkappa l_\lambda^h - a_{h\lambda}^\varkappa l_\mu^h$$

(équ. (15) et (16) du nº 53).

Choisissons les indéterminées $l_\lambda^h$ de manière que le plus grand nombre possible des coefficients $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ de la torsion de $L$ prennent la valeur zéro. Nous dirons que la connexion ainsi obtenue est une connexion *distinguée* de l'espace $B$.

Admettons que la connexion définie par les équations données plus haut est une connexion distinguée; on peut d'elle déduire une autre connexion distinguée en faisant sur les formes $\pi^h$ une substitution de la forme

$$\pi^h = {}'\pi^h - t^h_\lambda\,\omega^\lambda, \tag{37}$$

où les $t^h_\lambda$ sont des fonctions $C^\infty$ du point $b = (x, u) \in B$ satisfaisant aux conditions

$$a^\varkappa_{h\lambda}t^h_\mu - a^\varkappa_{h\mu}t^h_\lambda = 0. \tag{38}$$

On voit sur les équations (36) que la substitution (37) ne touche en rien les coefficients $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de la torsion de $L$ et que par conséquent toutes les connexions distinguées déduites de $L$ ont la même torsion. Cette torsion peut d'ailleurs être nulle; cela arrive par exemple, si le groupe de structure de l'espace $B$ est le groupe $GL(n, R)$ ou le groupe $Sp(n)$ (Ch. V).

Nous donnerons plus loin (n° 81) un exemple de l'espace fibré tangent à une variété, où l'on peut annuler le plus grand nombre possible des coefficients $S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ de plusieurs manières différentes en obtenant ainsi diverses familles de connexions distinguées.

Il peut arriver que les équations (38) n'admettent que la solution nulle: $t^h_\lambda = 0$ et que par suite l'ensemble de connexions distinguées de l'espace $B$ se réduit à une connexion unique (connexion canonique); dans ce cas les formes $\pi^h$ dans les équations (36) et les expressions $\omega^\varkappa_\mu$ définies par les formules (18) sont complètement déterminées. Il en résulte que les composantes $\Omega^\varkappa_\mu$ du tenseur de la courbure sont des formes différentielles liées invariablement à l'espace fibré $B$. Nous montrerons dans les pages suivantes que ce cas arrive, si le groupe de structure de l'espace $B$ est le groupe orthogonal $O_n$ ou le groupe $O'_n$ (n° 49). Les connexions canoniques qui correspondent à ces groupes portent respectivement le nom de connexion riemannienne et de connexion weylienne.

**59. Connexions prolongées.** Revenons à la connexion $L_0$ et à ses équations de structure

$$d\omega^\varkappa = a^\varkappa_{h\mu}[\tau^h\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu] \tag{39}$$

(n° 53, équ. (14)). Posons $\pi^h = \tau^h + t^h_\lambda\omega^\lambda$, où les $t^h_\lambda$ désignent des indéterminées; le remplacement des formes $\tau^h$ par les $\pi^h$ nous conduit à une connexion locale dont la torsion est déterminée par les formules

$$S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} + a^\varkappa_{h\mu}t^h_\lambda - a^\varkappa_{h\lambda}t^h_\mu.$$

Pour que la torsion de la nouvelle connexion soit égale à celle de $L_0$, il faut qu'il soit

$$a^\varkappa_{h\mu}t^h_\lambda - a^\varkappa_{h\lambda}t^h_\mu = 0.$$



Supposons que ces équations aux inconnues $t^h_\lambda$ admettent $m_1$ solutions indépendantes $(m_1 > 1)$; nous pouvons les présenter sous la forme suivante:

$$t^h_\lambda = \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1}u_1^{h_1} \qquad (h_1 = 1, 2, \ldots, m_1)\ (^1),$$

où les $u_1^{h_1}$ désignent des paramètres arbitraires les $\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda}$ étant des constantes déterminées à un facteur près au moyen des relations suivantes

$$a^\varkappa_{h\mu}\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda} - a^\varkappa_{h\lambda}\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\mu} = 0. \tag{40}$$

Rappelons que les constantes $\overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda}$ donnent naissance au groupe linéaire $\Gamma_1$ qui est le premier groupe associé au groupe de structure $\Gamma$ de la connexion $L$ (n° 49). Ce groupe est formé de $m_1$ transformations linéaires indépendantes de la forme

$$'x^\varkappa = x^\varkappa, \qquad 'x_1^h = x_1^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{h_1\lambda}u_1^{h_1}x^\lambda \tag{41}$$

et son espace est l'espace numérique $G_1$, à $m_1$ dimensions, aux coordonnées $u_1^{h_1}$.

Nous allons montrer que sur l'espace fibré $B$ tangent à la variété $V^n$ peut être construit un second espace fibré tangent $B_1$ dont le groupe de structure est $\Gamma_1$. Considérons à cet effet un voisinage $U$ de la variété $V^n$ et le voisinage correspondant $W = U \times \Gamma$ de l'espace $B$ (n° 51). Soit $b = (x, u)$ un point quelconque de $W$ et $\overrightarrow{db}$ un vecteur infinitésimal tangent en $b$ à $B$, dont les coordonnées par rapport au repère naturel tangent en $b$ à $B$ sont les différentielles $dx, du$. Comme les $\omega^\varkappa$ sont des formes différentielles linéaires, indépendantes par rapport aux différentielles $dx^\lambda$, et les $\tau^h$ sont des formes différentielles linéaires en $du^h$ et indépendantes par rapport aux différentielles $du^h$, l'ensemble des ces formes représente un vecteur infinitésimal tangent en $b$ à l'espace $B$. Nous pouvons donc trouver un repère $R_b(\vec I_\varkappa, \vec I_{n+h})$ tangent en $b$ à l'espace $B$ et tel qu'il soit

$$\overrightarrow{db} = \omega^\varkappa\vec I_\varkappa + \tau^h\vec I_{n+h}, \tag{42}$$

les $\vec I_\varkappa$ étant vecteurs tangents en $x$ à variété $V^n$ et les $\vec I_{n+h}$ étant vecteurs tangents en $b$ à l'espace $B$ et indépendants des vecteurs $\vec I_\varkappa$. Faisons maintenant sur le repère $R_b$ la substitution suivante

$$\vec I_\varkappa = \vec I^{u_1}_\varkappa + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa}u_1^{i_1}\vec I^{u_1}_{n+h}, \qquad \vec I_{n+h} = \vec I^{u_1}_{n+h} \qquad (u_1 \in G_1); \tag{43}$$

(1) Dans tout ce qui suit les indices $h, i, j$ parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, m$ et les indices $h_1, i_1, j_1$ les valeurs $1, 2, \ldots, m_1$.

on obtient ainsi de $R_b$ un nouveau repère $R_b^{u_1}$ tangent en $b$ à l'espace $B$. En substituant les expressions (43) dans la formule (42) on trouve

$$\vec{db} = \omega^\varkappa \vec{I}_\varkappa^{u_1} + (\tau^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_1^{i_1} \omega^\varkappa) \vec{I}^{u_1}_{n+h}. \tag{44}$$

Les composantes du vecteurs $\vec{db}$ par rapport au repère $R_b^{u_1}$ sont donc données par les formules suivantes:

$$'\omega^\varkappa = \omega^\varkappa, \qquad '\tau^h = \tau^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_1^{i_1} \omega^\varkappa;$$

en les comparant avec les équations (41) on en conclut que les équations (43) représentent une transformation $\Gamma_1(u_1)$ du groupe linéaire $\Gamma_1$ et que par suite le repère $R_b^{u_1}$ se déduit de $R_b$ au moyen de la transformation $\Gamma_1(u_1)$.

Supposons maintenant que le point $b$ appartienne à deux voisinages $W_k = U_k \times \Gamma$ et $W_l = U_l \times \Gamma$ $(U_k \subset V^n,\ \ U_l \subset V^n)$ d'un recouvrement de l'espace $B$ et désignons respectivement par $(x, u_k)$ et $(x, u_l)$ ses coordonnées dans $W_k$ et $W_l$. Attachons au point $b$ deux repères $R_b^{u_{1k}}$ et $R_b^{u_{1l}}$, $u_{1k}$ et $u_{1l}$ étant deux éléments arbitraires de l'espace $G_1$ du groupe linéaire $\Gamma_1$; la formule (44) appliquée successivement à ces deux repères conduit aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \vec{db} &= \omega_k^\varkappa \vec{I}_\varkappa^{u_{1k}} + (\tau_k^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1k}^{i_1} \omega_k^\varkappa) \vec{I}^{u_{1k}}_{n+h}, \\ \vec{db} &= \omega_l^\varkappa \vec{I}_\varkappa^{u_{1l}} + (\tau_l^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1l}^{i_1} \omega_l^\varkappa) \vec{I}^{u_{1l}}_{n+h}. \end{aligned} \tag{45}$$

Les formes $\omega_k^\varkappa$ qui y figurent étant définies globalement dans l'espace $B$ (n° 53) leurs expressions sont indépendantes du choix des coordonnées de $b$: $\omega_k^\varkappa = \omega_l^\varkappa = \omega^\varkappa$;

Les deux expressions (45) représentant le même vecteur $\vec{db}$ il s'en suit que, si le point $u_{1k} \in G_1$ est choisi d'une manière fixe d'ailleurs quelconque, on peut déterminer le point $u_{1l} \in G$ de telle manière que les composantes de $\vec{db}$ par rapport à $R_b^{u_{1k}}$ et $R_b^{u_{1l}}$ soient respectivement égales, c'est-à-dire qu'il soit

$$\tau_k^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1k}^{i_1} \omega^\varkappa = \tau_l^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1l}^{i_1} \omega^\varkappa,$$

ou

$$\tau_l^h = \tau_k^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} (u_{1k}^{i_1} - u_{1l}^{i_1}) \omega^\varkappa.$$

Si l'on pose

$$2u_{1kl} = u_{1k} - u_{1l},$$

la dernière égalité peut s'écrire comme il suit

$$\tau_k^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1kl}^{i_1} \omega^\varkappa = \tau_l^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\varkappa} u_{1lk}^{i_1} \omega^\varkappa; \tag{46}$$



remarquons que $u_{1kl} = -u_{1lk}$ est un élément de l'espace $G_1$ du groupe linéaire $\Gamma_1$. On voit ainsi que pour chaque paire des voisinages $W_k$ et $W_l$ de l'espace fibré $B$, contenant un point $b$, peut être déterminée en $b$ un élément $u_{1kl}(b) \in G$ tel que les deux membres de l'équation (46) soient égales; désignons par $\overset{(1)}{\omega}{}^h$ leur valeur commune. Nous convenons de regarder $(b, u_{1k})$ et $(b, u_{1l})$ comme un même point $b_1$ d'un espace $B_1$, si $u_{1k}$ et $u_{1l}$ sont liés l'un à l'autre d'une manière établie plus haut; nous dirons que $(b, u_{1k})$ et $(b, u_{1l})$ sont les coordonnées de $b_1$ dans les ensembles $W_k \times \Gamma_1$ et $W_l \times \Gamma_1$ qui jouent le rôle des voisinages de l'espace $B_1$. Comme $B_1$ a été construit d'une manière analogue à celle qui nous a conduit à l'espace $B$, nous pouvons dire que $B_1$ est un espace fibré tangent à $B$, ayant le groupe linéaire $\Gamma_1$ pour groupe de structure, et que les formes $\overset{(1)}{\omega}{}^h$ sont définies globalement dans tout l'espace $B_1$; la dimension de l'espace $B_1$ est égale au nombre $n+m+m_1$.

Si $U$ est un voisinage quelconque d'un recouvrement de la variété $V^n$, les produits $U \times \Gamma$ et $U \times \Gamma \times \Gamma_1$ sont respectivement des voisinages des espaces fibrés $B$ et $B_1$. D'après leur définition donnée plus haut les formes $\overset{(1)}{\omega}{}^h$ seront présentées dans $U \times \Gamma \times \Gamma_1$ par les expressions suivantes:

$$\overset{(1)}{\omega}{}^h = \tau^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} u_1^{i_1} \omega^\lambda. \tag{47}$$

Ceci posé différentions extérieurement les équations (47); on aura

$$d\overset{(1)}{\omega}{}^h = d\tau^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} [du_1^{i_1} \omega^\lambda] + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} u_1^{i_1} d\omega^\lambda.$$

Si l'on y tient compte des équations $d\tau^h = \frac{1}{2}\gamma_{ij}^{\cdot\cdot h}[\tau^i\tau^j]$ (n° 43, équ. (8)) et des formules $d\omega^\lambda = a^\lambda_{i\mu}[\tau^i\omega^\mu] + \frac{1}{2}T_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\lambda}[\omega^\varrho\omega^\sigma]$, tirées des équations (39), on en déduit les équations suivantes:

$$\begin{aligned} d\overset{(1)}{\omega}{}^h = {} & \tfrac{1}{2}\gamma_{ij}^{\cdot\cdot h}[\tau^i\tau^j] + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}[du_1^{i_1}\omega^\lambda] + \\ & + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} u_1^{i_1} \{a^\lambda_{i\mu}[\tau^i\omega^\mu] + T_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\lambda}[\omega^\varrho\omega^\sigma]\}. \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après (47), les formes $\tau^i$ peuvent être exprimées au moyen des formes $\overset{(1)}{\omega}{}^\lambda$ et $\overset{(1)}{\omega}{}^h$; en portant les expressions ainsi obtenues dans le terme $a^\lambda_{i\mu}[\tau^i\omega^\mu]$ on trouve que la différentielle $d\overset{(1)}{\omega}{}^h$ peut être écrite de la manière suivante:

$$(48)\qquad d\overset{(1)}{\omega}{}^h = \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}[du_1^{i_1}\,\omega^\lambda] + K^h_{i\lambda}[\overset{(1)}{\omega}{}^i\,\omega^\lambda] - $$
$$- \tfrac{1}{2}\gamma_{ij}^{\cdot\cdot h}[\overset{(1)}{\omega}{}^i\overset{(1)}{\omega}{}^j] + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

où le coefficients sont des fonctions définies dans un voisinage du point $b_1 = (x, u, u_1)$ de l'espace $B_1$.

Nous dirons que les formes $\overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}du_1^{i_1}$ déterminent dans l'espace fibré $B_1$, tangent à l'espace $B$, une *connexion prolongée* $L_1$ de groupe de structure $\Gamma_1$ et que les (48) sont les équations de structure de $L_1$. La connexion $L_1$ est définie dans tout l'espace $B_1$ et les coefficients $K^h_{i\lambda}$, $\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}$ sont des invariants différentiels de cet espace.

Les équations (48) peuvent être réduites à une forme plus simple. Posons à cet effet

$$(49)\qquad \overset{(2)}{\pi}{}^{i_1} = du_1^{i_1} + s_i^{i_1}\overset{(1)}{\omega}{}^i;$$

si dans les équations (48) on remplace les différentielles $du_1^{i_1}$ par leurs expressions tirées des relations ci-dessus, on les ramène à la forme suivante:

$$d\overset{(1)}{\omega}{}^h = \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}[\overset{(2)}{\pi}{}^{i_1}\omega^\lambda] + \overline{K}^h_{i\lambda}[\overset{(1)}{\omega}{}^i\omega^\lambda] -$$
$$- \tfrac{1}{2}\gamma_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\overset{(1)}{\omega}{}^j] + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

où

$$\overline{K}^h_{i\lambda} = K^h_{i\lambda} - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}s_i^{i_1}.$$

Comme les transformations (41) du groupe linéaire $\Gamma_1$ sont independantes, on peut déterminer les coefficients $s_i^{i_1}$ de manière qu'il soit $\overline{K}^h_{i\lambda} = 0$. Par conséquent les équations de structure de la connexion $L_1$ prendront la forme

$$(50)\qquad d\overset{(1)}{\omega}{}^h = \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}[\overset{(2)}{\pi}{}^{i_1}\omega^\lambda] - \tfrac{1}{2}\gamma_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\omega^j] + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}[\omega^\lambda\omega^\mu];$$

aux coefficients $\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h} = -\overset{(1)}{T}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot h}$ nous donnerons le nom de *composantes de torsion* de $L_1$; ils sont des invariants différentiels de $B_1$. Remarquons que les coefficients $s_i^{i_1}$ ont été déterminés par les équations $K^h_{i\lambda} - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}s_i^{i_1} = 0$; elles s'expriment donc au moyen des invariants différentiels $K^h_{i\lambda}$ de l'espace $B_1$ et, par suite, les formes $\overset{(2)}{\pi}{}^{i_1}$, définies par les formules (49), sont données globalement dans tout l'espace $B_1$.

Aux équations de structure (50) de la connexion $L_1$ on doit associer les équations (39)

$$d\omega^\varkappa = a^\varkappa_{h\mu}[\tau^h\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu];$$



si l'on y remplace les $\tau^h$ par les expressions $\tau^h = \overset{(1)}{\omega}{}^h - \overset{(1)}{a}{}^h_{i\lambda}u_1^{i_1}\omega^\lambda$ tirées des équations (47), les coefficients $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ ne seront pas altérés, en vertu des relations (40), et, par suite, on aura

$$(51)\qquad d\omega^\varkappa = a^\varkappa_{h\mu}[\overset{(1)}{\omega}{}^h\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu].$$

En résumant nous pouvons dire que les équations de structure de la connexion prolongée $L_1$ se compose de l'ensemble des équations (50) et (51).

De la connexion $L_1$ on peut déduire d'autres connexions dans l'espace $B_1$ en posant

$$(52)\qquad \overset{(2)}{\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{\pi}{}^{i_1} + l_\mu^{i_1}\omega^\mu,$$

où les $l_\lambda^{i_1}$ désignent des indéterminées. Si dans les équations (50) on remplace les $\overset{(2)}{\pi}{}^{h_1}$ par les $\overset{(2)}{\omega}{}^{h_1}$, on obtient les équations de structure de la nouvelle connexion dont la torsion est définie par les formules

$$'\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h} = \overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h} + \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}l_\mu^{i_1} - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\mu}l_\lambda^{i_1}.$$

Pour que la torsion soit inaltérée, il faut qu'il soit

$$\overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}l_\mu^{i_1} - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\mu}l_\lambda^{i_1} = 0.$$

Si ces équations n'admettent que la solution $l_\lambda^{i_1} = 0$, il existe une seulement connexion prolongée de torsion $\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}$. Dans le cas contraire l'espace $B_1$ peut être muni d'une infinité de connexions de torsion $\overset{(1)}{T}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot h}$ et l'on obtient leur ensemble en posant

$$(53)\qquad l_\mu^{i_1} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}u_2^{h_2}\qquad (h_2 = 1, 2, \ldots, m_2 > 1),$$

où les $u_2^{h_2}$ sont des paramètres arbitraires, les $\overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{h_2\lambda}$ étant des constantes qui verifient les relations

$$\overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\mu}\overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\lambda} - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}\overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\mu} = 0.$$

Rappelons que les constantes $\overset{(2)}{a}{}^{h_1}_{i_2\lambda}$ donnent naissance au second groupe associé au groupe linéaire $\Gamma$ (n° 49). Les transformations de ce groupe, qui a été désigné par $\Gamma_2$, s'obtiennent en portant les expressions (53) dans les équations (52) et en ajoutant les transformations identiques $'\omega^\varkappa = \omega^\varkappa$; on aura donc

$$'\omega^\varkappa = \omega^\varkappa,\qquad \overset{(2)}{\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{\pi}{}^{i_1} + \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}u_2^{h_2}\omega^\mu\qquad (h_2 = 1, 2, \ldots, m_2).$$

Un raisonnement tout pareil à celui qui nous a conduit à établir l'espace fibré $B_1$ permet de montrer que sur $B_1$ peut être construit un espace fibré principal $B_2$, de groupe de structure $\Gamma_2$, tangent à $B_1$ et que cet espace peut être muni d'une connexion affine $L_2$ dont les équations de structure peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\overset{(2)}{d\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}[du_2^{h_2}\,\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu]$$

ou encore sous la forme équivalente

$$\overset{(2)}{d\omega}{}^{i_1} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{h_2\mu}[\overset{(3)}{\omega}{}^{h_2}\,\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

les $\overset{(3)}{\omega}{}^{h_2}$ désignant des formes différentielles linéaires définies dans tout l'espace $B_2$; les $\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\lambda\mu} = -\overset{(2)}{T}{}^{\cdot\cdot i_1}_{\mu\lambda}$ sont les composantes de la torsion de $L_2$.

**60. Connexions prolongées (suite).** Nous avons vu au nº 49 que les groupes associés à un groupe linéaire $\Gamma$ forment une suite

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r, \ldots \tag{54}$$

qui peut être finie ou infinie; en poursuivant nos raisonnements nous pouvons montrer qu'à la suite (54) correspond une suite

$$B, B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots \tag{55}$$

des espaces fibrés principaux dont chacun est tangent à celui qui le précède, le groupe de structure de $B_r$ étant $\Gamma_r$. L'espace $B_r$ peut être muni d'une connexion affine $L_r$ dont les équations de structure peuvent être écrites comme il suit:

$$\overset{(r)}{d\omega}{}^{h_{r-1}} = \overset{(r)}{a}{}^{h_{r-1}}_{i_r\mu}[\overset{(r+1)}{\omega}{}^{i_r}\,\omega^\mu] + \tfrac{1}{2}\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda\omega^\mu],$$

les $\overset{(r)}{\omega}{}^{h_{r-1}}$ et les $\overset{(r+1)}{\omega}{}^{i_r}$ désignant des formes différentielles linéaires définies dans tout l'espace $B_r$; les $\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\lambda\mu} = -\overset{(r)}{T}{}^{\cdot\cdot h_{r-1}}_{\mu\lambda}$, composantes de la torsion de $L_r$, sont des invariants différentiels de l'espace $B_r$.

---

CHAPITRE V

# CONNEXIONS CLASSIQUES

Le présent Chapitre, divisé en cinq paragraphes, est consacré aux connexions dont les groupes de structure sont les groupes linéaires classiques. En appliquant le raisonnement général développé dans le chapitre précédent je considère successivement la connexion linéaire, unimodulaire, euclidienne, weylienne et symplectique. Dans ces exposés, conformément au but principal de la géométrie différentielle, passe au premier plan la recherche des invariants différentiels dont on puisse faire usage pour résoudre les problèmes d'équivalence. Pour atteindre ce but j'emploie la méthode suggérée par les travaux d'E. Cartan sur les groupes continus et finis (v. par exemple [6]); cette méthode, qui peut aussi être appliquée à la théorie des connexions (v. S. S. Chern [16]), permet de déduire d'une connexion, dont le groupe de structure est un sous-groupe quelconque de $GL(n,R)$, d'autre connexions du même groupe de structure. En se servant de cette méthode on montre que d'une connexion linéaire, unimodulaire ou symplectique peut être obtenue une suite infinie des connexions que j'appelle connexions prolongées; ceci trouve une application dans la théorie des groupes continus infinis en montrant ainsi un lien entre les théories de connexions et des groupes infinis de Lie.

En terminant ce chapitre je considère (nº 81) l'intéressante connexion dont le groupe de structure est le sous-groupe commun aux groupes $O_n^+$ et $Sp(n)$.

## § 1. Connexions linéaires

**61. Définition.** Une connexion affine définie dans une variété $V^n$ est dite *linéaire*, si son groupe de structure est le groupe $GL(n, R)$ représenté par l'ensemble des matrices régulières $[a^\varkappa_\lambda]$.

**62. Connexion linéaire sans courbure.** Pour établir les fondements des connexions linéaires nous appliquons les raisonnements du nº 51. Imaginons pour cela une variété $V^n$ (¹) munie d'un recouvrement et envisageons dans un voisinage quelconque $U_i$ du recouvrement le champs de repères naturels (nº 32) formés des vecteurs contravariants. Soit $R_{ix}$ le repère du champs attaché à un point $x \in U_i$. En assujettissant les vecteurs, dont $R_{ix}$ est formé, aux transformations du groupe $GL(n, R)$ on obtient un ensemble de repères $R^u_{ix} = uR_{ix}$ $(u \in GL(n, R))$ tangents en $x$ à $V^n$.

(¹) Dans tout ce Chapitre et deux chapitres suivants les variétés et les fonctions dont il sera question sont supposées $C^\infty$.