CHAPITRE III

FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR LES VARIÉTÉS VARIÉTÉS PARALLÉLISABLES

Conformément à son titre ce chapitre est divisé en deux paragraphes. Le premier d'eux est consacré à la notion de variété différentiable, à l'espace vectoriel tangent et aux objets géometriques (tenseurs, formes différentielles) définis sur une variété différentiable. Le deuxième contient l'exposition des propriétés d'une variété parallélisable et en particulier de ses invariants différentiels.

§ 1. Variétés différentiables

30. Variétés. Considérons un ensemble de points E doué des propriétés suivantes:

1° Il existe dans E des sous-ensembles appelés voisinages tels que chacun point de E appartient à l'un au moins d'eux; si un point $x \in E$ appartient à un voisinage U, on dit que U est un *voisinage* de x.

Une famille des voisinages satisfaisants à la condition ci-dessus énoncée porte le nom d'un *recouvrement* de E.

2° Si un point $x \in E$ appartient à deux voisinages U_1 et U_2, il existe un voisinage U de x tel qu'il soit $U \subset U_1$ et $U \subset U_2$.

3° Si x_1 et x_2 sont deux points différents de E, il existe deux voisinages U_1 et U_2 tels qu'il soit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ et $U_1 \cap U_2 = 0$.

4° L'union d'un nombre quelconque des voisinages et l'intersection d'un nombre fini des voisinages est un voisinage de E. Il en résulte que l'union de deux recouvrements de E est un recouvrement de E.

L'ensemble de points E satisfaisant aux conditions 1°-4° s'appelle *espace topologique*. Nous définirons maintenant une classe d'espaces topologiques en leur imposant des conditions supplémentaires.

5° Chaque voisinage de E est homéomorphe à l'intérieur d'une hypersphère de $R^n(x^\varkappa)$. Si cet homéomorphisme fait correspondre à un point x d'un voisinage U un point $(x^\varkappa) \in R^n(x^\varkappa)$, on dit que les nombres $x^\varkappa$ sont les *coordonnées* de x et que l'on a ainsi établi dans U un *système des coordonnées locales*. Si $\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ sont fonctions de classe k $(k \geqslant 1)$ des coordonées locales dans U et si elles satisfont à la condition $|\partial \bar{x}^\varkappa / \partial x^\lambda| \neq 0$, on prend leurs valeurs comme un nouveau système de coordonnées locales dans U. Tous les systèmes des coordonnées ainsi intro-

duits portent le nom de *systèmes admissibles*. On désignera dans la suite par $U(x^\varkappa)$ un voisinage muni d'un système des coordonnées admissibles $x^\varkappa$.

6° Si $x \in U(x^\varkappa) \cap \bar{U}(\bar{x}^\varkappa)$, ses coordonnées sont liées par les formules $\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $f^\varkappa$ étant des fonctions C^k définies dans un voisinage de x et satisfaisantes à la condition $|\partial \bar{x}^\varkappa / \partial x^\lambda| \neq 0$.

7° Les voisinages d'un recouvrement arbitraire de E ne peuvent pas être décomposés en deux ensembles dépourvus des points communs; on exprime cette propriété en disant que E est un *espace connexe*.

8° Il existe un recouvrement composé d'un nombre fini des voisinages ou d'une infinité dénombrable.

Un espace topologique remplissant les conditions 5°-8° s'appelle *variété différentiable à n dimensions de classe k*; nous la désignerons par V^n. Si $k = \omega$, on dit que V^n est une *variété analytique*.

Si de chacun recouvrement d'une variété on peut tirer un nombre fini des voisinages formant son recouvrement complet, on dit que la variété est *compacte*; une variété qui n'est pas compacte est dite *ouverte*.

Soit V^n une variété arbitraire de classe fini k; d'après un théorème de H. Whitney il existe une variété $\bar{V}^n$ de classe ∞ homéomorphe à V^n, cet homéomorphisme se réalisant de la manière suivante: si $x \in V^n$ est un point de coordonnées locales $x^\varkappa$ et si son image $\bar{x}$ dans $\bar{V}^n$ est de coordonnées locales $\bar{x}^\varkappa$, ces coordonnées sont liées par les relations $\bar{x}^\varkappa = f^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, où $f^\varkappa$ sont des fonctions de classe k et telles qu'il soit $|\partial \bar{x}^\varkappa / \partial x^\lambda| \neq 0$ au point x. En vertu de ce théorème nous pouvons nous borner à envisager dans ce livre deux classes de variétés: les variétés de classe ∞ et les variétés analytiques; en parlant dans la suite d'une variété nous allons supposer, sauf mention contraire, qu'elle soit de classe ∞.

On dit qu'une variété est *orientable*, si l'on y peut établir les systèmes des coordonnées locales de manière qu'il soit $|\partial \bar{x}^\varkappa / \partial x^\lambda| > 0$ en tout point commun à deux voisinages $U(x^\varkappa)$ et $\bar{U}(\bar{x}^\varkappa)$. Si l'on a introduit les coordonnées locales conformes à cette condition, on dit que V^n a été *orientée*. En établissant dans chacun des voisinages d'une variété orientée des nouvelles coordonnées admissibles par une transformation de jacobien négatif on obtient une seconde orientation. On voit ainsi qu'une variété orientable peut être orientée de deux manières différentes. Nous allons supposer constamment que les variétés dont nous allons à faire soient orientables.

Remarque. Le produit cartésien $V^m \times \bar{V}^n$ de deux variétés de classe $\infty(\omega)$ est une variété de classe $\infty(\omega)$, si l'on considère le produit de leurs voisinages $U(x^\varkappa) \times \bar{U}(\bar{x}^\varkappa)$ comme le voisinage de $V^m \times \bar{V}^n$ et les variables $x^1, x^2, \ldots, x^m, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ comme le système de ses coordonnées locales.

31. Objets géométriques sur une variété. Nous allons maintenant définir divers objets géometriques sur une variété différentiable V^n en

prenant comme base un domaine ouvert D de V^n recouvert par des voisinages de V^n. Nous nous plaçons constamment dans l'hypothèse, où V^n et toutes les fonctions dont nous allons parler sont de classe C^∞. On doit remarquer qu'en général l'existance des objets que nous définirons dans la suite ne peut pas être assurée sur toute une variété arbitrairement donnée. Les définitions que nous allons donner dans la suite doivent être valables quelque soit le recouvrement de V^n dont nous avons tiré les voisinages recouvrants le domaine D.

a) Nous dirons que dans un domaine D est donnée une *fonction*, si dans chacun de ses voisinages est définie une fonction des coordonnées locales et si les valeurs de ces fonctions en un point commun à deux voisinages sont égales.

b) Supposons que dans chacun des voisinages de D soit donné un champ des vecteurs contravariants tangents à V^n (n° 3); admettons de plus que, si un point x appartient à deux voisinages $U(x^\varkappa)$ et $\overline{U}(\overline{x}^\varkappa)$ de D, les composantes $\xi^\varkappa$ et $\overline{\xi}^\varkappa$ des vecteurs d'origine x, données respectivement dans U et $\overline{U}$, sont liées par les relations

$$\overline{\xi}^\varkappa = \frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\varrho}\xi^\varrho,$$

où $\overline{x}^\varkappa = \overline{x}^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^\varrho)$ sont les fonctions qui font passer des coordonnées $x^\varkappa$ aux coordonnées $\overline{x}^\varkappa$ dans un voisinage de x. Nous dirons alors que sur D est donné un *vecteur contravariant* $\vec{V}$ *tangent à* D. On définit d'une manière analogue les *vecteurs covariants*, les *polyvecteurs* et les *tenseurs tangents à* D.

Supposons par exemple que l'on se donne dans chacun des voisinages de D un tenseur mixte de composantes $A_\varkappa^{\cdot\lambda} = \delta_\varkappa^\lambda$ dans un système de coordonnées locales; il est évident que cela revient à donner ce tenseur sur le domaine D et que son existence peut être étendue sur toute la variété V^n: Nous désignerons ce tenseur par $\mathfrak{A}$.

c) Supposons de suite que dans chaque voisinage de D soit donnée en coordonnées locales une forme différentielle extérieure de degré p et admettons que les expressions $\Omega_p^\varkappa$ et $\Omega_p^{\overline{\varkappa}}$ qui les représentent dans deux voisinages $U(x^\varkappa)$ et $\overline{U}(\overline{x}^\varkappa)$ sont liées en un point $x \in U \cap \overline{U}$ par la relation suivante

$$\Omega_p^{\overline{\varkappa}} = T(\Omega_p^\varkappa),$$

où T désigne la transformation qui fait passer dans un voisinage de x du système $x^\varkappa$ au système $\overline{x}^\varkappa$. On dit alors que sur D est donnée une forme différentielle extérieure Ω_p de degré p.

Donnons nous maintenant sur D un tenseur mixte une fois contravariant et une fois covariant; soient $a_{\cdot\varrho}^\sigma$ et $\overline{a}_{\cdot\varrho}^\sigma$ ses composantes données respectivement dans les voisinages $U(x^\varkappa)$ et $\overline{U}(\overline{x}^\varkappa)$ de D; ces composantes sont liées en un point $x \in U \cap \overline{U}$ par les relations

$$\overline{a}_{\cdot\lambda}^\varkappa = \frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\varrho}{\partial \overline{x}^\lambda} a_{\cdot\varrho}^\sigma.$$

Posons $\tau^\sigma = a_{\cdot\varrho}^\sigma dx^\varrho$, $\overline{\tau}^\varkappa = \overline{a}_{\cdot\lambda}^\varkappa d\overline{x}^\lambda$; on en déduit dans un voisinage de x les équations

$$\overline{\tau}^\varkappa = \frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\varrho}{\partial \overline{x}^\lambda} a_{\cdot\varrho}^\sigma d\overline{x}^\lambda$$

ou

$$\overline{\tau}^\varkappa = \frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\sigma}\tau^\sigma. \tag{1}$$

Nous voyons que dans chaque voisinage de D a été ainsi définie une suite des formes différentielles linéaires qui se transforment d'après les formules (1) en un point de D commun à deux voisinages. Nous dirons que sur D a été donné un vecteur infinitésimal ([14], p. 208) et que les formes $\tau^\varkappa$ et $\overline{\tau}^\varkappa$ sont ses composantes respectivement dans $U(x^\varkappa)$ et $\overline{U}(\overline{x}^\varkappa)$.

Cette définition peut se généraliser; si par exemple sur le domaine D est donné un tenseur dont les composantes $a_{\cdot\lambda\mu\nu}^\varkappa$ sont symétriques gauches en les indices inférieurs, on posera dans $U(x^\varkappa)$

$$\Pi^\varkappa = \frac{1}{3!} a_{\cdot\lambda\mu\nu}^\varkappa [dx^\lambda dx^\mu dx^\nu]$$

et l'on obtient ainsi sur D un vecteur infinitésimal dont les composantes $\Pi^\varkappa$ sont des formes différentielles extérieures du troisième degré.

Si en particulier on se sert du tenseur $\mathfrak{A}$ (v. plus haut b)), on obtient sur D et même sur toute la variété V^n un vecteur infinitésimal dont les composantes dans le voisinage $U(x^\varkappa)$ sont les différentielles $dx^\varkappa$; nous désignerons ce vecteur par $\overrightarrow{dx}$.

d) Supposons que dans tous les voisinages d'un domaine D d'une variété analytique V^n soit donné un système de s formes pfaffiennes indépendantes qui satisfont aux conditions suivantes:

1° Si $\{\omega^h\}$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ est le système donné dans un voisinage $U(x^\varkappa)$ de D, on a

$$d\omega^h = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s}.$$

2° Si $\{\omega^h\}$ et $\{\overline{\omega}^h\}$ sont les systèmes donnés respectivement dans les voisinages $U(x^\varkappa)$ et $\overline{U}(\overline{x}^\varkappa)$ de D tels qu'il soit $U \cap \overline{U} \neq 0$, dans tout point $x \in U \cap \overline{U}$ sont satisfaites les équations suivantes

$$\omega^h = a_i^h \omega^i \quad (h, i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

où a_i^h sont des fonctions analytiques définies dans un voisinage de x et telles qu'il soit $|a_i^h| \neq 0$.

Le système des équations $\omega^h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ étant complètement intégrable dans U (n° 8), il peut être remplacé dans un voisinage de chaque point de U par le système équivalent de la forme

$$df^h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s), \tag{3}$$

où les f^h désignent des fonctions analytiques indépendantes (n° 9, 3°). Or en vertu de l'hypothèse 1° le système $\overline{\omega}^h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ est complètement intégrable dans le voisinage $\overline{U}$; il peut donc être remplacé dans un voisinage de chaque point de $\overline{U}$ par le système des équations

$$d\overline{f}^h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

analogue au système (3). Il en résulte, d'après les formules (2), qu'on peut déterminer un ensemble des fonctions b_i^h de manière qu'il soit

$$df^h = b_i^h d\overline{f}^i \quad (h, i = 1, 2, \ldots, s)$$

dans un voisinage de tout point de $U \cap \overline{U}$. On en conclut que dans ce voisinage les fonctions f^h peuvent être exprimées au moyen des fonctions $\overline{f}^h$. Nous voyons donc que les deux systèmes des équations $\omega^h = 0$ et $\overline{\omega}^h = 0$ ont les mêmes intégrales premières dans un voisinage de chaque point de D, où ils sont simultanément donnés (n° 7). Nous dirons que les systèmes de Pfaff satisfaisants aux conditions énoncées plus haut forment un système complètement intégrable dans le domaine D.

32. Espaces vectoriels tangents à V^n [1]. Considérons l'ensemble des vecteurs contravariants tangents à V^n en un point x. Comme parmi ces vecteurs il y a n indépendants, ils forment, sur le corps des nombres réels, un espace vectoriel dit tangent à V^n en x. Désignons par R_x un repère de cet espace formé de n vecteurs indépendants $\vec{I}_h = \{\xi_h^\varkappa\}$, où $\xi_h^\varkappa$ sont les composantes de $\vec{I}_h$ dans un système des coordonnées locales $x^\varkappa$ du voisinage de x. Comme les vecteurs $\vec{I}_h$ sont par hypothèse indépendants $(|\xi_h^\varkappa| \neq 0)$, il existe n^2 nombres réels $\eta_\varkappa^h$ tels qu'il soit

$$\xi_h^\varkappa \eta_\lambda^h = \delta_\lambda^\varkappa, \qquad \xi_h^\varrho \eta_\varrho^i = \delta_h^i. \tag{4}$$

Les n nombres $\eta_\varkappa^h$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ peuvent être envisagés comme les composantes, dans le système $x^\varkappa$, d'un vecteur covariant $\vec{I}^h$ attaché à x. Les vecteurs $\vec{I}^h$ forment un repère R_x^* de l'espace vectoriel à n dimensions des vecteurs covariants, dit *tangent* à V^n en x. Les deux espaces vectoriels ainsi définis et leurs repères R_x et R_x^* sont dits *duaux*.

[1] Dans la suite de ce paragraphe les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et les indices latins les valeurs $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n}$.

Si l'on fait sur les vecteurs $\vec{I}_h$ une substitution régulière

$$'\vec{I}_h = p_h^i \vec{I}_i,$$

et sur les $\vec{I}^h$ la substitution inverse, on obtient deux nouveaux repères duaux des espaces vectoriels tangents à V^n en x.

Le produit du point x et de deux espaces vectoriels tangent à V^n en x donne naissance à un espace affine A_x^n dit tangent à V^n en x. Nous le rapporterons au repère composé du point x comme origine et des vecteurs $\vec{I}_h$ du repère R_x et désigné par le même symbole R_x, si aucune confusion n'est à craindre.

Supposons que la variété V^n soit orientée et que les coordonnées locales $x^\varkappa$ dans le voisinage d'un point x soient compatibles avec l'orientation adoptée. Imaginons maintenant en x un repère R_x et admettons que les vecteurs $\vec{I}_h = \{\xi_h^\varkappa\}$ soient ordonnés de telle manière qu'il soit $\Delta = |\xi_h^\varkappa| > 0$; nous dirons que R_x a été orienté d'une manière compatible avec l'orientation de la variété. Si l'on introduit dans V^n des nouvelles coordonnées locales $\overline{x}^\varkappa$ et que l'on calcule en x le déterminant $\overline{\Delta} = |\overline{\xi}_h^\varkappa|$ des composantes

$$\overline{\xi}_h^\varkappa = \frac{\partial \overline{x}^\varkappa}{\partial x^\varrho} \xi^\varrho$$

des vecteurs $\vec{I}_h$ dans le nouveau système, on aura

$$\overline{\Delta} = \Delta \cdot J,$$

où J est le jacobien $|\partial \overline{x}^\varkappa / \partial x^\lambda|$. On voit que $\overline{\Delta}$ sera positif ou négatif selon que l'on a $J > 0$ ou $J < 0$; il en résulte que le signe de $\overline{\Delta}$ indique l'orientation du nouveau système des coordonnées. Nous pouvons donc indiquer l'orientation de V^n en déterminant en chaque point un repère orienté d'une manière compatible avec l'orientation de V^n. Si dans l'espace A_x^n est donné un vecteur contravariant $\vec{V}$ de composantes v^h par rapport au repère R_x, il lui correspond le vecteur $v^h \vec{I}_h$ de composantes $v^h \xi_h^\varkappa$ tangent à V^n en x; de même à tout vecteur contravariant tangent à V^n en x on peut faire correspondre un vecteur bien déterminé de l'espace A_x^n. Cette correspondance peut être étendue aux autres tenseurs tangents en x à V^n et aux grandeurs définies dans A_x^n. Nous allons identifier les grandeurs qui se ainsi correspondent et nous convenons de désigner par une lettre affectée des indices grecs les composantes d'un tenseur tangent à V^n, qui ont été

définies au numéro précédent, et par la même lettre affectée des indices latins les composantes du même tenseur relativement au repère R_x.

Nous présenterons cette correspondance d'une autre manière en prenant comme base les vecteurs $\vec{I}_h^0$ dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la composante dont l'indice est le même que (privé de la barre) l'indice du vecteur et qui est égale à 1; le vecteur $\vec{I}_3^0$, par exemple, a la troisième composante ξ_3^3 égale à 1 et toutes les autres égales à zéro. Le repère ainsi défini porte le nom de *repère naturel*; le repère qui lui correspond dans l'espace A_x^n sera désigné par $\overset{\circ}{R}_x$. Nous pouvons maintenant dire que les composantes des vecteurs et tenseurs tangents à V^n en x dans le système des coordonnées locales $x^\varkappa$, sont leurs composantes par rapport au repère naturel $\overset{\circ}{R}_x$ (*composantes naturelles*).

Au moyen des composantes η_ϱ^h du vecteur $\vec{I}^h$ définies par les relations (4) on peut former en x la forme différentielle linéaire

$$\omega^h = \eta_\varrho^h dx^\varrho \tag{5}$$

qui peut être envisagée comme le produit scalaire du vecteur I^h et du vecteur $\overrightarrow{dx}$ (n° 31, c)); on peut aussi dire que les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ sont les composantes du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ par rapport au repère R_x ce qui peut être exprimé par la formule suivante:

$$\overrightarrow{dx} = \omega^h \vec{I}_h. \tag{6}$$

Si l'on désigne par $\omega^h[\vec{I}_i]$ la valeur de la forme ω^h pour le vecteur $\vec{I}_i$ (n° 3), la relation entre les deux bases duales en x pourra être exprimée par les équations

$$\omega^h[\vec{I}_i] = \delta_i^h \tag{7}$$

qui sont les conséquences des relations (4). Nous voyons ainsi que pour définir l'espace affine local A_x^n tangent à V^n en x on doit se donner en ce point n vecteurs contravariants indépendants $\vec{I}_h$ ou n formes différentielles linéaires indépendantes ω^h.

Rappelons maintenant que les vecteurs $\vec{I}_h = \{\xi_h^\varrho\}$ donnent naissance aux transformations infinitésimales $\xi_h^\varrho \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho}$ que nous désignerons par $I_h f$ (n° 7). A deux systèmes duaux des vecteurs $\vec{I}_h$ et $\vec{I}^h$ correspondent ainsi deux systèmes dont l'un est composé des transformations infinitésimales

$I_h f$ et l'autre des formes linéaires ω^h, leurs coefficients étant liés par les relations (4); ces deux systèmes seront appelés aussi duaux.

Soit f une fonction arbitraire de classe $k \geqslant 1$ donnée dans un voisinage de x; il est facile de verifier au moyen des relations (5) et (4) que sa différentielle totale $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^\varrho} dx^\varrho$ en x peut être présentée sous la forme suivante:

$$df = \omega^h I_h f. \tag{8}$$

Dans les calculs ultérieurs il sera plus commode de remplacer $I_h f$ par le symbole $\partial_h f$ que l'on appelle *dérivée pfaffienne* de f:

$$\partial_h f = I_h f. \tag{9}$$

La formule (8) prendra alors la forme

$$df = \omega^h \partial_h f. \tag{10}$$

Nous allons étendre les raisonnements précédents en supposant que dans un voisinage $U(x^\varkappa) \subset V^n$ soient donnés n champs des vecteurs contravariants indépendants $\vec{I}_h = \{\xi_h^\varrho(x)\}$ $(x \in U)$, desquels on déduit dans U les deux systèmes duaux $\{\omega^h\}$ et $\{\partial_h f\}$. Les formes ω^h étant indépendantes leurs différentielles extérieures peuvent être présentées sous la forme

$$d\omega^h = \tfrac{1}{2} S_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i \omega^j], \qquad S_{ij}^{\cdot\cdot h} + S_{ji}^{\cdot\cdot h} = 0. \tag{11}$$

Considérons une fonction f de classe $k \geqslant 2$ donnée dans U et différentions extérieurement l'équation (10) qui peut maintenant être donnée en tous les points de U. Il vient

$$\partial_h f d\omega^h + [d(\partial_h f)\omega^h] = 0$$

ou, d'après (11),

$$\tfrac{1}{2} S_{ij}^{\cdot\cdot h} \partial_h f[\omega^i \omega^j] + [d(\partial_h f)\omega^h] = 0. \tag{12}$$

Or, en vertu de la formule (10), on a

$$d(\partial_h f) = \partial_i \partial_h f \omega^i.$$

Si l'on porte cette expression dans le second terme de l'équation (12) et que l'on y remplace l'indice muet h par j, on obtient

$$\tfrac{1}{2} S_{ij}^{\cdot\cdot h} \partial_h f[\omega^i \omega^j] + \partial_i \partial_j f[\omega^i \omega^j] = 0$$

ce qui peut aussi être écrit de la manière suivante:

$$(S_{ij}^{\cdot\cdot h} \partial_h f + \partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f)[\omega^i \omega^j] = 0.$$

Il en résulte l'identité importante

$$\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} \partial_h f. \tag{13}$$

qui, d'après (9), peut être présentée sous la forme

$$I_i(I_j f) - I_j(I_i f) = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} I_h f.$$

Son premier membre est égal à la parenthèse de Poisson des transformations infinitésimales $I_i f$ et $I_j f$ (n° 7); on a donc

$$(I_i, I_j) f = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} I_h f. \tag{14}$$

Ceci montre que la parenthèse de Poisson est une transformation infinitésimale. A cette transformation infinitésimale correspond un vecteur que nous désignerons par $\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j$ en disant qu'il représente, par définition, le produit des vecteurs $\vec{I}_i$ et $\vec{I}_j$ tangents à V^n en un point de $x \in U$. D'après (14) ce produit s'exprime de la manière suivante

$$\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} \vec{I}_h \tag{15}$$

au moyen des vecteurs $\vec{I}_h$ et, par suite, il obéit à la loi suivante:

$$\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j + \vec{I}_j \cdot \vec{I}_i = 0 \tag{16}$$

(v. équ. (11)). Il résulte aussi de la formule (15) que le produit $\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j$ est linéaire par rapport à chacun de ses facteurs.

En multipliant les deux membres de l'équation (15) par $\vec{I}_k$ on obtient

$$(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) \cdot \vec{I}_k = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} \vec{I}_h \cdot \vec{I}_k$$

ou, d'après la même formule (15),

$$(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) \cdot \vec{I}_k = -S_{ij}^{\cdot\cdot h} S_{hk}^{\cdot\cdot l} \vec{I}_l = S_{ij}^{\cdot\cdot h} S_{kh}^{\cdot\cdot l} \vec{I}_l.$$

En y permutant circulairement les indices i, j, k et en sommant membre à membre les équations obtenues on trouve la relation

$$\begin{aligned} (I_i \cdot I_j) \vec{I}_k + (I_j \cdot I_k) \vec{I}_i + (I_k \cdot I_i) \vec{I}_j &= \\ = (S_{ij}^{\cdot\cdot h} S_{kh}^{\cdot\cdot l} + S_{jk}^{\cdot\cdot h} S_{ih}^{\cdot\cdot l} + S_{ki}^{\cdot\cdot h} S_{jh}^{\cdot\cdot l}) \vec{I}_l, \end{aligned} \tag{17}$$

qui exprime la loi d'association du produit des vecteurs $\vec{I}_h$. Elle peut être présentée d'une manière plus simple en revenant aux équations (11) et en les différentiant extérieurement; il vient d'abord

$$\tfrac{1}{2}[dS_{ij}^{\cdot\cdot h} \omega^i \omega^j] + S_{ij}^{\cdot\cdot h} [d\omega^i \omega^j] = 0$$

ou, en vertu des formules $dS_{ij}^{\cdot\cdot h} = \partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot h} \omega^k$ et $d\omega^i = \tfrac{1}{2} S_{kl}^{\cdot\cdot i} [\omega^k \omega^l]$,

$$\partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot h} [\omega^i \omega^j \omega^k] + S_{ij}^{\cdot\cdot h} S_{kl}^{\cdot\cdot i} [\omega^k \omega^l \omega^j]) = 0.$$

En changeant le rôle des indices l et i dans le second terme on en déduit la relation

$$S_{kl}^{\cdot\cdot l} S_{ij}^{\cdot\cdot h} + S_{ij}^{\cdot\cdot l} S_{lk}^{\cdot\cdot h} + S_{jk}^{\cdot\cdot l} S_{li}^{\cdot\cdot h} + \partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot h} + \partial_i S_{jk}^{\cdot\cdot h} + \partial_j S_{ki}^{\cdot\cdot h} = 0.$$

La loi d'association (17) du produit des vecteurs s'écrit maintenant

$$(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) \cdot \vec{I}_k + (\vec{I}_j \cdot \vec{I}_k) \cdot \vec{I}_i + (\vec{I}_k \cdot \vec{I}_i) \cdot \vec{I}_j = (\partial_i S_{jk}^{\cdot\cdot l} + \partial_j S_{ki}^{\cdot\cdot l} + \partial_k S_{ki}^{\cdot\cdot l}) \vec{I}_l. \tag{17'}$$

Si en un point de U toutes les dérivées pfaffiennes des coefficients $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ dans la formule (15) sont nuls, cette loi se réduit à la suivante:

$$(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) \cdot \vec{I}_k + (\vec{I}_j \cdot \vec{I}_k) \cdot \vec{I}_i + (\vec{I}_k \cdot \vec{I}_i) \cdot \vec{I}_j = 0. \tag{18}$$

En résumant on voit que la définition du produit de deux vecteurs $\vec{I}_i$ et $\vec{I}_j$, tangents à V^n en un point $x \in U$, permet d'établir dans l'espace vectoriel tangent à V^n en x une algèbre basée sur le corps des nombres réels. Les principales propriétés de cette algèbre sont exprimées par les relations (15), (16) et (17); si en un point toutes les dérivées $\partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ sont nulles, la loi d'association du produit prend la forme (18) et on dit que dans l'espace vectoriel attaché à ce point a été établie une *algèbre de Lie*.

§ 2. Variétés parallélisables

33. Définition. Supposons que sur une variété V^n soient donnés n champs des vecteurs contravariants indépendants $\vec{I}_h = \{\xi_h^g(x)\}$, où $\xi_h^g(x)$ sont les composantes naturelles de $\vec{I}_h$ au point x (v. n° 32). En conservant les notations du n° 32 désignons par R_x le repère formé du point $x \in V^n$ et des vecteurs $\vec{I}_h$ d'origine x et par R_x^* le repère dual. Deux vecteurs contravariants ou covariants tangents à V_n en deux points arbitraires seront dits *égaux*, s'ils ont les mêmes composantes relativement aux repères des espaces affines locaux tangents à V^n; de la même manière peut être définie l'égalité des tenseurs tangents à la variété. L'égalité de deux tenseurs reste évidemment invariante, si l'on assujettit les vecteurs $\vec{I}_h$ des repères locaux à une même substitution régulière à coefficients constants.

Aux variétés sur lesquelles peut être définie l'égalité des vecteurs tangents a été donné le nom de *variétés parallélisables* [11] ou de *variétés douées d'un parallélisme absolu*. D'après ce qui a été dit au n° 32 le parallélisme des vecteurs peut être établi en partant soit d'un système de n transformations infinitésimales soit d'un système de n formes différen-

tielles linéaires. La détermination des conditions pour qu'une variété soit parallélisable est un problème de la géométrie différentielle globale; nous nous bornerons dans ce paragraphe à l'étude des invariants différentiels et des propriétés géométriques d'une variété parallélisable.

34. Invariants d'une variété parallélisable. Considérons les formes différentielles ω^h construites par l'intermédiaire des vecteurs I_h^* du repère R_x^*; les vecteurs I_h^* étant donnés sur toute la variété il en est de même des formes ω^h. Comme les ω^h sont indépendants, leurs différentielles extérieures peuvent être exprimées au moyen des formules

$$d\omega^h = \tfrac{1}{2} S_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\omega^j], \qquad S_{ij}^{\cdot\cdot h} = -S_{ji}^{\cdot\cdot h} \tag{1}$$

dont les coefficients sont les premiers invariants différentiels de la variété pour toute transformation des coordonnées locales. Si l'on fait sur les vecteurs $\vec{I}_h$ du repère R_x de l'espace affine local A_x^n, tangent en x à V^n, une substitution régulière à coefficients constants, les formes ω^h se transformeront comme les composantes d'un vecteur contravariant et les coefficients $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ comme les composantes d'un tenseur, deux fois covariant et une fois contravariant, de l'espace affine A_x^n. On a donné à ce tenseur le nom de *tenseur de torsion* de la variété parallélisable.

Posons

$$\Omega^h = \tfrac{1}{2} S_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\omega^j];$$

les formes quadratiques Ω^h sont les composantes d'un vecteurs infinitésimal (n° 31, c)) que nous appelerons *vecteur de torsion*. De l'équation (1) qui peut s'écrire de la manière suivante

$$d\omega^h = \Omega^h$$

on déduit la relation

$$d\Omega^h = 0$$

qui montre que les vecteurs de torsion attachés à divers points de la variété parallélisable sont égaux.

Si I est l'un quelconque des invariants $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$, on a, selon la formule (8) du n° 32,

$$dI = \omega\, \partial_h I.$$

Il en résulte que les coefficients $\partial_h I$ sont des nouveaux invariants différentiels de la variété (*invariants du second ordre*). En appliquant aux invariants $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ l'opérateur pfaffien ∂_h on déduit de chacun d'eux une suite illimitée

$$S_{ij}^{\cdot\cdot h},\ \partial_{k_1} S_{ij}^{\cdot\cdot h},\ \partial_{k_2}\partial_{k_1} S_{ij}^{\cdot\cdot h},\ \partial_{k_3}\partial_{k_2}\partial_{k_1} S_{ij}^{\cdot\cdot h},\ \ldots \tag{2}$$

des invariants différentiels d'ordre un, deux, trois, ... Il est facile de voir que ces invariants sont des tenseurs de l'espace affine tangent à V_n.

Au moyen de ces invariants peut être résolu le problème de l'équivalence de deux variétés parallélisables ([15], Partie II, vol. II, p. 1311).

35. Métrique riemannienne; autoparallèles. Supposons que dans la variété V^n soit donné un champ de vecteurs contravariants. Nous définirons la *longueur* X d'un vecteur quelconque $\vec{X}$ du champ en posant

$$X^2 = \gamma_{hi} X^h X^i, \tag{3}$$

où les constantes $\gamma_{hi} = \gamma_{ih}$ sont les coefficients d'une forme quadratique positive et les X^h sont les composantes de $\vec{X}$ relativement au repère R_x de l'espace affine local attaché à x. Il résulte de cette définition que les vecteurs égaux ont la même longueur et qu'un autre choix de la forme quadratique (3) revient à faire sur les vecteures $\vec{I}_h$ du repère R_x une substitution régulière à coefficients constants. On peut choisir ce repère de manière qu'il soit $\gamma_{hi} = \delta_{hi}$ et l'on aura ensuite

$$X^2 = \sum_{h=1}^{n} (X^h)^2.$$

Ceci posé on peut définir d'une manière bien connue l'*angle* de deux vecteurs tangents à V^n.

Considérons maintenant le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dx}$ (n° 31, c)) dont les composantes par rapport à R_x sont égales aux formes ω^h (n° 32, équation (6)). Si l'on désigne par ds sa longueur, on aura

$$ds^2 = \gamma_{hi}\omega^h\omega^i$$

ce qui peut être ramené à la forme

$$ds^2 = \sum_{h=1}^{n} (\omega^h)^2,$$

qui dans un voisinage $U(x^\varkappa) \subset V^n$ devient

$$ds^2 = g_{\varkappa\lambda} dx^\varkappa dx^\lambda,$$

si l'on remplace les ω^h par leurs expressions (5) du n° 32. Nous voyons ainsi que sur une variété parallélisable peut être définie partout une métrique riemannienne définie positive.

Soit C une courbe de la variété parallélisable, différentiable par morceaux; supposons que son point soit fonction C^1 d'un paramètre t ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$). La longueur de son arc joignant les points qui correspondent aux valeurs t_1 et t_2 est donnée par l'expression suivante

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{h=1}^{n} (\omega^h)^2}\, dt, \tag{4}$$

où ω^h désigne ici ce que devient l'expression $\eta_\varrho^h \frac{dx^\varrho}{dt}$ déduite de l'équation (5) du n° 32, si l'on y remplace les coordonnées locales par leurs fonctions de t.

Un arc L

$$x(s), \quad s_1 < s < s_2,$$

de classe C^1 de la variété parallélisable s'appelle *autoparallèle*, si le paramètre s peut être choisi de telle manière que les vecteurs tangents à L, de composantes naturelles dx^ϱ/ds, soient parallèles. Il résulte de la définition du parallélisme donnée au commencement de ce numéro que les composantes c^h de ces vecteurs par rapport aux repères R_x doivent être constantes tout le long de L; ces constantes déterminent en chaque point la direction de l'arc. Comme les composantes naturelles en un point x d'un vecteur $\{c^h\}$ sont égales aux expressions $c^h \xi_h^\varrho$, l'arc autoparallèle doit satisfaire aux équations suivantes:

$$\frac{dx^\varrho}{ds} = c^h \xi_h^\varrho. \tag{5}$$

La forme de ces équations reste inaltérée, si l'on fait sur le paramètre s la substitution linéaire $\bar{s} = as + b$ et que l'on change convenablement les constantes c^h. Remarquons aussi qu'à chaque choix de n constantes c^h non toutes nulles correspond un système de la forme (5). Il s'ensuit que par tout point de la variété parallélisable part, dans chaque direction, un et un seul arc autoparallèle.

Les équations (5) des autoparallèles peuvent être écrites d'une manière plus simple; en multipliant leurs deux membres par η_ϱ^h et en sommant par rapport à ϱ il vient d'après les équations (4) du n° 32

$$\eta_\varrho^h \frac{dx^\varrho}{ds} = c^h.$$

En posant encore

$$\omega^h\left[\frac{dx^\varrho}{ds}\right] = \eta_\varrho^h \frac{dx^\varrho}{ds}$$

on obtient enfin

$$\omega^h\left[\frac{dx^\varrho}{ds}\right] = c^h. \tag{5'}$$

CHAPITRE IV

CONNEXIONS AFFINES

La notion de connexion a été introduite presque simultanément par T. Levi-Civita (1917) et J. A. Schouten (1918). Dépuis lors elle a reçu d'importantes généralisations dont l'étude était l'objet de recherche de nombreux géomètres. Pour les renseignements bibliographiques sur ce sujet nous renvoyons le lecteur au livre de J. A. Schouten ([40], p. 123).

Le progrès le plus important dans la théorie des connexions est dû à E. Cartan qui a appliqué à leur étude la méthode du repère mobile introduite par G. Darboux dans la théorie des courbes et surfaces de l'espace ordinaire. Or, Cartan en se servant des formes différentielles extérieures a montré que les équations que vérifient les composantes d'un mouvement infinitésimal du trièdre de Darboux sont au fond identiques avec les équations de structure du groupe des déplacements euclidiens. Cela a lui suggéré l'idée très féconde d'attacher à un groupe quelconque de Lie le mouvement d'un repère convenablement défini et de montrer qu'à chaque groupe G correspond une connexion dont la structure est déterminée par G (cf. [12]). Il a prouvé que de ce point de vue peuvent être envisagées, d'une façon uniforme, toutes les connexions déjà connues et que, de plus, sa méthode permet d'imaginer des nouvelles intéressantes connexions. Il a ensuite montré que le Programme d'Erlangen de Klein peut être étendu de manière que, outre les espaces de Klein, il englobe ceux des connexions basées sur les groupes de Lie.

Dans les deux dernières dizaines d'années la théorie de Cartan a été perfectionnée grâce à l'application des notions et méthodes de la théorie des espaces fibrés ce qui a permis en particulier de développer la théorie globale des variétés munies d'une connexion et de poser de nouveaux importants problèmes [1].

Le présent Chapitre a pour objet principal une exposition de la théorie des connexions que j'appelle *connexions affines* et dont le groupe de structure est un sous-groupe quelconque du groupe $GL(n, R)$. Il est divisé en trois paragraphes dont les deux premiers, qui servent d'introduction au troisième, contiennent les notions et les théorèmes de la théorie des groupes de Lie qui sont nécessaires pour exposer une théorie des connexions affines. Le premier d'eux contient une exposition des principes de la théorie des groupes continus et finis; le second est consacré aux groupes de Lie qui sont des sous-groupes du groupe linéaire général. J'introduis en particulier dans ce paragraphe le repère mobile dans l'espace vectoriel basé sur un sous-groupe Γ du groupe $GL(n, R)$, les composantes relatives du mouvement de ce repère et les transformations infinitésimales de Γ. Je montre ensuite qu'avec le groupe Γ peut être liée intrinsèquement une suite des groupes linéaires; ces groupes, appelés les *groupes associés à* Γ, jouent un rôle important dans la théorie des groupes continus infinis.

Le troisième paragraphe est consacré à la théorie des connexions affines que l'on définit dans l'espace fibré principal B dont le groupe de structure est un sous-

[1] V. sur ce sujet l'intéressant article de S.S. Chern, *Some new viewpoints in differential geometry in the large*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 1-30.