POLSKA AKADEMIA NAUK
MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM 39

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

J. ACZÉL UND S. GOŁĄB

FUNKTIONALGLEICHUNGEN DER THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE

WARSZAWA 1960

PRINTED IN POLAND

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

VORWORT

Im Jahre 1934 hat A. Wundheiler die grundlegende Begriffe der Theorie der geometrischen Objekte in einem Vortrag auf der ersten internationalen Konferenz für tensorielle Differentialgeometrie und ihre Anwendungen in Moskau dargestellt (s. Literaturverzeichnis, A. Wundheiler 1937 [1], [2]). Dieser Vortrag gab Anlaß zu den Arbeiten von J. Haantjes - J. A. Schouten (1936, 1937), in welchen die Grundlegung dieser Theorie erfolgte. In dem seither vergangenen Vierteljahrhundert hat sich die Theorie der geometrischen Objekte zu einer selbständigen Disziplin entwickelt, sie umfasst heute mehr als hundertsiebzig Arbeiten, darunter die Monographie von A. Nijenhuis (1952).

Die vorliegende Arbeit setzt sich ein beschränktes Ziel: es wird — wie es der Titel des Buches zeigt — der Akzent auf die Anwendung der Funktionalgleichungen in dieser Theorie und auf ihre Lösung unter womöglich schwachen Bedingungen gelegt. Es werden hier also weder die Theorie der Lieschen Gruppen noch abstrakte algebraische Methoden sowie Untersuchungen in gefaserten Räumen angewendet. Dies gibt unserem Buch einen in gewissem Sinne elementaren Charakter (an Vorkenntnissen werden nur die Elemente der Differential- und Integralrechnung, der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie der Matrizenalgebra vorausgesetzt). Übrigens wollen wir auch keine Vollständigkeit erzielen. Wir trachten weniger sämtliche Ergebnisse vorzuführen als einige charakteristischen Probleme und Gedankengänge zu zeigen. Wir beweisen auch nicht alles; auf manche Resultate und auf manche Schritte der Beweisgänge wird nur kurz hingewiesen. Endlich lassen wir auch gewisse Probleme und Fragen offen.

Was die grundlegenden Begriffe und Bezeichnungen betrifft, sind sie im Kapitel I (Einleitung) zusammengestellt.

Das Buch gliedert sich in Kapitel, Abschnitte und Paragraphen. Ein Hinweis im Texte wie II. 1 § 3 bedeutet den dritten Paragraph des ersten Abschnittes im Kapitel II. Innerhalb eines Kapitels werden nur die Nummern der Abschnitte und Paragraphen, innerhalb eines Abschnittes nur die der Paragraphen zitiert. Die Sätze und Formeln werden innerhalb der Abschnitte laufend nummeriert, so daß z. B. der Hinweis III. 2 (5) die Formel (5) des zweiten Abschnittes im Kapitel III bedeutet. Der Hinweis auf die Arbeiten im Literaturverzeichnis erfolgt folgenderweise. Es ist z. B. die im Texte mit V. V. Wagner 1949 [3] zitierte Arbeit im Literaturverzeichnis unter dem Haupttitel 1949 bei dem Namen V. V. Wagner unter der Nummer [3] zu suchen.

Wir haben getrachtet, daß das Literaturverzeichnis womöglich alle sich ausdrücklich mit der Theorie der geometrischen Objekte befassenden Arbeiten (also nicht nur die in diesem Buche verwendeten) enthalte.

Obzwar der Text des ganzen Buches Ergebnis der Zusammenarbeit der beiden Verfasser ist, wurden die Abschnitte II. 2, II. 3, II. 4, II. 6, II. 7, III. 3, IV. 2, IV. 3, IV. 4 vom ersten, die Abschnitte II. 5, II. 8, V. 2 vom zweiten Verfasser redigiert. Die übrigen sind gemeinsame Arbeit der Verfasser.

Wir hoffen mit diesem Büchlein einerseits den Kennern dieser Theorie einige Ergänzungen und Vereinfachungen zu geben, andererseits vielleicht neue Interesse bezüglich dieses Gegenstandes zu wecken. Besonders würde es uns freuen, wenn einige von uns vorgeführten, zur Zeit offenen Fragen gelöst werden könnten.

Die Verfasser danken den Herren Dr. M. Hosszú (Miskolc) und Dr. M. Kuczma (Katowice), die das Sachverzeichnis zusammengestellt haben, sowie dem Verlag für die vorteilhafte Ausstattung des Buches und für das verständnisvolle Eingehen auf die vielen nachträglichen Änderungswünsche, womit es möglich gemacht wurde, daß das Buch auch die letzten Ergebnisse umfassen und in der zur Zeit bestmöglichen Gestalt erscheinen kann.

Debrecen und Kraków, den 28. Juni 1960.

J. Aczél *S. Gołąb*

I. EINLEITUNG

§ 1. Arithmetischer und geometrischer Raum. Koordinatentransformationen

Eine Folge von n (n eine natürliche Zahl) Zahlen (Komponenten)

$$a^1, \ldots, a^n \tag{1}$$

wird ein *arithmetischer Punkt* genannt. Die Menge $\mathfrak{A}_n$ von allen arithmetischen Punkten mit n Komponenten wird n-dimensionaler *arithmetischer Raum* genannt, der mit der üblichen Topologie versehen wird. Ein n-dimensionaler *geometrischer Raum* ist ein topologischer Raum $\mathfrak{M}$ von Elementen, die Punkte genannt werden, von der Eigenschaft, daß zwischen $\mathfrak{M}$ und einem Teile von $\mathfrak{A}_n$ eine topologische Abbildung hergestellt werden kann. Einen solchen geometrischen Raum werden wir kurz mit $\mathfrak{X}_n$ bezeichnen ohne Rücksicht darauf, ob es sich bei dieser Korrespondenz um den ganzen $\mathfrak{A}_n$ oder nur um einen echten Teil von $\mathfrak{A}_n$ handelt. Ist die oben genannte Zuordnung vorhanden, so nennen wir die Zahlen der dem Punkte p zugeordneten Folge (1) die *Koordinaten* des Punktes p.

Es sei betont, daß derselbe $\mathfrak{X}_n$ auf verschiedene Weisen und eventuell auf verschiedene Teile des $\mathfrak{A}_n$ abgebildet werden kann. Eine solche Abbildung wird ein *Koordinatensystem (Bezugssystem)* genannt.

Den Übergang von einem Koordinatensystem (B) zu einem anderen $(\bar{B})$ nennen wir *Koordinatentransformation* T.

Es seien

$$\xi^1, \ldots, \xi^n$$

die Koordinaten des laufenden Punktes p im Koordinatensystem (B) und

$$\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$$

seine Koordinaten im System $(\bar{B})$. Wegen unserer Voraussetzung sind die $\bar{\xi}^\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n)$ eindeutige Funktionen von $\xi^1, \ldots, \xi^n$ und umgekehrt die ξ^k eindeutige Funktionen von $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$. Die Koordinatentransformationen $(B) \to (\bar{B})$ bzw. $(\bar{B}) \to (B)$ lassen sich also analytisch durch die Gleichungssysteme

$$\bar{\xi}^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \varphi^\varkappa(\xi^l) \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, \ldots, n \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{2}$$

ein wesentliches Untergruppoid ist), für welche $\Psi(\Omega)$ noch eine geometrische Komitante bleibt.

Keines der beiden Problemenkreise wurde bisher systematisch untersucht.

Zur Komitantentheorie gehören auch die sog. ersten und zweiten *Reduktionssätze* (J. A. Schouten 1954). Wir vermuten, daß diese mit der Methode der Funktionalgleichungen bewiesen werden könnten.

Die Entdeckung von A. Nijenhuis 1951 einer neuen Differentialkomitante erster Ordnung von zwei gemischten Tensoren zweiter Stufe war für einige Geometer unerwartet und überraschend. Schouten 1953 [1], [2] findet alsdann weitere Differentialkomitanten und behauptet, daß es gewiß noch weitere geben muß. Die vollständige Lösung dieses Problems führt wiederum zu einem System von Funktionalgleichungen. Dieses System ist aber ziemlich kompliziert. Für $n = 2$ und für den Typus der Nijenhuis'schen Objekte besteht das System aus 8 Gleichungen für 8 unbekannte Funktionen von 24 Veränderlichen.

Die sogenannten *Differentialoperatoren* bilden einen Spezialfall von Differentialkomitanten. Sie sind Differentialkomitanten von Größen (d. h. von Skalaren, Biskalaren, Tensoren, gewöhnlichen und Weylschen Dichten und Tensordichten), die auch selbst Größen sind. Was die Differentialoperatoren erster Ordnung betrifft, so sind die folgenden seit langer Zeit bekannt: der Gradient eines Skalarfeldes, die Rotation eines p-Vektorfeldes und die Divergenz einer p-Vektordichte vom Gewicht $+1$ (ein p-Vektor ist ein p-fach kontravarianter schiefsymmetrischer Tensor). Es scheint, daß die Behauptung von J. A. Schouten 1951, daß es außer der oben genannten drei Differentialoperatoren erster Ordnung keine andere gibt, wenn der Raum mit keinem Hilfsobjekt ausgestattet ist, in voller Allgemeinheit nur auf Grunde der Theorie der Funktionalgleichungen bewiesen werden könnte.

Der Begriff der Differentialoperatoren erhebt auch ein anderes grundsätzliches Problem. Eine Funktionaltransformation, die den Feldern von geometrischen Objekten und ihren Funktionen andere Funktionen zuordnet und deren Transformierungsformel bei gegebenen Koordinatentransformationen bekannt ist, sei eine *geometrische Differentialoperation* genannt. Solche geometrische Differentialoperationen sind z. B. der Nabla - Operator ∇, der Laplace'sche Operator Δ usw. Das Problem besteht darin, die Definition der geometrischen Objekte so zu erweitern, daß sie auch die geometrischen Differentialoperationen enthalte und dann Klassifikationstheorie, Komitantentheorie u. s. w. für diese zu entwickeln.

VI. LITERATURVERZEICHNIS

(Russ. = Russisch, Jap. = Japanisch)

1936

J. A. Schouten, J. Haantjes

Zur Theorie des geometrischen Objektes, Comptes rendus du Congr. Int. d. Math. Oslo 1936. II. Oslo 1937, 155-159.

1937

J. A. Schouten, J. Haantjes

On the theory of the geometric object, Proceedings of the London Math. Soc. (2) 42 (1937), 356-376.

A. Wundheiler

[1] *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien* (I. Intern. Konf. f. tens. Diff. Geom. u. i. Anw., Moskau 17-23. V. 1934), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 4 (1937), 366-375.

[2] *Fondements de la théorie des objets géométriques*, Annales Soc. Pol. Math. 16 (1937), 198.

1938

S. Gołąb

[1] *Zur Theorie des affinen Zusammenhanges im eindimensionalen Raume. I*, Opuscula math. Kraków 2 (1938), 7-9.

[2] *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte*, Math. Zeitschrift 44 (1938), 104-114.

[3] *Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte*, Wiadomości Mat. 45 (1938), 97-137.

[4] *Sur quelques points concernant la notion du comitant*, Annales Soc. Pol. Math. 17 (1938), 177-192.

G. F. Laptev

La théorie de S. Lie des objets géométriques, qui dépendent de point et de direction (Russ.), Bulletin Soc. Phys.-Math. Kazan (3) 10 (1938), 4-38.

1939

E. T. Davies

Lie-derivation in generalized metric spaces, Annali mat. pura appl. (4) 18 (1939), 261-274.

S. Gołąb

Über den Begriff der Pseudogruppe von Transformationen, Math. Annalen 116 (1939), 768-780.

A. D. Michal, A. S. Mewborn
Géometrie différentielle projective générale des géodésiques généralisées, Comptes Rendus Paris 209 (1939), 392-394.

1940

B. L. Laptev
Une forme invariante de la variation et la dériveé de S. Lie (Russ.), Bulletin Soc. Phys.-Math. Kazan (3) 12 (1940), 3-8.

J. A. Schouten
Über Differentialkomitanten zweier kontravarianter Größen, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A 43 (1940), 3-6.

1941

T. C. Doyle
Tensor decomposition with application to the contact and complex groups, Annals of Math. (2) 42 (1941), 698-722.

N. Teodorescu
La géométrie de l'équation des ondes. III, Bulletin Math. Soc. Roum. Sci. 43 (1941), 59-68.

1942

N. Teodorescu
La géométrie de l'équation des ondes. IV, Bulletin Math. Soc. Roum. Sci. 44 (1942), 71-84.

1943

V. V. Wagner
The absolute derivative of fields of local geometric objects in a compound manifold, Doklady Akad. Nauk SSSR 40 (1943), 94-97.

1944

T. Nakae
Das geometrische Objekt (Jap.), Tensor 7 (1944), 1-5.

1945

N. Teodorescu
Équations aux dérivées partielles et objets géométriques, Disquisitiones math. phys. 4 (1945), 105-118.

V. V. Wagner
[1] *The generalization of Ricci's and Bianchi's identities for a connexion in the compound manifold*, Doklady Akad. Nauk SSSR 46 (1945), 303-305.
[2] *The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations*, Doklady Akad. Nauk SSSR 46 (1945), 347-349.

1946

E. Bompiani
Enti geometrici definiti da sistemi differenziali, Atti dell'Acad. Naz. dei Lincei Rendiconti (8) 1 (1946), 887-894.

S. Gołąb
Sur la théorie des objets géométriques, Annales Soc. Pol. Math. 19 (1946), 7-35.

J. E. Pensov
Classification of differential geometric objects of the class v with one component, Doklady Akad. Nauk SSSR 54 (1946), 563-566.

V. V. Wagner
Constant fields of local geometric objects in compound manifolds with a linear connection, Doklady Akad. Nauk SSSR 53 (1946), 183-186.

1947

S. Gołąb
Sur la théorie des objets géométriques (Réduction des objets géométriques spéciaux de première classe aux objets du type Δ), Annales Soc. Pol. Math. 20 (1947), 10-27.

1948

O. E. Gheorghiu
[1] *Équations aux dérivées partielles et objets géométriques*, Comptes rendus Paris 227 (1948), 613-615.
[2] *Équations aux dérivées partielles et objets géométriques*, Bulletin sci. Polyt. Timişoara 13 (1948), 223-233.

S. Gołąb
[1] *Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici*, Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei Rendiconti (8) 5 (1948), 120-122.
[2] *Sur la notion de dérivée covariante* (Congrès Pol. Math. Wrocław 1946), Colloquium Math. 1 (1948), 160.

P. K. Rachevsky
Tensorielle Differentialgeometrie (Russ.), Mathematik in der USSR während 30 Jahren, Moskau-Leningrad (1948), 883-918.

1949

J. S. Dubnov
Tensoren und geometrische Objekte im eindimensionalen Raum (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 7 (1949), 3.

O. E. Gheorghiu
Les lois de transformations des objets géométriques spéciaux linéaires de classe v avec une composante en X_1, Comptes Rendus Paris 229 (1949), 611-613.

S. Gołąb
[1] *Sur les objets géométriques non-différentiels*, Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. ser. A. sci. math. (1949), 67-72.
[2] *Contribution à la théorie des objets géométriques*, Prace mat.-fiz. 47 (1949), 1-15.

N. N. Mihăileanu
Obiecte geometrice în geometria diferențială, Buletinul ședințelor București 3 (1949), 29-30.

P. K. Rachevsky
Galois theory in fields of geometric objects (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 7 (1949), 167-186.

J. A. Schouten

De differentiaaloperator van Lie, Math. Centrum Amsterdam Report Z. W. 1949-10, 1-7.

J. A. Schouten, W. Kulk

Pfaff's problem and its generalizations, Oxford 1949.

G. Vranceanu

Obiecte geometrice de speța a treia, Buletinul ședințelor București 3 (1949), 30-34.

V. V. Wagner

[1] *Classification of linear connections in a composite manifold $X_{n+(1)}$ according to their holonomy groups* (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 7 (1949), 205-226.

[2] *Theorie der differentiellen Objekten und Grundlagen der Differentialgeometrie* (Russ.), Nachtrag zur russischen Übersetzung der Arbeit *The foundations of differential geometry*, Cambridge 1932, von O. Veblen-J. H. C. Whitehead, Moskau 1949.

[3] *Classification of simple differential geometric objects* (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 69 (1949), 293-296.

K. Yano

Groups of transformations in generalized spaces, Tokyo 1949.

1950

J. S. Dubnov

Differentialgeometrische Objekte und Imprimitivitätssysteme (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 8 (1950), 9.

S. Gołąb

[1] *La notion de similitude parmi les objets géométriques*, Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. ser. A Sci. Math. 1950, 1-7.

[2] *Sur les objets géométriques à une composante*, Annales Soc. Pol. Math. 23 (1950), 79-89.

[3] *La notion de similitude parmi les objets géométriques*, Acad. Pol. Sci. Lettres CR. M. Cl. Math. Nat. 1950, 10.

[4] *O pojęciu podobieństwa obiektów geometrycznych*, Sprawozdania Pol. Akad. Umiejętności 51 (1950), 115.

G. F. Laptev

On manifolds of geometric elements with a differential connection (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 73 (1950), 17-20.

A. E. Liber

On the classification of the affine connection in the two-dimensional space (Russ.), Mat. Sbornik 27 (69) (1950), 249-266.

N. N. Mihăileanu

Obiecte geometrice în geometria diferențială, Stu. cerc. mat. Acad. R. P. Rom. In. Mat. 1 (1950), 318-373.

J. E. Pensov

[1] *The classification of continuous pseudo-groups of Lie transformations in X_2 according to their characteristic objects* (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 8 (1950), 382-413.

[2] *On differential geometric objects of class v in X_1* (Russ.), Mat. Sbornik 26 (68) (1950), 161-182.

Y. Tashiro

Sur la dérivée de Lie de l'être géométrique et son groupe d'invariance, Tohoku Math. Journal (2) 2 (1950), 166-181.

V. V. Wagner

[1] *On the theory of pseudogroups of transformations* (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 72 (1950), 453-456.

[2] *The theory of composite manifolds* (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 8 (1950), 11-72.

[3] *Classification of simple differential geometric objects* (Russ.), Uspechi Mat. Nauk 5 (1950), no. 1 (35), 213-214.

1951

J. Aczél, L. Kalmár, J. G. Mikusiński

Sur l'équation de translation, Studia Math. 12 (1951), 112-116.

B. Eckmann, A. Fröhlicher

Sur l'intégrabilité des structures presque complexes, Comptes Rendus Paris 232 (1951), 2284-2286.

O. E. Gheorghiu

Determinarea legii de transformare a obiectelor diferențial geometrice de clasa a II-a cu două componente in X_1, Comunicările Acad. RP Rom. 1 (1951), 1017-1020.

G. F. Laptev

On fields of geometric objects on imbedded manifolds (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 78 (1951), 197-200.

A. E. Liber

On comitants of geometric differential objects (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 80 (1951), 529-532.

N. N. Mihăileanu

Obiecte geometrice asociate spațiilor cu conexiune proiectivă P_2, Comunicările Acad. RP Rom. 1 (1951), 165-170.

M. Neumann

Obiecte geometrice asociate suprafețelor riglate, Stu. cerc. mat. Acad. RP Rom. In. Mat. 2 (1951), 445-462.

A. Nijenhuis

X_{n-1}-forming sets of eigenvectors, Nederl. Akad. Wetensch, proc. ser. A = Indagationes math. 13 (1951), 200-212.

J. E. Pensov

The classification of geometric differential objects with two components (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 80 (1951), 537-540.

H. Pidek

Sur les objets géométriques de la classe zéro, qui admettent une algèbre, Annales Soc. Pol. Math. 24 (1951), 111-128.

J. A. Schouten

Tensor analysis for physicists, Oxford 1951.

A. M. Vasilev

General invariant methods in differential geometry (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 79 (1951), 5-7.

V. V. Wagner

[1] *The geometry of the generalized Cartan spaces and the theory of geometric differential objects* (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 77 (1951), 777-780.

[2] *The algebraic theory of differential groups* (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 80 (1951), 841-848.

1952

C. Ehresmann

[1] *Structures locales et structures infinitésimales*, Comptes rendus Paris 234 (1952), 587-589.

[2] *Les prolongements d'une variété différentiable. V*, Comptes Rendus Paris 234 (1952), 1424-1425.

O. E. Gheorghiu

[1] *Un obiect geometric pseudolinear de clasa* 1 *cu două componente*, Comunicările Acad. RP Rom. 2 (1952), 1-4.

[2] *Asupra teoriei obiectelor geometrice*, Acad. RP Rom. Buletin şti. mat.-fiz. 4 (1952), 273-284.

G. F. Laptev

On a new invariant analytic method of differential geometric investigations (Russ.), *125 years of the non-Euclidean geometry of Lobatschewsky*, Moskau-Leningrad 1952, 175-178.

N. N. Mihăileanu

Asupra invariantilor proiectivi ai ecuaţiei lui Laplace, Acad. RP Rom. Buletin şti. mat.-fiz. 4 (1952), 829-832.

A. Nijenhuis

Theory of the geometric object, Amsterdam 1952.

Y. Tashiro

Note sur la dérivée de Lie d'un être géométrique, Mat. Journal Okoyama Univ. 1 (1952), 125-128.

A. M. Vasilev

On algebraic operations applicable in differential geometry (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 82 (1952), 509-511.

1953

J. Haantjes

On the notion of geometric object, Convegno Int. di Geom. Diff. Ital. 1953, Roma 1954, 77-81.

J. Haantjes, G. Laman

[1] *On the definition of geometric objects. I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 56 = Indagationes math. 15 (1953), 208-215.

[2] *On the definition of geometric objects. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 56 = Indagationes math. 15 (1953), 216-222.

G. F. Laptev

Differential geometry of imbedded manifolds (Russ.), Trudy Mosk. Mat. Obstsch. 2 (1953), 275-382.

P. K. Rachevsky

Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis (Russ.), Moskau 1953.

J. A. Schouten

[1] *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Math. Centrum Amsterdam Report Z. W. 1953 — 012, 1-6.

[2] *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convegno Int. di Geom. Diff. Ital. 1953, Roma 1954, 1-7.

1954

O. E. Gheorghiu

Determinarea obiectelor geometrice speciale de clasa II, Buletinul şti. Timişoara 2 (1954), 37-40.

S. Gołąb

[1] *Über den Begriff der kovarianten Ableitung*, Nieuw Archief voor Wisk. (3) 2 (1954), 90-96.

[2] *Sur la dérivée covariante des objets géométriques de deuxième classe*, Annales Pol. Math. 1 (1954), 107-113.

H. Pidek

[1] *Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1*, Annales Pol. Math. 1 (1954), 114-126.

[2] *Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m*, Annales Pol. Math. 1 (1954), 127-134.

P. K. Rachevsky

Linear differential geometric objects (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 97 (1954), 609-611.

J. A. Schouten

Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

K. Yano, Y. Tashiro

Some theorems on geometric objects and their applications, Nieuw Archief voor Wisk. (3) 2 (1954), 134-142.

1955

O. E. Gheorghiu

[1] *Obiecte geometrice diferenţiale de clasa I. cu două componente în X_1*, Studii şi cerc. ştii. Timişoara 2 (1955), 21-25.

[2] *Determinarea obiectelor geometrice lineara de clasa II în X_n*, Studii şi cerc. ştii. Timişoara 2 (1955), 37-40.

[3] *Obiecte geometrice de lege fracţionară*, Buletinul şti. Timişoara 6 (1955), 965-988.

[4] *Obiecte geometrice speciale avind legea de transformare proiective*, Consf. Geom. Dif. 1955, Timişoara 1956, 201-208.

[5] *Sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale lineare şi obiectele geometrice asociate*, Consf. Geom. Dif. 1955, Timişoara 1956, 231-237.

S. Gołąb, M. Kucharzewski

Zur Theorie der geometrischen Objekte, Annales Pol. Math. 2 (1955), 250-253.

M. N. Kuiper, K. Yano

On geometric objects and Lie groups of transformations, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 58 = Indagationes math. 17 (1955), 411-420.

A. Nijenhuis

[1] *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. I*, Nederl. Akad. Wetensch, Proc. ser. A 58 = Indagationes math. 17 (1955), 390-397.

[2] *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 58 = Indagationes math. 17 (1955), 398-403.

J. E. Pensov

On bundles of one-dimensional geometric objects of class $n \geqslant 2$ in X_1^1 (Russ.), Doklady Akad. Nauk SSSR 104 (1955), 356-359.

P. K. Rachevsky

[1] *Theorie der Spinoren* (Russ.), Uspechi mat. nauk 10 (1955), no. 2 (64), 3-110.

[2] *Mehrdimensionale δ-Funktionen und differentialgeometrische Objekte* (Russ.) Uspechi mat. nauk 10 (1955), no. 4 (66), 145-152.

1956

J. Aczél

[1] *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I, II*, Acta math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 339-354.

[2] *A geometriai objektumok elméletéről*, Mat. Lapok 7 (1956), 183.

[3] *A geometriai objektumok elméletéhez*, Mat. Lapok 7 (1956), 187.

J. Aczél, M. Hosszú

On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces, Acta math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 327-338.

O. E. Gheorghiu

[1] *Determinarea derivatei covariante a pseudotensorilor*, Buletinul şti. techn. Inst. Polit. Timişoara 1 (15), (1956), 27-30.

[2] *Obiecte geometrice de lege fracţionară*, Studii şi cerc. ştii. Timişoara 3 (1956), no. 3-4, 9-13.

S. Gołąb

[1] *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956.

[2] *Géométrie différentielle vis-à-vis des hypothèses d'une faible régularité*, Revue de math. pures et appl. 1 (1956), 99-112.

Y. Katsurada

On a theory of generalized crossed extensors and the functional tensors attached to a subspace, Tensor NS. 5 (1956), 143-163.

A. E. Liber

On the theory of surfaces in a geometric n-space with given fundamental group (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 10 (1956), 193-226.

V. V. Wagner

Algebraische Theorie der Tangentialräume höherer Ordnungen (Russ.), Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. An. Mosk. 10 (1956), 31-88.

1957

J. Aczél

[1] *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III, IV*, Acta math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957), 19-52.

[2] *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. V*, Acta math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957), 53-64.

[3] *Ujabb eredmények a geometriai objektumok elméletében*, Mat. Lapok 8 (1957), 351.

O. E. Gheorghiu

[1] *Contributions à la théorie des objets géométriques speciaux non-différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m. I*, Comptes Rendus Paris 245 (1957), 822-824.

[2] *Contributions à la théorie des objets géométriques speciaux non-différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m. II*, Comptes Rendus Paris 245 (1957), 887-889.

S. Gołąb

[1] *Zur Theorie der Übertragungen*, Schriftenreihe des Inst. für Math. D. Akad. der Wiss. Berlin 1 (1957), 162-177.

[2] *Sur l'équation fonctionnelle $f(X)\cdot f(Y) = f(X\cdot Y)$*. Colloquium Math. 4 (1957), 265.

S. Gołąb, H. Pidek

Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante, Annales Pol. Math. 4 (1957-1958), 226-241.

M. Hosszú

Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects, Publicationes math. Debrecen 5 (1957-1958), 294-329.

M. Ikeda, S. Abe

On tensorial concomitants of a nonsymmetric tensor $g_{\mu\nu}$. I, Tensor N. S. 7 (1957), 59-69.

M. Ikeda

On tensorial concomitants of a nonsymmetric tensor $g_{\mu\nu}$. II, Tensor N. S. 7 (1957), 117-127.

P. K. Rachevsky

The theory of spinors, Amer. Math. Soc. Translations (2) 6 (1957), 1-110.

A. G. Walker

Dérivation torsionnelle et seconde torsion pour une structure presque complexe, Comptes Rendus Paris 245 (1957), 1213-1215.

K. Yano

The theory of the Lie derivatives and its applications, Amsterdam-Groningen 1957.

1958

J. Aczél

[1] *A geometriai objektumok elméletéhez. I*, M. Tud. Akad. III. Osztály közleményei 8 (1958), 41-65.

[2] *A geometriai objektumok elméletéhez. II*, M. Tud. Akad. III. Osztály közleményei 8 (1958), 211-243.

O. E. Gheorghiu

[1] *Sur les objets géométriques associés à un système linéaire d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Comptes Rendus Paris 247 (1958), 26-28.

[2] *Despre un sistem de ecuaţi funcţionale ce se întîlneste in teoria obiectelor geometrice speciale*, Comunicările Acad. RP Rom. 8 (1958), 133-139.

[3] *Obiecte geometrice în raport cu grupul proiectiv neolonom*, Buletinul şţi. tehn. Inst. Polit. Timişoara 3 (17), 1958, 9-12.

O. E. Gheorghiu, B. Crstici

Asupra unor obiecte geometrice cu două componente, Stu. cerc. mat. Acad. RP Rom. In. Mat. 9 (1958), 311-331.

S. Gołąb, M. Kucharzewski

[1] *Über die Invarianz gewisser Eigenschaften von Affinoren bei Transformationen der entsprechenden Untergruppen der allgemeinen affinen Gruppe*, Tensor N. S. 8 (1958), 1-7.

[2] *Über den Begriff der Pseudogrößen*, Tensor N. S. 8 (1958), 78-89.

A. Lichnerowicz

Géométrie des groupes de transformation, Paris 1958.

A. Moór

Über die kovariante Ableitung der Vektoren, Acta sci. math. Szeged 19 (1958), 237-246.

A. Nijenhuis

Geometric aspects of formal differential operations on tensor fields, Proceedings of the Int. Cong. of Math. Edinburgh 1958, Cambridge 1960, 463-469.

J. E. Pensov

Two-dimensional bundles of geometric objects in X_1 (Russ.), Mat. sbornik 46 (88) (1958), 291-314.

K. Yano

On Walker-differentiation in almost product or almost complex spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 61 = Indagationes math. 20 (1958), 573-580.

1959

J. Aczél

[1] *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. VI*, Acta math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959), 1-12.

[2] *A mátrix-számitás alkalmazása a geometriai objektumok elméletében. I*, Mat. Lapok 10 (1959), 172.

[3] *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. VII*, Acta math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959), 251-268.

[4] *Ein allgemeines Prinzip bezüglich Komitanten, Differentialkomitanten, kovarianten Ableitungen und Algebren von äquivalenten geometrischen Objekten*, Acta Univ. Debrecen 6 (1959).

A. Balogh

[1] *Egydimenziós egykomponensű első- és másodosztályú geometriai objektumok lineáris tört transzformációs képletének meghatározása*, Mat. lapok 10 (1955), 172.

[2] *On determination of geometric objects with special transformation formulae*, Mathematica Cluj 1 (24) (1959), 199-219.

O. E. Gheorghiu

[1] *Über die Theorie der speziellen geometrischen Objekten mit zwei Komponenten* (Russ.), Revue de math. pures et appl. 4 (1959), 77-93.

[2] *Asupra obiectelor geometrice asociate unui sistem liniar de ecuaţii cu derivate parţiali de ordinul I*, Stu. cerc. mat. Acad. RP Rom. In. Mat. 10 (1959), 145-158.

S. Gołąb

[1] *Sur l'équation fonctionnelle $f(X)\cdot f(Y) = f(X\cdot Y)$*, Annales Pol. Math. 6 (1959), 1-13.

[2] *Differentialkomitanten und Liesche Ableitungen*, Mat. lapok 10 (1959), 174.

S. Gołąb, A. Schinzel

Sur l'équation fonctionnelle $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 113-125.

M. Hosszú

[1] *A remark on scalar valued multiplicative functions of matrices*, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 288-289.

[2] *A mátrix-számitás alkalmazása a geometriai objektumok elméletében. II*, Mat. lapok 10 (1959), 172.

[3] *Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében. I*, M. Tud. Akad. III. Osztály közleményei 9 (1959), 149-162.

[4] *Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében. II*, M. Tud. Akad. III. Osztály közleményei 9 (1959), 237-254.

[5] *Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében. III*, M. Tud. Akad. III. Osztály közleményei 9 (1959), 333-346.

M. Kucharzewski

Über die Funktionalgleichung $f(a^i_k)\cdot f(b^i_k) = f(b^i_\alpha a^\alpha_k)$, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 181-198.

M. Kuczma

[1] *On linear differential geometric objects of the first class with one component*, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 72-78.

[2] *Bemerkung zur Arbeit von M. Kucharzewski*, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 199-203.

A. Moór

Über Tensoren, die aus gegebenen geometrischen Objekten gebildet sind, Publicationes math. Debrecen 6 (1959), 15-25.

A. M. Vasilev, A. P. Norden, S. P. Finikov

Differentialgeometrie (Russ.), Mathematik in der USSR während 40 Jahren. Moskau 1959, 899-924.

1960

J. Aczél

[1] *Verallgemeinerte Addition von Dichten*, Publicationes math. Debrecen 7 (1960).

[2] *Néhány ujabb eredmény a függvényegyenletek elméletében*, Acta Univ. Debrecen 7 (1960).

S. Gołąb, M. Kucharzewski

Ein Beitrag zur Komitantentheorie, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 173-174.

C. Jankiewicz

La dérivée de Lie du comitant géométrique, Annales Pol. Math. 7 (1960), 193-199.

M. Kucharzewski

[1] *Über die skalaren Komitanten der Vektorfelder,* Annales Pol. Math.
[2] *Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder,* Annales Pol. Math.

M. Kucharzewski, M. Kuczma

[1] *On linear differential geometric objects with one component,* Tensor.
[2] *On linear differential geometric objects with one component. II,* Tensor.

I. Makai

Über Invariante, die aus gewissen Tensoren gebildet sind, Publicationes math. Debrecen 7 (1960).

A. Moór

[1] *Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung,* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 175-186.
[2] *Untersuchungen über die kovariante Ableitung in Linienelementenräumen,* Publicationes math. Debrecen 7 (1960).

1961

S. Gołąb

Sur les comitants différentiels des champs vectoriels, Rozprawy Matemat.

NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS