CHAPITRE I

NOTIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES

Le Calcul des formes différentielles extérieures a été créé (1899) par Elie Cartan pour étudier le Problème de Pfaff [4]; il a pour sources, d'une part, la notion de multiplication extérieure que l'on doit à H. Grassmann [31] et, d'autre, celle de covariant bilinéaire introduite indépendamment par G. Frobenius [24] et par G. Darboux [19]. Le rôle principal dans ce calcul, qui est d'une grande simplicité et élégance, joue la notion de différentielle extérieure et les simples règles auxquelles elle obéit. Dans un Memoire ultérieur [5] Cartan a étendu le domaine d'application du Calcul en développant la théorie des systèmes des équations de Pfaff qui dans la plus grande partie est son oeuvre et qui englobe la théorie des systèmes des équations aux dérivées partielles. Il a montré que l'emploi de sa méthode permet de présenter les calculs sous une forme abrégée et de les achever sans beaucoup de peine. Dans un autre important Memoire [6] Cartan a se servi du calcul des formes extérieures pour développer d'un nouveau point de vue la théorie des pseudo-groupes continus infinis initiée par S. Lie en lui donnant des propres fondements.

Ces résultats n'épuisent pas l'oeuvre que l'on doit à E. Cartan; sa méthode a se montré très féconde dans diverses recherches et en particulier dans deux domaines des sciences mathématiques: dans la théorie des groupes de Lie et dans la géométrie différentielle. Dans la première d'elles elle a permis de créer la théorie globale des groupes continus et finis, dans la seconde, en liaison avec la méthode du trièdre mobile de Darboux, elle a conduit à la généralisation du Programme d'Erlangen de Klein en ouvrant un très large champ de nouvelles théories géométriques. Pour apprécier l'important progrès dans ces domaines que l'on doit à E. Cartan il suffit de parcourir la longue liste de ses travaux consacrés à la théorie des groupes de Lie et à la géométrie différentielle que l'on trouve dans le livre *Selecta, Jubilé scientifique de M. Elie Cartan* (Paris 1936).

Les théories que l'on doit à E. Cartan ont exercé une grande influence sur le développement de ces deux branches des sciences mathématiques, qui ne cesse pas de durer jusqu'à nos jours.

Ce Chapitre contient une exposition succinte des principes du Calcul des formes différentielles extérieures. En s'appuyant sur les notions et les considérations du premier Tome on introduit dans le § 1 la notion de forme différentielle extérieure dans un ouvert de R^n, le changement de coordonnées et la valeur d'une forme pour un polyvecteur. Dans la suite on trouve la définition de la différentielle extérieure, ses propriétés et les théorèmes de Poincaré sur la seconde différentielle.

Le deuxième paragraphe est consacré aux systèmes des Pfaff complètement intégrables (Théorème de Frobenius) et aux systèmes complets des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre, associés aux systèmes complètement intégrables.

Dans le § 3 on trouve la définition et la méthode de la détermination de la classe d'une forme différentielle extérieure et des expressions canoniques d'une forme quadratique fermée, des formes linéaires et des formes de degré n et $n-1$. Mentionnons encore que le Calcul des formes extérieures a été déjà l'objet de quelques ouvrages; citons en particulier les livres de S. P. Finikoff [22] et de J. M. Thomas [43]. Cartan lui-même a publié un ouvrage [13] qui contient une exposition des principes du Calcul, suivie des applications à la géométrie différentielle.

§ 1. Formes différentielles dans un ouvert de R^n

1. Définition. Soit U un ouvert connexe de $R^n(x^\varkappa)$; pour y définir dans le système $x^\varkappa$ les formes différentielles extérieures qu'on appellera dans la suite *formes différentielles* ou même *formes*, si aucune confusion n'est à craindre, il suffit de remplacer dans les expressions des formes extérieures algébriques (vol. I, n° 3) les coefficients numériques par les fonctions réelles de classe C^k ($k \geqslant 0$) dans U et les indéterminées par les différentielles $dx^\varkappa$. Nous dirons que les expressions ainsi obtenues sont *formes de classe* k ou, plus brièvement, *formes* C^k; si $k = \omega$, nous les appellerons *formes analytiques*. Nous supposerons que, sauf avis contraire, les formes envisagées dans ce paragraphe sont de classe $k \geqslant 1$.

Selon la définition précédente une forme différentielle de degré p peut être écrite de la manière suivante

(1) $$\Phi_p = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[dx^{\varkappa_1}dx^{\varkappa_2}\ldots dx^{\varkappa_p}],$$

où les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ sont antisymétriques en tous leurs indices; il est commode de donner le nom de *forme* C^k *de degré zéro* à une fonction C^k définie dans U.

Si l'on substitue aux variables $x^\varkappa$ dans les coefficients de Φ_p les coordonnées d'un point déterminé $M \in U$, nous dirons que *la forme* Φ_p *a été restreinte à* M; une forme différentielle restreinte à un point est une forme extérieure algébrique aux indéterminées $dx^\varkappa$. *Aux formes restreintes peuvent être appliquées toutes les notions introduites dans le vol.* I. et, en particulier, celles d'égalité, d'addition et de multiplication. Nous pouvons étendre ces notions aux formes différentielles. Si par exemple trois formes différentielles Φ, X et Ψ sont telles que le produit extérieur des formes Φ et X restreintes à un point quelconque de U est égal à la forme Ψ restreinte au même point, nous dirons que le produit des formes différentielles Φ et X est *égal* à Ψ et nous écrirons $[\Phi X] = \Psi$. De même, si plusieurs formes différentielles linéaires (*formes pfaffiennes*) restreintes à un point arbitraire sont indépendantes, on dit que ces formes mêmes sont aussi indépendantes. Cette remarque nous permet de présenter les formes différentielles d'une autre manière qui est utile dans les applications à la géométrie différentielle et à la théorie des groupes continus. Imaginons pour cela n formes différentielles pfaffiennes

$$\omega^\varkappa = a^\varkappa_\varrho dx^\varrho$$

linéairement indépendantes dans U ($|a^\varkappa_\varrho| \neq 0$). Si l'on résout ces équations par rapport aux différentielles dx^ϱ et que l'on porte les expressions obtenues dans la formule (1), on obtient une expression de la forme suivante:

(2) $$\Phi_p = \frac{1}{p!} A_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}[\omega^{\varrho_1}\omega^{\varrho_2}\ldots\omega^{\varrho_p}].$$

Il est aussi évident que les notions de rang d'une forme extérieure algébrique, de dérivée par rapport à une indéterminée et de système associé (vol. I, n° 13 et 14) peuvent être étendues aux formes différentielles. Si l'on se donne, par exemple, une forme différentielle quadratique $\Omega = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$, on aura

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx^\varkappa} = a_{\varkappa\lambda}dx^\lambda, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial\, dx^\varkappa \partial\, dx^\lambda} = a_{\varkappa\lambda}$$

et le rang de Ω est égal au rang du système linéaire associé

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx^\varkappa} = a_{\varkappa\lambda}dx^\lambda = 0.$$

Si Ω est représenté au moyen d'une expression de la forme

(3) $$\Omega = \tfrac{1}{2} A_{\varrho\sigma}[\omega^\varrho\omega^\sigma],$$

son système associé est équivalent au système des équations suivantes:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^\varrho} = A_{\varrho\sigma}\omega^\sigma = 0$$

qui doivent être regardées comme les équations algébriques aux indéterminées ω^σ. Nous savons que le rang de la forme quadratique est un nombre pair (vol. I, n° 18) que nous désignerons par $2r$; en effectuant sur les formes ω^σ une substitution linéaire la forme Ω peut être réduite à l'expression suivante:

(4) $$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [\omega^i\omega^{r+i}],$$

ce qui peut s'écrire aussi comme il suit

(4') $$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\lambda}[\omega^\varkappa\omega^\lambda] \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 2r),$$

$I_{\varkappa\lambda}$ étant des nombres satisfaisant aux relations suivantes:

$$I_{\varkappa\lambda} + I_{\lambda\varkappa} = 0, \qquad I_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda - \varkappa = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda - \varkappa| \neq r. \end{cases}$$

Les remarques précédentes sur le rang d'une forme différentielle s'appliquent aussi d'une manière évidente aux systèmes composés de plusieurs formes différentielles.

2. Changement du système des coordonnées. Soit $\overline{U}$ un ouvert de $\overline{R}^n(\overline{x}^\varkappa)$ homéomorphe à l'intérieur d'une hypersphère. Admettons qu'entre $\overline{U}$ et l'ouvert U considéré au numéro précédent soit établi un homéomorphisme T au moyen des formules réciproques

$$\overline{x}^\varkappa = \varphi^\varkappa(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad \text{et} \quad x^\varkappa = \psi^\varkappa(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n), \tag{5}$$

$\varphi^\varkappa$ et $\psi^\varkappa$ étant des fonctions de classe C^k ($k \geqslant 1$) telles que les jacobiens $|\partial\varphi^\varkappa/\partial x^\lambda|$ et $|\partial\psi^\varkappa/\partial\overline{x}^\lambda|$ soient différents de zéro respectivement dans U et $\overline{U}$.

D'une fonction f de classe C^k dans U on déduit au moyen de T une fonction C^k définie dans $\overline{U}$

$$T(f) = f(\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n) \tag{6}$$

et le monôme $dx^\varkappa$ donne naissance à la forme C^{k-1}

$$T(dx^\varkappa) = \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \overline{x}^\varrho} d\overline{x}^\varrho \tag{7}$$

définie aussi dans $\overline{U}$. D'une manière générale d'une forme C^k de degré arbitraire définie dans le système des coordonnées $x^\varkappa$ dans U, par exemple de la forme $\Phi_3 = \frac{1}{3!} a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]$, on déduit une forme C^{k-1}

$$T(\Phi_3) = \frac{1}{3!} T(a_{\varkappa\lambda\mu})[T(dx^\varkappa)T(dx^\lambda)T(dx^\mu)] \tag{8}$$

définie dans $\overline{U}$ dans le système des coordonnées $\overline{x}^\varkappa$. Si l'on y tient compte des formules (7) et que l'on développe les produits extérieurs dans les accolades, on trouve

$$T(\Phi_3) = \frac{1}{3!} T(a_{\varkappa\lambda\mu}) \frac{D(x^\varkappa, x^\lambda, x^\mu)}{D(\overline{x}^\varrho, \overline{x}^\sigma, \overline{x}^\tau)} [d\overline{x}^\varrho d\overline{x}^\sigma d\overline{x}^\tau]. \tag{8'}$$

En posant

$$\overline{a}_{\varrho\sigma\tau} = T(a_{\varkappa\lambda\mu}) \frac{D(x^\varkappa, x^\lambda, x^\mu)}{D(\overline{x}^\varrho, \overline{x}^\sigma, \overline{x}^\tau)}$$

la dernière formule devient

$$T(\Phi_3) = \frac{1}{3!} \overline{a}_{\varrho\sigma\tau}[d\overline{x}^\varrho d\overline{x}^\sigma d\overline{x}^\tau]. \tag{8''}$$

Dans la suite, si aucune confusion n'est à craindre, nous désignerons, pour simplifier l'écriture, la fonction $T(f)$ par $\overline{f}$ et la forme $T(\Phi_3)$ par $\overline{\Phi}_3$.

La transformation T, qui à toute forme différentielle C^k définie dans U en coordonnées $x^\varkappa$ fait correspondre une forme C^{k-1} dans le système des coordonnées $\overline{x}^\varkappa$ de l'ouvert $\overline{U}$, jouit des propriétés suivantes:

$$T(\Phi + \Psi) = T(\Phi) + T(\Psi), \tag{9}$$

$$T(\Phi\Psi) = [T(\Phi)T(\Psi)], \tag{10}$$

Φ et Ψ désignant des formes différentielles du même degré dans l'égalité (9), de degrés arbitraires dans l'égalité (10). La première de ces relations est facile de vérifier au moyen des formules ci-dessus; la seconde est évidente, si l'une des formes Φ et Ψ est une fonction (forme de degré zéro). Pour la démontrer dans les autres cas nous nous bornerons aux formes suivantes

$$\Phi = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda], \qquad \Psi = b_\mu dx^\mu$$

ce qui suffira pour faire comprendre la méthode du raisonnement. Or on a selon les formules données plus haut

$$\begin{aligned} T(\Phi) &= \tfrac{1}{2} T(a_{\varkappa\lambda})[T(dx^\varkappa)T(dx^\lambda)] \\ &= \tfrac{1}{2} T(a_{\varkappa\lambda}) \cdot \tfrac{1}{2} \frac{D(x^\varkappa, x^\lambda)}{D(\overline{x}^\varrho, \overline{x}^\sigma)} [d\overline{x}^\varrho d\overline{x}^\sigma] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T(\psi) &= T(b_\mu)T(dx^\mu) \\ &= T(b_\mu) \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^\tau} d\overline{x}^\tau. \end{aligned}$$

On en déduit la relation suivante:

$$[T(\Phi)T(\Psi)] = \frac{1}{2} T(a_{\varkappa\lambda})T(b_\mu) \cdot \frac{1}{2} \frac{D(x^\varkappa, x^\lambda)}{D(\overline{x}^\varrho, \overline{x}^\sigma)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^\tau} [d\overline{x}^\varrho d\overline{x}^\sigma d\overline{x}^\tau].$$

$a_{\varkappa\lambda}$ et b_μ étant des fonctions on a

$$T(a_{\varkappa\lambda})T(b_\mu) = T(a_{\varkappa\lambda} b_\mu);$$

si l'on tient compte de cette relation et du théorème de Laplace, l'égalité précédente devient

$$[T(\Phi)T(\Psi)] = \frac{1}{2!} T(a_{\varkappa\lambda} b_\mu) \cdot \frac{1}{3!} \frac{D(x^\varkappa, x^\lambda, x^\mu)}{D(\overline{x}^\varrho, \overline{x}^\sigma, \overline{x}^\tau)} [d\overline{x}^\varrho d\overline{x}^\sigma d\overline{x}^\tau].$$

Le produit $[\Phi\Psi]$ étant égal à l'expression $\frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} b_\mu [dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]$ le second membre de la dernière formule est égal à $T([\Phi\Psi])$ en vertu de l'égalité (8'); on arrive ainsi à la relation demandée.

En revenant à la transformation C^k définie par les formules (5) remarquons que nous pouvons regarder les variables $\bar{x}^\varkappa$ comme un nouveau système des coordonnées dans U remplaçant le système $x^\varkappa$. Il est clair que, si l'on introduit de cette manière dans U deux systèmes de coordonnées, ils seront liés l'un à l'autre par une transformation C^k.

Supposons maintenant que l'on se donne dans U dans le système $x^\varkappa$ une forme différentielle Φ_p de classe k; nous convenons d'envisager toutes les expressions $T(\Phi_p)$, où T désigne une transformation de classe $l > k$, comme les représentations d'une même forme C^k. On introduit ainsi la définition suivante: on dit que *dans l'ouvert U est définie une forme différentielle C^k de degré p*, si dans chaque système de coordonnées C^k dans U est donnée une expression de la forme (1) et si l'on passe de l'une de ces expressions à l'autre par une transformation C^{k+1}. Tous les systèmes de coordonnées que l'on déduit du système primitif $x^\varkappa$ par une transformation T de classe $k+1$ seront dits *systèmes admissibles* pour la forme Φ_p de classe k. On peut donc dire que la forme différentielle extérieure donnée dans un ouvert de R^n est un objet géométrique scalaire qui dans chaque système de coordonnées admissible a une composante.

L'opération T exercée sur une forme différentielle doit donc être considérée comme un changement de variables dans les formes; les formules (8) et (9) nous montrent que l'addition et multiplication extérieure des formes différentielles sont des opérations invariantes par le changement de variables.

La transformation T définie par les formules (5) peut être généralisée; en conservant les notations adoptées plus haut posons

$$x^\varkappa = \chi^\varkappa(t^1, t^2, \ldots, t^p) \qquad (p < n), \tag{11}$$

$\chi^\varkappa$ étant des fonctions C^k $(k \geqslant 1)$ définies dans ou ouvert connexe S de l'espace cartésien R^p aux coordonnées t^h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ et telles que la matrice $\|\partial x^\varkappa/\partial t^h\|$ est de rang p dans S. Nous dirons indifféremment que *les formules* (11) *représentent une application de S dans U* ou *qu'elles définissent une variété V à p dimensions plongée dans l'ouvert U*. En se servant des formules analogues aux expressions (6), (7) et (8) on déduit au moyen de la transformation (11) de l'expression d'une forme différentielle définie dans U dans le système $x^\varkappa$ l'expression d'une forme différentielle définie dans S dans le système t^h.

3. Valeur d'une forme différentielle. Nous dirons qu'à un point *$M \in U$ est attaché un vecteur contravariant $\vec{V}$* tangent à U, si dans tout système des coordonnées que l'on déduit du système $x^\varkappa$ par une transformation C^k $(k \geqslant 1)$ est donnée une suite de n nombres réels, appelés ses *composantes*, qui se transforment selon la loi suivante:

$$\bar{\xi}^\varkappa = \frac{\partial \bar{x}^\varkappa}{\partial x^\lambda}\, \xi^\lambda,$$

ξ^λ et $\bar{\xi}^\varkappa$ désignant ici les composantes de $\vec{V}$ respectivement dans les systèmes $x^\varkappa$ et $\bar{x}^\lambda$. Si dans tous les points de U est donné un vecteur contravariant dont les composantes sont des fonctions C^k, nous dirons que dans U est donné un *champ de vecteurs contravariants* C^k ou, plus brièvement, que dans U est donné un *vecteur contravariant* C^k *tangent à* U. On définit d'une manière analogue et bien connue les *vecteurs covariants* et les *tenseurs* de diverses valences. Ceci rappelé, pour tout ce qui concerne le calcul tensoriel nous renvoyons le lecteur au livre de J. A. Schouten [40]. Nous nous bornons ici à remarquer que les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_p}$ de l'expression (1) constituent un système des composantes d'un p-vecteur covariant défini dans U.

Considérons maintenant dans U une forme différentielle C^k $(k \geqslant 1)$, par exemple la forme

$$\Phi = \frac{1}{3!}\, a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu],$$

et imaginons dans U trois champs de vecteurs contravariants $\vec{V}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dont les composantes $\xi_i^\varkappa$ sont des fonctions C^k. *La valeur* de Φ pour la suite $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est, par définition, la fonction suivante de classe k (vol. I, n° 11):

$$\Phi[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = a_{\varkappa\lambda\mu}\, \xi_1^\varkappa \xi_2^\lambda \xi_3^\mu \tag{12}$$

ce qui peut s'écrire aussi comme il suit:

$$\Phi[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = \frac{1}{3!}\, a_{\varkappa\lambda\mu} \begin{vmatrix} \xi_1^\varkappa & \xi_1^\lambda & \xi_1^\mu \\ \xi_2^\varkappa & \xi_2^\lambda & \xi_2^\mu \\ \xi_3^\varkappa & \xi_3^\lambda & \xi_3^\mu \end{vmatrix}$$

Si l'on change les coordonnées au moyen d'une transformation C^{k+1} de la forme (5), les composantes $\bar{\xi}_i^\varrho$ du vecteur $\vec{V}_i$ dans le système $\bar{x}^\varkappa$ seront liées avec ξ_i^k par les relations suivantes:

$$\xi_i^\varkappa = \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \bar{x}^\varrho}\, \bar{\xi}_i^\varrho.$$

En portant ces expressions dans la formule (12) on obtient

$$\Phi[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = T a_{\varkappa\lambda\mu}(x)\, \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \bar{x}^\varrho}\, \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\sigma}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\tau}\, \bar{\xi}^\varrho \bar{\xi}^\sigma \bar{\xi}^\tau$$

ou

$$\Phi[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = \bar{a}_{\varrho\sigma\tau}(\bar{x})\bar{\xi}^\varrho \bar{\xi}^\sigma \bar{\xi}^\tau,$$

$\bar{a}_{\varrho\sigma\tau}(\bar{x})$ étant les coefficients de la forme $T(\Phi)$ (cf. équ. (8'')). Le second membre représentant la valeur de l'expression différentielle $T(\Phi)$ pour la suite $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ on a

$$\Phi[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = T(\Phi)[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3].$$

Nous avons ainsi justifié la définition de la valeur d'une forme en montrant qu'elle est *invariante pour un changement de coordonnées.*

On peut présenter la notion de valeur de Φ d'une autre manière qui est utile dans les applications géométriques. Imaginons pour cela trois systèmes des différentielles $\delta_1 x^\varkappa$, $\delta_2 x^\lambda$, $\delta_3 x^\mu$, indépendants l'un de l'autre et considérons l'expression

$$a_{\varkappa\lambda\mu}\,\delta_1 x^\varkappa\,\delta_2 x^\lambda\,\delta_3 x^\mu;$$

on obtient ainsi une forme à trois séries des différentielles, liée d'une manière biunivoque à la forme Φ (vol. I, p. 13). Si l'on considère les différentielles $\delta_i x^\varkappa (i = 1, 2, 3)$ comme les composantes d'un vecteur contravariant, cette forme trilinéaire présentera la valeur de Φ pour le trivecteur construit sur ces vecteurs.

4. Différentielle extérieure. Nous désignerons la *différentielle extérieure* d'une forme différentielle Φ de classe $k \geqslant 1$ donnée dans U par le symbole $d\Phi$ et nous la définirons au moyen des lois suivantes:

1° Φ et Ψ étant des formes différentielles du même degré on a

$$d(\Phi+\Psi) = d\Phi + d\Psi,$$

2° la différentielle extérieure d'une fonction (forme de degré zéro est identique avec sa différentielle exacte,

3° la différentielle extérieure d'un monôme, par exemple du monôme $\Pi = a[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]$, est donnée par la formule

$$d\Pi = [da\, dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu],$$

d'où

$$d\Pi = \frac{\partial a}{\partial x^\nu}[dx^\nu dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu].$$

De cette définition découlent immédiatement les conséquences suivantes:

a) *La différentiation extérieure est une opération linéaire.*

b) *La différentielle extérieure d'une forme différentielle de degré p est une forme de degré $p+1$*; par conséquent la différentielle extérieure

d'une forme de degré n est nulle, toute forme extérieure de degré $n+1$ à n indéterminées étant une forme nulle (vol. I, n° 9).

Nous considérerons quelques exemples.

1° La différentielle extérieure de la forme linéaire $\omega = a_\lambda dx^\lambda$ est donnée par la formule

$$d\omega = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\varkappa}[dx^\varkappa dx^\lambda]$$

ce qui peut s'écrire

$$d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\lambda}\right)[dx^\varkappa dx^\lambda].$$

2° Si $\Omega = \frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$, on a

$$d\Omega = \tfrac{1}{2}[da_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda]$$

ou

$$d\Omega = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu}[dx^\mu dx^\varkappa dx^\lambda].$$

En réduisant le second membre à la forme simplifiée (vol. I, n° 10) on obtient

$$d\Omega = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial a_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda}\right)[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu].$$

3° Considérons la forme de degré $n-1$

$$\Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n}(-1)^{\varkappa-1}a_\varkappa[dx^1 \ldots dx^{\varkappa-1}dx^{\varkappa+1}\ldots dx^n];$$

sa différentielle est donnée par la formule

$$d\Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n}(-1)^{\varkappa-1}[da_\varkappa dx^\varrho dx^1 \ldots dx^{\varkappa-1}dx^{\varkappa+1}\ldots dx^n],$$

ce qui peut s'écrire comme il suit

$$d\Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n}(-1)^{\varkappa-1}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\varrho}[dx^\varrho dx^1 \ldots dx^{\varkappa-1}dx^{\varkappa+1}\ldots dx^n]$$

ou encore

$$d\Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\varkappa}[dx^1 dx^2 \ldots dx^n].$$

Nous démontrerons maintenant les propriétés principales de la différentielle extérieure.

THÉORÈME 1. *La différentielle extérieure de la différentielle exacte d'une fonction C^k $(k \geqslant 2)$ est une forme nulle.*

En effet, si a est une fonction C^k dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ on a $da = \frac{\partial a}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ et, par suite,

$$d(da) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda];$$

les coefficients $\frac{\partial^2 a}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda}$ étant symétriques en les indices $\varkappa$ et λ et les produits $[dx^\varkappa dx^\lambda]$ étant symétriques gauches, le second membre de la dernière formule est nul et l'on trouve $d(da) = 0$. Il est en particulier $d(dx^\varkappa) = 0$.

THÉORÈME 2. *Si Φ_p et Ψ_q sont deux formes différentielles de degré p et q respectivement, on a*

$$d[\Phi_p \Psi_q] = [d\Phi_p \cdot \Psi_q] + (-1)^p [\Phi_p d\Psi_q]. \tag{13}$$

La différentiation extérieure étant une opération linéaire, il suffit de démontrer la relation (13) en supposant que Φ_p et Ψ_q sont deux monômes de la forme

$$\Phi_p = a[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \ldots dx^{\varkappa_p}], \qquad \Psi_q = b[dx^{\lambda_1} dx^{\lambda_2} \ldots dx^{\lambda_q}].$$

Or, on a

$$[\Phi_p \Psi_q] = ab[dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}]$$

et, par conséquent,

$$d[\Phi_p \Psi_q] = [d(ab) dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}].$$

En tenant compte de la formule $d(ab) = b\,da + a\,db$ et de la distribuvité du produit extérieur par rapport à la sommation, on peut écrire la dernière relation de la manière suivante:

$$d[\Phi_p \Psi_q] = b[da\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}] + \\ + a[db\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}]$$

ou, en changeant l'ordre des facteurs dans le second terme,

$$d[\Phi_p \psi_q] = b[da\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}] + \\ + (-1)^p a[dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} db\, dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}].$$

Le second membre de cette formule peut être présenté sous la forme

$$d[\Phi_p \Psi_q] = [[da\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}](b[dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}])] + \\ + (-1)^p [(a[dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}])[db\, dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}]],$$

ce qui démontre le théorème, les expressions $[da\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}]$ et $[db\, dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_q}]$ étant respectivement égaux aux différentielles $d\Phi_p$ et $d\Psi_q$.

Le Théorème 2 peut être généralisé facilement aux produits des plusieurs facteurs; dans le cas du produit de trois facteurs Φ_p, Ψ_q et X_r, par exemple, on a la formule

$$d[\Phi_p \Psi_q X_r] = [d\Phi_p \Psi_p X_r] + (-1)^p [\Phi_p d\Psi_q X_r] + (-1)^{p+q} [\Phi_p \Psi_q dX_r].$$

THÉORÈME 3. *Si Φ est une forme différentielle C^1 définie dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ et si T est une transformation C^2 des coordonées donnée au moyen des formules* (5), *il est*

$$T(d\Phi) = dT(\Phi). \tag{14}$$

Si Φ est une fonction a, ce théorème revient à une propriété bien connue de la différentielle d'une fonction et il est $T(da) = dT(a)$.

Si $\Phi = dx^\varkappa$, on a $d\Phi = 0$, $T(\Phi) = d\varphi^\varkappa(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ et, par suite, $T(d\Phi) = 0$, $dT(\Phi) = 0$ (Th. 1); on voit ainsi que dans ce cas particulier les deux membres de l'équation (14) étant des formes nulles sont égaux.

Considérons maintenant un monôme arbitraire du second degré $\Phi = a[dx^\varkappa dx^\lambda]$. On a $d\Phi = [da\, dx^\varkappa dx^\lambda]$, d'où

$$T(d\Phi) = [T(da) T(dx^\varkappa) T(dx^\lambda)]. \tag{15}$$

D'autre part on a

$$T(\Phi) = T(a)[T(dx^\varkappa) T(dx^\lambda)];$$

en différentiant extérieurement cette égalité, il viendra

$$dT(\Phi) = [dT(a) T(dx^\varkappa) T(dx^\lambda)] + T(a)[dT(dx^\varkappa) T(dx^\lambda)] - \\ - T(a)[T(dx^\varkappa) dT(dx^\lambda)].$$

Mais, comme on a $dT(dx^\varkappa) = 0$ et $dT(dx^\lambda) = 0$, la dernière formule se simplifie et l'on obtient

$$dT(\Phi) = [dT(a) T(dx^\varkappa) T(dx^\lambda)]. \tag{16}$$

En rapprochant les formules (15) et (16) et en tenant compte de l'égalité $T(da) = dT(a)$, on arrive à l'égalité qui était à démontrer. Cette démonstration s'étend facilement au cas d'un monôme de degré arbitraire et par conséquent, en vertu de la relation (9), au cas d'une forme différentielle arbitraire.

Il résulte du Théorème 3 que les propriétés des formes exprimées dans les Théorèmes 1 et 2 ont un caractère intrinsèque, indépendant du système des coordonnées qui nous a servi dans les démonstrations.

Remarque. Nous avons vu qu'à toute forme extérieure algébrique peut être associée biunivoquement une forme multilinéaire (vol. I, p. 13). Cette correspondence entre les formes extérieures et les formes multilinéaires peut être étendue aux formes différentielles.

a) Imaginons une forme quadratique $\Omega = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\lambda dx^\mu]$ et deux séries des différentielles $dx^\varkappa$ et δx^λ que nous allons regarder comme les composantes de deux vecteurs contravariants issus du point x^k (cf. nº 3). A la forme Ω on associe la forme bilinéaire

$$\tilde{\Omega} = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}(dx^\varkappa \delta x^\lambda - dx^\lambda \delta x^\varkappa)$$

ce qui peut s'écrire plus brièvement

$$\tilde{\Omega} = a_{\varkappa\lambda} dx^\varkappa \delta x^\lambda .$$

b) De même au produit extérieur $\Pi = [\omega\pi]$ de deux formes linéaires $\omega = a^\varkappa dx^\varkappa$, $\pi = b_\lambda dx^\lambda$ correspond la forme bilinéaire

$$\tilde{\Pi} = \omega(d)\pi(\delta) - \omega(\delta)\pi(d),$$

où $\omega(d)$ et $\omega(\delta)$ désignent respectivement la forme ω écrite au moyen des différentielles $dx^\varkappa$ et δx^λ.

c) Considérons maintenant la différentielle extérieure $d\omega = [da_\lambda dx^\lambda]$ de la forme $\omega = a_\lambda dx^\lambda$. A la différentielle $d\omega$ correspond la forme bilinéaire

$$\widetilde{d\omega} = da_\lambda \delta x^\lambda - \delta a_\lambda dx^\lambda .$$

Il est facile de voir que le second membre peut s'écrire comme il suit $d\omega(\delta) - \delta\omega(d)$, où $d\omega(\delta)$ désigne qu'on doit prendre les différentielles ordinaires des coefficients de la forme $\omega(\delta) = a_\lambda \delta x^\lambda$, le symbole $\delta\omega(d)$ ayant une signification analogue. On a ainsi la formule

$$\widetilde{d\omega} = d\omega(\delta) - \delta\omega(d).$$

d) La dernière formule peut facilement être généralisée. Si l'on introduit par exemple trois systèmes des différentielles $d_1 x^\varkappa$, $d_2 x^\varkappa$ et $d_3 x^\varkappa$, à la différentielle extérieure $d\Omega$ de la forme $\Omega = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$ correspondra la forme trilinéaire

$$\widetilde{d\Omega} = d_1 \Omega(d_2, d_3) + d_2 \Omega(d_3, d_1) + d_3 \Omega(d_1, d_2),$$

où $\Omega(d_2, d_3)$ désigne la forme bilinéaire associée à la forme extérieure Ω et écrite au moyen des différentielles $d_2 x^\varkappa$, $d_3 x^\varkappa$ et d_1 placé devant cette expression indique qu'on y doit former les différentielles ordinaires des coefficients au moyen des différentielles $d_1 x^\varkappa$.

5. Théorème de Poincaré. Une forme différentielle s'appelle *fermée*, si sa différentielle extérieure est nulle. La différentielle exacte d'une fonction de classe $k \geqslant 2$ est un exemple particulier d'une forme fermée (v. Théorème 1); ce fait se généralise par le théorème de Poincaré.

THÉORÈME 4. *La différentielle extérieure d'une forme différentielle de classe $k \geqslant 2$ est une forme fermée* ($d^2\Phi = 0$).

Il suffit de démontrer ce théorème pour un monôme de la forme $\Phi = a[dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \dots dx^{\varkappa_p}]$. Or, on a

$$d\Phi = [da\, dx^{\varkappa_1} dx^{\varkappa_2} \dots dx^{\varkappa_p}];$$

tous les facteurs du second membre étant des différentielles exactes, la différentielle extérieure de ce produit est nulle d'après la formule qui donne la différentielle d'un produit, ce qui démontre le théorème.

Le théorème de Poincaré admet une réciproque dont voici l'énoncé:

THÉORÈME 5. *Si Φ_p est une forme différentielle fermée de classe $k \geqslant 1$, définie dans un ouvert U de $E^n(x^\varkappa)$, il existe dans un voisinage de chaque point de U une forme Ψ_{p-1} de classe $k+1$ telle qu'il soit $\Phi_p = d\Psi_{p-1}$.*

Nous nous bornerons aux cas $p = 1$ et $p = 2$ ce qui suffira pour faire comprendre comment le théorème peut être démontré dans le cas général.

Si $p = 1$, on a une forme linéaire $\Phi_1 = a_\lambda dx^\lambda$; sa différentielle extérieure étant par hypothèse nulle, ses coefficients satisfont aux relations (nº 4, Ex. 1)

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial a_\varkappa}{a x^\lambda} = 0 .$$

D'après le théorème classique celles-ci expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que dans un voisinage de tout point de U la forme Φ_1 soit la différentielle exacte d'une fonction a, conformément au théorème à démontrer.

Envisageons maintenant la forme $\Phi_2 = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$. On a par hypothèse $d\Phi_2 = 0$ ce qui se traduit par les égalités

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial a_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{17}$$

(cf. nº4, Ex. 2). Nous allons montrer que dans un voisinage de tout point de U il existe une forme $\Psi_1 = b_\lambda dx^\lambda$ telle qu'il soit $d\Psi_1 = \Phi_2$. Ceci revient à démontrer qu'il existe une solution du système des équations suivantes

$$\frac{\partial b_\varkappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial b_\lambda}{\partial x^\varkappa} = a_{\varkappa\lambda} \tag{18}$$

aux inconnues b_λ. Si n est égal à 2 ou à 3, le théorème est bien connu ([39], p. 117); nous allons le démontrer pour $n = r$ en supposant qu'il soit vrai pour $n = r-1$. Pour ce but nous partagerons les équations (18) en deux groupes

$$\frac{\partial b_i}{\partial x^h} - \frac{\partial b_h}{\partial x^i} = a_{hi}, \tag{18'}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial x^h} - \frac{\partial b_h}{\partial x^r} = a_{hr}, \tag{18''}$$

où les indices h et i parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, r-1$. Le théorème étant par hypothèse vrai pour $n = r-1$, il existe une forme linéaire $\omega = b_i dx^i$ telle qu'il soit $d\omega = \frac{1}{2} a_{hi}[dx^h dx^i]$ $(h, i = 1, 2, \ldots, r-1)$, où l'on doit regarder la variable x^r figurant dans les coefficients a_{hi} comme un paramètre constant. Nous voyons donc qu'il existe des fonctions b_i satisfaisant aux équations (18'). Il nous reste à montrer que l'on peut déterminer une fonction b_r satisfaisant aux équations (18''), où l'on a remplacé les b_h par les solutions des équations (18'). Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (18'') à une inconnue b_r soit intégrable prennent la forme

$$\frac{\partial a_{hr}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial x^h} + \frac{\partial^2 b_h}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 b_i}{\partial x^h \partial x^r} = 0$$

ou

$$\frac{\partial a_{hr}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial x^h} - \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x^h} - \frac{\partial b_h}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Si l'on y tient compte des équations (18'), on obtient la relation

$$\frac{\partial a_{hr}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ri}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{ih}}{\partial x^r} = 0$$

qui est identiquement satisfaite d'après (17). Nous voyons ainsi que l'on peut déterminer la forme $b_\lambda dx^\lambda$ de manière que sa différentielle extérieure soit égale à $\frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda]$ quelque soit le nombre de variables.

En employant la méthode suivie plus haut on peut montrer que, si le Théorème 5 est vrai pour $p = s-1$, il est aussi vrai pour $p = s$. On démontre ainsi que l'équation

$$d\Psi_{p-1} = \Phi_p \tag{19}$$

a une solution Ψ_{p-1} dans un voisinage de chaque point de U, si la condition $d\Phi_p = 0$ est satisfaite dans U. Supposons que l'on ait obtenu une solution particulière Ψ_{p-1} de l'équation (19); il est évident d'après le Théorème 4 que l'expression

$$X_{p-1} = \Psi_{p-1} + d\Pi_{p-2},$$

où Π_{p-2} est une forme différentielle arbitraire C^{k+2} de degré $p-2$, est aussi une solution de cette équation. Nous fairons voir que la dernière formule présente la solution générale de l'équation (19). En effet, si X_{p-1} est une solution arbitraire de l'équation (19), on a $dX_{p-1} = \Phi_p$; en retranchant cette égalité de l'équation (19), on obtient $d(X_{p-1} - \Psi_{p-1}) = 0$ d'où il suit, selon le Théorème 5, qu'il existe une forme différentielle Π_{p-2} telle qu'il soit $X_{p-1} - \Psi_{p-1} = d\Pi_{p-2}$.

§ 2. Systèmes de Pfaff complètement intégrables

6. Systèmes de Pfaff (Généralités). Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ soit donné un système différentiel S composé de s équations

$$\omega^k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

$\omega^k = a^k_\varrho dx^\varrho$ étant des formes différentielles analytiques. Nous admettons que le rang de la matrice $\mathfrak{M}$ formée des coefficients des formes ω^k soit égal à s en un point $M \in U$. Nous dirons alors que S se compose des équations qui sont en général indépendantes dans U et, dans la suite, en parlant du système S nous supposerons toujours qu'il jouisse de cette propriété. On suppose de plus que toutes les fonctions qui s'introduisent dans ce paragraphe et dans le suivant soient analytiques. Tous les points où la matrice $\mathfrak{M}$ est de rang s, seront appelés points *réguliers* de S; le point sera dit *singulier*, si ce rang descend au dessous de s.

Le système S s'appelle *système de Pfaff*; si l'on fait sur ses premiers membres une substitution linéaire dont le déterminent est différent de zéro dans U, on obtient un second système de Pfaff qui est dit *équivalent* au premier.

Supposons maintenant qu'il soit donné un système de $n-q$ équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_{n-q} = 0 \tag{2}$$

dont les premiers membres sont des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point régulier $M_0(x^\varkappa_0)$ et telles que le rang de la matrice formée de ses derivées du premier ordre soit égal à $n-q$ en M_0. Il existe alors une variété analytique et une seule passant par le point M_0 et définie dans un voisinage de M_0 par les équations (2); en changeant au besoin les notations, nous pouvons la représenter au moyen des fonctions

$$x^{q+1} = f^{q+1}(x^1, x^2, \ldots, x^q), \quad \ldots, \quad x^n = f^n(x^1, x^2, \ldots, x^q)$$

satisfaisant identiquement aux équations (2). Nous dirons que cette variété, que nous désignerons par I_q, est une *variété intégrale* à q dimensions du système (1) dans un voisinage de M_0, si dans ce voisinage les équations (1) sont des conséquences des relations (2) et des relations suivantes:

(3) $$dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \quad \ldots, \quad dF_{n-q} = 0.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que, si I_q est une variété intégrale du système S, elle l'est aussi de tout système équivalent à S. Il est évident que la dimension d'une variété intégrale passant par un point régulier ne peut pas être supérieure à $n-s$.

Si l'on annule tous les coefficients des équations (1), on obtient une variété intégrale qui s'appelle *intégrale singulière*; il peut arriver que l'intégrale singulière n'existe pas ou qu'elle se compose des points isolés.

Tous les points de U sont des variétés intégrales de S à zéro dimensions, les équations de ce système étant des conséquences des relations $x^\varkappa = \text{const}$, $dx^\varkappa = 0$.

Aux variétés intégrales à une dimension on donne le nom de *courbes intégrales* du système différentiel. Il est facile de voir que par chaque point régulier du système S passe une infinité de courbes intégrales dont les équations dépendent de $n-s-1$ fonctions arbitraires d'un argument. En effet, dans le voisinage d'un point régulier $x_0^\varkappa$ le système (1) peut être remplacé par un système équivalent de la forme suivante:

(4) $$dx^h = b_1^h dx^1 + b_2^h dx^2 + \ldots + b_{n-s}^h dx^{n-s} \quad (h = n-s+1, n-s+2, \ldots, n).$$

Si l'on choisit $n-s-1$ fonctions

$$x^2 = \varphi^2(x^1), \quad x^3 = \varphi^3(x^1), \quad \ldots, \quad x^{h-s} = \varphi^{n-s}(x^1)$$

de manière qu'il soit

$$x_0^2 = \varphi^2(x_0^1), \quad \ldots, \quad x_0^{n-s} = \varphi^{n-s}(x_0^1)$$

et qu'on les porte dans les relations (4), on obtient un système de s équations différentielles ordinaires du premier ordre dont la solution complète le système des équations de la courbe intégrale.

Si le nombre s des équations (1) est égal à $n-1$, le système S est équivalent à un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires et les seules variétés intégrales sont des courbes intégrales; dans ce cas par tout point régulier passe une et une seule courbe intégrale.

En différentiant extérieurement les équations (1) on déduit de S un nouveau système différentiel du second degré

(5) $$d\omega^h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$

dont on définit les variétés intégrales de la même manière que celles de S. La seconde différentielle extérieure d'une forme différentielle étant nulle (n° 5, Th. 4), on voit que l'opération de la différentiation extérieure ne nous permet pas de déduire des équations (1) et (5) un nouveau système différentiel. Nous dirons que le système composé des équations (1) et (5) est *fermé* ou que les équations (5) ferment le système S.

THÉORÈME 1. *Toute variété intégrale d'un système de Pfaff annule les équations qu'on obtient en le fermant.*

En effet, supposons que les fonctions

$$x^{q+1} = f^{q+1}(x^1, x^2, \ldots, x^q), \quad \ldots, \quad x^n = f^n(x^1, x^2, \ldots, x^q)$$

représentent une variété intégrale I_q du système des équations (1). Nous allons montrer que ces fonctions annulent les formes $d\omega^h$. Les équations de la variété I_q pouvant être présentées au moyen des formules

$$x^1 = t^1, \; x^2 = t^2, \; \ldots, \; x^q = t^q, \; x^{q+1} = f^{q+1}(t^1, \ldots, t^q), \; x^n = f^n(t^1, \ldots, t^q)$$

on peut les envisager comme une transformation T qui remplace les variables $x^\varkappa$ par les variables t^l ($l = 1, 2, \ldots, q$). Nous avons par hypothèse identiquement

(6) $$T(\omega^h) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s);$$

il en résulte $dT(\omega^h) = 0$ et par conséquent (n° 4, Th. 3)

$$T(d\omega^h) = 0,$$

ce qui montre que les équations (5) sont une conséquence des équations de la variété intégrale I_q, c'est ce qui était à montrer.

7. Systèmes de Pfaff et systèmes associés des équations aux dérivées partielles. Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^k)$ soit donné un système de n formes différentielles C^k ($k \geqslant 2$)

(7) $$\omega^\varkappa = a_\varrho^\varkappa dx^\varrho,$$

dont les coefficients satisfont à la condition $|a_\varrho^\varkappa| \neq 0$. Les formes $\omega^\varkappa$ étant indépendantes on peut les résoudre par rapport aux différentielles dx^ϱ; soit

(8) $$dx^\varrho = b_\varkappa^\varrho \omega^\varkappa,$$

où les coefficients $a_\varrho^\varkappa$ et $b_\varkappa^\varrho$ sont liés par les relations

$$a_\varrho^\varkappa b_\lambda^\varrho = a_\lambda^\varrho b_\varrho^\varkappa = \delta_\lambda^\varkappa.$$

Soit f une fonction C^k arbitrairement donnée dans U; si dans sa différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} dx^\varrho$ on remplace dx^ϱ par l'expression (8), il viendra

$$df = X_\varkappa f \omega^\varkappa, \tag{9}$$

où les coefficients $X_\varkappa f$ sont déterminés par la formule

$$X_\varkappa f = b_\varkappa^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}. \tag{10}$$

Les expressions $X_\varkappa f$, qui portent le nom de *transformations infinitésimales*, sont linéairement indépendantes, si on les regarde comme formes linéaires par rapport aux dérivées de f. Nous dirons que le système des formes $\omega^\varkappa$ et le système des opérateurs $X_\varkappa f$ sont *réciproques* l'un de l'autre. Il est évident que la relation entre deux systèmes réciproques est invariante pour les transformations de variables; il est aussi facile de vérifier qu'elle sera conservée si l'on assujettit ces systèmes à des substitutions linéaires réciproques.

Si l'on différentie les formes (7) et que l'on y remplace les différentielles dx^ϱ par leurs expressions (8), on obtient des formules qui peuvent être mises sous la forme suivante:

$$d\omega^\varkappa = \tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda \omega^\mu], \qquad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0. \tag{11}$$

Dérivons maintenant extérieurement l'égalité (9); la différentielle du premier membre étant nulle (nº 4, Th. 1), on trouve

$$X_\varkappa f d\omega^\varkappa + [d(X_\varkappa f)\, \omega^\varkappa] = 0.$$

Si l'on y remplace les différentielles $d\omega^\varkappa$ par leurs expressions (11) et que l'on applique à $X_\varkappa f$ la formule (9) en écrivant $dX_\varkappa f = X_\lambda(X_\varkappa f)\, \omega^\lambda$, on trouve

$$\tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} X_\varkappa f[\omega^\lambda \omega^\mu] + X_\lambda(X_\varkappa f)[\omega^\lambda \omega^\varkappa] = 0.$$

Les formes $\omega^\varkappa$ étant par hypothèse indépendantes, tous les coefficients de la forme quadratique qui figure au premier membre doivent s'annuler. On obtient ainsi les relations suivantes

$$X_\lambda(X_\mu f) - X_\mu(X_\lambda f) + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} X_\varkappa f = 0,$$

si l'on change convenablement les indices. Il est facile de vérifier sur la formule (10) que l'expression $X_\lambda(X_\mu f) - X_\mu(X_\lambda f)$ est linéaire et homogène par rapport aux dérivées $\partial f/\partial x^\varkappa$; cette expression porte le nom de *parenthèse de Poisson* et on la désigne par le symbole $(X_\lambda X_\mu)(f)$:

$$(X_\lambda X_\mu)(f) = X_\lambda(X_\mu f) - X_\mu(X_\lambda f). \tag{12}$$

La relation trouvée plus haut s'écrit donc comme il suit

$$(X_\lambda X_\mu)(f) + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} X_\varkappa f = 0. \tag{13}$$

Revenons maintenant au système pfaffien S défini par les équations (1)

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega^s = 0$$

et imaginons, ce qui est toujours possible d'une infinité de manières, que l'on ait choisi $r = n - s$ formes différentielles linéaires $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^r$ indépendantes entre elles et indépendantes des formes ω^h $(h = 1, 2, \ldots, s)$ en tout point régulier du système S. Si f désigne une fonction analytique arbitraire, sa différentielle peut être presentée, d'après (9), par la formule de la forme suivante:

$$df = X_h f \omega^h + \tilde{X}_p f \tilde{\omega}^p \tag{14}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ p = 1, 2, \ldots, r;\ r + s = n).$$

Nous dirons qu'une fonction f^1 est une *intégrale première* du système S, si sa différentielle s'exprime seulement au moyen des formes ω^h $(h = 1, 2, \ldots, s)$

$$df^1 = X_h f^1 \omega^h; \tag{15}$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que f^1 soit une intégrale du système $\tilde{S}$ des équations suivantes

$$\tilde{X}_1 f = 0, \quad \tilde{X}_2 f = 0, \quad \ldots, \quad \tilde{X}_r f = 0 \tag{16}$$

linéaires et homogènes par rapport aux dérivées $\partial f/\partial x^\varkappa$. Le système des équations (16) porte le nom de *système associé* au système pfaffien (1); il est facile de voir que, si l'on remplace les formes $\tilde{\omega}^p$ par un autre système des formes indépendantes entre elles et indépendantes des formes ω^h, le système $\tilde{S}$ sera remplacé par un système équivalent que l'on obtient en assujettissant les expressions $\tilde{X}_p f$ à une substitution linéaire convénablement choisie. Il est aussi évident que la relation entre les systèmes S et $\tilde{S}$ est invariante par les transformations de variables dans U.

Si le système S admet dans un voisinage d'un point régulier q intégrales premières indépendantes entre elles, on aura les relations suivantes

$$df^i = X_h f^i \omega^h \quad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

qui permettent d'exprimer q des formes ω^h par les différentielles df^i et par les autres formes du système $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s$. En changeant au besoin les indices des formes ω^h, on peut alors remplacer le système des équations (1) par le système équivalent de la forme suivante

$$df^1 = 0,\ df^2 = 0,\ \ldots,\ df^q = 0, \quad \omega^{q+1} = 0,\ \ldots,\ \omega^s = 0.$$

Si l'on change les variables en prenant les fonctions $f^1, f^2, \ldots, f^q$ comme nouvelles variables, les équations ci-dessus s'écriront comme il suit

$$dx^1 = 0,\ dx^2 = 0,\ \ldots,\ dx^q = 0, \quad \omega^{q+1} = 0,\ \ldots,\ \omega^s = 0$$

et alors toute variété intégrale du système S sera contenue dans une variété linéaire $x^1 = c^1, x^2 = c^2, \ldots, x^q = c^q$ de l'espace euclidien $R^n(x^\varkappa)$.

Le plus grand nombre des intégrales premières indépendantes du système S est égal à s; ce nombre est atteint, si le système $\tilde{S}$ associé à S, est un système complet ([28], p. 48) dans un voisinage de tout point régulier. Dans ce cas le système S est équivalent au système des équations suivantes

$$df^1 = 0, \quad df^2 = 0, \quad \ldots, \quad df^s = 0$$

dont la solution la plus générale à $n-s$ dimensions est donnée par les relations $f^h(x^1, x^2, \ldots, x^n) = c^h$, $c^1, c^2, \ldots, c^s$ étant des constantes arbitraires qui peuvent être choisies de telle manière que la variété intégrale passe par un point régulier $x_0^\varkappa$ arbitrairement choisi dans U; il résulte des théorèmes bien connus des systèmes complets ([28], p. 55) que c'est une variété intégrale unique du système S jouissant de cette propriété. Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 2. *Si le système associé à un système S formé de s équations pfaffiennes en général indépendantes dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ est complet, par tout point régulier de U passe une et une seule variété intégrale à $n-s$ dimensions du système S et ce système peut être mis sous la forme*

$$dz^1 = 0, \quad dz^2 = 0, \quad \ldots, \quad dz^s = 0.$$

Il est utile d'avoir un critère qui permettrait de reconnaître sur un système de Pfaff, si le système qui lui est associé est un système complet. Pour obtenir ce critère supposons que le système des équations (16) soit complet et remarquons que, dans les notations adoptées ci-dessus, des formules (9), (11) et (13) résultent respectivement les relations de la forme suivante:

$$df = X_h f\omega^h + \tilde{X}_k f\tilde{\omega}^k, \tag{9'}$$

$$d\omega^h = \tfrac{1}{2}S_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\omega^j] + \tilde{S}_{ik}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\tilde{\omega}^k] + \tfrac{1}{2}\tilde{S}_{kl}^{\cdot\cdot h}[\tilde{\omega}^k\tilde{\omega}^l], \tag{11'}$$

$$(\tilde{X}_k\tilde{X}_l)(f) + \tilde{S}_{kl}^{\cdot\cdot h}X_h f + \tilde{S}_{kl}^{\cdot\cdot m}\tilde{X}_m f = 0 \tag{13'}$$

$$(h, i, j = 1, 2, \ldots, s;\ k, l, m = 1, 2, \ldots, r;\ r+s = n).$$

Le système des équations (16) étant par hypothèse complet dans un voisinage de tout point régulier il est ([30], p. 383)

$$(\tilde{X}_k\tilde{X}_l)(f) + \tilde{S}_{kl}^{\cdot\cdot m}\tilde{X}_m f = 0;$$

en tenant compte des équations (13′) on en déduit les relations suivantes:

$$\tilde{S}_{kl}^{\cdot\cdot h} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s;\ k, l = 1, 2, \ldots, r).$$

La formule (11′) prend alors la forme

$$d\omega^h = \tfrac{1}{2}S_{ij}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\omega^j] + \tilde{S}_{ik}^{\cdot\cdot h}[\omega^i\tilde{\omega}^k];$$

il en résulte que les équations $d\omega^h = 0$ sont des conséquences des équations $\omega^h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ du système S. Ce fait peut être exprimé par les relations suivantes (vol. I, p. 58):

$$d\omega^h = 0 \ (\operatorname{mod} \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s).$$

On voit facilement sur les équations (11′) et (13′) qu'inversement, si ces relations sont satisfaites, le système des équations (16) est un système complet. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Pour que le système associé à un sytème de Pfaff $\omega^h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ soit complet, il faut et il suffit que les relations*

$$d\omega^h = 0 \ (\operatorname{mod} \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s)$$

soient satisfaites dans un voisinage de tout point régulier.

8. Systèmes complètement intégrables. Le système pfaffien S formé de s équations (1)

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega^s = 0$$

à n variables est dit *complètement intégrable*, si par chaque point régulier passe une et une seule variété intégrale à la plus haute dimension $r = n-s$. D'après cette définition le système S est complètement intégrable, si le nombre s est égal à $n-1$ (n° 6) ou si le système qui lui est associé est un système complet (n° 7); dans ces deux cas par tout point régulier passe une variété intégrale unique à $n-s$ dimensions.

Maintenant nous allons démontrer un critère nécessaire et suffisant de l'intégrabilité complète.

THÉORÈME 4 (G. Frobenius). *Pour que le système de Pfaff composé des équations $\omega^h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ données dans un ouvert $R^n(x^\varkappa)$ soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'il soit*

$$d\omega^h = 0 \ (\operatorname{mod} \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s) \tag{17}$$

dans un voisinage de tout point régulier.

Commençons par une remarque. Si le système S des équations (1) satisfait à la condition (17), il en est de même de tout système des équations qui lui est equivalent. En effet, faisons sur les formes ω^h une substitution linéaire

$$(18) \qquad \bar{\omega}^k = a_h^k \omega^h, \qquad |a_h^k| \neq 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, s).$$

En différentiant extérieurement ces égalités on trouve

$$d\bar{\omega}^k = a_h^k d\omega^h + [da_h^k \omega^h].$$

On voit sur ces formules que les équations $d\bar{\omega}^k = 0$ sont des conséquences des équations $\bar{\omega}^k = 0$, si l'on tient compte de relations (17) et que l'on y remplace les formes ω^h par leurs expressions tirées des équations (18); il est donc $d\bar{\omega}^h = 0 \ (\mathrm{mod}\, \bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \ldots, \bar{\omega}^s)$. Ajoutons encore que la propriété du système S exprimée par les relations (17) est visiblement indépendante du choix des variables.

La suffisance de la condition (17) résulte immédiatement des Théorèmes 2 et 3 du numéro précédent. Pour démontrer sa nécessité supposons que par chaque point régulier passe une variété intégrale à $r = n-s$ dimensions. Soit M_0 un de ces points; dans un voisinage de M_0 les équations (1) peuvent donc être résolues par rapport aux différentielles de s variables. Si l'on change de notations, en désignant ces variables par $z^1, z^2, \ldots, z^s$, le système S peut être remplacé par le système équivalent de la forme

$$(18) \qquad \omega^h = dz^h - (A_1^h dx^1 + A_2^h dx^2 + \ldots + A_r^h dx^r) = 0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s; \ r = n-s).$$

Désignons les coordonnées de M_0 par x_0^l, z_0^h; nous pouvons supposer qu'il soit $x_0^l = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$. Considérons maintenant une variété intégrale I_{n-s} passant par M_0 et une variété plane Q à $s+1$ dimensions passant aussi par M_0 et définie par les équations $x^l = m^l t (l = 1, 2, \ldots, r)$, où les coefficients m^l sont des constantes non toutes nulles et t une variable auxiliaire. La courbe intégrale C du système des équations (18) située dans hyperplan Q et passant par M_0 est déterminée par les équations différentielles

$$(19) \qquad dz^h = (\bar{A}_1^h m^1 + \bar{A}_2^h m^2 + \ldots + \bar{A}_r^h m^r)\, dt$$

et par les conditions initiales $z^h = z_0^h$ pout $t = 0$; les coefficients $\bar{A}_l^h$ sont des fonctions des variables z^h et de t que l'on déduit des coefficients des équations (18) en y substituant aux variables x^l les expressions $m^l t$. La courbe intégrale C du système (18) est donc déterminée univoquement par les conditions imposées et, comme la courbe d'intersection de la variété

I_{n-s} et de l'hyperplan Q est aussi une courbe intégrale, elle est identique avec la courbe C. Il résulte de la forme des équations (19) que les équations de C peuvent être présentées sous la forme suivante:

$$z^h = \varphi^h(m^1 t, m^2 t, \ldots, m^r t; z_0^1, z_0^2, \ldots, z_0^s),$$

où la variable t figure exclusivement dans les produits $m^l t$. Si l'on varie arbitrairement les paramètres m^l et t dans les équations

$$x^l = m^l t, \qquad z^h = \varphi^h(m^1 t, \ldots, m^r t; z_0^1, \ldots, z_0^s)$$
$$(l = 1, 2, \ldots, r; \ h = 1, 2, \ldots, s)$$

on obtient ainsi tous les points de la variété intégrale I_{n-s} dans un voisinage de M_0. En éliminant de ces équations la variable t on obtient les formules

$$(20') \qquad z^h = \varphi^h(x^1, x^2, \ldots, x^r; z_0^1, \ldots, z_0^s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, s; \ r+s = n)$$

représentant cette variété intégrale. Or on sait ([30], p. 382) que toute intégrale analytique du système des équations différentielles (19) satisfait aux relations de la forme

$$\psi^h(m^1 t, m^2 t, \ldots, m^r t; z^1, z^2, \ldots, z^s) = z_0^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

que l'on obtient des relations précédentes en les résolvant par rapport à $z_0^1, z_0^2, \ldots, z_0^s$. Il en résulte que tous les points de la variété intégrale I_{n-s} dans un voisinage de M_0 satisfont aux équations

$$(20'') \qquad \psi^h(x^1, x^2, \ldots, x^r; z^1, z^2, \ldots, z^s) = z_0^h.$$

Si l'on prend les fonctions ψ^h comme nouvelles variables $\bar{z}^h$ au lieu des variables z^h, ces équations deviennent $\bar{z}^h = z_0^h$. Comme on peut varier les valeurs des constantes z_0^h dans un voisinage du système des valeurs primitivement choisies sans que le point M_0 cesse d'être un point régulier, il s'en suit que les équations $\bar{z}^h = z_0^h$ représentent une variété intégrale pour tous ces systèmes des valeurs z_0^h. Dans le système des variables $x^k, \bar{z}^l$ le système des équations (18) doit donc être équivalent aux équations suivantes:

$$\bar{\omega}^1 = d\bar{z}^1 = 0, \quad \bar{\omega}^2 = d\bar{z}^2 = 0, \quad \ldots, \quad \bar{\omega}^s = d\bar{z}^s = 0.$$

Comme on a ici $d\bar{\omega}^h = 0$, les conditions

$$d\omega^h = 0 \ (\mathrm{mod}\, \bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \ldots, \bar{\omega}^s)$$

sont satisfaites et, par conséquent, il en est de même des équations $\omega^h = 0$ du système S en vertu de la remarque faite au commencement de la démonstration du Théorème de Frobenius.

9. Compléments. 1° En démontrant la nécessité de la condition de Frobenius nous avons en même temps montré que la variété intégrale I_{n-s} passant par un point régulier, si elle existe, est unique et qu'on l'obtient en intégrant un système de s équations différentielles à s inconnues. Si le système de Pfaff est complètement intégrable, cette variété peut être présentée sous la forme des équations (20′) ou (20″); nous dirons que ces équations contenant s constantes arbitraires représentent *l'intégrale générale* du système de Pfaff complètement intégrable.

2° La condition d'intégrabilité complète du système S défini par les équations (1) est exprimée par les relations (17) qui doivent être vraies en tout point régulier. Or remarquons que les points singuliers du système, s'il en existe, doivent satisfaire aux équations que l'on obtient en annulant tous les déterminants du degré s de la matrice des coefficients des formes ω^h qui figurent dans les premiers membres des équations (1) (n° 6). Ces coefficients étant analytiques, on en conclut que tout voisinage d'un point singulier contient un infinité de points réguliers; donc, si les relations (17) sont vraies pour les points réguliers, il en est de même pour les points singuliers. Il en résulte que l'énoncé du Théorème de Frobenius peut être remplacé par le suivant: *pour que le système S défini par les équations* (1) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les relations* (17) *soient satisfaites dans tout l'ouvert U, où le système est défini.* Cette forme du critère est plus commode dans les applications, car elle nous debarrasse de l'examen du système dans les points singuliers.

3° Nous avons vu (v. la fin du n° 8) que, si le système S, formé de s équations de Pfaff indépendantes dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$, est complètement intégrable, il est équivalent dans un voisinage de tout point régulier au système des équations de la forme

$$(21) \qquad d\psi^1 = 0, \quad d\psi^2 = 0, \quad \ldots, \quad d\psi^s = 0$$

ψ^h étant s fonctions indépendantes; la réciproque est évidente. Nous pouvons donc énoncer le critère suivant de l'intégrabilité complète: *pour que le système S soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'il puisse être mis sous la forme des équations* (21).

4° Exemple. Considérons l'équation de Pfaff

$$(22) \qquad \omega = a_\varkappa dx^\varkappa = 0$$

donnée dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$. Pour que cette équation soit complètement intégrable, il faut et il suffit, selon le Théorème de Frobenius, que la relation $[\omega\, d\omega] = 0$ soit vraie dans tout l'ouvert U. En développant le produit du premier membre et en se servant de la formule

$$d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu}\right)[dx^\lambda dx^\mu]$$

(n° 4), la relation ci-dessus devient

$$a_\varkappa\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu}\right)[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu] = 0.$$

Les coefficients des produits $[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]$ devant s'annuler on trouve ainsi les conditions suivantes:

$$(22') \qquad a_\varkappa\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu}\right) + a_\lambda\left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\varkappa}\right) + a_\mu\left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial a_\varkappa}{\partial x^\lambda}\right) = 0.$$

Si ces relations sont satisfaites pour chaque système des valeurs des indices $\varkappa, \lambda, \mu$, l'équation (22) est complètement intégrable et son intégrale générale peut s'écrire comme il suit

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = c,$$

c étant une constante arbitraire. Comme d'après le théorème général l'équation (22) est dans ce cas équivalente à l'équation $df = 0$, il s'en suit qu'il existe une fonction ϱ, appelée *facteur intégrant* de l'équation, telle qu'il soit $\omega = \varrho\, df$ dans tous les points réguliers.

Remarque. La condition (22′) étant identiquement satisfaite si $n = 2$, il s'en suit que toute l'équation de Pfaff à deux variables est complètement intégrable.

§ 3. Classe d'une forme différentielle

10. Définition. Soit donnée dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ une forme différentielle analytique Φ. Si l'on assujettit les coordonnées $x^\varkappa$ à une transformation analytique T, il peut arriver que le nombre de variables qui figurent dans les coefficients et dans les différentielles de $T(\Phi)$ devient inférieur à n. On appelle *classe* d'une forme différentielle le nombre minimum de variables au moyen desquelles elle peut être exprimée, si l'on choisit convenablement la transformation T.

11. Détermination de la classe. Pour déterminer la classe d'une forme nous démontrerons d'abord un théorème auxiliaire en nous servant de la notion de système associé à un ensemble de formes extérieures (n° 1; vol. I, n$^{\text{os}}$ 13, 14).

Théorème 1. *Si Φ est une forme différentielle, le système associé au système $\{\Phi, d\Phi\}$ est complètement intégrable.*

Nous démontrerons ce théorème pour une forme du troisième degré; soit donc

$$(1) \qquad \Phi = \tfrac{1}{3!}a_{\varkappa\lambda\mu}[dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu].$$

Supposons que le système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ se compose de r équations linéairement indépendantes

(2) $$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \dots, \quad \omega^r = 0$$

dont les q premières forment le système associé à Φ; le rang de Φ est par suite égal à q (n° 1). Choisissons maintenant $n-r$ formes différentielles linéaires $\omega^{r+1}, \omega^{r+2}, \dots, \omega^n$ indépendantes des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$. Il résulte de ces hypothèses que la forme Φ peut être exprimée au moyen des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q$; on peut donc poser

(3) $$\Phi = \frac{1}{3!} A_{\bar h \bar i \bar j}[\omega^{\bar h}\omega^{\bar i}\omega^{\bar j}] \quad (\bar h, \bar i, \bar j = 1, 2, \dots, q).$$

Pour montrer que le système des équations (2) est complètement intégrable il faut prouver la congruence

$$d\omega^h = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r} \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

qui exprime que chaque terme de la différentielle extérieure $d\omega^h$ contient l'une au moins des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ (cf. vol. I, p. 58).

Considérons d'abord l'une quelconque des formes $\omega^{\bar h}(\bar h = 1, 2, \dots, q)$, par exemple la forme ω^1; l'équation $\omega^1 = 0$ appartenant au système associé à Φ, ω^1 doit figurer dans l'un au moins des termes de l'expression (3) avec un coefficient différent de zéro (vol. I, n° 14). Nous pouvons supposer que ce soit le terme $A_{123}[\omega^1\omega^2\omega^3]$; par conséquent la forme $d\Phi$ doit contenir le terme $A_{123}[d\omega^1\omega^2\omega^3]$. Admettons qu'il soit $d\omega^1 \neq 0$ $(\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r)$, contrairement au théorème à démontrer. La différentielle $d\omega^1$ contiendrait donc un terme de la forme $h[\omega^\varkappa\omega^\lambda]$ ($h \neq 0$, $\varkappa, \lambda > r$) et, par suite, dans le produit $A_{123}[d\omega^1\omega^2\omega^3]$ devrait figurer le terme $A_{123}\, h[\omega^\varkappa\omega^\lambda\omega^2\omega^3]$. Il en résultrait que la dérivée

$$\frac{\partial^3 d\Phi}{\partial\omega^\lambda\partial\omega^2\partial\omega^3}$$

devrait contenir le terme $A_{123}h\omega^\varkappa$ ($\varkappa > r$) indépendant des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ et que, par conséquent, le système (2) ne serait pas le système associé au système $\{\Phi, d\Phi\}$, contrairement à ce que nous avons supposé. Le raisonnement étant général on a

(4) $$d\omega^{\bar h} = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \dots\dots, \omega^r} \quad (\bar h = 1, 2, \dots, q).$$

Envisageons maintenant la différentielle $d\Phi$; selon la formule (3) on a

(5) $$d\Phi = \frac{1}{3!}[dA_{\bar h \bar i \bar j}\omega^{\bar h}\omega^{\bar i}\omega^{\bar j}] + \frac{1}{3!} A_{\bar h \bar i \bar j}[d\omega^{\bar h}\omega^{\bar i}\omega^{\bar j}].$$

Un raisonnement tout pareil à celui qui nous a conduit à la relation (4) montre qu'il doit être

$$dA_{\bar h \bar i \bar j} = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r}.$$

Il résulte aussi de l'expression (5) que les termes de la différentielle $d\Phi$ ne contiennent chacune des formes $\omega^{q+1}, \omega^{q+2}, \dots, \omega^r$ que l'une fois au plus. On peut donc poser

$$d\Phi = \frac{1}{3!} B_{a\bar h \bar i \bar j}[\omega^a\omega^{\bar h}\omega^{\bar i}\omega^{\bar j}] + \frac{1}{4!} C_{\bar h \bar i \bar j \bar k}[\omega^{\bar h}\omega^{\bar i}\omega^{\bar j}\omega^{\bar k}]$$

$$(a = q+1, q+2, \dots, r;\ \bar h, \bar i, \bar j, \bar k = 1, 2, \dots, q).$$

Si tous les coefficients $B_{a\bar h \bar i \bar j}$ sont nuls, les systèmes associés à Φ et à $\{\Phi, d\Phi\}$ sont identiques ($r = q$) et dans ce cas le théorème est vrai en vertu de la relation (4). Supposons maintenant que ces coefficients ne soient pas tous nuls. Nous pouvons supposer, en permutant au besoin les indices, que l'un des coefficients B_{a123} soit différent de zéro. En dérivant la forme $d\Phi$ par rapport à ω^1, ω^2 et ω^3, on trouve

$$\frac{\partial^3 d\Phi}{\partial\omega^1\partial\omega^2\partial\omega^3} = -B_{a123}\,\omega^a + C_{123\bar k}\,\omega^{\bar k} \quad (3 < a \leqslant r).$$

Nous pouvons supposer, en faisant au besoin une substitution sur les formes ω^a ($a = q+1, q+2 \dots, r$), que cette dérivée se réduise à ω^{q+1} et que, par suite, $d\Phi$ contienne le terme $[\omega^{q+1}\omega^1\omega^2\omega^3]$. On peut donc poser

(6) $$d\Phi = [\omega^{q+1}\omega^1\omega^2\omega^3] + X_4,$$

X_4 désignant une forme du quatrième degré. Remarquons que d'après les hypothèses faites ci-dessus chaque terme de X_4 contient au plus deux des formes $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ et au moins deux des formes ω^a, où $3 < a \leqslant r$.

En différentiant extérieurement la formule (6) on obtient une relation de la forme:

$$[d\omega^{q+1}\omega^1\omega^2\omega^3] + \Psi_5 = 0,$$

où l'on a désignée par Ψ_5 une forme du cinquième degré; chaque terme de Ψ_5 doit donc contenir une au moins des formes linéaires ω^a dont les indices satisfont aux inégalités $3 < a \leqslant r$. Donc en multipliant les deux membres de la relation ci-dessus par $[\omega^4\omega^5 \dots \omega^r]$, on obtient l'égalité suivante:

$$[d\omega^{q+1}\omega^1\omega^2 \dots \omega^r] = 0;$$

il s'en suit qu'il doit être $d\omega^{q+1} = 0$ $(\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r)$. Le raisonnement étant général on démontre ainsi les relations

$$d\omega^a = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r} \quad (a = q+1, q+2, \dots, r);$$

l'ensemble de ces congruences et des congruences (4) montre la validité du Théorème 1.

Si la forme Φ est fermée ($d\Phi = 0$), le système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ se réduit à celui de la forme Φ et l'on peut énoncer le corollaire suivant:

Corollaire. *Le système associé à une forme fermée est complètement intégrable.*

Théorème 2. *La classe d'une forme différentielle Φ est égale au rang du système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$.*

Conservons les notations et les conventions adoptées dans les raisonnements précédents; nous rappelons en particulier que le rang du système (2) associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ a été désigné par r. Le système (2) étant, selon le Théorème 1, complètement intégrable, on peut par un changement de variables, le remplacer par le système équivalent de la forme suivante (n° 9, 3°)

(7) $$dx^1 = 0, \quad dx^2 = 0, \quad \ldots, \quad dx^r = 0.$$

Il s'en suit que l'on peut poser

$$\Phi = \tfrac{1}{3!} a_{hij} [dx^h dx^i dx^j] \quad (h, i, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Pour démontrer le théorème il faut et il suffit de faire voir que les coefficients a_{hij} ne dépendent que des variables $x^1, x^2, \ldots, x^r$. Supposons en effet que, par exemple, le coefficient a_{123} dépendrait d'une variable $x^\varkappa$ $(\varkappa > r)$; nous pouvons supposer qu'il soit $a_{123} = x^{r+1}$. On aurait par suite $\Phi = x^{r+1}[dx^1 dx^2 dx^3] + \Psi_3$, Ψ_3 étant une forme du troisième degré dont chaque terme contient l'une au moins des différentielles dx^4, dx^5, $\ldots$, dx^r. Il en résulte la formule

$$d\Phi = [dx^{r+1} dx^1 dx^2 dx^3] + X_4,$$

où X_4 désigne une forme du quatrième degré. On en déduit l'expression

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial\, dx^1 \partial\, dx^2 \partial\, dx^3} = -dx^{r+1} + \omega,$$

ω étant une forme linéaire aux différentielles dx^h $(h = 1, 2, \ldots, r)$. Il en résulte que le système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ devrait contenir l'équation $-dx^{r+1} + \omega = 0$ qui est indépendante des équations (7); or ceci est contraire à l'hypothèse faite sur ces équations. Nous avons ainsi montré que les coefficients et les différentielles de Φ ne dépendent que des variables x^h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ et que par conséquent la classe de cette forme est au plus égale à r. Elle ne peut être inférieure à r, car dans le cas contraire le système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ serait de rang inférieure à r. Le Théorème 2 est ainsi démontré.

Si une forme Φ est fermée $(d\Phi = 0)$, le système associé à $\{\Phi, d\Phi\}$ se réduit à celui de Φ. De cette remarque et du Théorème 2 résultent deux corollaires.

Corollaire 1. *La classe d'une forme fermée est égale à son rang.*

Corollaire 2. *La classe d'une forme quadratique fermée est un nombre pair* (cf. vol. I, 18).

On dit qu'une forme différentielle de classe r est ramenée à une forme *réduite*, si dans son expression ne figurent que r variables et leurs différentielles. Il résulte de ce qui précède que pour ramener une forme Φ à l'expression réduite il faut intégrer le système associé à l'ensemble des formes Φ et $d\Phi$.

Si la classe d'une forme Φ_p est égale à son degré p, sa forme réduite ne contient que l'un terme

$$\Phi_p = A[dx^1 dx^2 \ldots dx^p].$$

Si l'on y introduit au lieu de x^1 une nouvelle variable $\bar{x}^1$ au moyen de la formule $\bar{x}^1 = \int A\, dx^1$, on obtient l'expression suivante:

$$\Phi_p = [d\bar{x}^1 dx^2 \ldots dx^p];$$

c'est la forme canonique d'une forme différentielle dont le degré et la classe sont égaux.

12. Expression canonique d'une forme quadratique fermée. Soit donnée dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ une forme quadratique fermée Ω de rang $2r$, dont les coefficients sont des fonctions analytiques. La classe de Ω étant égale à son rang (n° 11, Corollaire 1), on peut supposer que cette forme soit exprimée au moyen des variables $x^1, x^2, \ldots, x^{2r}$. Posons

$$\Omega = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda] \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 2r).$$

Le rang de Ω étant égal au nombre des variables, on a $|a_{\varkappa\lambda}| \neq 0$; or on sait que ce déterminant est égal, à un facteur numérique près, au carré de l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ de la matrice $\|a_{\varkappa\lambda}\|$ (vol. I, p. 34). En désignant cet agrégat par P on a ([47], p. 21 et 24)

(8) $$P = \sum_{\lambda=2}^{r} a_{1\lambda} A_\lambda,$$

A_λ $(\lambda = 2, 3, \ldots, 2r)$ étant des polynômes en $a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda \neq 1)$.

Posons maintenant

(9) $$\Omega_1 = \Omega - [df\, dg],$$

f et g désignant deux fonctions analytiques dans U. On peut présenter cette formule sous la forme suivante:

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2} \bar{a}_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda],$$

où

(10) $$\bar{a}_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda} - \frac{D(f, g)}{D(x^\varkappa, x^\lambda)}.$$

Il est évident que Ω_1 est une forme fermée, par conséquent sa classe est égale à son rang (n° 11, Coroll. 1); pour que ce rang soit inférieur à $2r$, il faut et il suffit qu'il soit $|\overline{a}_{\varkappa\lambda}| = 0$ et, par conséquent, qu'il en soit de même de l'agrégat de Pfaff de la matrice $\|\overline{a}_{\varkappa\lambda}\|$. Donc il doit être

$$\overline{P} = \sum_{\lambda=2}^{2r} \overline{a}_{1\lambda} \overline{A}_\lambda = 0, \tag{11}$$

$\overline{P}$ et $\overline{A}_\lambda$ ayant la signification analogue à celle employée dans la formule (8).

Si l'on pose $f = x^1$, les formules (10) prendront la forme

$$\overline{a}_{1\lambda} = a_{1\lambda} - \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \quad (\lambda \neq 1), \qquad \overline{a}_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa, \lambda \neq 1);$$

on aura par suite $\overline{A}_\lambda = A_\lambda$ et l'équation (11) prendra la forme

$$\sum_{\lambda=2}^{2r} \left(a_{1\lambda} - \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \right) A_\lambda = 0$$

ou

$$\sum_{\lambda=2}^{2r} a_{1\lambda} A_\lambda - \sum_{\lambda=2}^{2r} A_\lambda \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = 0.$$

En tenant compte de la formule (8), l'équation précédente peut s'écrire

$$\sum_{\lambda=2}^{2r} A_\lambda \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = P. \tag{12}$$

L'agrégat P étant par hypothèse différent de zéro, on en conclut, eu égard à la formule (8), qu'il en est de même de l'un au moins des coefficients A_λ. Soit $g = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^{2r})$ l'une quelconque des solutions de l'équation (12); il est évident que les fonctions φ et x^1 sont indépendantes, car autrement l'équation (12) entraînerait l'égalité $P = 0$, contrairement à l'hypothèse faite sur Ω. Nous pouvons donc faire un changement de variables tel qu'il soit $g = x^{r+1}$. La formule (9) prend alors, dans un voisinage d'un point arbitraire de U, la forme

$$\Omega_1 = \Omega - [dx^1 dx^{r+1}].$$

La forme Ω_1 est de classe $2r-2$, car autrement Ω serait de classe inférieure à $2r$. En procédant ainsi de proche en proche on obtient une suite des formes

$$\Omega_2 = \Omega_1 - [dx^2 dx^{r+2}],$$
$$\Omega_3 = \Omega_2 - [dx^3 dx^{r+3}],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_{r-1} = \Omega_{r-2} [dx^{r-1} dx^{2r-1}],$$

dont les classes sont respectivement égales à $2r-4, 2r-6, \ldots, 2$. Ω_{r-1} étant de classe deux, elle peut être réduite à la forme $\Omega_{r-1} = \Re[dx^r dx^{2r}]$. En remplaçant la variable x^r par $\int \Re\, dx^r$ on réduit le coefficient $\Re$ à l'unité; on peut donc poser

$$\Omega_{r-1} = [dx^r dx^{2r}].$$

En ajoutant les équations ainsi obtenues on arrive à la formule

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [dx^i dx^{r+i}].$$

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème 3. *Une forme différentielle quadratique fermée C^ω donnée dans un ouvert de $R^n(x^\varkappa)$ peut toujours dans un voisinage de tout point de cet ouvert être ramenée à la forme canonique suivante:*

$$\sum_{i=1}^{r} [dx^i dx^{r+i}].$$

Remarque. En démontrant ce théorème nous avons supposé que les coefficients de la forme soient des fonctions analytiques; M$^{\text{elle}}$ P. Libermann a démontré ce théorème en supposant seulement qu'ils soient de classe C^1 [35].

13. Expression canonique d'une forme différentielle linéaire. Supposons que dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$ soit donnée une forme de Pfaff ω, analytique et de classe $2r+1$. La différentielle extérieure $d\omega$ étant une forme quadratique fermée, on peut donc, par un changement de variables convenable, la ramener à la forme

$$d\omega = \sum_{i=1}^{s} [dx^i dx^{s+i}], \qquad s \leqslant r.$$

Les deux formes ω et $\sum_{i=1}^{s} x^i dx^{s+i}$ ayant la même différentielle extérieure, leur différence est égale à la différentielle d'une fonction a; on peut donc poser

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} x^i dx^{s+i} + da.$$

La forme ω étant de classe $2r+1$, on en conclut qu'il doit être $s = r$ et que $a, x^1, x^2, \ldots, x^{2r}$ doivent former un système des fonctions indépendantes. Si l'on prend a comme une nouvelle variable x^{2r+1}, on aura

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i} + dx^{2r+1}.$$

Supposons maintenant que ω soit de classe paire $2r$. En posant

$$\omega_1 = \omega + du,$$

où u est une variable auxilaire, on obtient une forme de classe $2r+1$, qui, d'après le résultat obtenu plus haut, peut être réduite à l'expression suivante:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i} + dz,$$

où z est une fonction de la variable u et des variables qui figurent dans ω. En comparant les deux dernières formules on obtient

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i} + d(z-u).$$

Si l'on choisi u de manière qu'il soit $u = z$, on arrive à la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Une forme différentielle linéaire C^ω, donnée dans un ouvert U de $R^n(x^\varkappa)$, peut être ramenée dans un voisinage de tout point de U à l'une de deux expressions suivantes:*

$$\sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i}, \qquad \sum_{i=1}^{r} x^i dx^{r+i} + dx^{2r+1}$$

suivant la parité de sa classe.

14. Expressions canoniques des formes différentielles à n variables de degrés n et $n-1$. a) Toute forme Φ, non nulle, à n variables de degré n peut s'écrire comme il suit

$$\Phi = A[dx^1 dx^2 \dots dx^n].$$

On la ramène à l'expression canonique

$$\Phi = [d\bar{x}^1 dx^2 \dots dx^n]$$

en remplaçant x^1 par une nouvelle variable $\bar{x}^1$ au moyen de la formule $\bar{x}^1 = \int A\, dx^1$.

b) Désignons par Ψ une forme analytique à n variables de degré $n-1$; on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i [dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n].$$

Formons maintenant l'équation $[\Psi df] = 0$, où f désigne la fonction inconnue. En développant le produit du premier membre, on en déduit l'équation suivante:

$$\left(a_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) [dx^1 dx^2 \dots dx^n] = 0.$$

La fonction f doit donc satisfaire à l'équation linéaire et homogène aux derivées partielles du premier ordre

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0.$$

En choisissant arbitrairement un système de $n-1$ intégrales indépendantes $y^1, y^2, \dots, y^{n-1}$ de cette équation, on aura les relations

$$[\Psi dy^1] = 0, \quad [\Psi dy^2] = 0, \quad \dots, \quad [\Psi dy^{n-1}] = 0.$$

Elles expriment que la forme Ψ est divisible par chacune des formes différentielles linéaires $dy^1, dy^2, \dots, dy^{n-1}$ et, par suite, par leur produit (vol. I, p. 25). On peut donc poser

$$\Psi = A[dy^1 dy^2 \dots dy^{n-1}].$$

Si A s'exprime au moyen des fonctions $y^1, y^2, \dots, y^{n-1}$, Ψ peut être ramenée à la forme

(13) $$\Psi = [dy^1 dy^2 \dots dy^{n-1}];$$

si le coefficient A est indépendant de ces fonctions, on peut le prendre pour une nouvelle variable y^n et Ψ devient

(14) $$\Psi = y^n [dy^1 dy^2 \dots dy^{n-1}].$$

Remarquons que dans le premier cas la différentielle extérieure de Ψ est nulle et que dans le second cas elle est différente de zéro.

THÉORÈME 5. *Toute forme différentielle de degré $n-1$ à n variables peut, par un choix de variables, être ramenée à la forme* (13) *lorsque sa différentielle extérieure est nulle, et à la forme* (14) *dans le cas contraire.*