So wird aus (23) und aus (5)

$$\Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}[\Gamma\Theta(\Omega) + (1-\Gamma)\Theta(\Pi)]\,. \tag{25}$$

Wenn wir (20), (22) und (25) zusammenfassen, haben wir den folgenden

SATZ. *Sind $\Psi(\Omega, \Pi)$ und $\Phi(\Omega; u)$ zweimal stetig derivierbar, ist $\partial_1\Psi(\Omega, \Omega) \neq 0$, $\partial_2\Psi(\Omega, \Omega) \neq 0$ und bildet die durch* (4) *definierte Funktion die Menge der Ω-Werte auf sich ab, gibt es ferner ein Parameter-p-Tuppel e, für das*

$$\Phi(\Omega; e) \equiv \Omega\,, \qquad \partial_1\Phi(\Omega; e) \neq 0$$

gilt, so hat die Funktionalgleichung (1) *die folgenden Lösungen und nur diese:*

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[\Theta(\Omega) + B(u)]\,, \quad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}; \tag{26}$$

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[B(u) - \Theta(\Omega)]\,, \quad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}, \tag{27}$$

$$\Gamma(-\Omega) = -\Gamma(\Omega);$$

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Omega) + B(u)]\,, \tag{28}$$

$$\Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}[\Gamma\Theta(\Omega) + (1-\Gamma)\Theta(\Pi)] \qquad (\Gamma \text{ konstant})\,,$$

wo die Funktionen A, B, Γ, Θ zweimal stetig differenzierbar sind. Θ ist auch streng monoton. Unter diesen Voraussetzungen sind also (26), (27), (28), *und nur diese, die Transformationsformeln und Operationen der speziellen geometrischen Objekten mit einer Komponenten, die eine Algebra im engeren Sinne zulassen (alle äquivalent mit linearen Objekten).*

(Vgl. M. Hosszú 1957, 1959 [5]. Der Fall der nicht-differentiellen Objekte wurde von H. Pidek 1951, 1954 [1], [2] erledigt). Die Betrachtungen des § 1 können auch auf Objekte mit mehreren Komponenten und auch auf den Fall übertragen werden, wo $\Phi, \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}$ nicht mehr identisch sind, die der §§ 2-3 auch für den Fall von Objekten mit einer Komponenten und $\overset{1}{\Phi} \equiv \overset{2}{\Phi} \not\equiv \Phi$. Weitere Verallgemeinerungen sind uns nicht bekannt.

IV. KOVARIANTE ABLEITUNG

1. Definition

Es sei ein Feld von geometrischen Objekten r-ter Klasse $\Omega_l(\xi)$ gegeben. Wie in I § 5 bemerkt wurde, ist eine Differentialkomitante s-ter Klasse I (27) nicht immer ein geometrisches Objekt. Manchmal ist es aber möglich durch Hinzunahme eines Hilfsobjektenfeldes Π_c von $(r+s)$-ter Klasse, d. h. durch Erhöhung der Komponentenzahl von Ω_l eine *geometrische* Differentialkomitante

$$\mathrm{D}_p\Omega_l = \Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l, \ldots, \partial_{j_1,\ldots,j_s}\Omega_l; \Pi_c) \tag{1}$$

zu gewinnen. Natürlich ist die Dimensionszahl bei Π_c und damit bei $\mathrm{D}_p\Omega_l$ dieselbe wie bei Ω_l.

Falls $\mathrm{D}_p\Omega_l$ von derselben Klasse ist wie Ω_l, so nennen wir sie eine *kovariante Ableitung* s-ter Ordnung. Im Bezugssystem $(\varkappa)$ hat diese Ableitung die Gestalt

$$\overline{\mathrm{D}_\pi\Omega_\lambda} = \Psi_\pi(\bar\Omega_\lambda, \partial_\iota\bar\Omega_\lambda, \ldots, \partial_{\iota_1,\ldots,\iota_s}; \bar\Omega_\lambda; \bar\Pi_\gamma)\,. \tag{2}$$

Die Theorie der kovarianten Ableitung beschäftigt sich mit der Frage, welche Objektenfelder kovariante Ableitungen zulassen und mit der Bestimmung dieser kovarianten Ableitungen.

Die Ableitungen der Skalarfelder und der Biskalarfelder bezüglich der Koordinaten bilden ohne Hinzunahme von Hilfsobjektenfeldern schon selbst geometrische Objekte. Im folgenden werden wir uns daher mit kovarianten Ableitungen erster Ordnung von verwickelteren Objekten beschäftigen.

Laut unseres Prinzips in I § 5 *ist die mit $\mathrm{D}_p\Omega_l$ äquivalente kovariante Ableitung erster Ordnung eines mit Π_c äquivalenten Hilfsobjektes durch die Formel*

$$\mathrm{D}_q\Sigma_k = \tilde\Psi_q(\Sigma_k, \partial_j\Sigma_k; \Xi_t) = \Lambda_q\{\Psi_p[T_l(\Sigma_k), \partial^i T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_i; F_c(\Xi_t)]\} \tag{3}$$

angegeben, wo

$$\Omega_l = T_l(\Sigma_k)\,, \qquad \Pi_c = F_c(\Xi_t)\,, \qquad \mathrm{D}_q\Sigma_k = \Lambda_q(\mathrm{D}_p\Omega_l)$$

sind.

2. Typus (1, 1, 1) und Typus (1, 1, 2)

§ 1. Typus (1, 1, 1). (S. Gołąb 1954 [1], J. Aczél 1957 [2], 1958 [2]). Hier befassen wir uns mit den kovarianten Ableitungen *erster Ordnung* der (differentialgeometrischen) Objektenfelder vom Typus (1, 1, 1). Wie wir in II. 4 gesehen haben, sind die Objekte von diesem Typus entweder mit einer gewöhnlichen Dichte von der Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \Omega\alpha_1 \quad (\alpha_1 \neq 0,\ \Omega \neq 0) \tag{1}$$

oder mit einer Weylschen Dichte von der Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \Omega|\alpha_1| \quad (\alpha_1 \neq 0,\ \Omega \neq 0) \tag{2}$$

äquivalent. Es genügt also die kovarianten Ableitungen dieser Objekte zu bestimmen. Da von Objektenfeldern die Rede ist, hängen Ω und α_1 vom Punkte p ab. *Wir setzen hier und im folgenden voraus, daß die Transformationsformel der Objekte eines Feldes in jedem Punkte dieselbe ist.* Als Parameter bezüglich welchen wir derivieren, wählen wir speziell die Koordinate ξ des eindimensionalen Raumes. (S. Gołąb 1954 [1] hat auch den Fall eines allgemeinen Parameters im eindimensionalen Raum untersucht.) Wir schreiben aber kurz Ω statt $\Omega(\xi)$, α_1 statt $\alpha_1(\xi)$ usw. Von der Formel (11) in diesem § und von der Formel (23) im § 2 ab gehen wir ohnehin auf Betrachtungen in einem fixen Punkte über.

Die Ableitung von Ω bezüglich ξ sei mit

$$\Omega' \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d\Omega}{d\xi}$$

die von $\bar{\Omega}$ bezüglich $\bar{\xi}$ mit

$$\bar{\Omega}' \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{\xi}}$$

bezeichnet. Die Formeln 1 (1) und 1 (2) lauten also hier

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega';\ \Pi)\,, \tag{3}$$

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \Psi(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}';\ \bar{\Pi})\,. \tag{4}$$

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß auch Π und $\mathrm{D}\Omega$ Objekte von einer Komponenten sind.

Offenbar gilt

$$\frac{d\alpha_1}{d\xi} = \alpha_2 \tag{5}$$

und so wird für (1) bzw. (2)

$$\bar{\Omega}' = \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{\xi}} = \frac{d\bar{\Omega}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}\,, \tag{6}$$

bzw.

$$\bar{\Omega}' = \frac{d\bar{\Omega}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}\,\mathrm{sg}\,\alpha_1 \tag{7}$$

sein. Endlich sei Π ein Objektenfeld vom Typus (1, 1, 2), wo die Werte der Objekte je ein Intervall ausfüllen, sie sind also laut II. 3 mit dem Objekte des affinen Zusammenhanges äquivalent, die der Transformationsformel

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \tag{8}$$

gehorcht.

Laut der Definition der kovarianten Ableitung in dem Abschnitte 1 soll $\mathrm{D}\Omega$ auch selbst ein Objekt erster Klasse sein, also genügt es vorauszusetzen, daß sie eine der Transformationsformeln

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \mathrm{D}\Omega\alpha_1\,, \tag{9}$$

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \mathrm{D}\Omega|\alpha_1| \tag{10}$$

besitzt. Von nun an fixieren wir den Punkt $p = p_0$.

So müssen wir vier Fälle unterscheiden:

(1.a) Ω und $\mathrm{D}\Omega$ sind beide gewöhnliche Dichten (Formeln (1), (9)),

(1.b) Ω ist eine gewöhnliche, $\mathrm{D}\Omega$ eine Weylsche Dichte (Formeln (1), (10)),

(2.a) Ω ist eine Weylsche, $\mathrm{D}\Omega$ eine gewöhnliche Dichte (Formeln (2), (9)),

(2.b) Ω und $\mathrm{D}\Omega$ sind beide Weylsche Dichten (Formeln (2), (10)).

Im Falle (1.a) setzen wir (1), (6), (8), (9) und (3) in (4) ein und erhalten die Funktionalgleichung

$$\alpha_1\Psi(\Omega, \Omega';\ \Pi) = \Psi\left(\Omega\alpha_1, \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1};\ \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right). \tag{11}$$

Durch die Lösung dieser Funktionalgleichung bestimmen wir Ψ, d. h. die Gestalt der kovarianten Ableitung. Dies erfolgt einfach durch die Substitutionen

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Omega}\,, \quad \alpha_2 = -\frac{\Pi}{\Omega} = -\alpha_1\Pi\,,$$

die die erste und dritte Veränderlichen der rechten Seite von (11) zu Konstanten machen, womit wir schon

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega X(\Omega' - \Omega\Pi) \tag{12}$$

erhalten, wo

$$X(\sigma) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi(1, \sigma; 0)$$

geschrieben wurde. (12) mit beliebigem X erfüllt die Gleichung (11) tatsächlich:

$$\Omega\alpha_1 X(\Omega' - \Omega\Pi) = \Omega\alpha_1 X\left[\frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1} - \Omega\alpha_1\left(\frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right].$$

Ebenso wird im Falle (1.b) die Funktionalgleichung

$$\Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)|\alpha_1| = \Psi\left(\Omega\alpha_1, \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}; \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) \tag{13}$$

und die Lösung

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = |\Omega| X(\Omega' - \Omega\Pi) \tag{14}$$

sein.

Es bleiben noch die Fälle (2.a), (2.b) übrig. Wir behandeln z. B. (2.b) eingehend. Hier setzt man (2), (7), (8), (10) und (3) in (4) ein und erhält

$$\Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)|\alpha_1| = \Psi\left(\Omega|\alpha_1|, \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{sg}\alpha_1; \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right). \tag{15}$$

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung substituieren wir in sie wieder

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Omega}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\Pi}{\Omega} = -\alpha_1\Pi$$

und erhalten mit der Bezeichnung

$$X_{\pm 1}(\sigma) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi(\pm 1, \pm\sigma; 0)$$

die Funktion

$$\Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = |\Omega| X_{\operatorname{sg}\Omega}(\Omega' - \Omega\Pi)$$

als mögliche Lösung. Wenn wir aber dies in (15) zurücksetzen, sehen wir, daß

$$|\Omega|\cdot|\alpha_1| X_{\operatorname{sg}\Omega}(\Omega' - \Omega\Pi) = |\Omega|\cdot|\alpha_1| X_{\operatorname{sg}\Omega}\left[\frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{sg}\alpha_1 - \Omega|\alpha_1|\left(\frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]$$

nur für $\alpha_1 > 0$ eine Identität ist, für $\alpha_1 < 0$ dagegen dann und nur dann erfüllt wird, falls

$$X_{\pm 1}(\sigma) = X_{\pm 1}(-\sigma) = X_{\pm 1}(|\sigma|)$$

gerade Funktionen sind. Die allgemeine Lösung von (15) lautet also

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = |\Omega| X_{\operatorname{sg}\Omega}(|\Omega' - \Omega\Pi|)\,. \tag{16}$$

Ebenso haben wir im Falle (2.a) die Funktionalgleichung

$$\Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)\alpha_1 = \Psi\left(\Omega|\alpha_1|, \frac{\Omega'\alpha_1 + \Omega\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{sg}\alpha_1; \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) \tag{17}$$

und die Lösung

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega X_{\operatorname{sg}\Omega}(|\Omega' - \Omega\Pi|)\operatorname{sg}(\Omega' - \Omega\Pi)\,. \tag{18}$$

Nirgends wurde irgendeine Regularitätsannahme über Ψ getroffen. Unsere Ergebnisse fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 1. *Die allgemeine Lösungen der Funktionalgleichungen* (11), (13), (15), (17) *sind der Reihe nach die Funktionen* (12), (14), (16), (18).

Für die gewöhnlichen Dichten sind die allgemeinen kovarianten Ableitungen von der Gestalt (12) *oder* (14). *Für die Weylschen Dichten sind* (16) *und* (18) *die allgemeinen kovarianten Ableitungen. In diesen Formeln ist die kovariante Ableitung auch selbst als eine gewöhnliche oder Weylsche Dichte und Π als ein Hilfsobjektenfeld mit der Transformationsformel* (8) *vorausgesetzt. Die allgemeinsten, mit diesen äquivalenten kovarianten Ableitungen von Objekten Σ die mit $\Omega = \vartheta(\Sigma)$ äquivalent sind, werden unter Benutzung von mit $\Pi = \varphi(\Xi)$ äquivalenten Hilfsobjekten Ξ durch die Formel*

$$\mathrm{D}\Sigma = \tilde{\Psi}(\Sigma, \Sigma'; \Xi) = \Lambda\{\Psi[\vartheta(\Sigma), \vartheta'(\Sigma)\Sigma'; \varphi(\Xi)]\}$$

angegeben, wo Λ eine beliebige eindeutig umkehrbare Funktion ist.

§ 2. Typus (1, 1, 2). (S. Gołąb 1954 [2], J. Aczél 1957 [2], 1958 [2]). Wie in II. 3 bewiesen wurde, sind die auf einem Intervall definierten Objekte des Typus (1, 1, 2) mit dem Objekte des affinen Zusammenhanges von der Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \tag{19}$$

äquivalent. Es genügt also die kovariante Ableitung dieses Objektes zu bestimmen. Da seine kovariante Ableitung laut Definition von demselben Typus ist, kann vorausgesetzt werden, daß sie auch eine Transformationsformel von der Gestalt

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \frac{\mathrm{D}\Omega}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \tag{20}$$

hat. Das Hilfsobjekt soll laut Definition vom Typus $(1, 1, 3)$ sein und der Transformationsformel

$$\overline{\Pi} = \frac{\Pi}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3} \tag{21}$$

gehorchen.

Außer (5) gilt offenbar auch

$$d\alpha_2/d\xi = \alpha_3\,,$$

deshalb wird

$$\overline{\Omega}' = \frac{d\overline{\Omega}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\overline{\xi}} = \frac{\Omega' a_1^2 - \Omega a_1 a_2 + a_1 a_3 - 2a_2^2}{a_1^4}. \tag{22}$$

Wir setzen (19), (20), (21), (22) und (3) in (4) ein, fixieren den Punkt $p = p_0$ und erhalten

$$\frac{\Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2} = \Psi\left(\frac{\Omega}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2}, \frac{\Omega' a_1^2 - \Omega a_1 a_2 + a_1 a_3 - 2a_2^2}{a_1^4}; \frac{\Pi}{a_1^2} - \frac{3}{2}\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right). \tag{23}$$

Auch diese Funktionalgleichung läßt sich leicht behandeln. Wir wählen

$$a_2 = -a_1\Omega\,, \qquad a_3 = \frac{3}{2}\frac{a_2^2}{a_1} - a_1\Pi = a_1\left(\frac{3}{2}\Omega^2 - \Pi\right),$$

führen ferner die Bezeichnung

$$X(\sigma) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi(0, \sigma; 0)$$

ein und gelangen zu

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega + a_1 X\left(\frac{\Omega' + \frac{1}{2}\Omega^2 - \Pi}{a_1^2}\right). \tag{24}$$

Hier ist aber auf der rechten Seite die links nicht figurierende Veränderliche $a_1 \neq 0$ ganz beliebig. Nehmen wir $a_1 = 1$, so wird aus (24)

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega + X(\Omega' + \tfrac{1}{2}\Omega^2 - \Pi)\,. \tag{25}$$

Wenn wir (24) mit (25) vergleichen, sehen wir, daß die Funktion X der Funktionalgleichung

$$a_1 X\left(\frac{\sigma}{a_1^2}\right) = X(\sigma) \tag{26}$$

Genüge leisten muß. Dies wird falls *beliebige* $a_1 \neq 0$ zugelassen werden, nur durch *verschwindende* X erfüllt, da mit $a_1 = -1$

$$X(\sigma) = -X(\sigma) = 0$$

wird. Deshalb existiert in diesem allgemeinen Fall nur die *triviale* kovariante Ableitung

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega\,, \tag{27}$$

die die Derivierte Ω' gar nicht enthält.

Für das Untergruppoid der Koordinatentransformationen mit $a_1 > 0$ folgt aus (26) durch Einsetzen von

$$a_1 = \sqrt{|\sigma|}$$

die Lösung

$$X(\sigma) = \sqrt{|\sigma|}\,X(\pm 1) = \Gamma_\pm\sqrt{|\sigma|}\,,$$

wo Γ_+ und Γ_- zwei Konstanten sind von denen bei $\sigma > 0$ die erstere, bei $\sigma < 0$ die letztere zu nehmen ist. So erhalten wir die kovariante Ableitung

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \Omega + \Gamma_\pm\sqrt{|\Omega' + \tfrac{1}{2}\Omega^2 - \Pi|}\,. \tag{28}$$

Für das Untergruppoid der unimodularen Koordinatentransformationen $(a_1 = 1)$ ergibt endlich die Formel (25) die allgemeinen kovarianten Ableitungen. So haben wir den

Satz 2. *Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung* (23) *ist* (27) *falls beliebige* $a_1 \neq 0$ *zugelassen werden,* (28) *falls nur positive* a_1 *zugelassen werden und* (25) *falls das Bestehen der Funktionalgleichung* (23) *nur für* $a_1 = 1$ *gefordert wird.*

Das Objektenfeld vom Typus $(1, 1, 2)$ *mit der Transformationsformel* (19) *und auch die damit äquivalenten Objekte lassen bei dem allgemeinen Koordinatentransformationsgruppoid keine nicht-triviale kovariante Ableitung zu. Bei den Untergruppoiden mit* $a_1 > 0$ *bzw. mit* $a_1 = 1$ *sind* (28) *bzw.* (25) *die allgemeinen kovarianten Ableitungen, die dieselbe Transformationsformel haben wie* Ω. *In diesen Formeln ist* Π *als ein Hilfsobjektenfeld mit der Transformationsformel* (21) *vorausgesetzt. Die allgemeinsten mit diesen äquivalenten kovarianten Ableitungen von mit* $\Omega = \vartheta(\Sigma)$ *äquivalenten Objekten* Σ *werden unter Benutzung von mit* $\Pi = \varphi(\Xi)$ *äquivalenten Hilfsobjekten* Ξ *bei diesen Untergruppoiden wieder durch die Formel*

$$\mathrm{D}\Sigma = \widetilde{\Psi}(\Sigma, \Sigma'; \Xi) = \Lambda\{\Psi[\vartheta(\Sigma), \vartheta'(\Sigma)\,\Sigma'; \varphi(\Xi)]\}$$

angegeben.

Auch hier brauchten wir keine Regularitätsannahmen bezüglich Ψ. Den Fall, wo das Hilfsobjekt mehr als eine Komponente hat, werden wir in dem Abschnitte 3 untersuchen.

Wir haben in diesem Paragraphen ebenso wie in dem vorigen überall nur solche Objekte *zweiter und dritter Klasse* in Betracht genommen, deren Werte *in einem einzigen Intervall* liegen, also die Objekte mit den zusammengesetzten Transformationsformeln II. 3 (18) und II. 3 (29) beiseite gelassen.

3. Typus $(m, 1, 1)$ und Typus $(m, 1, 2)$

§ 1. Typus $(m, 1, 1)$. (Für diesen Paragraphen und für § 2 vgl. J. Aczél 1957 [2], 1958 [2], 1959 [3].) Bei der Untersuchung der kovarianten Ableitungen von Objekten mit mehreren Komponenten im eindimensionalen Raume *setzen wir voraus, daß die Objekte in den in* II. 6 *erhaltenen Gestalten darstellbar sind.* Wir verwenden auch die dort eingeführten Bezeichnungen, insbesondere z. B.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_{m-1} \\ \Omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_{m-1} \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Omega} \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

und auch die der direkten Summen und Produkte:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_m \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_m \end{bmatrix} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} \Omega_1 \pm \Pi_1 \\ \vdots \\ \Omega_m \pm \Pi_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_m \end{bmatrix} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} \Omega_1 \Pi_1 \\ \vdots \\ \Omega_m \Pi_m \end{bmatrix}.$$

Auch wird uns manchmal die Schreibweise

$$(2) \qquad (\gamma)_q \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma \end{bmatrix}$$

nützlich sein, wo auf der rechten Seite q mit einander übereinstimmende Zeilen stehen. Ähnlich schreiben wir die Ableitungen der Objekten:

$$(3) \qquad \Omega' = \Omega'(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d\Omega}{d\xi} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{d\Omega_1}{d\xi} \\ \vdots \\ \dfrac{d\Omega_m}{d\xi} \end{bmatrix}, \qquad \bar{\Omega}' = \bar{\Omega}'(\bar{\xi}) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \dfrac{d\bar{\Omega}_1}{d\bar{\xi}} \\ \vdots \\ \dfrac{d\bar{\Omega}_m}{d\bar{\xi}} \end{bmatrix},$$

während die Matrix

$$L'(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\| \frac{\partial L_j}{\partial \bar{\Omega}_i} \right\| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

die Ableitung der Funktion $L(\Omega)$ ist, wo die Veränderliche und der Funktionswert von $L(\Omega)$ beide m Komponenten haben. Matrizen, die multipliziert werden sollen, werden im Gegensatz zum direkten Produkt (1) ohne Operationszeichen neben einander geschrieben. Man sieht leicht, daß für die Ableitung der Funktionen $L(\Omega)$ und $\Omega(\xi)$ von mehreren Komponenten ähnliche Regeln wie für gewöhnliche Funktionen gelten (Ableitungen der Summen, Produkte, zusammengesetzter und inverser Funktionen, usw.). Z. B. gilt

$$(4) \qquad [\Omega(\xi) \cdot U(\xi) + V(\xi)]' = \Omega'(\xi) \cdot U(\xi) + \Omega(\xi) \cdot U'(\xi) + V'(\xi).$$

Wie in dem Abschnitte 2 setzen wir auch hier und im folgenden voraus, daß die Transformationsformeln der Objekte in jedem Punkte dieselbe sind und wir schreiben auch hier die Abhängigkeit von ξ meistens nicht hin. Es wird vorausgesetzt, daß das Objekt, Hilfsobjekt und die kovariante Ableitung von derselben Komponentenzahl seien. So haben in der Formel 1 (1) die Objekte $\Omega, \partial\Omega = \Omega', \mathrm{D}\Omega, \Pi$ der Reihe nach m, m, m_1, m_2 Komponenten. Im Falle der kovarianten Ableitungen erster Ordnung von eindimensionalen differentialgeometrischen Objekten erster Klasse kann man sich, wie wir in dem Abschnitte 1 (vgl. I § 5) bewiesen haben, auf den Fall beschränken, wo die bezüglichen Transformationsformeln die folgenden sind (vgl. (1), (2), (3), (4) und II. 6 (8), II. 6 (10)):

$$(5) \qquad \bar{\Omega} = \Omega \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m-1} \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad (\alpha_1 \neq 0,\ \omega_1 \neq 0),$$

$$\bar{\Omega}' = \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{\xi}} = \frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} \cdot \left(\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}\right)_m = \left(\Omega' \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m-1} \\ \alpha_1 \end{bmatrix} + \Omega \cdot \begin{bmatrix} (0)_{m-1} \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\right) \cdot (\alpha_1^{-1})_m,$$

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \mathrm{D}\Omega \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m_1-1} \\ \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$(6) \qquad \bar{\Pi} = \Pi \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m_2-2} \\ \alpha_1 \\ \alpha_1^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0)_{m_2-1} \\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \end{bmatrix} \qquad (\alpha_1 \neq 0).$$

Von nun an halten wir den Punkt $p = p_0$ fest. Die Formeln 1 (1) und 1 (2), die hier

$$\mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega';\ \Pi), \qquad \overline{\mathrm{D}\Omega} = \Psi(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}';\ \bar{\Pi})$$

besagen, gehen somit in

$$(7) \qquad \Psi(\Omega, \Omega';\ \Pi) \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m_1-1} \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \Psi\left(\Omega \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m-1} \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \Omega' \cdot \begin{bmatrix} (\alpha_1^{-1})_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \Omega \cdot \begin{bmatrix} (0)_{m-1} \\ \alpha_1^{-1}\alpha_2 \end{bmatrix};\ \Pi \cdot \begin{bmatrix} (1)_{m_2-2} \\ \alpha_1 \\ \alpha_1^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0)_{m_2-1} \\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \end{bmatrix}\right)$$

über. Unsere Aufgabe besteht also darin, diese Funktionalgleichung bezüglich Ψ zu lösen.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega_1}, \qquad \alpha_2 = -\alpha_1\pi_2 = -\frac{\pi_2}{\omega_1}$$

und führen die Bezeichnung

$$X(\overset{0}{\Omega}, S, \overset{0}{\Pi}, \pi_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Omega}\\ 1\end{bmatrix}, S; \begin{bmatrix}\overset{0}{\Pi}\\ \pi_1\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

ein. So erhalten wir gleich das Ergebnis

$$(8)\quad \mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \begin{bmatrix}(1)_{m_1-1}\\ \omega_1\end{bmatrix}\cdot X\left(\overset{0}{\Omega}, \Omega'\cdot\begin{bmatrix}(\omega_1)_{m-1}\\ 1\end{bmatrix} + \Omega\cdot\begin{bmatrix}(0)_{m-1}\\ -\pi_2\end{bmatrix}, \overset{0}{\Pi}, \frac{\pi_1}{\omega_1}\right).$$

Das Einsetzen zeigt, daß (8) die Gleichung (7) tatsächlich erfüllt. Wenn wir auch die Fälle $m_2 \leqslant 2$, $m_1 = 1$, $m = 1$ beachten, haben wir den

Satz 1. (8) *ist die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung* (7).

Für die eindimensionalen Objekte erster Klasse mit der Transformationsformel (5) *ist* (8) *die allgemeine Gestalt der kovarianten Ableitung mit derselben Transformationsformel, falls Π ein Hilfsobjekt zweiter Klasse mit der Transformationsformel* (6) *ist.*

Ist Ω von einer Komponenten, so fehlen $\overset{0}{\Omega}$, $(\omega_1)_{m-1}$ und $(0)_{m-1}$, ist $\mathrm{D}\Omega$ von einer Komponenten, so fehlt $(1)_{m_1-1}$ und ist Π von zwei bzw. von einer Komponenten, so fehlen $\overset{0}{\Pi}$ bzw. $\overset{0}{\Pi}$ und π_1/ω_1 in der Formel (8).

Auch hier brauchten wir gar keine Regularitätsannahmen bezüglich Ψ.

Man sieht gleich, daß bei $m_2 = m_1 = m = 1$ die Formel (8) in 2 (12) übergeht.

§ 2. Typus $(m, 1, 2)$. In 2 § 2 haben wir gezeigt, daß Objekte des Typus $(1, 1, 2)$ von der Transformationsformel 2 (19) mit Hilfsobjekten des Typus $(1, 1, 3)$ von der Transformationsformel 2 (21) *keine* nichttrivialen kovarianten Ableitungen unter dem allgemeinen Koordinatentransformationsgruppoid besitzen. In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, daß *dies im Falle von mehreren Komponenten nicht mehr so ist.*

Vorerst setzen wir voraus, daß die Komponentenzahl m von Ω *größer als* 1 ist (während die Komponentenzahlen m_1, m_2 von $\mathrm{D}\Omega$ bzw. von Π auch gleich 1 sein können). Wie am Anfang des § 1 gilt hier

$$(9)\qquad \bar{\Omega} = \Omega\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m-2}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m-1}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{bmatrix} \quad \left(\alpha_1 \neq 0,\ \omega_1 \neq 0,\ \Omega = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Omega}\\ \omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\right),$$

$$\bar{\Omega}' = \Omega'\cdot\begin{bmatrix}(\alpha_1^{-1})_{m-2}\\ 1\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix} + \Omega\cdot\begin{bmatrix}(0)_{m-2}\\ \alpha_1^{-1}\alpha_2\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m-1}\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{bmatrix};$$

$$\overline{\mathrm{D}\Omega} = \mathrm{D}\Omega\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{bmatrix},$$

$$(10)\qquad \bar{\Pi} = \Pi\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_2-3}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m_2-2}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3} - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{bmatrix} \quad \left(\pi_1 \neq 0,\ \Pi = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Pi}\\ \pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{bmatrix}\right),$$

$$(11)\qquad \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{bmatrix}$$

$$= \Psi\left(\Omega\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m-2}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m-1}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{bmatrix}, \Omega'\cdot\begin{bmatrix}(\alpha_1^{-1})_{m-2}\\ 1\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix} + \Omega\cdot\begin{bmatrix}(0)_{m-2}\\ \alpha_1^{-1}\alpha_2\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix}(0)_{m-1}\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{bmatrix}; \Pi\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_2-3}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m_2-2}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3} - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{bmatrix}\right).$$

Um die Funktionalgleichung (11) zu lösen, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega_1}, \qquad \alpha_2 = -\alpha_1\omega_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad \alpha_3 = \alpha_1\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \pi_3\right) = \frac{\frac{3}{2}\omega_2^2 - \pi_3}{\omega_1}.$$

Hier haben wir die Voraussetzung $m \geqslant 2$ ausgenützt, denn sonst würde ω_1 nicht mehr auftreten. Mit der Bezeichnung

$$X(\overset{0}{\Omega}, S, \overset{0}{\Pi}, \pi_1, \pi_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Omega}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, S; \begin{bmatrix}\overset{0}{\Pi}\\ \pi_1\\ \pi_2\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

ergibt sich schon die Lösung

$$(12)\qquad \mathrm{D}\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \omega_2\end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \omega_1\\ \omega_1^{-1}\end{bmatrix}\cdot X\left(\overset{0}{\Omega}, \Omega'\cdot\begin{bmatrix}(\omega_1)_{m-2}\\ 1\\ \omega_1^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m-2}\\ -\omega_1\omega_2\\ \omega_1^2(\frac{1}{2}\omega_2^2 - \pi_3)\end{bmatrix}, \overset{0}{\Pi}, \frac{\pi_1}{\omega_1}, \omega_1(\pi_2 - \omega_2)\right).$$

(12) erfüllt die Gleichung (11). Wenn wir auch die Fälle $m = 2$; $m_1 = 1, 2$; $m_2 = 1, 2, 3$ beachten, haben wir den

SATZ 2. (12) *ist die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung* (11) *für* $m \geqslant 2$.

Für die eindimensionalen Objekte zweiter Klasse von m *Komponenten* ($m \geqslant 2$) *mit der Transformationsformel* (9) *ist* (12) *die allgemeine kovariante Ableitung von* m_1 *Komponenten, wo* Π *ein Hilfsobjekt zweiter Klasse von* m_2 *Komponenten mit der Transformationsformel* (10) *ist.*

Bei $m=2$ *fehlen* $\overset{0}{\Omega}$, $(\omega_1)_{m-2}$ *und* $(0)_{m-2}$; *bei* $m_1=2$ *fehlt* $(1)_{m_1-2}$, *bei* $m_1=1$ *fehlen* $(0)_{m_1-1}$ *und* $\begin{pmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \omega_1\end{pmatrix}$; *bei* $m_2 = 3$ *fehlt* $\overset{0}{\Pi}$, *bei* $m_2 = 2$ *fehlt auch* π_1/ω_1 *und bei* $m_2 = 1$ *fehlt auch* $\omega_1(\pi_2 - \omega_2)$ *in* (12).

Es würde auch keine Schwierigkeit bereiten, bei $m_2 = 2$ auch das Pensovsche Objekt von zwei Komponenten (II. 6 § 3) als Hilfsobjekt in Acht zu nehmen.

Dagegen bietet der Fall $m = 1$ eine neue Aufgabe. Ist auch $m_2 = 1$, so sieht man, wie in dem Abschnitte 2 Satz 2, gleich, daß es *auch hier keine nicht-triviale kovariante Ableitung gibt.* So bleibt uns noch der Fall $m = 1$, $m_2 \geqslant 2$ zur Untersuchung übrig.

Wir setzen zuerst $m = 1$, $m_2 > 2$ voraus. Aus der Funktionalgleichung (11) wird dann

$$(13)\qquad \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi)\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{bmatrix}$$

$$= \Psi\left(\frac{\Omega}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \Omega'\alpha_1^{-2} - \Omega\alpha_1^{-3}\alpha_2 + \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2;\ \Pi\cdot\begin{bmatrix}(1)_{m_2-3}\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix}(0)_{m_2-2}\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{bmatrix}\right).$$

Um diese zu lösen, setzen wir

$$(14)\qquad \alpha_1 = \frac{1}{\pi_1}, \qquad \alpha_2 = -\alpha_1\Omega = -\frac{\Omega}{\pi_1}, \qquad \alpha_3 = \alpha_1\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \pi_3\right) = \frac{\frac{3}{2}\Omega^2 - \pi_3}{\pi_1}$$

ein, was wegen $m_2 \geqslant 3$ möglich ist und verwenden die Bezeichnung

$$(15)\qquad X(\sigma, \overset{0}{\Pi}, \pi_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi\left(0, \sigma; \begin{bmatrix}\overset{0}{\Pi}\\ 1\\ \pi_2\\ 0\end{bmatrix}\right).$$

So gelangen wir zur Lösung

$$(16)\qquad D\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \Omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \pi_1\\ \pi_1^{-1}\end{bmatrix}\cdot X\left(\pi_1^2(\Omega' + \tfrac{1}{2}\Omega^2 - \pi_3), \overset{0}{\Pi}, \pi_1(\pi_2 - \Omega)\right),$$

die (13) bei $m_2 > 2$ tatsächlich erfüllt.

Ist $m = 1$, $m_2 = 2$, so schreiben wir statt (14) und (15)

$$\alpha_1 = \pi_2 - \Omega, \qquad \alpha_2 = -\alpha_1\Omega = -(\pi_2 - \Omega)\Omega,$$

$$\alpha_3 = \alpha_1\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \pi_3\right) = (\pi_2 - \Omega)(\tfrac{3}{2}\Omega^2 - \pi_3)$$

und

$$X(\sigma) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi\left(0, \sigma; \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right),$$

falls $\pi_2 \neq \Omega$ ist, und erhalten in diesem Falle die Lösung

$$(17)\qquad D\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \Omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ (\pi_2 - \Omega)^{-1}\\ \pi_2 - \Omega\end{bmatrix}\cdot X\left(\frac{\Omega' + \frac{1}{2}\Omega^2 - \pi_3}{(\pi_2 - \Omega)^2}\right) \qquad (\pi_2 \neq \Omega),$$

die (13) wieder erfüllt. Da π_2 und Ω in gleicher Weise transformiert werden, sind sie entweder nie oder immer gleich. Gilt $\pi_2 = \Omega$, so ergibt sich ganz wie in 2 § 2

$$\overset{0}{X}(\sigma) = \begin{cases}\overset{0}{\Gamma}_+ & \text{für} \quad \sigma > 0,\\ \overset{0}{\Gamma}_- & \text{für} \quad \sigma < 0,\end{cases}$$

$$\chi_1(\sigma) = \chi_2(\sigma) = 0 \quad \text{für} \quad X(\sigma) = \begin{bmatrix}\overset{0}{X}(\sigma)\\ \chi_1(\sigma)\\ \chi_2(\sigma)\end{bmatrix} = \Psi\left(0, \sigma; \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right),$$

so daß *nur die triviale* kovariante Ableitung

$$(18)\qquad D\Omega = \Psi(\Omega, \Omega'; \Pi) = \begin{bmatrix}(0)_{m_1-1}\\ \Omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\overset{0}{\Gamma}_\pm\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (\pi_2 = \Omega)$$

existiert. So haben wir den

SATZ 3. *Die allgemeinen Lösungen der Funktionalgleichung* (13) *sind für* $m_2 > 2$ *die Funktion* (16) *und für* $m_2 = 2$ *die Funktionen* (17) *und* (18).

Für die eindimensionalen Objekte zweiter Klasse von einer Komponenten mit der Transformationsformel 2 (19) *sind* (17) *bzw.* (16) *die allgemeinen nicht-trivialen kovarianten Ableitungen mit* m_1 *Komponenten, je nachdem das Hilfsobjekt* Π *mit der Transformationsformel* (10), *zwei oder mehrere Komponenten hat* ($m_2 = 2$ *oder* $m_2 > 2$).

Bei $m_1 = 2$ *fehlt* $(1)_{m_1-2}$ *in* (16) *und* (17) *und auch* $\overset{0}{\Gamma}_{\pm}$ *in* (18), *bei* $m_1 = 1$ *fehlen* $(0)_{m_1-1}$ *sowie* $\begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ \pi_1\end{bmatrix}$ *bzw.* $\begin{bmatrix}(1)_{m_1-2}\\ (\pi_2-\Omega)^{-1}\end{bmatrix}$ *bzw.* $\begin{bmatrix}\overset{0}{\Gamma}_{\pm}\\ 0\end{bmatrix}$ *in* (16) *bzw.* (17) *bzw.* (18) *und bei* $m_2 = 3$ *fehlt* $\overset{0}{\Pi}$ *in* (16).

Regularitätsannahmen über Ψ wurden auch hier nicht verwendet. Der Spezialfall

$$\mathrm{D}\Omega = \Omega + \pi_1^2(\Omega' + \Omega\pi_2 - \tfrac{1}{2}\pi_2^2 - \pi_3)$$

von (16) ($m = m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $X(\sigma, \pi_2) = \sigma - \frac{1}{2}\pi_2^2$, $\Pi = \begin{bmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{bmatrix}$) hat eine gewisse Bedeutung für die Lieschen Ableitungen.

Auch in diesem Abschnitt kann man *zu äquivalenten kovarianten Ableitungen von Objekten* Σ, *die mit* $\Omega = T(\Sigma)$ *äquivalent sind, unter Benutzung von mit* $\Pi = F(\Xi)$ *äquivalenten Hilfsobjekten* Ξ *durch die Formel*

$$\mathrm{D}\Sigma = \widetilde{\Psi}(\Sigma, \Sigma'; \Xi) = \Lambda\{\Psi[T(\Sigma)\,T(\Sigma)\,\Sigma'; F(\Xi)]\}$$

übergehen (vgl. 1 (3)).

4. Tensoren als kovariante Ableitungen von Vektoren

§ 1. Kovariante Ableitungen der kontravarianten Vektoren. Das folgende Beispiel soll zeigen, wie die Bestimmung der kovarianten Ableitung von allgemeineren Objekten zu hoffen ist. Ein kontravarianter Vektor v^k hat (s. I (20)) die Transformationsformel

$$(1)\qquad \bar{v}^{\varkappa} = A^{\varkappa}_k v_k \qquad \left(A^{\varkappa}_k \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\bar{\xi}^{\varkappa}}{\partial\xi^k};\ \varkappa, k = 1, 2, \ldots, n;\ \det A^{\varkappa}_k \neq 0\right).$$

Deshalb gilt für die Ableitung $\partial_l v^k \overset{\mathrm{df}}{=} \partial v^k/\partial\xi^l$ die Transformationsformel

$$(2)\qquad \overline{\partial_\lambda v^{\varkappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\bar{v}^{\varkappa}}{\partial\bar{\xi}^{\lambda}} = \frac{\partial\bar{v}^{\varkappa}}{\partial\xi^l}\,\frac{\partial\xi^l}{\partial\bar{\xi}^{\lambda}} = (A^{\varkappa}_{kl}v^k + A^{\varkappa}_k\partial_l v^k)\,A^l_{\lambda} = A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k\partial_l v^k - B^{\varkappa}_{\lambda\pi}A^{\pi}_k v^k,$$

wo

$$(3)\qquad A^{\varkappa}_k \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\bar{\xi}^{\varkappa}}{\partial\xi^k},\quad A^l_{\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\xi^l}{\partial\bar{\xi}^{\lambda}},\quad A^{\varkappa}_{kl} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^2\bar{\xi}^{\varkappa}}{\partial\xi^k\partial\xi^l},$$
$$A^k_{\varkappa\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^2\xi^k}{\partial\bar{\xi}^{\varkappa}\partial\bar{\xi}^{\lambda}},\quad B^{\varkappa}_{\lambda\pi} \overset{\mathrm{df}}{=} A^{\varkappa}_l A^l_{\lambda\pi}$$

ist. In der letzten Umformung in (2) folgt

$$A^{\varkappa}_{kl}A^l_{\lambda} = -B^{\varkappa}_{\lambda\pi}A^{\pi}_k$$

von der Ableitung der Identität (I (9))

$$(4)\qquad A^{\varkappa}_l A^l_{\lambda} = \delta^{\varkappa}_{\lambda}$$

bezüglich ξ^k:

$$A^{\varkappa}_{kl}A^l_{\lambda} + A^{\varkappa}_l A^l_{\lambda\pi}A^{\pi}_k = 0.$$

Aus (2) ist zu sehen, daß $\partial_l v^k$ kein geometrisches Objekt ist, da in der Transformationsformel außer $\partial_l v^k$ auch v^k auftritt. Dagegen ist

$$(5)\qquad \nabla_l v^k \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_l v^k + \Gamma^k_{lp}v^p$$

ein geometrisches Objekt, und zwar ein einfach kontravarianter — einfach kovarianter Tensor, falls Γ^k_{lp} das lineare Übertragungsobjekt (vgl. I § 3, Beispiel 6) mit der Transformationsformel

$$(6)\qquad \bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\lambda\pi} = \Gamma^k_{lp}A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k A^p_{\pi} + A^{\varkappa}_l A^l_{\lambda\pi} = \Gamma^k_{lp}A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k A^p_{\pi} + B^{\varkappa}_{\lambda\pi}$$

(vgl. (3)) ist:

$$(7)\qquad \overline{\nabla_\lambda v^{\varkappa}} = \partial_\lambda\bar{v}^{\varkappa} - \bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\lambda\pi}\bar{v}^{\pi} = A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k\partial_l v^k - B^{\varkappa}_{\lambda\pi}A^{\pi}_k v^k + \Gamma^k_{lp}A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k A^p_{\pi}A^{\pi}_j v^j + B^{\varkappa}_{\lambda\pi}A^{\pi}_j v^j$$
$$= A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k\partial_l v^k + \Gamma^k_{lp}A^l_{\lambda}A^{\varkappa}_k\delta^p_j v^j = A^{\varkappa}_k A^l_{\lambda}\nabla_l v^k.$$

(Es wurden (5), (2), (6), (1), (4) und (5) verwendet).

Unser Problem ist es, sämtliche (einfach kontravariante — einfach kovariante) Tensoren g^j_s zu charakterisieren, die aus dem kontravarianten Vektor v^k, aus seiner Ableitung $\partial_l v^k$ und aus dem Hilfsobjekt der *symmetrischen* linearen Übertragungsparametern $\Gamma^k_{lm} = \Gamma^k_{ml} = \Gamma^k_{(lm)}$ aufgebaut sind, also als kovariante Ableitungen des kontravarianten Vektors v^k angesehen werden können. Diese kovariante Ableitung

$$(8)\qquad \mathrm{D}v = \mathrm{D}_s v^j = g^j_s(v^k, \partial_l v^k, \Gamma^k_{lp})$$

muß offenbar die Funktionalgleichung (eigentlich Funktionalgleichungssystem)

$$\overline{\mathrm{D}v} = g^i_\sigma(\bar{v}^{\varkappa}, \overline{\partial_\lambda v^{\varkappa}}, \bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\lambda\pi}) = g^j_s(v^k, \partial_l v^k, \Gamma^k_{lp})\,A^i_j A^s_\sigma,$$

d. h. ((1), (2), (6))

$$(9)\qquad g^\iota_\sigma(A^\varkappa_k v^k,\ A^l_\lambda A^\varkappa_k \partial_l v^k - B^\varkappa_{\lambda\pi} A^\pi_k v^k,\ \Gamma^k_{lp} A^l_\lambda A^\varkappa_k A^p_\pi + B^\varkappa_{\lambda\pi}) = A^\iota_j A^s_\sigma g^j_s(v^k, \partial_l v^k, \Gamma^k_{lp})$$

erfüllen (die Gestalt der Funktion g muß gemäß der Definition der kovarianten Ableitung in dem Abschnitte 1 und in I § 5 gegenüber den Koordinatentransformationen invariant sein). Wir halten jetzt den Punkt p_0 fest, so daß die $A^\varkappa_k$, $B^\varkappa_{\lambda\mu}$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden können (nur muß $\det A^\varkappa_k \neq 0$ gelten), da immer Koordinatentransformationen mit in einem Punkte vorgeschriebenen ersten und zweiten Ableitungen konstruiert werden können. Dagegen sind die A^l_λ durch (4) bestimmt (d. h. mit den $A^\varkappa_k$ verbunden).

Um diese Gleichungen zu lösen, setzen wir

$$A^\varkappa_k = \delta^\varkappa_k\,, \qquad B^\varkappa_{\lambda\mu} = -\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}\,,$$

so daß wegen (4) auch

$$A^l_\lambda = \delta^l_\lambda$$

gilt. So wird aus (9)

$$(10)\qquad \mathrm{D}v = g^\iota_\sigma(v^k, \partial_l v^k, \Gamma^k_{lp}) = g^\iota_\sigma(v^\varkappa, \partial_\lambda v^\varkappa + \Gamma^\varkappa_{\lambda\pi} v^\pi, 0) = f^\iota_\sigma(v^\varkappa, \nabla_\lambda v^\varkappa)\,,$$

wo $f^j_s(v^k, \nabla_l v^k) \overset{\mathrm{df}}{=} g^j_s(v^k, \nabla_l v^k, 0)$ gesetzt wurde.

Wenn wir auch die *Stetigkeit* von $\mathrm{D}v$ in v voraussetzen, so können wir zeigen, daß f von den v^k *nicht* abhängt. Tatsächlich erhält man durch Einsetzen von (10) in (9) wegen (7)

$$f^\iota_\sigma(A^\varkappa_k v^k,\ A^\varkappa_h A^l_\lambda \nabla_l v^k) = A^\iota_j A^s_\sigma f^j_s(v^k, \nabla_l v^k)\,.$$

In diese Funktionalgleichung setzen wir

$$A^l_\lambda = t\delta^l_\lambda, \qquad \text{d. h.} \qquad A^\varkappa_k = \frac{1}{t}\delta^\varkappa_k$$

und erhalten

$$f^\iota_\sigma(tv^k, \nabla_l v^k) = f^\iota_\sigma(v^k, \nabla_l v^k)\,.$$

Ist f^ι_σ stetig, so wird bei $t \to 0$:

$$f^\iota_\sigma(v^k, \nabla_l v^k) = f^\iota_\sigma(0, \nabla_l v^k)\,,$$

d. h. f^j_s ist von den v^k unabhängig. Mit $g^\iota_\sigma(\nabla_l v^k) \overset{\mathrm{df}}{=} f^\iota_\sigma(0, \nabla_l v^k)$ gilt daher

$$(11)\qquad \mathrm{D}v = g^j_s(\nabla_l v^k)\,.$$

Jede stetige kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^k, die als einfach kontravarianter einfach kovarianter Tensor transformiert wird und die von den v^k, von ihren Derivierten $\partial_l v^k$ und von dem symmetrischen linearen Übertragungsobjekt Γ^k_{lm} abhängt, ist also eine Funktion, die nur von $\nabla_l v^k = \partial_l v^k + \Gamma^k_{lp} v^p$ abhängt.

Wird statt des symmetrischen das allgemeine lineare Übertragungsobjekt als Hilfsobjekt genommen, so hängt g^k_l auch von $\Gamma^k_{[lp]} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{lp} - \Gamma^k_{pl})$ ab.

§ 2. Lineare kovariante Ableitung der kontravarianten Vektoren. Jetzt nehmen wir zu unseren Voraussetzungen noch die der Linearität hinzu, indem wir fordern, daß $\mathrm{D}v$ eine lineare Funktion der $\nabla_l v^k$ sei. So geht (11) in

$$(12)\qquad \mathrm{D}_s v^j = g^j_s(\nabla_l v^k) = a^{lj}_{sk} \nabla_l v^k + b^j_s$$

über (a^{lj}_{sk}, b^j_s konstant).

Da $\mathrm{D}_s v^j$ und $\nabla_l v^k$ einfach kontravariante — einfach kovariante Tensoren sind, muß a^{lj}_{sk}, b^j_s folgenderweise transformiert werden:

$$\bar{a}^{\lambda\iota}_{\sigma\varkappa} = A^\lambda_l A^s_\sigma A^\iota_j A^k_\varkappa a^{lj}_{sk}\,, \qquad \bar{b}^\iota_\sigma = A^s_\sigma A^\iota_j b^j_s\,.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Gestalt der Funktion g^j_s von dem Koordinatensystem gelten aber $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$ (d. h. die Koeffizienten sind Skalare), so daß

$$a^{\lambda\iota}_{\sigma\varkappa} = A^\lambda_l A^s_\sigma A^\iota_j A^k_\varkappa a^{lj}_{sk}\,, \qquad b^\iota_\sigma = A^s_\sigma A^\iota_j b^j_s$$

besteht. Wir multiplizieren („kontrahieren") mit $A^\sigma_r A^\varkappa_h$ bzw. mit A^σ_r

$$(13)\qquad A^\sigma_r A^\varkappa_h a^{\lambda\iota}_{\sigma\varkappa} = A^\lambda_l A^\iota_j a^{lj}_{rh}\,, \qquad A^\sigma_r b^\iota_\sigma = A^\iota_j b^j_r\,.$$

Wählt man jetzt

$$A^\lambda_l = t_{|l|}\delta^\lambda_l = t_{|\lambda|}\delta^\lambda_l$$

(das Zeichen $|\lambda|$ bedeutet, daß bezüglich λ nicht zu summieren ist), so erhält man

$$t_{|r|} t_{|h|} a^{\lambda\iota}_{rh} = t_{|\lambda|} t_{|\iota|} a^{\lambda\iota}_{rh}\,, \qquad t_{|r|} b^\iota_r = t_{|\iota|} b^\iota_r\,.$$

Bei unabhängiger Wahl der t_r folgt hieraus, daß $a^{\lambda\iota}_{rh}$ nur dann nicht verschwindet, falls $\lambda = r$ und $\iota = h$ oder $\lambda = h$ und $\iota = r$ ist, und b^ι_r nur bei $\iota = r$ nicht verschwindet, d. h.

$$(14)\qquad \begin{aligned} a^{lj}_{rh} &\neq 0 \quad \text{nur falls} \quad (l = r \text{ und } j = h) \text{ oder } (l = h \text{ und } j = r)\,,\\ b^r_j &\neq 0 \quad \text{nur falls} \quad j = r\,. \end{aligned}$$

Wenn wir dies beachten, so reduziert sich (13) auf

$$A^{\lambda}_{r}A^{\iota}_{h}a^{|\lambda\iota|}_{|\lambda\iota|}+A^{\iota}_{r}A^{\lambda}_{h}a^{|\lambda\iota|}_{|\iota\lambda|}=A^{\lambda}_{r}A^{\iota}_{h}a^{|r\hbar|}_{|r\hbar|}+A^{\lambda}_{h}A^{\iota}_{r}a^{|hr|}_{|r\hbar|}\,,\qquad A^{\iota}_{r}b^{|\iota|}_{|\iota|}=A^{\iota}_{r}b^{|r|}_{|r|}\,.$$

Da die Veränderlichen A^{λ}_{h} beliebig sind, folgt aus dieser Formel

$$a^{|\lambda\iota|}_{|\lambda\iota|}=a^{|r\hbar|}_{|r\hbar|}=c\,,\qquad a^{|\lambda\iota|}_{|\iota\lambda|}=a^{|r\hbar|}_{|hr|}=d\,,\qquad b^{|\iota|}_{|\iota|}=b^{|r|}_{|r|}=e\,. \tag{15}$$

Nehmen wir (14) und (15) bei der Bildung von (12) in Acht, so haben wir

$$g^{j}_{s}(\nabla_{l}v^{k})=c\nabla_{s}v^{j}\qquad\text{falls}\qquad j\neq s$$

und

$$g^{|j|}_{|j|}(\nabla_{l}v^{k})=c\nabla_{|j|}v^{|j|}+d\nabla_{k}v^{k}+e\,.$$

Dies läßt sich in die Formel

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{s}v^{j}&=g^{j}_{s}(v^{k},\partial_{l}v^{k},\Gamma^{k}_{lp})=g^{j}_{s}(\nabla_{l}v^{k})=c\nabla_{s}v^{j}+d\delta^{j}_{s}\nabla_{k}v^{k}+e\delta^{j}_{s}\\&=c\partial_{s}v^{j}+d\delta^{j}_{s}\partial_{k}v^{k}+c\Gamma^{j}_{sp}v^{p}+d\delta^{j}_{s}\Gamma^{k}_{kp}v^{p}+e\delta^{j}_{s}\end{aligned} \tag{16}$$

zusammenfassen (c, d und e sind konstante Skalaren). (16) erfüllt die Funktionalgleichungen (9). Somit haben wir den folgenden

Satz. (16) *ist die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungsystems* (9), *die in den* v^k *stetig und in den* $\partial_l v^k$ *linear ist.*

Also ist (16) *die allgemeine lineare kovariante Ableitung der kontravarianten Vektoren, die außer den Komponenten dieses Vektors nur von ihren Ableitungen* $\partial_l v^k$ *und von dem symmetrischen linearen Übertragungsobjekt* Γ^k_{lm} *abhängt und selbst ein einfach kovarianter und einfach kontravarianter Tensor ist.*

Für den Gegenstand des vorliegenden Abschnittes, für die ähnliche Behandlung der kovarianten Ableitungen von *kovarianten* Vektoren und für weitere Verallgemeinerungen s. A. Moór (1958, 1960 [1], [2]).

V. WEITERE PROBLEME

1. Komitanten

§ 1. Komitanten einer Dichte. (S. Gołąb 1938 [4].) Das Problem, zu einem gegebenen geometrischen Objekt Ω alle geometrische Komitanten aufzufinden, könnte leichter gelöst werden, wenn wir das Hauptproblem der Klassifikationstheorie als vollständig gelöst ansehen könnten. Da das bisher nicht der Fall ist, so kann zur Zeit die vollständige Lösung des Komitantenproblems kaum erwarten sein. Wir geben im folgenden Beispiele für Bestimmung von Objekten mit gegebenen speziellen Transformationsformeln, die Komitanten von gewissen Objekten sind.

Ist Ω ein Skalar(feld), so ist einfach $\Psi(\Omega)$ bei jedem Ψ wiederum ein Skalar, also ein geometrisches Objekt. Ω und $\Omega^*=\Psi(\Omega)$ sind aber nur dann äquivalent, wenn Ψ umkehrbar ist.

Es entsteht die Frage, wann

$$\Omega^*=\Psi(\Omega) \tag{1}$$

eine geometrische Komitante ist, falls Ω eine nicht triviale Dichte vom Gewichte (-1) ist. Diese Frage ist leicht zu beantworten. Setzen wir voraus, daß Ψ umkehrbar ist, d. h. jeden Wert höchstens einmal annimmt, so können wir aus (1)

$$\Omega=\Psi^{-1}(\Omega^*) \tag{2}$$

schließen. Da Ω laut Voraussetzung eine gewöhnliche Dichte ist, d. h.

$$\bar{\Omega}=\Omega\cdot J\,,$$

so haben wir laut (2)

$$\bar{\Omega}^*=\Psi(\bar{\Omega})=\Psi(\Omega J)=\Psi\{J\cdot\Psi^{-1}(\Omega^*)\}\,, \tag{3}$$

was besagt, daß Ω^* ein geometrisches Objekt (vom Typus J) ist. Wie steht aber die Sache falls die Funktion Ψ nicht umkehrbar ist? Auch in diesem Falle kann Ω^* ein geometrisches Objekt sein. Es ist aber auch möglich, daß Ω^* kein geometrisches Objekt ist. Es gilt der folgende