CHAPITRE II

SYSTÈMES DE PFAFF

Le problème de l'intégration d'une équation linéaire aux différentielles totales a été posé dans toute sa généralité par J. F. Pfaff (1815) et il porte dès lors son nom; dans les années suivantes le domaine d'applicabilité de ce nom a été élargi et il embrasse maintenant les problèmes des équations différentielles extérieures d'un degré arbitraire. Au Problème de Pfaff proprement dit s'est joint le problème de la réduction d'une forme différentielle linéaire à la forme canonique. Ces deux problèmes étroitement liés ont été l'objet des investigations de plusieurs mathématiciens éminants qui ont perfectioné et étendu les résultats de Pfaff. On trouvera des renseignements sur leurs travaux dans le Mémoire de E. Cartan [4] et dans l'ouvrage de E. v. Weber [45].

En 1899 E. Cartan a commencé ses recherches sur le Problème de Pfaff en créant le Calcul des formes différentielles extérieures qui lui a permis d'obtenir d'une manière simplifiée les résultats de ses prédécesseurs et de les pousser plus loin en résolvant complètement la question de la recherche des solutions générales et singulières de l'équation. Dans deux Mémoires ultérieurs [5], [6] il a étendu sa méthode à la théorie des systèmes des équations de Pfaff, où l'on n'avait pas jusqu'alors des résultats généraux et précis. En introduisant la notion d'éléments intégraux, il a démontré le théorème d'existance des intégrales d'un système pfaffien en montrant qu'un tel système est caractérisé par un ensemble de nombres naturels (caractères). On sait que tout système des équations aux dérivées partielles peut être remplacé par un système pfaffien, mais on se heurte ici à une difficulté, si l'on veut que les deux problèmes soient complètement équivalents; elle consiste en ce que le système pfaffien ne distingue pas les variables indépendantes et les fonctions inconnues. Cette difficulté a été surmonté par E. Cartan qui a donné des critères permettant de reconnaître, si un système de Pfaff admet des intégrales générales qui n'établissent aucune relation entre certaines variables choisies par avance. Il a montré aussi que tout système pfaffien peut être prolongé de façon qu'il jouisse de cette propriété par rapport aux variables choisies. Grâce à ces théorèmes la méthode de Cartan est devenu un appareil d'une grande portée dans la théorie des équations aux dérivées partielles et en géometrie différentielles (problèmes d'équivalance).

La théorie de Cartan a été généralisée par E. Kähler [32] qui a montré qu'elle peut être appliquée aux systèmes comprenant des équations différentielles extérieures d'un degré quelconque.

Ce présent Chapitre, consacré à l'exposition de la théorie de Cartan, est divisé en deux paragraphes. Dans le premier, en outre de quelques remarques générales sur le système pfaffien, on trouve l'énoncé et la démonstration du théorème d'existance de Cartan qui est une généralisation du théorème classique de Cauchy-Kowalewski; comme les éléments intégraux, le genre et les caractères d'un système de Pfaff sont des notions purement algébriques on pouvait ici faire usage des considérations sur les systèmes des équations extérieures algébriques (vol. I, Ch. II). La distinction entre les éléments algébriques et différentiels de la théorie rend peut-

-être plus compréhensible son exposition. Le second paragraphe a pour objet les systèmes pfaffiennes en involution relativement à un ensemble des variables; il est restreint aux questions que l'on rencontre dans la géometrie différentielle et dans la théorie des pseudogroupes continus infinis.

§ 1. Théorèmes généraux

15. Généralités (¹). Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ soit donné un système différentiel composé des équations

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_k = 0 \tag{1}$$

dont les premiers membres sont des formes de degrés arbitraires. On donne à ce système le nom de *système de Pfaff généralisé* et on définit ses variétés intégrales de la même manière que celles d'un système de Pfaff proprement dit (n° 6). Si certaines des formes Φ sont de degré zéro, le système (1) contenant ainsi des équations finies entre les variables $x^\varkappa$, il est bien clair que ces équations doivent rentrer dans les relations qui définissent une variété intégrale.

Du système (1) on peut déduire de diverses manières un nouveau système qui lui soit équivalent. Si par exemple parmi les équations (1) il y a trois équations $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ du même degré, on peut les remplacer par les équations $\bar{\Phi}_1 = 0$, $\bar{\Phi}_2 = 0$, $\bar{\Phi}_3 = 0$, où $\bar{\Phi}_i = a_i^1\Phi_1 + a_i^2\Phi_2 + a_i^3\Phi_3$ $(i = 1, 2, 3)$, les coefficients a_i^h étant des fonctions telles qu'il soit $|a_i^h| \neq 0$. De même une équation $\Phi_j = 0$ de degré r peut être remplacée par une relation de la forme suivante:

$$\Phi_j + \Psi_1\Phi_{i_1} + \Psi_2\Phi_{i_2} + \ldots + \Psi_r\Phi_{i_r} = 0,$$

où les lettres Ψ désignent des formes différentielles telles que tous les termes ajoutés à Φ_j soient du degré r (cf. vol. I, n° 30). Ces procédés permettent souvent de simplifier le système donné et de diminuer le nombre de ses équations; cela arrive par exemple, si dans la dernière relation le premier membre est une forme nulle; on peut alors négliger l'équation $\Phi_j = 0$ dans le système (1).

La question fondamentale concernant un système de Pfaff consiste à démontrer des théorèmes d'existence généralisant le théorème classique de Cauchy-Kowalewski; nous préciserons dans les pages suivantes l'énoncé de ce problème en nous bornant ici à remarquer qu'il généralise plusieurs problèmes classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles. Considérons par exemple une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

(¹) Toutes les fonctions et formes envisagées dans ce chapitre sont supposées analytiques.

écrite avec les notations classiques; on peut la remplacer par le système de Pfaff suivant:

$$F = 0,$$

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0,$$

formé d'une équation finie et de trois équations de Pfaff à huit variables x, y, z, p, q, r, s, t, et il s'agit maintenant de trouver les solutions à deux dimensions de ce système. Les variables indépendantes n'étant pas distinguées ce nouveau problème est plus symétrique que le problème de l'équation $F = 0$, duquel nous sommes partis; toutes les huit variables jouent maintenant le même rôle et par suite on doit admettre des solutions qui entraînent une relation entre les variables x et y. Bien que les solutions de ce genre sont des variétés intégrales de l'équation $F = 0$ dans le sens étendu par S. Lie ([28], p. 228), elles ne présentent pas un intérêt dans les applications et il se pose ainsi la question de trouver les conditions pour que le système de Pfaff n'admette pas des solutions régulières qui établissent une relation entre x et y; nous consacrerons le Paragraphe 2 à ce problème.

16. Eléments intégraux. Reprenons maintenant le système des équations (1); nous le prolongerons en lui ajoutant les relations qu'on obtient en annulant les différentielles extérieures des formes Φ

(2) $$d\Phi_1 = 0, \quad d\Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad d\Phi_k = 0.$$

Nous désignerons par S le système ainsi prolongé et nous l'appellerons *système différentiel fermé*. On démontre de la même manière qu'au n° 6 que les variétés intégrales du système (1) vérifient aussi les équations (2).

En restreignant les formes Φ et $d\Phi$ dans les équations du système S à un point $M_0(x_0^\varkappa)$ de l'ouvert U on obtient un système $S(M_0)$ des équations extérieures algébriques à n indéterminées $dx^\varkappa$ que nous regarderons comme les composantes d'un vecteur de $R^n(x^\varkappa)$ d'origine M_0; les solutions du système $S(M_0)$ sont des éléments plans de $R^n(x^\varkappa)$ ayant M_0 comme point d'appui (vol. I, Ch. II); on leur donne le nom *d'éléments intégraux* du système S au point M_0. Cette dénomination sera justifiée dans le numéro suivant.

Supposons que le système algébrique $S(M_0)$ admette comme solution un élément plan E_p^0. En changeant au besoin les notations des indices on peut présenter les équations de E_p^0 sous la forme suivante:

$$dx^q = a_1^q dx^1 + a_2^q dx^2 + \ldots + a_p^q dx^p \quad (q = p+1, p+2, \ldots, n);$$

les équations du p-plan de E_p^0 s'écriront alors comme il suit:

(3) $$x^q - x_0^q = a_1^q(x^1 - x_0^1) + a_2^q(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_p^q(x^p - x_0^p).$$

Les coordonnées de E_p^0 se composent donc de n coordonées $x_0^\varkappa$ du point M_0 et de $p\,(n-p)$ coefficients $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_p^q$ $(q = p+1, p+2, \ldots, n)$. L'ensemble des éléments intégraux du système S, dont les coordonées diffèrent en valeurs absolues de celles de E_p^0 moins d'un nombre $\delta > 0$, sera appelé le *voisinage* de E_p^0.

Au système $S(M_0)$ peuvent être appliquées toutes les notions introduites dans théorie des équations extérieures algébriques (Vol. I, Ch. II) et en particulier celles des éléments plans réguliers et ordinaires et des éléments polaires. Nous nous servirons aussi des notations acceptées dans le Vol. I en désignant par g le genre et par $s, s_1, \ldots, s_g$ les caractères du système $S(M_0)$. Rappelons que ces nombres sont liés par la relation suivante

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_g = n - g$$

et que par conséquent le système $S(M_0)$ n'admet pas des éléments intégraux à un nombre de dimensions supérieur à g (Vol. I, n° 32).

Il est bien clair que le genre g peut varier, si le point M_0 se déplace dans l'ouvert U, où le système S est défini; supposons que dans M_0 il atteigne sa valeur minimum. Il résulte de l'étude des systèmes des équations extérieures algébriques que pour obtenir les points, où le genre est supérieur à g, il faut annuler certains déterminants dont les éléments sont fonctions des variables $x^\varkappa$. Il s'en suit que la valeur du genre reste la même dans un voisinage convenablement déterminé du point M_0. Supposons maintenant que l'ouvert U soit rétrécis à ce voisinage; cela nous permet de donner à g et aux nombres $s, s_1, \ldots, s_g$ le nom de *genre* et de *caractères* du système S. Dans tout point de U on peut alors construire une suite

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{g-1} \subset E_g$$

des éléments intégraux dont le dernier est un élément ordinaire et dont les précédents sont des éléments réguliers du système des équations extérieures algébriques correspondant à ce point.

17. Variétés intégrales. Supposons que le système S formé des équations (1) et (2) admette une variété intégrale I_p à p dimensions; en choisissant convenablement les notations on peut présenter ses équations sous la forme suivante:

(4) $$x^h = f^h(x^1, x^2, \ldots, x^p) \quad (h = p+1, p+2, \ldots, n),$$

f^h désignant des fonctions analytiques définies dans un ouvert Δ de $R^p(x^1, x^2, \ldots, x^p)$. En différentiant les équations (4) on obtient les relations différentielles

(5) $$dx^h = \frac{\partial f^h}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^h}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f^h}{\partial x^p} dx^p.$$

Les équations (4) et (5) déterminent un élément plan E_p tangent à la variété I_p au point $(x^\varkappa)$. Comme I_p est par hypothèse une variété intégrale du système S, les équations (1) et (2) doivent être des conséquences des relations (4) et (5). On voit donc que tout élément plan à p dimensions tangent à la variété I_p est un élément intégral du système S; il en est donc de même de tous les éléments plans, de dimension inférieure à p, contenus dans un élément tangent à p dimensions. Il est bien clair qu'inversement, si tous les éléments plans à p dimensions, tangents à une variété sont des éléments intégraux du système S, celle-ci est une variété intégrale de ce système.

18. Théorème fondamental. Les considérations précédentes nous imposent le problème suivant: le système S étant de genre g, existe-il des variétés intégrales à p dimensions ($p \leqslant g$) passant par un point arbitraire $M_0(x_0^\varkappa)$ et, s'il en existe plusieures, qu'elles sont les conditions qui permettraient de distinguer l'une d'elles d'une manière univoque? La réponse à ces questions donne le théorème suivant:

Théorème de Cartan [1]. *Soit donné dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ un système de Pfaff généralisé et fermé S, de genre g et des caractères $s, s_1, s_2, \ldots, s_g$, admettant une variété intégrale I_{p-1} $(p-1 < g)$ qui est tangente en un point $M_0(x^\varkappa)$ de U à un élément intégral régulier E^0_{p-1} contenu dans un élément intégral ordinaire E_p de même origine M_0. Supposons de plus qu'il soit donnée une variété arbitraire V_ϱ à*

$$\varrho = p + s + s_1 + s_2 + \ldots + s_{p-1} \tag{6}$$

dimensions qui passe par I_{p-1} et dont le ϱ-plan tangent en M_0 contient E^0_p.

Dans ces hypothèses il existe une et une seule variété intégrale I_p du système S, contenue dans V_ϱ qui 1° passe par I_{p-1} et qui 2° est tangente à E^0_p.

Remarque 1. Nous montrerons que du théorème de Cartan résulte l'existence d'une infinité de variétés intégrales à $p \leqslant g$ dimensions tangentes à des éléments intégraux ordinaires de dimension p; l'ensemble de ces solutions porte le nom de *solution générale* du système S. Ce système peut aussi admettre des solutions qui ne rentrent pas dans sa solution générale et même des solutions dont la dimension est supérieur à son genre. Nous donnerons au n° 21 quelques remarques sur ces solutions qui sont dites *singulières*.

Remarque 2. Nous montrerons au n° 20 que la variété V_ϱ peut être présentée par $n-\varrho$ fonctions de p variables assujetties aux conditions

[1] Ce théorème a été énoncé et démontré pour les systèmes pfaffiens linéairs par E. Cartan [5]; sa généralisation pour les équations de degrés quelconques est dûe à E. Kähler [32].

d'un caractère local le long de la variété I_{p-1} et d'ailleurs arbitraires; la variété intégrale I_p dépend ainsi du choix de ces fonctions. Si

$$s + s_1 + \ldots + s_{p-1} = n - p,$$

on a, d'après (6), $n = \varrho$ et la variété V_ϱ se confond avec l'ouvert U; dans ce cas l'énoncé du théorème se simplifie et il affirme maintenant qu'il existe une seule variété intégrale satisfaisante aux conditions 1° et 2° du théorème.

Avant aborder la démonstration du Théorème de Cartan, à laquelle seront consacrés les numéros suivants, nous allons faire voir qu'on peut se borner au cas, où le système S se compose des équations finies et des équations différentielles linéaires en les différentielles des variables. Changeons à cet effet les notations en posant

$$z^1 = x^{p+1}, \quad z^2 = x^{p+2}, \quad \ldots, \quad z^{n-p} = x^n;$$

par conséquent les équations (3) du p-plan de l'élément intégral E^0_p pourront être écrites comme il suit:

$$z^q - z^q_0 = a^q_1(x^1 - x^1_0) + a^q_2(x^2 - x^2_0) + \ldots + a^q_p(x^p - x^p_0) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-p).$$

La variété I_p, dont il est question dans l'énoncé du théorème, devant être tangente à E^0_p, ses équations, si elle existe, peuvent être présentées sous la forme suivante:

$$z^q = f^q(x^1, x^2, \ldots, x^p) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-p).$$

Pour que cette variété satisfasse aux équations du système S, il faut et il suffit que les relations (1) et (2) deviennent des identités par rapport aux différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^p$, si l'on y porte les fonctions f^q et les expressions

$$dz^q = \frac{\partial f^q}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^q}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f^q}{\partial x^p} dx^p.$$

On obtient ainsi un certain nombre de relations entre les variables indépendantes $x^1, x^2, \ldots, x^p$, les inconnues $z^1, z^2, \ldots, z^{n-p}$ et les dérivées $\partial z^q/\partial x^1, \partial z^q/\partial x^2, \ldots, \partial z^q/\partial x^p$. Par suite la recherche de la variété intégrale I_p a été ramenée à la résolution d'un système d'équations aux derivées partielles du premier ordre à $n-p$ fonctions inconnues et à p variables indépendantes. Ce système d'équations aux dérivées partielles peut être changé en un système composé d'un certain nombre d'équations finies et d'équations de Pfaff proprement dites. Nous augmenterons pour cela le nombre de variables en posant $p^q_i = \partial z^q/\partial x^i$. Si l'on introduit ces grandeurs dans les équations aux dérivées partielles, on obtient des relations de la forme suivante

$$F(x^1, x^2, \ldots, x^p;\ z^1, z^2, \ldots, z^{n-p}, p_1^1, p_2^1, \ldots, p_p^{n-p}) = 0,$$

auxquelles on doit ajouter les équations pfaffiennes suivantes:

$$dz^q - p_1^q dx^1 - p_2^q dx^2 - \ldots - p_p^q dx^p = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-p).$$

Nous avons ainsi obtenu un système d'équations, où l'on doit regarder comme inconnues les variables z^q et les paramètres p_i^q dont le nombre est égal à $p(n-p)$. On doit maintenant s'imaginer que ce système est donné dans un ouvert de l'éspace euclidien à $n+p(n-p)$ dimensions ce qui permet d'énoncer de nouveau le théorème de Cartan concernant la variété intégrale I_p avec des changements faciles à concevoir. On voit ainsi que le système de Pfaff généralisé peut toujours être prolongé en un système formé des équations finies et des équations de Pfaff. Il suffit donc de donner la démonstration du Théorème de Cartan dans ce cas le plus simple et le plus important. Nous allons commencer par un système privé d'équations finies et nous étendrons ensuite les résultats obtenus à un système qui contient les équations de cette sorte (¹).

19. Démonstration du théorème de Cartan. Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ soit donné un système de s équations indépendantes de Pfaff

(7) $$\omega^h = a_\sigma^h dx^\sigma = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s);$$

nous le fermerons en lui adjoignant les relations $d\omega^h = 0$ que nous écrirons comme il suit:

(8) $$d\omega^h = a_{\varrho\sigma}^h [dx^\varrho dx^\sigma] = 0, \qquad a_{\varrho\sigma}^h + a_{\sigma\varrho}^h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Nous désignerons par s le système ainsi formé, par g et par $s, s_1, \ldots, s_g$ respectivement son genre et ses caractères; ces nombres sont liés par la relation

(9) $$s + s_1 + \ldots + s_g = n - g$$

(nº 16).

Pour calculer les caractères et le genre de S il faut appliquer la méthode exposée au Vol. I (Ch. II). Pour trouver le second caractère s_1 imaginons un élément intégral linéaire et régulier e_1 de composantes u_1^σ $(a_\sigma^h u_1^\sigma = 0)$; la somme $s + s_1$ est le rang du système polaire de e_1 composé des équations

(10′) $$a_\sigma^h dx^\sigma = 0, \qquad a_{\varrho\sigma}^h u_1^\varrho dx^\sigma = 0$$

(¹) Pour les démonstrations dans le cas général nous renvoyons le lecteur au Mémoire [5] ou au livre [13].

aux inconnues dx^σ. Soit e_2 un second élément intégral linéaire de composantes u_2^ϱ, indépendant de e_1 et appartenant au système polaire de e_1 $(a_\sigma^h u_2^\sigma = 0,\ a_{\varrho\sigma}^h u_1^\varrho u_2^\sigma = 0)$ de telle manière que l'élément intégral à deux dimensions defini au moyen des éléments e_1 et e_2 soit régulier. Le système polaire de cet élément à deux dimensions est formé des équations suivantes:

(10″) $$a_\sigma^h dx^\sigma = 0, \qquad a_{\varrho\sigma}^h u_1^\varrho dx^\sigma = 0, \qquad a_{\varrho\sigma}^h u_2^\varrho dx^\sigma = 0;$$

le rang de ce système étant égal à la somme $s + s_1 + s_2$ on obtient ainsi s_2.

En procédant de cette manière on détermine les caractères $s_3, s_4, \ldots$ et le rang g du système S.

Ceci rappelé revenons au théorème de Cartan et envisageons d'abord le cas $p = 1$; élément E_{p-1}^0 se confond maintenant avec le point M_0, qui sera dit *point intégral* du système S, et E_1^0 est un élément linéaire d'origine M_0 dont les composantes u^σ annulent les formes ω^h

$$a_\sigma^h u^\sigma = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Dans ce cas particulier le théorème de Cartan résulte immédiatement des considérations du nº 6. La courbe intégrale dont nous avons démontré l'existence au nº 6 est une variété intégrale I_1 passant par $I_0 = M_0$ et tangente à l'élément linéaire E_1^0. D'après la formule (6) le nombre ϱ est maintenant égal à $s+1$ et la variété V_ϱ peut être définie par les équations de la forme suivante:

$$x^2 = \varphi^2(x^1), \qquad x^3 = \varphi^3(x^1), \qquad \ldots, \qquad x^{n-s} = \varphi^{n-s}(x^1),$$

où $\varphi^2, \varphi^3, \ldots, \varphi^{n-s}$ sont des fonctions arbitraires d'une variable dont le nombre est égal à $n-s-1$, conformément à ce qu'il a été dit dans la remarque 2 au nº 18.

Maintenant nous allons démontrer le théorème de Cartan pour $p = 3$ ce qui suffira à faire donner l'idée de la démonstration dans le cas général; d'après la formule (6) le nombre ϱ qui figure dans l'énoncé du théorème a ici la valeur

(11) $$\varrho = 3 + s + s_1 + s_2.$$

a) Commençons par quelques remarques préliminaires sur les équations des éléments intégraux du système S. Considérons pour cela un élément intégral ordinaire E_3^0 d'ailleurs arbitraire d'origine $M_0(x_0^\varkappa)$. Il peut être représenté par $n-3$ relations linéaires à coefficients constants entre les différentielles $dx^\varkappa$

$$a_\varkappa^r dx^\varkappa = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Les équations du triplan de E_3^0 peuvent alors s'écrire comme il suit:

$$a_\varkappa^r (x^\varkappa - x_0^\varkappa) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Par une substitution linéaire faite sur les variables $x^\varkappa$ on peut ramener ces équations à la forme $x^r - x_0^r = 0$. Il sera commode de changer de notations en désignant les variables $x^4, x^5, \ldots, x^n$ par $z^1, z^2, \ldots, z^{n-3}$ et de supposer que les coordonnées x_0^1, x_0^2, x_0^3 soient toutes nulles. Si l'on introduit encore les notations $z_0^1 = a^1$, $z_0^2 = a^2$, $\ldots$, $z_0^{n-3} = a^{n-3}$, le point M_0 aura les coordonées $0, 0, 0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-3}$ et les équations du triplan de E_3^0 s'écriront maintenant de la manière suivante:

$$(12) \qquad E_3^0\colon\ z^r = a^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

On obtient les équations du plan d'un élément régulier $E_2^0 \subset E_3^0$ en ajoutant aux équations (12) une relation linéaire entre x^1, x^2, x^3

$$\beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 = 0.$$

Une substitution linéaire faite sur les variables x^1, x^2, x^3 permet de ramener cette relation à la forme $x^3 = 0$; les équations du plan de E_2^0 peuvent alors s'écrire de la manière suivante:

$$(13) \qquad E_2^0\colon\ z^r = a^r, \qquad x^3 = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Rappelons que l'élément E_2^0, étant par hypothèse régulier, contient des éléments linéaires réguliers. Soit E_1^0 un de ces éléments; en faisant au besoin une substitution linéaire sur les variables x^1, x^2, on peut définir la droite qui le porte par les équations

$$(14) \qquad E_1^0\colon\quad z^r = a^r, \qquad x^3 = 0, \qquad x^2 = 0.$$

R e m a r q u e 1. Considérons les trois vecteurs issus d'origine M_0

$$(15) \qquad e_1^0(1, 0, 0, \ldots, 0), \qquad e_2^0(0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad e_3^0(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

et contenus dans E_3^0; nous pouvons prendre e_1^0 comme élément E_1^0 et admettre que E_2^0 et E_3^0 soient formés respectivement par les systèmes e_1^0, e_2^0 et e_1^0, e_2^0, e_3^0.

R e m a r q u e 2. D'après la théorie des équations extérieures algébriques (Vol. I, n° 32), le point M_0 étant régulier, les systèmes polaires des éléments intégraux E_1^0 et E_2^0 sont définis respectivement par $s + s_1$ et par $s + s_1 + s_2$ relations linéaires indépendantes entre les différentielles $dx^1, dx^2, dx^3, dz^1, dz^2, \ldots, dz^{n-3}$.

b) Revenons maintenant au système S et au théorème que nous avons à démontrer. Si l'on change un peu les notations, les équations (7) et (8) s'écriront avec les nouvelles notations des variables de la manière suivante:

$$(16) \qquad \begin{gathered} \omega^h \equiv a_i^h dx^i + b_r^h dz^r = 0, \\ d\omega^h \equiv \tfrac{1}{2} a_{ij}^h [dx^i dx^j] + b_{ir}^h [dx^i dz^r] + \tfrac{1}{2} b_{qr}^h [dz^q dz^r] = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, s;\ i, j = 1, 2, 3;\ q, r = 1, 2, \ldots, n-3). \end{gathered}$$

Les équations de la seconde ligne se déduisant de celles de la première au moyen de la différentiation extérieure, un calcul facile montre que l'on a

$$(16') \qquad a_{ij}^h = \frac{\partial a_i^h}{\partial x^j} \frac{\partial a_j^h}{\partial x^i}, \qquad b_{ir}^h = \frac{\partial b_r^h}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i^h}{\partial z^r}, \qquad b_{qr}^h = \frac{\partial b_r^h}{\partial z^q} - \frac{\partial b_q^h}{\partial z^r}.$$

Conformément à l'énoncé du théorème nous supposons que le système des équations (16) admette une intégrale I_2 passant par le point M_0 et y tangente à un élément intégral régulier E_2^0, contenu dans un élément intégral ordinaire E_3^0.

Nous pouvons admettre que l'élément E_2^0 soit formé par les vecteurs e_1^0, e_2^0 et que, par suite, le plan tangent à I_2 en M_0 soit donné par les équations (13); de même on peut prendre comme E_3^0 l'élément formé par les vecteurs e_1^0, e_2^0 et e_3^0 définis dans la Remarque 1 ci-dessus. Il en résulte en premier lieu que l'intégrale I_2 peut être représentée par les équations de la forme suivante:

$$x^3 = \chi(x^1, x^2), \qquad z^r = \varphi^r(x^1, x^2) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3),$$

les fonctions χ et φ^r satisfaisant aux conditions

$$\chi(0, 0) = 0, \qquad \varphi^r(0, 0) = a^r,$$

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x^1}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \chi}{\partial x^2}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^2}\right)_0 = 0,$$

où les symboles en parenthèses désignent les valeurs des dérivées au point M_0. Si nous changeons de notations en prenant l'expression $x^3 - \chi(x^1, x^2)$ comme une nouvelle variable au lieu de x^3, les équations de I_2 deviendront

$$(17) \qquad \begin{gathered} I_2\colon \quad x^3 = 0, \qquad z^r = \varphi^r(x^1, x^2), \\ \varphi^r(0, 0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^2}\right)_0 = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3). \end{gathered}$$

Il est facile de voir que ce changement de la variable x^3 ne touche en rien à la forme des équations (12) du plan tangent à I_2 au point M_0.

L'intégrale cherchée I_3 devant passer par I_2 et être tengente au triplan de l'élément E_3^0, défini par les équations (12), ses équations, si elle existe, peuvent être écrites comme il suit:

$$(18) \qquad \begin{gathered} I_3\colon \quad z^r = \psi^r(x^1, x^2, x^3), \qquad \psi^r(x^1, x^2, 0) = \varphi^r(x^1, x^2), \\ \left(\frac{\partial \psi^r}{\partial x^1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi^r}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi^r}{\partial x^3}\right)_0 = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3). \end{gathered}$$

En remplaçant les variables z^r dans les premiers membres des équations (16) par les fonctions $\varphi^r(x^1, x^2, x^3)$ on obtient des formes que nous écrirons comme il suit:

$$\omega^h(I_3) = L_1^h dx^1 + L_2^h dx^2 + L_3^h dx^3,$$

$$d\omega^h(I_3) = L_{12}^h [dx^1 dx^2] + L_{23}^h [dx^2 dx^3] + L_{31}^h [dx^3 dx^1] \qquad (h = 1, 2, \ldots, s),$$

où l'on a posé

$$(19) \qquad L_i^h = a_i^h + b_r^h \frac{\partial z^r}{\partial x^i},$$

$$L_{ij}^h = a_{ij}^h + b_{ir}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^j} - b_{jr}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^i} + b_{qr}^h \frac{\partial z^q}{\partial x^i} \frac{\partial z^r}{\partial x^j}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad q, r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

En tenant compte des formules (16′) on vérifie aisément qu'entre les expressions L^h il y a des relations suivantes:

$$(20) \qquad L_{12}^h = \frac{\partial L_2^h}{\partial x^1} - \frac{\partial L_1^h}{\partial x^2}, \quad L_{23}^h = \frac{\partial L_3^h}{\partial x^2} - \frac{\partial L_2^h}{\partial x^3}, \quad L_{31}^h = \frac{\partial L_1^h}{\partial x^3} - \frac{\partial L_3^h}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial L_{12}^h}{\partial x^3} + \frac{\partial L_{23}^h}{\partial x^1} + \frac{\partial L_{31}^h}{\partial x^2} = 0,$$

où l'on doit prendre les dérivées par rapport à x^i en regardant z^r comme fonctions de x^1, x^2, x^3.

La variété I_3 devant satisfaire aux équations (16) il doit être $\omega^h(I_3) = 0$ $d\omega^h(I_3) = 0$; on en déduit les équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$L_i^h = 0, \quad L_{ij}^h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s; \ i, j = 1, 2, 3).$$

Nous les partagerons en trois groupe suivantes:

$$(\mathrm{I}) \qquad L_1^h \equiv a_1^h + b_r^h \frac{\partial z^r}{\partial x^1} = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \quad L_2^h \equiv a_2^h + b_r^h \frac{\partial z^r}{\partial x^2} = 0, \quad L_{12}^h \equiv a_{12}^h + b_{1r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^2} - b_{2r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^1} + b_{qr}^h \frac{\partial z^q}{\partial x^1} \frac{\partial z^r}{\partial x^2} = 0,$$

$$L_3^h \equiv a_3^h + b_r^h \frac{\partial z^r}{\partial x^3} = 0,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad L_{23}^h \equiv a_{23}^h + b_{2r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^3} - b_{3r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^2} + b_{qr}^h \frac{\partial z^q}{\partial x^2} \frac{\partial z^r}{\partial x^3} = 0,$$

$$L_{31}^h \equiv a_{31}^h + b_{3r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^1} - b_{1r}^h \frac{\partial z^r}{\partial x^3} + b_{qr}^h \frac{\partial z^q}{\partial x^3} \frac{\partial z^r}{\partial x^1} = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s; \ q, r = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Remarque. Envisageons maintenant les équations (17) de la variété I_2; si l'on substitue aux variables z^r dans les premiers membres des équations (16) les fonctions $\varphi^r(x^1, x^2)$ et à la variable x^3 zéro, on obtient des formes suivantes:

$$\omega^h(I_2) = L_1^h dx^1 + L_2^h x^2, \qquad d\omega^h(I_2) = L_{12}^h [dx^1 dx^2],$$

où L_1^h, L_2^h, L_{12}^h désignent les mêmes expressions que celles déduites des formules (19) à condition d'y substituer dans les coefficients la valeur zéro à la variable x^3. Comme I_2 est par hypothèse une variété intégrale du système S, il doit être $\omega^h(I_2) = 0$, $d\omega^h(I_2) = 0$, par conséquent les fonctions $x^3 = 0$, $z^r = \varphi^r(x^1, x^2)$ doivent satisfaire aux équations (I) et (II); d'après la seconde des formules (18) il doit être de même pour les fonctions $x^3 = 0$, $\psi^r(x^1, x^2, 0)$.

20. Démonstration du théorème de Cartan (suite). a) Le problème que nous nous proposons à résoudre a été ramené à l'étude du système des équations aux dérivées partielles du premier ordre, formé des relations (I), (II) et (III). Nous allons faire voir qu'à ce système peut être appliqué le théorème classique de Cauchy-Kowalewski ([28], p. 11). A cet effet nous montrerons d'abord que, si l'on tient compte des relations (I) et (II), les équations (III), qui sont linéaires par rapport aux dérivées $\partial z^r / \partial x^3$, peuvent être résolues par rapport à ϱ de ces dérivées, ϱ désignant le nombre défini par la formule (11).

Remarquons en premier lieu que les éléments intégraux linéaires du système des équations (16) sont définis par les équations suivantes:

$$(21) \qquad \omega^h = a_i^h dx^i + b_r^h dz^r = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s; \ i = 1, 2, 3; \ r = 1, 2, \ldots, n-3)$$

qui, par hypothèse, sont indépendantes au voisinage de M_0. Comme les trois vecteurs (15) issus de M_0 sont des éléments intégraux du système S, les équations (21) doivent être satisfaites, si l'on y remplace successivement les différentielles par les composantes des vecteurs e_1^0, e_2^0, e_3^0 et les variables par les coordonnées de M_0. Il s'en suit que les valeurs des coefficients a_1^h, a_2^h, a_3^h sont toutes nulles au point M_0 et que, par conséquent, ces équations étant indépendantes, la matrice des coefficients b_r^h est de rang s en M_0. Par suite les équations (21) peuvent donc être résolues en M_0 par rapport à s des différentielles dz^r; il en est donc de même au voisinage de M_0.

Considérons maintenant les trois vecteurs suivants:

$$e_i = \left(1, 0, 0, \frac{\partial z^1}{\partial x^i}, \frac{\partial z^2}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial z^{n-3}}{\partial x^i}\right) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

issus d'un point (x, z) du voisinage de M_0. En faisant usage de la symbolique dont nous nous avons servi au Vol. I (n° 32) on peut présenter les équations (I), (II) et (III) sous la forme suivante:

$$\text{(I}')\qquad \omega^h(e_1) = 0,$$

$$\text{(II}')\qquad \omega^h(e_2) = 0, \quad d\omega^h(e_1, e_2) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

$$\text{(III}')\qquad \omega^h(e_3) = 0, \quad d\omega^h(e_2, e_3) = 0, \quad d\omega^h(e_3, e_1) = 0.$$

Les équations (I′) expriment les conditions pour que e_1 soit un élément intégral du système S; il résulte de la remarque faite ci-dessus que les équations (I) peuvent être résolues par rapport à s des dérivées $\partial z^r/\partial x^1$. Les équations (II′), si l'on y regarde le vecteur e_2 comme inconnu, représentent le système polaire de e_1; ce système étant de rang $s+s_1$ (n° 19, Remarque 2), les équations (II) peuvent être résolues par rapport à $s+s_1$ des dérivées $\partial z^r/\partial x^2$, si l'on tient compte des équations (I) (Vol. I, n° 32). Si les vecteurs e_1 et e_2 satisfont aux équations (I′) et (II′), ils définissent un élément intégral E_2 du système S et par suite le système (III′) représente le système polaire de E_2; ce système étant de rang $\sigma = s+s_1+s_2$ (n° 19, Remarque 2) il en résulte que, si l'on tient compte des équations (I) et (II), les équations du système (III) peuvent être résolues par rapport à σ des dérivées $\partial z^r/\partial x^3$.

Pour obtenir les expressions de ces dérivées on doit donc procéder de la manière suivante. On résout les équations (I) par rapport à s des dérivées $\partial z^r/\partial x^1$ et l'on porte les expressions obtenues dans les équations (II); on résout ensuite les équations (II) par rapport à $s+s_1$ des dérivées $\partial z^r/\partial x^2$. On porte enfin les expressions ainsi obtenues et les expressions tirées précédemment des équations (I) dans les équations (III); on obtient ainsi un système des équations linéaires par rapport aux dérivées $\partial z^r/\partial x^3$. Ce système se réduit à σ équations indépendantes. Choisissons d'une manière quelconque parmi les équations (III) un système de σ équations indépendantes; nous leur donnerons le nom d'*équations principales*; toutes les autres équations du système (III) deviendront alors des conséquences des équations principales, si l'on tient compte des équations (I) et (II). Le rang du système des équations $L_3^h = 0$ étant égal à s, on peut admettre qu'elles appartiennent toutes aux équations principales. Des équations principales on peut tirer σ des dérivées $\partial z^r/\partial x^3$ en les exprimant au moyen des dérivées $\partial z^r/\partial x^1$, $\partial z^r/\partial x^2$ et des autres dérivées $\partial z^r/\partial x^3$ au nombre $n-3-\sigma$.

Tous ces raisonnements sont valables dans un voisinage de M_0; dans ce voisinage les équations (III) peuvent donc être remplacées par les équations de la forme suivante:

$$(22)\qquad \frac{\partial z^t}{\partial x^3} = F^t \qquad (t = 1, 2, \ldots, \sigma;\ \sigma = s+s_1+s_2),$$

si l'on tient compte des relations (I) et (II) et que l'on change au besoin les notations des indices des variables z^r. Les symboles F^t désignent ici fonctions des arguments $x^1, x^2, x^3, z^r, \partial z^r/\partial x^1, \partial z^r/\partial x^2, \partial z^{r'}/\partial x^3$ $(r = 1, 2, \ldots, n-3;\ r' = \sigma+1, \ldots, n-3)$. Remarquons que les fonctions F_t sont analytiques au voisinage du système des valeurs $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, $z^r = a^r$, $\partial z^r/\partial x^1 = \partial z^r/\partial x^2 = \partial z^{r'}/\partial x^3 = 0$.

Imaginons maintenant une variété quelconque V_ϱ $(\varrho = 3+s+s_1+s_2)$ passant par la variété intégrale (17) et telle que son ϱ-plan tangent au point M_0 contienne l'élément E_3^0 défini par les équations (12). Ses équations peuvent être écrites comme il suit:

$$(23)\qquad z^{r'} = \psi^{r'}(x^1, x^2, x^3) \qquad (r' = \sigma+1, \sigma+2, \ldots, n-3),$$

les fonctions $\psi^{r'}$ devant satisfaire aux conditions

$$\psi^{r'}(x^1, x^2, 0) = \varphi^{r'}(x^1, x^2), \qquad \left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^i}\right)_0 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il est facile de voir que la dimension de la variété ainsi définie est égale à $\varrho = 3+s+s_1+s_2$, les variables indépendantes sur celle-ci étant $x^1, x^2, x^3, z^1, z^2, \ldots, z^\sigma$ $(\sigma = s+s_1+s_2)$. Si $s+s_1+s_2 = n-3$, il est $\varrho = n$ et par suite la variété V_ϱ se confond avec U (n° 18, Remarque 1); dans ce cas particulier les formules (23) deviennent superflues.

Des conditions imposées à la variété V_ϱ il résulte aussi qu'elle passe par M_0 et que son ϱ-plan tangent en M_0 contient l'élément E_3^0 défini par les formules (12).

Portons les fonctions $\psi^{r'}(x^1, x^2, x^3)$ dans le second membre des équations (22); le système ainsi déduit de ces équations est un système de Cauchy-Kowalewski; d'après le théorème classique ([28], p. 11) il a une et une seule solution analytique

$$(24)\qquad z^t = \psi^t(x^1, x^2, x^3) \qquad (t = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

telle que pour $x^3 = 0$ les fonctions ψ^t se réduisent aux fonctions $\varphi^t(x^1, x^2)$ et telle qu'il soit $(\partial\psi^t/\partial x^3)_0 = 0$, les symboles en parenthèses désignant comme plus haut les valeurs au point M_0.

Les formules (23) et (24) représentent évidemment une variété I_3 à trois dimensions qui passe par la variété intégrale I_2, qui est tangent en M_0 à E_3^0 et qui est contenue dans la variété V_ϱ définie par les équations (23). La variété I_3 remplit donc les conditions initiales 1° et 2° du Théorème de Cartan. Il nous reste maintenant à montrer que les fonctions (24) satisfont aux équations (I), (II) et (III), si l'on y remplace les variables $z^{r'}$ par les expressions (23), c'est ce que nous allons supposer dans la suite. Alors nous pouvons faire abstraction de ces variables et nous imaginer que I_3 est une variété définie seulement par les équations (24) dans l'espace à $3+\sigma$ dimensions aux coordonnées $x^1, x^2, x^3, z^1, z^2, \dots, z^\sigma$ $(\sigma = s+s_1+s_2)$.

De ce qui précède il résulte seulement que cette variété satisfait aux équations principales que l'on obtient des équations (III), si l'on tient compte des relations (I) et (II). Nous devons donc montrer qu'elle satisfait aussi aux équations (I) et (II) et aux équations non principales du système (III).

b) Considérons d'abord l'une quelconque des équations non principales du système $L^h_{31} = 0$ $(h = 1, 2, \dots, s)$; désignons son indice par k et l'écrivons de la manière suivante:

$$L^k_{31} \equiv a^k_{31} + b^k_{3r}\frac{\partial z^r}{\partial x^1} - \left(b^k_{1r} - b^k_{qr}\frac{\partial z^q}{\partial x^1}\right)\frac{\partial z^r}{\partial x^3} = 0. \tag{25}$$

Remarquons que cette relation ne contient pas les dérivées $\partial z^r/\partial x^2$ et qu'elle est linéaire par rapport aux dérivées $\partial z^r/\partial x^1$ et par rapport aux dérivées $\partial z^r/\partial x^3$. Celles des relations (19) qui définissent les grandeurs

$$L^h_1, \quad L^h_3, \quad L^{k'}_{31} \quad (h = 1, 2, \dots, s), \tag{26}$$

où k' parcourt les indices des équations principales, nous permettent d'exprimer s des dérivées $\partial z^r/\partial x^1$ et un certain nombre des dérivées $\partial z^r/\partial x^3$ au moyen des grandeurs L^h_1, L^h_3 et $L^{k'}_{31}$. Si l'on porte les expressions ainsi obtenues dans l'équation (25), on obtient une formule de la forme suivante:

$$L^k_{31} = \Phi^k(L^h_1, L^h_2, L^{k'}_{31}), \tag{27}$$

où la fonction Φ^k est linéaire par rapport à chacune de trois séries de ses arguments et où les coefficients sont des fonctions des variables x^1, x^2, x^3, z^r et de celles des dérivées $\partial z^r/\partial x^1$ et $\partial z^r/\partial x^3$ qui n'ont pas été éliminées au moyen des relations (26); ajoutons que les coefficients dans la fonction Φ^k sont des fonctions analytiques au voisinage des valeurs $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, $z^r = a^r$, $\partial z^r/\partial x^1 = 0$, $\partial z^r/\partial x^2 = 0$. Remplaçons maintenant les variables z^r dans les équations (27) par les fonctions (24) qui représentent la variété I_3 et indiquons par une barre le résultat de la substitution. Comme les relations $L^h_3 = 0$ et $L^{k'}_{31} = 0$ sont des équations principales, on a

$$\overline{L}^h_3 = 0, \quad \overline{L}^{k'}_{31} = 0 \tag{28}$$

(v. la fin de la partie a) du présent numéro); si l'on se rappelle encore que la fonction Φ^k est linéaire par rapport aux grandeurs L^h_1, l'égalité (27) entraînera la suivante

$$\overline{L}^k_{31} = A^k_1\overline{L}^1_1 + A^k_2\overline{L}^2_1 + \dots + A^k_s\overline{L}^s_1, \tag{29}$$

où les coefficients A sont des fonctions analytiques des variables x^1, x^2, x^3 au voisinage des valeurs nulles. D'autre part, d'après la troisième des formules (19) on a

$$\overline{L^k_{31}} = \overline{\frac{\partial L^k_1}{\partial x^3}} - \overline{\frac{\partial L^k_3}{\partial x^1}};$$

la substitution indiquée par la barre et la dérivation par rapport à x^1 ou à x^2 étant permutables, on peut écrire la dernière égalité comme il suit

$$\overline{L^k_{31}} = \frac{\partial \overline{L^k_1}}{\partial x^3} - \frac{\partial \overline{L^k_3}}{\partial x^1}$$

ou, si l'on tient compte des relations (28),

$$\overline{L^k_{31}} = \frac{\partial \overline{L^k_1}}{\partial x^3}.$$

En rapprochant ce résultat de la formule (29) il vient

$$\frac{\partial \overline{L^k_1}}{\partial x^3} = A^k_1\overline{L^1_1} + \dots + A^k_s\overline{L^s_1}. \tag{30}$$

Les relations de la forme (30) sont vraies pour chaque indice k qui se rapporte à une équation non principale du système des équations $L^h_{31} = 0$. Si k' désigne un indice d'une équation principale de ce système, il est

$$\overline{L^{k'}_{31}} = \frac{\partial \overline{L^{k'}_1}}{\partial x^3} - \frac{\partial \overline{L^{k'}_3}}{\partial x^1}$$

et, par suite, eu égard aux relations (28),

$$\frac{\partial \overline{L^{k'}_1}}{\partial x^3} = 0. \tag{31}$$

Nous voyons ainsi que toutes les grandeurs $\overline{L^h_1}$ satisfont aux équations différentielles linéaires et homogènes (30) et (31). Ce système admet une solution unique qui pour $x^3 = 0$ prend les valeurs nulles. Or, nous savons que les fonctions (23) et (24), si l'on y pose $x^3 = 0$, se réduisent aux fonctions $\varphi^r(x^1, x^2)$ qui, par hypothèse, représentent une variété intégrale (17) du système S; elles satisfont donc aux équations (I) et (II) (Remarque à la fin du nº 19). Il en résulte que les fonctions $\overline{L^h_1}$ deviennent nulles, si l'on y pose $x^3 = 0$. Par conséquent elles sont nulles pour toutes les valeurs au voisinage de la valeur $x^3 = 0$. On a donc $\overline{L_1^h} = 0$ et, d'après la formule (29), $\overline{L_{31}^k} = 0$, où k désigne l'indice d'une équation non principale. Nous avons ainsi montré que la variété I_3 définie par les équations (24) satisfait aux équations $L_1^h = 0$ et $L_{31}^h = 0$; il nous reste encore de prouver qu'elle jouit de la même propriété à l'égard des équations $L_2^h = 0$, $L_{12}^h = 0$ et $L_{23}^h = 0$.

c) Envisageons une équation non principale

$$L_{23}^l = a_{23}^l - b_{3r}^l \frac{\partial x^r}{\partial x^2} + \left(b_{2r}^l + b_{qr}^l \frac{\partial z^q}{\partial x^2}\right) \frac{\partial z^r}{\partial x^3} = 0; \tag{32}$$

suivant sa définition elle doit être une conséquence des équations principales du système (III), si l'on tient compte des équations (I) et (II). On met ce fait en évidence en écrivant la formule suivante:

$$L_{23}^l = \psi^l(L_1^h, L_2^h, L_{12}^h, L_3^h, L_{31}^{k'}, L_{23}^{l'}), \tag{33}$$

où k' et l' parcourent respectivement les indices des équations principales parmi les relations $L_{31}^h = 0$ et $L_{23}^h = 0$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$. On arrive à cette formule au moyen d'un raisonnement analogue à celui qui nous a conduit à l'équation (22). Comme l'équation $L_{23}^l = 0$ doit être une conséquence des équations principales du système, si l'on tient compte des equations (I) et (II), il s'en suit que la fonction ψ^l doit s'annuler, si l'on donne à tous ses arguments la valeur zéro. Remarquons aussi que, l'expression (32) étant linéaire en les dérivées $\partial z^r/\partial x^2$, il en est de même de la fonction ψ^l pour L_2^h et L_{12}^h.

Cela posé, portons les expressions (24), qui représentent la variété I_3, dans la formule (33), en indiquant comme auparavant par une barre le résultat de la substitution. Toutes les grandeurs L deviendront maintenant des fonctions de x^1, x^2, x^3 et il sera identiquement

$$\overline{L_1^h} = 0, \quad \overline{L_3^h} = 0, \quad \overline{L_{31}^{k'}} = 0, \quad \overline{L_{23}^{l'}} = 0; \tag{34}$$

les trois dernières de ces égalités résultent de l'hypothèse que la variété I_3 satisfait aux équations principales du système (I) — (III) et la première a été démontrée plus haut (n° 19, b). Si l'on tient compte des égalités (34), la formule (33) prendra la forme suivante:

$$\overline{L_{23}^l} = \Omega^l(\overline{L_2^h}, \overline{L_{12}^h}), \tag{35}$$

où Ω^l est une fonction linéaire en $\overline{L_2^h}$ et en $\overline{L_{12}^h}$ et telle qu'il est $\Omega^l(0, 0) = 0$. On en conclut que l'égalité $\overline{L_{23}^l} = 0$ sera démontrée, si l'on fait voir qu'il est $\overline{L_2^h} = 0$ et $\overline{L_{12}^h} = 0$, c'est ce que nous allons maintenant montrer.

Envisageons maintenant la deuxième des relations (19); on en déduit les égalités suivantes

$$\frac{\partial \overline{L_3^h}}{\partial x^2} - \frac{\partial \overline{L_2^h}}{\partial x^3} = \overline{L_{23}^h}.$$

En ayant égard aux égalités (34) nous partagerons ces égalités en deux groupes

$$\frac{\partial \overline{L_2^l}}{\partial x^3} = -L_{23}^l, \quad \frac{\partial \overline{L_2^{l'}}}{\partial x^3} = 0,$$

suivant que l'on prenne pour h l'indice l d'une équation non principale $L_{23}^l = 0$ ou l'indice l' d'une équation principale $L_{23}^{l'} = 0$. En rapprochant ce résultat de la formule (35), il viendra

$$\frac{\partial \overline{L_2^l}}{\partial x^3} = -\Omega^l(\overline{L_2^h}, \overline{L_{12}^h}), \quad \frac{\partial \overline{L_2^{l'}}}{\partial x^3} = 0. \tag{36}$$

Reprenons de maintenant la quatrième des identités (19); si l'on y tient compte de la troisième des égalités (34), on obtient la relation

$$\frac{\partial \overline{L_{12}^l}}{\partial x^3} = -\frac{\partial \overline{L_{23}^h}}{\partial x^1}.$$

En ayant égard à la quatrième des égalités (34) et à la formule (35) on en déduit les relations suivantes:

$$\frac{\partial \overline{L_{12}^l}}{\partial x^3} = -\frac{\Omega^l(\overline{L_2^h}, \overline{L_{12}^h})}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial \overline{L_{12}^{l'}}}{\partial x^3} = 0,$$

où les indices l et l' ont la même signification que dans les équations (36). On peut présenter ces formules sous la forme suivante

$$\frac{\partial \overline{L_{12}^l}}{\partial x^3} = T^l\left(\overline{L_2^h}, \overline{L_{12}^h}, \frac{\partial \overline{L_2^h}}{\partial x^1}, \frac{\partial \overline{L_{12}^h}}{\partial x^1}\right), \quad \frac{\partial \overline{L_{12}^{l'}}}{\partial x^3} = 0; \tag{37}$$

la fonction T^l est linéaire en éléments de chacun de quatre ensembles de ses variables et elle s'annule, si l'on donne à ces variables la valeur zéro.

Les formules (36) et (37) montrent que les grandeurs $\overline{L_2^h}(x^1, x^2, x^3)$ et $\overline{L_{12}^h}(x^1, x^2, x^3)$ représentent une solution du système de Cauchy-Kowalewski de la forme suivante:

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^3} = -\Omega^l(y^h, z^h), \quad \frac{\partial y^{l'}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial z^l}{\partial x^3} = T^l\left(y^h, z^h, \frac{\partial y^h}{\partial x^1}, \frac{\partial z^h}{\partial x^1}\right), \quad \frac{\partial z^{l'}}{\partial x^3} = 0.$$

Ce système a une et une seule solution qui pour $x^3 = 0$ se réduit à zéro; les fonctions Ω^l et T^l prenant la valeur zéro, si leurs arguments s'annulent, cette solution est donnée par les formules $y^l = 0$, $z^l = 0$. Or, la variété I_3 se réduit à la variété I_2, si l'on pose dans ses équations $x^3 = 0$; comme la variété I_2 satisfait aux équations (I) et (II), il doit être $\overline{L_2^h}(x^1, x^2, 0) = 0$ et $\overline{L_{12}^h}(x^1, x^2, 0) = 0$ (nº 19, Remarque). On en conclut qu'il est identiquement $\overline{L_2^h}(x^1, x^2, x^3) = 0$ et $\overline{L_{12}^h}(x^1, x^2, x^3) = 0$, autrement dit la variété I_3 satisfait aux équations $L_2^h = 0$ et $L_{12}^h = 0$ et, en vertu de la formule (35), aux équations $L_{23}^h = 0$. Le théorème de Cartan est ainsi complètement démontré. A la variété I_3, tangente en M_0 à un élément intégral ordinaire E_3^0, nous donnerons le nom de *variété intégrale ordinaire*; nous l'appellerons *variété intégrale régulière*, si cet élément intégral est régulier.

21. Compléments. 1) Le système différentiel considéré aux nºs 18 et 19 était formé de s équations de Pfaff. Admettons maintenant qu'il contienne en outre m équations finies entre les variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$

$$f^q(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

et que, par suite, parmi les équations (7) figurent les relations différentielles

$$df^q = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, m) \tag{39}$$

déduites des relations (38). Nous supposerons que les fonctions f^q soient analytiques et que la matrice de ses dérivées partielles du premier ordre soit de rang m en un point $M_0(x_0^\varkappa)$ dont les coordonnées satisfont aux équations (38). Il existe alors une et une seule variété analytique V à $n-m$ dimensions satisfaisant aux équations (38) et passant par M_0; ses points seront appelés *points intégraux* du système S composé des équations (7), (8) et (38). Un élément plan de $R^n(x^\varkappa)$ est dit élément intégral de S, si son origine est un point intégral et s'il satisfait aux relations (7) et (8).

Ceci posé, au système envisagé maintenant peuvent être appliquées toutes les considérations qui nous ont servi pour démontrer le théorème de Cartan dans le cas d'un système privé des équations finies. Il faut seulement observer que la variété I_2 définie par les équations (17)

$$x^3 = 0, \qquad z^r = \varphi^r(x^1, x^2) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3)$$

qui par hypothèse est une variété intégrale à deux dimensions, doit satisfaire, en outre des relations différentielles (7) et (8), aux équations (38) qui, avec des notations adoptées au nº 18, peuvent s'écrire comme il suit

$$f^q(x^1, x^2, x^3, z^1, z^2, \ldots, z^{n-3}) = 0. \tag{38'}$$

On détermine alors de la même manière qu'au nº 18 la variété I_3 présentée au moyen des formules (18)

$$z^r = \psi^r(x^1, x^2, x^3), \qquad \psi^r(x^1, x^2, 0) = \varphi^r(x^1, x^2)$$

et l'on démontre qu'elle satisfait aux équations différentielles (16). Pour montrer qu'elle remplit aussi les équations (38′) remarquons d'abord que, la variété I_2 étant par hypothèse une intégrale du système S, ces relations seront satisfaites, si l'on y remplace les variables z^r par les fonctions $\psi^r(x^1, x^2, x^3)$ et que l'on pose ensuite $x^3 = 0$. Rappelons maintenant que les fonctions $\psi^r(x^1, x^2, x^3)$ satisfont aux équations (7) qui contiennent les relations (39); il s'en suit que les fonctions f^q ont des valeurs constantes sur la variété I_3 et, comme elles sont nulles pour $x^3 = 0$, elles sont identiquement nulles, autrement dit la variété I_3 satisfait aux équations (38′).

2) Nous avons vu au nº 20 que la solution ordinaire I_3 aux variables indépendantes x^1, x^2, x^3 d'un système de Pfaff dépend 1º du choix d'une solution régulière I_2 à deux variables x^1, x^2 et 2º du choix de $n-3-s-s_1-s_2$ fonctions arbitraires de x^1, x^2, x^3, assujetties seulement à se réduire pour $x^3 = 0$ à des fonctions connues. Le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat étant indépendant du nombre $p = 3$ des variables indépendantes on peut énoncer la propriété précédente des solutions d'une façon générale suivante.

La solution ordinaire I_p aux variables indépendantes $x^1, x^2, \ldots, x^p$ d'un système de Pfaff dépend 1º du choix d'une solution régulière I_{p-1} aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$ et 2º du choix de $n-p-s-s_1-\ldots-s_{p-1}$ fonctions arbitraires de $x^1, x^2, \ldots, x^p$, assujetties seulement à se réduire pour $x^p = 0$ à des fonctions connues de $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$. Les éléments arbitraires une fois choisis, on trouve la solution I_p par l'intégration d'un système de Cauchy-Kowalewski.

De même I_{p-1} étant une solution particulière à $p-1$ variables du même système de Pfaff, où l'on a posé $x_p = 0$ en diminuant ainsi le nombre des variables à $n-1$, elle dépend du choix de $(n-1)-(p-1)-s-s_1-\ldots-s_{p-2} = n-p-s-s_1-\ldots-s_{p-2}$ fonctions arbitraires de $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$, assujetties à la condition de se réduire pour $x^{p-1} = 0$ à des fonctions données de $x^1, x^2, \ldots, x^{p-2}$. Et ainsi de suite.

La recherche de I_p exige ainsi, dans le cas général, l'intégration successive de $p-1$ systèmes de Cauchy-Kowalewski et d'un système des équations différentielles (pour trouver I_1).

Si $s+s_1+\ldots+s_{p-1} = n-p$ et $s+s_1+\ldots+s_{p-2} \neq n-p$, dans la solution générale à p variables indépendantes ne figure aucune fonction arbitraire de p variables, par conséquent par toute variété intégrale à $p-1$ dimensions passe une seule variété intégrale à p dimensions. On peut dire d'une manière générale que, si

$$\begin{aligned} s+s_1+\dots+s_{p-1} &= n-p \\ s+s_1+\dots+s_{p-2} &= n-p, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ s+s_1+\dots+s_{p-h} &= n-p, \\ s+s_1+\dots+s_{p-h-1} &\neq n-p, \end{aligned}$$

la solution générale à p variables dépend de $n-p-s-s_1-\dots-s_{p-h-1}$ fonctions arbitraires de h variables et elle ne contient aucune fonction arbitraire d'un nombre des variables supérieur à h; par conséquent par toute variété intégrale à h dimensions passe une seule variété intégrale à p dimensions; il est facile à voir que les relations précédentes peuvent être remplacées par les suivantes:

$$s_{p-h+1} = s_{p-h+2} = \dots = s_{p-1} = 0, \quad s+s_1+\dots+s_{p-h} = n-p.$$

On doit à E. Cartan ([5], p. 288) une étude approfondie du problème de l'intégration des systèmes de Pfaff satisfaisant aux conditions ci-dessus.

22. Solutions singulières. Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^\kappa)$ soit donné un système différentiel analytique S formé de m équations finies $f^q(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$ $(q = 1, 2, \dots, m)$ et de s équations de Pfaff $\omega^h = a^h_\varrho dx^\varrho = 0$ $(h = 1, 2, \dots, s)$. Admettons que le rang du système des équations $f^q = 0$ soit égal à m dans tout l'ouvert U et que celui du système $\omega^h = 0$ soit en général égal à s. Il existe alors une et une seule variété analytique V à $n-m$ dimensions passant par un point de U arbitrairement choisi et satisfaisant aux équations $f^q = 0$. Si en un point de V le rang de système des équations $\omega^h = 0$ est égal à s, on dit qu'il est un *point intégral régulier* du système S; si ce rang s'abbaisse le point porte le nom de *point intégral singulier*.

Nous avons appelé solutions singulières d'un système d'équations de Pfaff les variétés intégrales qui ne font pas partie de sa solution générale (n° 18, Remarque 1). Ces solutions peuvent être divisées en diverses classes suivant leurs dégré de singularité. Une intégrale I_p à p dimensions a le degré p de singularité, si tous ses points sont singuliers; le degré de singularité de I_p est égal à $p-k$ $(k < p)$, si, tous ses éléments intégraux tangents à k dimensions étant singuliers, tous ceux dont la dimension est inférieure à k sont réguliers. Rappelons le critère qui nous permet de reconnaître, si un élément intégral est singulier (Vol. I, n° 32). Imaginons pour cela que l'on a fermé le système S et désignons comme auparavant par g son genre et par $s, s_1, \dots, s_g$ ses caractères; pour qu'un élément

intégral E_k soit singulier, sans que tous les éléments à $k-1$ dimensions qu'il contient le soient, il faut et il suffit que le rang de son système polaire soit inférieur à la somme $s+s_1+\dots+s_k$.

Nous donnerons maintenant un exemple pour éclaircir ces généralités.

Soit

$$F \equiv p^2+q^2-(px+qy)^2 = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes x et y. Nous la remplacerons par le système différentiel fermé S, formé de l'équation finie $F = 0$, de deux équations de Pfaff

$$\omega = dz-p\,dx-q\,dy = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}dF = (px+qy)[p\,dx+q\,dy]-[p-(px+qy)x]dp- \\ -[q-(px+qy)y]dq = 0$$

et de l'équation quadratique

$$[dx\,dp]+[dy\,dq] = 0.$$

Le problème consiste maintenant à trouver les solutions régulières et singulières à deux dimensions du système S.

Un point (x, y, z, p, q) de l'espace à cinq dimensions est un point régulier de S, si le rang du système des équations $\omega = 0$, $dF = 0$ est égal à deux; il est alors $s = 2$, s désignant le premier caractère de S. Pour que le point (x, y, z, p, q) soit singulier, il faut que ce rang s'abbaisse à un, ce qui a lieu, si l'on a $p = 0$, $q = 0$; il résulte alors de l'équation $\omega = 0$, qu'il doit être $dz = 0$ et que, par suite, $z = c$, où c est une constante arbitraire. La variété I_2 à deux dimensions, définie par les équations $p = 0$, $q = 0$, $z = c$, est alors une solution singulière du système S et l'équation $z = c$ représente la variété intégrale singulière de l'équation aux dérivées partielles $F = 0$; le degré de singularité de I_2 est égal à 2.

Pour trouver d'autres solutions, s'il en existe, considérons un élément intégral linéaire e_1 de composantes $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q$ issu d'un point régulier. Ses composantes satisfont, par hypothèse, aux équations $\omega = 0$, $dF = 0$ et son système polaire est représenté par les équations linéaires

$$(40) \quad \left\{\begin{aligned} &dz-p\,dx-q\,dy = 0, \\ &(px+qy)(p\,dx+q\,dy)+[p-(px+qy)x]dp+[q-(px+qy)y]dq=0, \\ &\delta p\,dx-\delta x\,dp+\delta q\,dy-\delta y\,dq = 0 \end{aligned}\right.$$

aux inconnues dx, dy, dz, dp, dq. Le rang de ce système est en général égal à trois, il est donc $s+s_1 = 3$, ou s_1 est le second caractère de S; comme le nombre de variables est égal à cinq, on a $s+s_1 = 5-2$, ce qui montre que S est de genre deux (Vol. I, n° 32). Donc, d'après le théorème de Cartan le système S admet une solution génerale à deux dimensions. Il est facile de se convaincre qu'il n'y a pas de solution à deux dimensions dont le degré de singularité soit égal à 1. D'après la définition donnée plus haut il faudrait pour cela que tous les éléments intégraux lineaires d'une telle solution soient singuliers. Or, un élément linéaire $(\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q)$ de S est singulier, si le rang du système des équations linéaires (40) se réduit à deux. Il doit donc être

$$\frac{\delta p}{(px+qy)p} = \frac{\delta q}{(px+qy)q} = \frac{\delta x}{p-(px+qy)x} = \frac{\delta y}{q-(px+qy)y},$$

ce qui montre qu'en point régulier il n'existe qu'un seul élément linéaire intégral singulier et que par conséquent le système S n'admet pas de solutions singulières de degré de singularité égal à 1.

§ 2. Systèmes de Pfaff en involution

23. Préliminaires. Soit donné dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ un système S formé de m équations finies entre les variables $x^\varkappa$ et de s équations indépendantes de Pfaff; supposons que son genre et ses caractères soient respectivement égaux aux nombres g et $s, s_1, \ldots, s_g$. On aura alors la relation

$$s+s_1+s_2+\ldots+s_g = n-g \tag{1}$$

et le nombre $Q(p)$ des équations qui définissent un élément intégral ordinaire à $p \leqslant g$ dimensions est donné par la formule suivante:

$$Q(p) = ps+(p-1)s_1+\ldots+2s_{p-2}+s_{p-1} \tag{2}$$

(Vol. I, p. 66).

Nous dirons que le système S est *en involution* par rapport aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, si les équations de sa variété intégrale quelconque, faisant partie de sa solution générale à p dimensions, n'entraînent aucune relation entre les variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, auxquelles nous donnerons maintenant le nom de *variables indépendantes* de la solution générale. Si le système S est en involution, des équations qui déterminent un élément intégral tangent à une variété intégrale ordinaire I_p du système S ne doit pas résulter aucune relation de la forme suivante:

$$a_1 dx^1+a_2 dx^2+\ldots+a_p dx^p = 0. \tag{3}$$

Comme chaque élément intégral ordinaire E_p du système S est tangent à une variété intégrale ordinaire (n° 17, Remarque 1), on peut donner

à la définition précédente une forme plus commode en disant que le système est en involution par rapport aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, si les équations de définition d'un élément intégral ordinaire quelconque à p dimensions n'entraînent aucune relation de la forme (3). Remarquons encore que dans la dernière définition on peut remplacer la relation (3) par la suivante

$$b_1\omega^1+b_2\omega^2+\ldots+b_p\omega^p = 0, \tag{4}$$

$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$ désignant p formes indépendantes de Pfaff, homogènes par rapport aux différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^p$, aux coefficients dépendants des variables indépendantes et dépendantes. L'équation (4) représente un élément plan E_{n-p}; donc si le système S est en involution, il n'existe aucun élément plan à $n-p$ dimensions, défini par une équation de la forme (4), qui contiendrait les éléments intégraux ordinaires à p dimensions.

De la théorie des éléments ordinaires d'un système d'équations extérieures (Vol. I, n° 31) résulte le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour que le système S soit en involution par rapport aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, il faut et il suffit que les équations du système polaire d'un élément intégral régulier quelconque E_q $(0 \leqslant q \leqslant p)$ n'entraînent aucune relation entre les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$.*

Dans les applications des systèmes de Pfaff à la théorie des équations aux dérivées partielles et à la géométrie différentielle les systèmes en involution jouent un rôle important. Considérons par exemple, avec les notations classiques, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$q = f(x, y, z, p). \tag{5}$$

Cette équation peut être remplacée par l'équation de Pfaff

$$dz-p\,dx-f\,dy = 0 \tag{5'}$$

à quatre variables x, y, z, p. La résolution de l'équation (5) et celle de l'équation (5′) sont deux problèmes équivalents, si l'on restreint le second problème à la recherche des variétés intégrales ordinaires à deux dimensions qui ne comportent aucune relation entre x et y, c'est-à-dire qui sont en involution par rapport à ces variables.

Le critère de l'involutivité donné par le Théorème 1 n'étant pas commode dans les applications, il y a intérêt d'avoir une méthode plus simple qui permettrait de reconnaître, si un système de Pfaff est en involution par rapport à un ensemble de variables choisi à volonté. Dans les numéros suivants nous présenteront les critères dûs à E. Cartan qui s'appliquent sans difficulté aux problèmes de la théorie des groupes continus et de la géométrie.

24. Critères d'involutions. Introduisons $n-p$ formes différentielles linéaires $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^{n-p}$ aux variables $x^\varkappa$, indépendantes entre elles et indépendantes des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$. Les équations du système S, après l'avoir fermé, peuvent alors être écrites comme il suit:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &f^q(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0, \\ &a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0, \\ &\tfrac{1}{2} c^k_{\varkappa\lambda}[\tau^\varkappa \tau^\lambda] + a^k_{i\varkappa}[\omega^i \tau^\varkappa] + \tfrac{1}{2} a^k_{ij}[\omega^i \omega^j] = 0 \\ &(q = 1, 2, \ldots, m;\ h = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, t; \\ &\quad i, j = 1, 2, \ldots, p;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n-p). \end{aligned}\right.$$

A. Nous allons commencer par considérer le cas spécial, qui se présente le plus souvent dans les applications, en supposant que les relations de la troisième ligne des équations (6) sont linéaires par rapport aux formes $\tau^\varkappa$; nous poserons donc $c^k_{\varkappa\lambda} = 0$, par conséquent les équations (6) prendront la forme suivante:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &f^q(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0, \\ &a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0, \\ &a^k_{i\varkappa}[\omega^i \tau^\varkappa] + \tfrac{1}{2} a^k_{ij}[\omega^i \omega^j] = 0, \end{aligned}\right.$$

les indices parcourant ici et dans tout ce qui suit les mêmes valeurs que précédemment.

Imaginons maintenant un élément intégral ordinaire E_p dont les équations n'entraînent aucune relation entre les formes ω^i. Ses équations peuvent donc être présentées sous la forme suivante

$$(8)\qquad \tau^\varkappa = l^\varkappa_i \omega^i.$$

L'élément E_p devant satisfaire aux équations (7) il en résulte que les coefficients $l^\varkappa_i$ sont assujettis aux relations linéaires suivantes

$$(9)\qquad a^h_\varkappa l^\varkappa_i + b^h_i = 0, \qquad a^k_{i\varkappa} l^\varkappa_j - a^k_{j\varkappa} l^\varkappa_i + a^k_{ij} = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, t;\ i, j = 1, 2, \ldots, p;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, n-p)$$

qui se déduisent des équations (7), si l'on y porte les expressions (8) et que l'on tient compte de l'hypothèse que les formes ω^i sont indépendantes entre elles. Si les équations (9) ne sont pas compatibles, il n'y a pas d'éléments intégraux ordinaires à p dimensions jouissants de la propriété demandée et, par suite, le système (7) n'est pas en involution. Nous excluons ce cas de nos considérations suivantes en supposant que le système des

équations (9) soit compatible et nous allons chercher d'autres conditions pour que le système (7) soit en involution.

Remarquons auparavant que les relations (9) sont linéaires par rapport aux paramètres $l^\varkappa_i$; par conséquent, si elles admettent plusieurs solutions, les éléments intégraux à p dimensions qui leur correspondent forment une famille continue. Soit E_p un de ces éléments correspondant à une solution déterminée des relations (9); il contient p éléments intégraux linéaires que l'on obtient en posant dans les formules (8) $\omega^i = 1$, $\omega^h = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ h \neq i)$; les autres composantes de ces éléments auront alors les valeurs $\tau^\varkappa = l^\varkappa_i$. Si l'on choisit arbitrairement $q < p$ parmi ces éléments linéaires, on obtient un élément intégral E_q à q dimensions contenu dans E_p; si E_p est élément intégral ordinaire, tous les éléments E_q qu'il contient sont réguliers (Vol. I, n° 32). Les éléments intégraux E_p, dont les équations n'entraînent aucune relation entre les formes ω^i, et les éléments E_q contenus dans les éléments E_p forment une famille que nous désignerons par F. Dans la suite nous n'envisagerons que les éléments intégraux de la famille F. Remarquons encore que dans les équations d'un élément E_q $(q < p)$ de la famille il n'y a que $p-q$ relations entre les formes ω^i.

Considérons maintenant un élément intégral général à p dimensions du système (7). Il résulte de la théorie des caractères d'un système d'équations extérieures (Vol. I, p. 66) que le nombre des relations indépendantes qui lient les paramètres de cet élément est au plus égal au nombre $Q(p)$ défini par la formule (2). Si ce nombre est inférieur à $Q(p)$, l'élément considéré est singulier, s'il atteint $Q(p)$, il est un élément ordinaire. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante:

Théorème 2. *Pour que le système* (7) *soit en involution, il faut et il suffit que le nombre d'équations indépendantes qui lient les paramètres* $l^\varkappa_i$ *de l'élément intégral défini par les formules* (8) *soit égal à* $Q(p)$.

La nécessité de cette condition est une coséquence immédiate de la remarque faite ci-dessus; elle est encore suffisante, car, si elle est satisfaite, le système polaire d'un élément intégral régulier E_q $(q < p)$ ne peut entraîner aucune relation entre les formes ω^i ce qui suffit, selon le Théorème 1, pour garantir que le système soit en involution.

L'application de ce théorème suppose que l'on ait calculé au préalable les caractères du système donné ce qui exige souvent des longs bien que faciles calculs. Pour obtenir un critère plus maniable nous nous servirons de la notion de *caractères réduits* qui sont plus faciles à calculer et dont nous allons maintenant donner la définition.

Considérons à cet effet une élément intégral quelconque E_q $(q < p)$ de la famille F; si dans les équations de son système polaire on néglige les termes en ω^i, on obtient un système des équations auquel nous donnerons le nom de *système polaire réduit* de E_q.

Nous allons écrire les équations des systèmes polaires réduits pour $q = 0, 1, 2$. Commençons pour cela par choisir un point intégral régulier arbitraire (nº 22); son système polaire étant formé des équations

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0, \tag{10}$$

le premier système polaire réduit à la forme suivante:

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa = 0. \tag{10'}$$

Au rang s' de ce système nous donnons le nom de *premier caractère réduit*. Remarquons que, s'il était $s' < s$, des équations (10) du système polaire d'un point intégral régulier résulterait au moins une relation entre les formes ω^i et, par suite, le système ne serait pas en involution; nous allons donc supposer dans les considérations suivantes qu'il est $s' = s$. Envisageons maintenant un élément linéaire e_1 de la famille F en posant $\omega^i = u^i_1$, $\tau^\varkappa = l^\varkappa_i u^i_1$, où u^i_1 désignent des nombres arbitraires non tous nuls. Le système polaire de e_1 est formé des équations suivantes:

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0,$$
$$a^k_{i\varkappa} u^i_1 \tau^\varkappa - a^k_{j\varkappa} l^\varkappa_i u^i_1 \omega^j + a^k_{ij} u^i_1 \omega^j = 0$$

et, par suite, le système polaire réduit de e_1 a la forme suivante:

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa = 0, \quad a^k_{i\varkappa} u^i_1 \tau^\varkappa = 0. \tag{10''}$$

Il est bien clair que le rang de ce système réduit est inférieur ou égal à $s + s_1$ et qu'il peut varier selon le choix de l'élément e_1 dans la famille F; nous désignerons par $s + s'_1$ sa plus haute valeur et nous donnons à s'_1 le nom de second caractère réduit du système (7). Considérons maintenant un second élément linéaire e_2 contenu dans le même élément intégral E_p, auquel appartient e_1 et indépendant de e_1; soient $\omega^i = u^i_2$, $\tau^\varkappa$, $l^\varkappa_i u^i_2$ ses composantes. Les éléments e_1 et e_2 déterminent un élément intégral E_2 contenu dans E_p; son système polaire étant formé des équations

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0,$$
$$a^k_{i\varkappa} u^i_1 \tau^\varkappa - a^k_{j\varkappa} l^\varkappa_i u^i_1 \omega^j + a^k_{ij} u^i_1 \omega^j = 0,$$
$$a^k_{i\varkappa} u^i_2 \tau^\varkappa - a^k_{j\varkappa} l^\varkappa_i u^i_2 \omega^j + a^k_{ij} u^i_2 \omega^j = 0,$$

le système polaire réduit de E_2 se compose des relations

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa = 0, \quad a^k_{i\varkappa} u^i_1 \tau^\varkappa = 0, \quad a^k_{i\varkappa} u^i_2 \tau^\varkappa = 0. \tag{10'''}$$

Si $s + s'_1 + s'_2$ est la plus haute valeur du rang d'un tel système pour tous les choix possibles de l'élément e_2, on donne à s'_2 le nom de troisième caractère réduit du système (7). En continuant ainsi on obtient l'ensemble des caractères réduits $s, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{p-1}$ de ce système.

On voit bien d'après cela que les caractères réduits dépendent seulement des coefficients $a^k_{i\varkappa}$ dans les équations quadratiques du système (7) et qu'elles satisfont aux inégalités

$$s'_i \leqslant s_i \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1). \tag{11}$$

Ceci posé nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3 (Cartan). *Pour que le système* (7) *soit en involution par rapport aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, il faut et il suffit que le nombre des relations indépendantes qui lient les paramètres $l^\varkappa_i$ d'un élément intégral arbitraire E_p, sans relations en les formes ω^i, soit égal au nombre*

$$Q'(p) = ps' + (p-1)s'_1 + \ldots + 2s'_{p-2} + s'_{p-1}. \tag{12}$$

a) Pour démontrer que la condition énoncée est nécessaire supposons que le système (7) soit en involution par rapport aux variables x^1, x^2, $\ldots$, x^p et considérons le système polaire

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0 \tag{13}$$

d'un point intégral régulier et le premier système polaire réduit $a^h_\varkappa \tau^\varkappa = 0$. Nous avons déjà remarqué que, le système (7) étant en involution, les rangs de ces deux systèmes doivent être égaux; il est donc $s' = s$.

Envisageons maintenant un élément intégral linéaire régulier du système (7) de composantes $\omega^i = u^i$, $\tau^{i\varkappa} = u^\varkappa$, u^i n'étant pas tous nuls. Comme le système (7) est par hypothèse en involution cet élément appartient bien à la famille F et on peut appliquer à lui la notion de système polaire réduit. Nous pouvons le choisir de telle manière que le rang de ce système soit égal à $s + s'_1$. Ecrivons maintenant les équations du système polaire

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa + b^h_i \omega^i = 0, \tag{14}$$
$$a^k_{i\varkappa} u^i \tau^\varkappa - a^k_{j\varkappa} t^\varkappa \omega^j + a^k_{ij} u^i \omega^j = 0$$

et du système polaire réduit

$$a^h_\varkappa \tau^\varkappa = 0, \quad a^k_{i\varkappa} u^i \tau^\varkappa = 0$$

de cet élément. Les rangs de ces systèmes sont respectivement égaux aux sommes $s + s_1$ et $s' + s'_1$. S'il était $s' + s'_1 < s + s_1$, les équations (14) entraîneraient une relation entre les formes ω^i, contrairement au Théorème 1. Il doit donc être $s' + s'_1 = s + s_1$, ce qui, avec l'égalité $s' = s$ démontrée plus haut, conduit à la relation $s'_1 = s_1$. En continuant ces raisonnements on arrive ainsi aux égalités suivantes:

$$s' = s, \quad s'_1 = s_1, \quad s'_2 = s_2, \quad \ldots, \quad s'_{p-1} = s_{p-1}. \tag{15}$$

Or, le système S étant par hypothèse en involution, le nombre des équations indépendantes qui lient les paramètres $l_i^\varkappa$ de l'élément E_p est égal, selon le Théorème 2, au nombre $Q(p)$ défini par la formule (2). En vertu des égalités (15) on peut dire aussi qu'il est égal à $Q'(p)$, ce qui démontre la nécessité de la condition du théorème.

b) Maintenant nous allons montrer qu'inversement, si les équations (9) sont compatibles et si le rang de ce système est égal au nombre $Q'(p)$ défini par la formule (12), le système des équations (7) est en involution et les variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$ jouent le rôle des variables indépendantes dans sa solution générale.

Imaginons pour cela une suite

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_p \tag{16}$$

des éléments intégraux de la famille F, choisis de telle manière que le rang du système polaire réduit de $E_q (q < p)$ soit égal à $s + s_1' + \ldots + s_q'$, et désignons par $e_1, e_2, \ldots, e_q$ les élements linéaires qui définissent E_q. Pour présenter l'élément e_h posons $\omega^i = u_h^i$; d'après les formules (8) ses autres composantes seront égaux aux nombres $\tau^\varkappa = l_i^\varkappa u_h^i$. En faisant au besoin une substitution linéaire sur les formes ω^i on peut admettre que les composantes de e_h ont les valeurs suivantes:

$$\omega^h = 1, \quad \omega^j = 0 \quad (j \neq h), \quad \tau^\varkappa = l_h^\varkappa.$$

Comme e_1 est un élément intégral linéaire, il doit satisfaire aux équations de la deuxième ligne du système (7); on a donc

$$a_\varkappa^h l_1^\varkappa + b_1^h = 0. \tag{17}$$

Or le premier système polaire formé des équations (10′) ayant le rang $s' = s$, il s'en suit que parmi les relations (17) il y a au moins s' indépendantes.

Considérons maintenant le second élément E_2 de la suite (16), déterminé par les éléments linéaires e_1 et e_2. Les coefficients l dans ses équations satisfont par hypothèse aux relations

$$a_\varkappa^h l_2^\varkappa + b_2^h = 0, \quad a_{1\varkappa}^k l_2^\varkappa - a_{2\varkappa}^k l_1^\varkappa + a_{12}^k = 0 \tag{18}$$

que l'on obtient des équations (9) en y posant $i = 2$, $j = 1$. Remarquons que, d'après les égalités (10″), le système polaire réduit de l'élément e_1 a la forme suivante $a_\varkappa^k \tau^\varkappa = 0$, $a_{1\varkappa}^k \tau^\varkappa = 0$ et que son rang est égal à $s' + s_1'$; il en résulte que le rang du système des relations (18) est égal au moins à $s' + s_1'$. On voit ainsi que les coefficients $l_1^\varkappa$ et $l_2^\varkappa$ satisfont au moins à $2s' + s_1'$ relations indépendantes. En poursuivant ce raisonnement on aboutit au résultat que le nombre des relations indépendantes entre les coefficients $l_i^\varkappa$ est au moins égal au nombre $Q'(p)$. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Le nombre des relations indépendantes qui lient les paramètres $l_i^\varkappa$ d'un élément intégral E_p de la famille F est au moins égal au nombre $Q'(p)$ défini par la formule* (12).

COROLLAIRE. *Si le nombre des relations indépendantes entre les paramètres $l_1^\varkappa, l_2^\varkappa, \ldots, l_q^\varkappa$ $(q < p-1)$ est supérieur à la somme $qs' + (q-1)s_1' + \ldots + 2s_{q-2}' + s_{q-1}'$, le nombre des relations indépendantes qui lient tous les paramètres $l_i^\varkappa$ est supérieur à $Q'(p)$.*

Nous montrerons maintenant que, si le nombre des relations dont il est question dans l'énoncé de ce théorème ne surpasse pas $Q'(p)$, le système (7) est en involution.

Supposons en effet que le système considéré ne soit pas en involution; alors, selon le Théorème 1, les équations du système polaire d'un élément intégral régulier E_q $(q < p)$ devraient entraîner une relation entre les formes ω^i. Admettons par exemple que les équations du système polaire d'un élément intégral régulier linéaire n'entraînent pas une telle relation, mais qu'il n'en est pas de même de l'élément intégral régulier à deux dimensions. Soit e_1 un élément intégral linéaire régulier issu d'un point intégral régulier $(x^\varkappa)$; ses composantes $\omega^i = u_1^i$, $\tau^\varkappa = t_1^\varkappa$ doivent donc satisfaire aux équations du système $a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0$ dont le rang est égal à s. Comme de ces équations ne doit pas résulter aucune relation entre $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$, le système des équations $a_\varkappa^h \tau^\varkappa = 0$, qui est le système polaire réduit du point $(x^\varkappa)$, doit être de même rang s; il est donc $s' = s$. Les composantes u_1^i, $t_1^\varkappa$ satisfaisant aux équations $a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0$ on a les relations $a_\varkappa^h t_1^\varkappa + b_i^h u_1^i = 0$. Nous pouvons admettre que l'élément régulier e_1 soit choisi de telle manière que le rang de son système polaire réduit soit égal à $s' + s_1'$; nous pouvons aussi admettre, en faisant au besoin une substitution linéaire sur les formes ω^i, qu'il soit $u_1^1 = 1$, $u_1^h = 0$ $(h \neq 1)$. On voit ainsi qu'il y a des relations suivantes entre les composantes $t_1^\varkappa$

$$a_\varkappa^h t_1^\varkappa + b_1^h = 0 \tag{19}$$

et que le rang de ce système est égal à s, le système des équations (19) et celui des équations $a_\varkappa^h \tau^\varkappa = 0$ étant de même rang égal au nombre de ces équations. Remarquons maintenant que, d'après les égalités (9), les paramètres $l_1^\varkappa$ d'un élément intégral E_p sans relations entre ω_i satisfont aux relations $a_\varkappa^h l_1^k + b_1^h = 0$. La comparaison avec les équations (19) montre que le rang de ce dernier système est égal à s; entre les paramètres $l_1^\varkappa$ il y a donc s relations indépendantes. Imaginons maintenant un second élément intégral linéaire e_2 de composantes $\omega^i = u_2^i$, $\tau^\varkappa = t_2^\varkappa$ définissant avec e_1 un élément intégral régulier E_2. Les composantes de e_2 doivent donc satisfaire aux équations

$$a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0,$$
$$a_{i\varkappa}^k u_1^i \tau^\varkappa - a_{i\varkappa}^k t_1^\varkappa \omega^i + a_{ij}^k u_1^i \omega^j = 0$$

du système polaire de e_1. Eu égard aux valeurs $u_1^i = 1$, $u_1^h = 0$ $(h \neq i)$ ces équations peuvent s'écrire comme il suit:

$$(20) \qquad a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0, \qquad a_{i\varkappa}^k \tau^\varkappa - a_{i\varkappa}^k t_1^\varkappa \omega^i + a_{1j}^k \omega^j = 0;$$

le rang du système des équations (20) est égal à $s+s_1$; comme, par hypothèse, elles doivent entraîner une relation entre les formes ω^i, il s'en suit que ce rang doit être supérieur au rang du système des équations $a_\varkappa^h \tau^\varkappa = 0$, $a_{1\varkappa}^k \tau^\varkappa = 0$, qui est le système polaire réduit de l'élément e_1. Or nous avons choisi l'élément e_1 de telle manière que le rang de son système polaire réduit soit égal à $s'+s'$; on voit ainsi que le rang du système des équations (20) est supérieur à $s'+s_1'$. Les composantes u_2^i, $t_2^\varkappa$ devant satisfaire aux équations (20) on a les relations suivantes:

$$a_\varkappa^h t_2^\varkappa + b_i^h u_2^i = 0, \qquad a_{1\varkappa}^k t_2^\varkappa - a_{i\varkappa}^k t_1^\varkappa u_2^i + a_{1j}^k u_2^j = 0.$$

Nous pouvons admettre qu'il soit $u_2^2 = 1$, $u_2^h = 0$ $(h \neq 2)$; les relations précédantes prendront alors la forme

$$a_\varkappa^h t_2^\varkappa + b_2^h = 0, \qquad a_{1\varkappa}^k t_2^\varkappa - a_{2\varkappa}^k t_1^\varkappa + a_{12}^k = 0.$$

Nous savons d'autre part que, d'après les équations (9), les paramètres $l_1^\varkappa$ et $l_2^\varkappa$ de l'élément intégral E_p sans relations entre les formes ω^i doivent satisfaire aux relations

$$a_\varkappa^h l_2^\varkappa + b_2^h = 0, \qquad a_{1\varkappa}^k l_2^\varkappa - a_{2\varkappa}^k l_1^\varkappa + a_{12}^k = 0.$$

Les deux derniers systèmes des relations étant de la même forme il en résulte que les paramètres $l_2^\varkappa$ satisfont à plus de $s'+s_1'$ relations indépendantes et comme nous avons montré au paravant que les paramètres $l_1^\varkappa$ satisfont à s' relations indépendantes, nous voyons que les paramètres $l_1^\varkappa$ et $l_2^\varkappa$ satisfont à plus de $2s'+s_1'$ relations indépendantes. Selon le Corollaire au Théorème 4 il s'en suit que le nombre des relations indépendantes entre les paramètres $l_i^\varkappa$ dans les formules (8) devrait être supérieur à $Q'(p)$ contrairement à l'hypothèse adoptée. On arrive ainsi à la conclusion que le système (7) est en involution conformément au Théorème 3. Un raisonnement analogue conduit au même résultat, si les équations de définition du système polaire d'un autre élément de la suite (16) entraînent une relation entre les formes ω^i.

Remarque. Il résulte de l'analyse précédente que les caractères réduits d'un système de Pfaff de la forme (7), dépendent seulement des coefficients $a_{i\varkappa}^k$ dans les équations quadratiques; si ces coefficients sont tels que le système est en involution, on dit qu'ils constituent un *système involutif*.

B. Après avoir étudié le cas spécial, où les coefficients $c_{i\varkappa}^k$ dans les équations (6) sont tous nuls, nous reviendrons au cas général en substituant les expressions (8) dans les équations (6). On obtient maintenant au lieu des équations (9) les relations suivantes

$$a_\varkappa^h l_i^\varkappa + b_i^h = 0,$$
$$c_{\varkappa\lambda}^k l_i^\varkappa l_j^\lambda + a_{i\varkappa}^k l_j^\varkappa - a_{j\varkappa}^k l_i^\varkappa + a_{ij}^k = 0,$$

où, comme au paravant, les indices parcourent les mêmes valeurs que dans les équations (6). Les équations de la seconde ligne étant quadratiques on obtient en général plusieurs familles continues des éléments intégraux à p dimensions, sans relations entre les formes ω^i, issus d'un point intégral régulier; chacune d'elles doit être traitée séparément pour résoudre le problème de l'involution. Supposons que l'on ait choisi une famille continue des éléments intégraux déterminés par les coefficients l satisfaisant aux relations ci-dessus. En définissant la famille F des éléments intégraux et leurs systèmes polaires reduits de la même manière que dans le cas du système spécial (pp. 38 et 40) on voit bien que le premier d'eux a la même forme $a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0$ que dans le cas des équations (7). Il en est autrement pour les systèmes polaires réduits suivants. En effet, si e_1 $(u_1^i, l_i^\varkappa u_1^i)$ est un élément intégral linéaire de la famille F, son système polaire se compose des équations suivantes

$$a_\varkappa^h \tau^\varkappa + b_i^h \omega^i = 0,$$
$$c_{\varkappa\lambda}^k l_i^\varkappa u_1^i \tau^\varkappa + a_{i\varkappa}^k u_1^i \tau^\varkappa - a_{j}^k \lambda l_i^\varkappa u_1^i \omega^j + a_{ij}^k u_1^i \omega^j = 0,$$

par conséquent le système polaire réduit qui lui correspod est formé des relations suivantes:

$$a_\varkappa^h \tau^\varkappa = 0, \qquad (c_{\varkappa\lambda}^k l_i^\varkappa + a_{i\lambda}^k) u_1^i \tau^\lambda = 0.$$

Les parametres $l_i^\varkappa$ figurant dans ces équations on voit bien que pour calculer les caractères réduits du système des équations (6) il faut au préalable détérminer les éléments intégraux à p dimensions sans relations entre les formes ω^i. Ceci fait on peut ensuite démontrer le théorème de la même manière que dans le cas spécial.

Exemple. Soit le système différentiel

$$dz^1 = z^1 dx^1 + z^2 dx^2, \qquad dz^2 = z^2 dx^1 + z^3 dx^2$$

à deux variables indépendantes x^1, x^2 et à trois inconnues z^1, z^2, z^3. Si on le ferme et que l'on tient compte de ses équations, on obtient l'équation quadratique

$$[dz^3 dx^2] - z^3 [dx^1 dx^2] = 0.$$

Nous montrerons que le système ainsi fermé est en involution par rapport aux variables x^1, x^2. Remarquons à cet effet que tous les points $(x^1, x^2, z^1, z^2, z^3)$ sont des points réguliers et que, le système polaire réduit d'un point quelconque se composant des équations $dz^1 = 0$, $dz^2 = 0$, le premier caractère réduit s' est égal à deux. Imaginons maintenant un élément intégral linéaire e des composantes $dx^1 = u^1$, $dx^2 = u^2$, $dz^1 = v^1$, $dz^2 = v^2$, $dz^3 = v^3$ $(v^1 = z^1u^1 + z^2u^2,\ v^2 = z^2u^1 + z^3u^2)$. Le système polaire de e se compose des équations

$$dz^1 = z^1dx^1 + z^2dx^2, \qquad dz^2 = z^2dx^1 + z^3dx^2,$$
$$u^2dz^3 - v^3dx^2 - z^3u^2dx^1 + z^3u^1dx^2 = 0$$

et par suite son système polaire réduit

$$dz^1 = 0, \quad dz^2 = 0, \quad u^2dz^3 = 0$$

contient trois équations indépendantes; il est donc $s' + s_1' = 3$ et par suite $s_1' = 1$. L'expression $2s' + s_1'$ a donc la valeur 5. D'autre part, l'élément intégral à deux dimensions sans relation entre les différentielles dx^1, dx^2 est défini par les formules

$$dz^i = l_1^i dx^1 + l_2^i dx^2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En portant ces expressions dans les équations du système fermé on obtient cinq relations

$$l_1^1 = z^1, \quad l_2^1 = z^2, \quad l_1^2 = z^2, \quad l_2^2 = z^2, \quad l_1^3 = z^3$$

auxquelles doivent satisfaire les paramètres l_1^i, l_2^i; le nombre de ces relations étant égal à la somme $2s' + s_1'$ le système est en involution.

En se servant des notations adoptées constamment dans ce chapitre on a ici $n = 5$, $p = 2$, $s = 2$, $s_1 = 1$; il est par suite

$$n - p - s - s_1 = 0, \qquad n - p - s = 1.$$

Il en résulte que la solution générale du système donné ne contient aucune fonction arbitraire à deux variables et qu'elle dépend d'une fonction arbitraire d'une variable (v. la fin du n° 21). En effet cette solution est définie par les équations

$$z^1 = e^{x^1}\varphi(x^2), \quad z^2 = e^{x^1}\varphi'(x^2), \quad z^3 = e^{x^1}\varphi''(x^2),$$

où $\varphi(x^2)$ est une fonction arbitraire de x^2.

25. Critère suffisant d'involution. Bien que le critère nécessaire et suffisant donné par le Théorème 3 du numéro précédent est d'une grande importance théorique, son application peut souvent exiger des longs et fastidieux calculs. En effet, si l'on veut par exemple déterminer le second caractère réduit s_1' au moyen du système des équations (10″) du n° 24, on doit choisir les composantes u_1^i de l'élément intégral linéaire e_1 de telle façon que le rang de ce système soit le plus haut possible, ce qui peut conduire à des longs calculs; il est bien clair que ces calculs augmentent pour les caractères réduits suivants. On doit heureusement à E. Cartan un second critère qui, bien que seulement suffisant, est très simple et rend des grands services dans plusieures questions d'une haute importance, par exemple dans la théorie des groupes continus infinis. Remarquons en passant que c'est cette théorie qui a donné naissance à la théorie des systèmes de Pfaff en involution.

THÉORÈME 5. *Soit*

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{p-1} \tag{21}$$

une suite des éléments intégraux du système des équations (7) *contenus dans la famille* F *que nous avons défini au n° 24,* E_0 *désignant un point intégral régulier. Soit* $\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_q$ *le rang du système polaire réduit de l'élément* E_q $(q < p)$. *Si le nombre des relations indépendantes entre les paramètres d'un élément intégral quelconque à* p *dimensions de la famille* F *est égal au nombre*

$$Q''(p) = p\sigma_0 + (p-1)\sigma_1 + \ldots + 2\sigma_{p-2} + \sigma_{p-1} \tag{22}$$

le système (7) *est en involution.*

Faisons remarquer en premier lieu qu'il y a une différence entre la suite (16) du n° 24 et la suite (21); la première d'elles a été choisie de telle manière que le rang du système polaire réduit de E_q $(0 \leqslant q \leqslant p-1)$ soit le plus haut possible, les éléments de la seconde peuvent être choisis d'une manière complètement arbitraire. On peut par exemple définir E_q au moyen des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_q$ choisis de telle façon que e_q ait les composantes $\omega^q = 1$, $\omega^r = 0$ $(r \neq q)$, $\tau^\varkappa = t_q^\varkappa$. Le système polaire réduit de E_q sera alors formé des équations

$$a_\varkappa^h \tau^\varkappa = 0, \quad a_{1\varkappa}^k \tau^\varkappa = 0, \quad a_{2\varkappa}^k \tau^\varkappa = 0, \quad \ldots, \quad a_{q-1\varkappa}^k \tau^\varkappa = 0$$

et son rang sera désigné par $\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{p-1}$. Il résulte de la définition des caractères réduits s_i' que les nombres σ_i satisferont aux inégalités suivantes

$$\sigma_i \leqslant s_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1);$$

on en conclut, eu égard aux formules (12) et (22), qu'il est

$$Q''(p) \leqslant Q'(p).$$

Nous savons d'autre part que, d'après le Théorème 4, le nombre des relations indépendantes entre les paramètres d'un élément E_p de la famille

F ne peut pas être inférieur à $Q'(p)$; donc, si ce nombre est égal à $Q''(p)$, il doit être

$$Q''(p) \geqslant Q'(p).$$

En comparant les deux dernières inégalités il vient

$$Q''(p) = Q'(p),$$

ce qui montre, selon le Théorème 3, que le système des équations (7) est en involution par rapport aux variables $x^1, x^2, \dots, x^p$.

Remarque. Le Théorème 5 est valable aussi pour les systèmes de Pfaff de la forme (6) et on le démontre d'une manière analogue.

26. Compléments. Nous avons déjà remarqué que la question principale dans les applications des systèmes de Pfaff consiste à déterminer les solutions aux variables indépendantes imposées. Cette question n'est pas encore complètement résolue par les considérations précédentes. En effet, les critères démontrés dans ce paragraphe nous permettent seulement de reconnaître, si les solutions faisant partie de la solution générale jouissent de la propriété démandée, autrement dit, si le système donné est en involution. Si c'est le cas, une méthode régulière, qui revient à l'intégration des systèmes de Cauchy-Kowalewski, nous fournit un moyen de trouver les solutions qui nous intéressent. Cela ne suffit pas dans tous les cas que l'on rencontre dans les applications, puisque il peut arriver qu'un système différentiel qui n'est pas en involution admet néanmoins des variétés intégrales aux variables imposées. Ces solutions étant singulières ne sont pas contenues dans la solution générale et, par suite, les méthodes exposées dans ce chapitre ne donnent aucun moyen de les déterminer. Il se pose alors le problème suivant: un système différentiel de Pfaff n'étant pas en involution peut on en deduire un nouveau système qui soit en involution et qui admette les solutions du système donné?

Nous présenterons un procédé qui peut répondre à la question posée, si le système différentiel a la forme des équations (7), le raisonnement dont nous nous servirons pouvant être appliqué aussi au système plus général des équations (6). Envisageons à cet effet les équations (9) qui expriment les conditions pour qu'un élément E_p d'origine arbitraire et sans relations entre les formes ω^i soit un élément intégral du système différentiel (7). Si ce système n'est pas en involution deux cas peuvent se présenter: 1° les équations (9) ne sont pas compatibles, si l'origine de E_p est arbitraire, 2° les équations (9) étant compatibles le système différentiel (7) n'est pas en involution.

1° Envisageons d'abord le premier cas. Les équations (9) n'étant pas compatibles, si l'origine de l'élément E_p est arbitrairement choisi, leur compatibilité exige donc que les coordonnées de ce point safisfassent à certaines relations

$$(23) \qquad g_l(x^1, x^2, \dots, x^p, z^1, z^2, \dots, z^{n-p}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, t).$$

Si ces équations entraînent une relation entre les variables x^i, le système différentiel (7) n'admet pas des solutions aux variables indépendantes x^i; si les équations (23) n'entraînant une relation entre les variables x^i abbaissent le rang s du système des équations linéaires dans le système différentiel (7), l'origine de l'élément E_p est un point singulier (n° 6) et, par conséquent, on ne peut pas déduire du système (7) un nouveau système qui soit en involution. Si aucun de ces deux cas ne se presente pas, on peut exprimer certaines des variables $z^\varkappa$ en fonction des autres et des variables x^i. Si l'on porte les expressions ainsi obtenues dans les équations (7), on obtient un nouveau système différentiel, où le nombre des inconnues est abbaissé et il faut maintenant appliquer les critères donnés plus haut (n^os 24 et 25) pour reconnaître, si ce nouveau système est en involution.

2° Considérons maintenant le second cas, où les relations (9) sont compatibles. Nous allons regarder les paramètres $l_i^\varkappa$ comme inconnues et nous les adjoindrons aux inconnues $z^\varkappa$. Il faut par suite associer au système différentiel (7): 1° les relations finies (9) entre les nouvelles inconnues et les variables $x^i, z^\varkappa$, 2° les équations de Pfaff que l'on déduit des équations (9) en les différentiant extérieurement et 3° les équations linéaires (8). On peut d'autre part supprimer les équations quadratiques dans le système différentiel (7), celles-ci étant identiquement satisfaites en vertu des équations (8). Ce système différentiel ainsi obtenu doit être de nouveau examiné au moyen des critères connus. S'il est en involution, la question posée au commencement de ce numéro est positivement résolue, s'il en est autrement, on doit appliquer de nouveau les raisonnements présentés plus haut. On doit à E. Cartan le théorème ([6], p. 173) qui garantit qu'après un nombre fini des pas on aboutit à obtenir un système différentiel dont la solution générale n'entraîne aucune relation entre les variables x^i, si le système dont nous sommes partis admet de telles solutions.

§ 3. Equation de Pfaff; équation différentielle extérieure du second degré

27. Equation de Pfaff. Soit donnée une équation de Pfaff

$$\omega = a_\varkappa dx^\varkappa = 0$$

dont le premier membre est une forme analytique définie dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$. On sait (n° 13) que, dans un voisinage de tout point de U, la forme ω peut être ramenée, suivant la parité de sa classe, à l'une de deux expressions suivantes:

$$\omega = \bar{x}^1 d\bar{x}^{r+1} + \bar{x}^2 d\bar{x}^{r+2} + \ldots + \bar{x}^r d\bar{x}^{2r} + d\bar{x}^{2r+1},$$

$$\omega = \bar{x}^1 d\bar{x}^{r+1} + \bar{x}^2 d\bar{x}^{r+2} + \ldots + \bar{x}^r d\bar{x}^{2r} + \bar{x}^{r+1} d\bar{x}^{2r+1},$$

où $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^{2r+1}$ désignent des fonctions distinctes des variables $x^\varkappa$. En divisant la seconde expression par $\bar{x}^{r+1}$ on lui donne la forme de la première; on voit ainsi que l'équation donnée $\omega = 0$ peut être ramenée dans tous les cas à la forme

$$\omega = dy - x^1 dy^1 - x^2 dy^2 - \ldots - x^r dy^r = 0 \tag{1}$$

qui s'appelle la *forme canonique* d'une équation de Pfaff; le nombre impair

$$\gamma = 2r+1 \tag{2}$$

porte le nom de sa *classe*. Si c est la classe de la forme ω, la classe de l'équation $\omega = 0$ est égal à c ou à $c-1$ suivant que c est un nombre impair ou pair; il s'en suit que la classe d'une équation de Pfaff est un invariant numérique qui peut être déterminé sans ramener l'équation à sa forme canonique.

Nous nous proposons maintenant de trouver toutes les solutions analytiques de l'équation canonique; sans faire usage de la théorie générale exposée dans ce chapitre nous allons montrer que ces solutions peuvent être obtenues par des opérations algébriques. Remarquons en premier lieu que l'équation (1) admet une solution évidente à r dimensions que l'on obtient en égalant les variables $y^1, y^2, \ldots, y^r, y$ à $r+1$ constantes arbitraires. Pour trouver d'autres variétés intégrales observons que d'après l'équation (1) il existe au moins une relation entre les variables $y^1, y^2, \ldots, y^r, y$. Admettons qu'il y ait $h+1$ $(0 \leqslant h \leqslant r)$ relations distinctes qui peuvent être supposées résolues à $h+1$ des variables

$$\left\{\begin{aligned} y^1 &= \varphi^1(y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r),\\ y^2 &= \varphi^2(y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^h &= \varphi^h(y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r),\\ y &= \varphi(y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si l'on porte ces expressions dans l'équation (1) et que l'on tient compte de l'hypothèse que les variables $y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r$ sont indépendantes, on obtient les équations suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} x^{h+1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y^{h+1}} - x^1\frac{\partial\varphi^1}{\partial y^{h+1}} - x^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^{h+1}} - \ldots - x^h\frac{\partial\varphi^h}{\partial y^{h+1}},\\ x^{h+2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y^{h+2}} - x^1\frac{\partial\varphi^1}{\partial y^{h+2}} - x^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^{h+2}} - \ldots - x^h\frac{\partial\varphi^h}{\partial y^{h+2}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^r &= \frac{\partial\varphi}{\partial y^r} - x^1\frac{\partial\varphi^1}{\partial y^r} - x^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^r} - \ldots - x^h\frac{\partial\varphi^h}{\partial y^r}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Le système des équations (3) et (4) représente une variété intégrale de l'équation (1) à r variables indépendantes $x^1, x^2, \ldots, x^h, y^{h+1}, y^{h+2}, \ldots, y^r$. C'est la solution la plus générale d'ordre maximum r de cette équation. Comme il est $r = \frac{1}{2}(\gamma-1)$ d'après la formule (2), nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *La dimension maximum de la variété intégrale d'une équation de Pfaff est égale à la moitié de sa classe diminuée de un.*

Pour obtenir les solutions de dimension moindre de r de l'équation (1) il suffit d'ajoindre aux équations (3) et (4) un système de q relations entre les variables $x^1, x^2, \ldots, x^r, y^1, y^2, \ldots, y^r, y$ compatible avec ces équations.

La recherche de toutes les variétés intégrales d'une équation de Pfaff constitue le Problème de Pfaff proprement dit. Il a été posé dans toute sa généralité par Pfaff en 1815 et depuis il a été l'objet des plusieurs travaux de Clebsch, Natani, Grassmann, Lie, Frobenius, Darboux, Cartan et d'autres; dans leurs travaux au Problème de Pfaff se joint celui de la reduction d'une forme et d'une équation de Pfaff à la forme canonique et l'étude des applications de la théorie aux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Pour l'étude complète de ces problèmes nous renvoyons le lecteur au Mémoire de Cartan [4] ou au livre de Goursat ([29], Ch. I, II).

28. Equation quadratique. Soit donnée l'équation

$$\Omega = 0, \tag{5}$$

Ω étant une forme différentielle analytique du second degré à un nombre pair $n = 2r$ de variables, définie dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$; nous supposons que le rang et, par suite, la classe de Ω soient égaux à n (nº 11). L'équation (5) peut donc être écrite comme il suit (nº 1)

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [\omega^i \omega^{r+i}] = 0, \tag{6}$$

$\omega^\varkappa$ étant des formes linéaires indépendantes entre elles; de même, la différentielle $d\Omega$ peut être présentée comme une forme du troisième degré en $\omega^\varkappa$. Les éléments intégraux de l'équation (5) sont des solutions du système des équations $\Omega = 0$ et $d\Omega = 0$ regardées comme les équations algébriques à n indéterminées $\omega^\varkappa$ (n^o 16); comme la dimension des éléments plans satisfaisant à l'équation (6) ne surpasse pas le nombre r (vol. I, n^o 39), il s'en suit que la dimension des éléments intégraux de l'équation (5) et, par suite, le genre de cette équation est au plus égal à r. Si la forme Ω est fermée, le nombre r est atteint par la dimension des éléments intégraux de l'équation (5), puisque la différentielle $d\Omega$ est identiquement nulle et la recherche des solutions de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation de Pfaff. En effet, la forme Ω étant fermée, il existe dans un voisinage de tout point de U une forme différentielle linéaire ω telle qu'il soit

$$\Omega = d\omega$$

et l'intégration de l'équation $\Omega = 0$ est ramenée à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$\omega = df,$$

où f désigne une fonction arbitraire des variables $x^\varkappa$.

Nous nous occuperons maintenant des intégrales de l'équation (5) qui appartiennent à des familles d'intégrales telles que par tout point de U passe une et une seule intégrale de la famille. Ces intégrales à $n-h$ dimensions peuvent donc être représentées par les équations

$$f^1 = c^1, \quad f^2 = c^2, \quad \ldots, \quad f^h = c^h, \tag{7}$$

$f^1, f^2, \ldots, f^h$ étant des fonctions distinctes des variables $x^\varkappa$ et $c^1, c^2, \ldots, c^h$ des constantes arbitraires. Faisons maintenant dans la forme Ω un changement de variables tel qu'il soit $\bar{x}^1 = f^1$, $\bar{x}^2 = f^2$, $\ldots$, $\bar{x}^h = f^h$. La forme $\overline{\Omega}$ devant être identiquement nulle, si l'on y pose $\bar{x}^1 = c^1, \ldots, \bar{x}^h = c^h$, il en résulte que chaque terme de $\overline{\Omega}$ doit contenir l'une au moins des différentielles $d\bar{x}^1, d\bar{x}^2, \ldots, d\bar{x}^h$, ou, ce qui revient au même, qu'il soit $[\overline{\Omega}\, d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^h] = 0$. Si l'on revient aux variables $x^\varkappa$, cette relation prend la forme suivante

$$[\Omega\, df^1 df^2 \ldots df^h] = 0. \tag{8}$$

En developpant les produits on obtient dans le premier membre une forme différentielle de degré $h+2$; si l'on annule les coefficients de cette forme, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre des inconnues $f^1, f^2, \ldots, f^h$; si ce système d'équations

est compatible, l'équation $\Omega = 0$ admet des solutions représentées par les équations (7). Considérons en particulier le cas $h = n-2$. Le premier membre de l'équation (8) étant maintenant de degré n, on obtient une seule équation aux dérivées partielles de $n-2$ fonctions inconnues; si l'on prend arbitrairement $n-3$ de ces fonctions, on obtient une équation linéaire et homogène en les dérivées de la dernière inconnue. On voit ainsi, que l'équation (5) admet une infinité de familles de variétés intégrales à deux dimensions telles que par tout point de U passe une et une seule de ces variétés.

29. Equation quadratique complètement intégrable (cf. [21]). Revenons à l'équation (5) en conservant toutes les hypothèses faites sur la forme Ω. Nous dirons que l'équation $\Omega = 0$ est *complètement intégrable*, si tout élément plan E_r de dimension r satisfaisant à cette équation est son élément intégral. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation quadratique extérieure $\Omega = 0$ soit complètement intégrable, il faut et il suffit, qu'il soit*

$$d\Omega = [\tau\Omega],$$

τ étant une forme linéaire.

Si l'équation $\Omega = 0$ est écrite sous la forme (6), les équations d'un élément plan d'ordre maximum r satisfaisant à cette équation peuvent être ramenées à la forme suivante

$$\omega^{r+i} = p^i_j \omega^j, \tag{9}$$

où les coefficients p^i_j sont assujettis aux relations $p^i_j = p^j_i$; on peut faire cette réduction à la forme (9) au moyen d'une substitution du groupe symplectique Sp_n faite sur les formes $\omega^\varkappa$. Pour que l'élément plan E_r défini par les équations (9) soit un élément intégral de l'équation $\Omega = 0$, il faut et il suffit qu'il satisfasse aussi à l'équation du troisième degré $d\Omega = 0$.

Considérons d'abord l'élément plan dont les équations

$$\omega^{r+1} = 0, \quad \omega^{r+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{2r} = 0$$

s'obtiennent en posant $p^i_j = 0$ dans les formules (9). Pour que cet élément soit une solution de l'équation $d\Omega = 0$, il faut et il suffit qu'il soit

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{r} [\Phi_i \omega^{r+i}],$$

où Φ_i sont des formes différentielles quadratiques. Envisageons maintenant l'élément plan défini au moyen des équations

$$\omega^{r+1} = \omega^1, \quad \omega^{r+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{2r} = 0$$

qui s'obtiennent aussi des équations (9). Pour que cet élément soit une solution de l'équation $d\Omega = 0$, il faut qu'il soit $[\Phi_1 \omega^1] = 0$. Il s'en suit que la forme Φ_1 est divisible par ω^1: $\Phi_1 = [\tau_1 \omega^1]$, τ_1 étant une forme différentielle linéaire. Ce raisonnement se généralisant facilement la forme $d\Omega$ peut donc être écrite comme il suit:

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{r} [\tau_i \omega^i \omega^{r+i}]. \tag{10}$$

Prenons de suite l'élément défini par les équations

$$\omega^{r+1} = \omega^2, \quad \omega^{r+2} = \omega^1, \quad \omega^{r+3} = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{2r} = 0$$

qui se déduisent aussi des équations (9). Pour qu'il satisfasse à l'équation $d\Omega = 0$, il faut qu'il soit

$$[(\tau_1 - \tau_2)\omega^1 \omega^2] = 0;$$

il en résulte que la différence $\tau_1 - \tau_2$ doit s'exprimer au moyen des formes ω^1 et ω^2

$$\tau_1 - \tau_2 = \lambda\omega^1 + \mu\omega^2.$$

Faisons maintenant sur les formes τ_1 et τ_2 la substitution suivante

$$\bar{\tau}_1 = \tau_1 - \lambda\omega^1, \quad \bar{\tau}_2 = \tau_2 + \mu\omega^2$$

qui conserve la forme de l'expression (10) de la forme $d\Omega$. On aura $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$. En continuant ce procédé on reconnait que dans la formule (10) on peut poser $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = \tau$ et on arrive ainsi à la formule suivante:

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{r} [\tau\omega^i \omega^{r+i}]$$

ce qui, d'après l'équation (6), peut s'écrire aussi de la manière suivante:

$$d\Omega = [\tau\Omega] \tag{11}$$

conformément au théorème que nous avions à démontrer.

Nous distinguerons maintenant deux cas: $\tau = 0$ et $\tau \neq 0$. Dans le premier cas on a $d\Omega = 0$ et, par suite, la forme Ω étant fermée peut être ramenée à l'expression

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [dx^i dx^{r+i}]$$

(n° 12, Th. 3). Dans le second cas on déduit de la formule (11) la relation

$$[d\tau\Omega] + [\tau d\Omega] = 0,$$

qui, en vertu de la même formule, se réduit à l'équation

$$[d\tau\Omega] = 0.$$

La différentielle $d\tau$ étant une forme quadratique on en conclut (vol. I, n° 23, Th. 8) que, si $n > 4$, il doit être $d\tau = 0$, où f est une fonction des variables $x^\varkappa$. La formule (11) devient donc

$$d\Omega = [df\Omega].$$

Posons maintenant $\Omega_1 = g\Omega$, où g est un facteur scalaire. En différentiant cette égalité, on trouve

$$d\Omega_1 = [dg\Omega] + g\,d\Omega$$

ou, eu égard à la formule précédente,

$$d\Omega_1 = [dg\Omega] + g[df\Omega].$$

Si l'on prend $g = e^{-f}$, on obtient $\Omega_1 = e^{-f}\Omega$ et $d\Omega_1 = 0$. La forme Ω_1 étant fermée, on peut poser, en faisant une transformation convenable de variables, $\Omega_1 = \sum_{i=1}^{r} [dx^i dx^{r+i}]$ et par suite

$$\Omega = e^f \sum_{i=1}^{r} [dx^i dx^{r+i}].$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Pour que l'équation quadratique $\Omega = 0$ à $2r > 4$ variables, où Ω est une forme de rang $2r$, soit complètement intégrable, il faut et il suffit que la forme Ω soit fermée ou qu'il existe une fonction f telle que le produit $e^{-f}\,\Omega$ soit une forme fermée.*

Le facteur e^{-f} porte le nom de *facteur intégrant* de la forme Ω. Cette notion peut être étendue aux formes de degrés supérieurs à deux.