III. ALGEBRA DER OBJEKTE

1. Definition

Es seien $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$: $\overset{i}{\Omega} = (\overset{i}{\Omega}_1, \ldots, \overset{i}{\Omega}_{m_i})$, $i = 1, \ldots, q$, q $(q \geqslant 2)$ geometrische Objekte definiert in einem Punkte p von X_n in bezug auf dasselbe Gruppoid $\mathfrak{G}$. Es sei ferner ein System von m Funktionen

$$\Psi_j(\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

gegeben, die bezüglich $\overset{i}{\Omega}$ in $\overset{i}{\Sigma}$ (siehe I § 3) definiert sind.

Falls die Werte

(1) $$\Omega_j = \Psi_j(\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

dieser Funktionen Komponenten eines geometrischen Objektes sind, so sagen wir, daß die Objekte $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$ eine *Algebra* mit der q-nären Operation Ψ zulassen. (1) werden wir auch kurz

(1′) $$\Omega = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega})$$

schreiben.

Wir betonen, daß die Objekte $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}, \Omega$ nicht von derselben Komponenten- und Klassenzahl, wohl aber von derselben Dimensionszahl sein müssen.

Da die Folge von Objekten $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$ sich in ein Objekt $\overset{0}{\Omega}$ mit $m_1 + \ldots + m_q$ Komponenten komprimieren läßt, kann Ω als eine geometrische Komitante von $\overset{0}{\Omega}$ aufgefaßt werden.

Da die Funktion Ψ gegenüber den Koordinatentransformationen invariant ist, muß sie die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

(2) $$\boldsymbol{\Phi}[\Psi(\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}); T_{\varkappa k}] = \Psi[\overset{1}{\boldsymbol{\Phi}}(\overset{1}{\Omega}; T_{\varkappa k}), \ldots, \overset{q}{\boldsymbol{\Phi}}(\overset{q}{\Omega}; T_{\varkappa k})]\,,$$

wo

$$\bar{\Omega} = \boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{\varkappa k})\,, \qquad \overline{\overset{i}{\Omega}} = \overset{i}{\boldsymbol{\Phi}}(\overset{i}{\Omega}; T_{\varkappa k}) \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

die Transformationsformeln der Objekte Ω bzw. $\overset{i}{\Omega}$ sind.

Die *Algebra der Objekte* befaßt sich mit der Frage welche Objektenmannigfaltigkeiten eine Algebra zulassen und welche Gestalt ihre Operationen Ψ haben.

2. Typen $(1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$

§ 1. Algebra der Objekte des Typus J. Statt der Objekte höchstens erster Klasse im eindimensionalen Raum, befassen wir uns gleich mit n-dimensionalen Objekten des Typus J (vgl. II. 4 § 2). In diesem § wollen wir das Problem der Algebra der Objekte vom Typus J im Falle $m = 1$, $r \leqslant 1$ vollständig lösen. Der Grund für die Zusammenschmelzung beider Fälle $r = 0$ und $r = 1$ (was auf das Hinzufügen von Skalaren hinausgeht, da wir hier von den nichtdifferentiellen Objekten absehen, die aber unter den in dem Abschnitte 3 zu untersuchenden Objekten enthalten sind) liegt darin, daß man in der Praxis mit Skalaren wie mit Objekten erster Klasse rechnet. So haben wir mit 4 Arten von Objekten zu tun: mit Skalaren, mit Biskalaren, mit den Objekten die den Weylschen Dichten äquivalent und endlich mit den Objekten die den gewöhnlichen Dichten äquivalent sind. Diese vier Arten von Objekten werden wir weiter kurz mit den Buchstaben S, B, W, G bezeichnen.

Das allgemeine Problem kann nun folgendermaßen formuliert werden. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $q = 2$ nehmen (binäre Operation)).

Es seien zwei Objekte $\overset{1}{\Omega}$ und $\overset{2}{\Omega}$ gegeben, von denen jedes zu einer der Klassen S, B, W, G gehört und deren Transformationsformeln entsprechend

$$\overline{\overset{i}{\Omega}} = \overset{i}{\Phi}(\overset{i}{\Omega}, J) \qquad (i = 1, 2)$$

lauten. Es wird gefragt nach allen Funktionen $\Psi(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen, für welche

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$$

wiederum ein geometrisches Objekt vom Typus J darstellt, d. h. zu einer der Klassen S, B, W, G gehört. Analytisch ausgedrückt, wenn allgemein mit dem Buchstaben Φ eine Transformationsformel vom Typus J bezeichnet wird, handelt es sich um die Lösung der Funktionalgleichung

(1) $$\Psi[\overset{1}{\Phi}(\overset{1}{\Omega}; J),\ \overset{2}{\Phi}(\overset{2}{\Omega}; J)] = \Phi[\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}); J]\,,$$

wo $\overset{1}{\Phi}$ und $\overset{2}{\Phi}$ als gegebene, während Ψ und Φ als gesuchte Funktionen zu betrachten sind. Der Funktion Ψ werden keinerlei Bedingungen auferlegt (außer, daß sie von keinen ihrer Veränderlichen unabhängig sein soll), während Φ zu einem Objekte des Typus J gehören soll.

Die Lösung dieses Problems ist zwar elementar, sie ist aber langweilig. Sie benötigt die Betrachtung von einer langen Reihe der Fälle je nachdem die gegebenen $\overset{i}{\Phi}$, wie auch die gesuchte Φ, zu einer der vier möglichen Klassenarten gehören. Deswegen geben wir hier die ganze Diskussion nicht wieder; wir verweisen den Leser auf die Arbeit S. Gołąb - H. Pidek 1957, wo die ganze Diskussion in den Einzelheiten durchgeführt ist (man kann sie aber aus den Ergebnissen auch selbst leicht rekonstruieren) und auf dieser Stelle beschränken wir uns darauf, beispielsweise in vier von den 64 möglichen Fallen die Lösung anzuführen und nachher das allgemeine Ergebnis anzugeben. Diese vier Fälle werden so gewählt, daß im ersten und dritten die Funktionalgleichung lösbar, im zweiten und vierten dagegen unlösbar ist.

Da alle Objekte des Typus J laut II. 4 § 2 mit einem der Objekte äquivalent sind, die die folgenden Transformationsformeln haben:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \Omega && (\Omega = 1 \text{ oder } \Omega = -1)\,, \\ \bar{\Omega} &= \Omega \operatorname{sg} J && (\Omega = -1, 1)\,, \\ \bar{\Omega} &= \Omega |J| && (\Omega \in (0, \infty) \text{ oder } \Omega \in (-\infty, 0))\,, \\ \bar{\Omega} &= \Omega J && (\Omega \in [(-\infty, 0) + (0, \infty)]) \end{aligned}$$

genügt es laut des allgemeinen Prinzips in I § 5 *die* $\overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}, \Phi$ *in* (1) *je einer von diesen Funktionen gleich zu nehmen und von dem so bestimmten* $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ *kann man dann auf die allgemeine Operation* $\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma})$ *in der Algebra der Objekte des Typus J durch die Formel*

$$\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}) = \Lambda\{\Psi[\overset{1}{\Theta}{}^{-1}(\overset{1}{\Sigma}), \overset{2}{\Theta}{}^{-1}(\overset{2}{\Sigma})]\} \tag{2}$$

übergehen. Und nun wenden wir uns den vier eingehend zu behandelnden Fällen zu.

I. Setzen wir voraus, daß die Transformationsformeln von $\overset{1}{\Omega}$, $\overset{2}{\Omega}$ und Ω die folgenden sind:

$$\bar{\overset{1}{\Omega}} = \overset{1}{\Omega} J\,, \qquad \bar{\overset{2}{\Omega}} = \overset{2}{\Omega}|J|\,, \qquad \bar{\Omega} = \Omega|J|\,.$$

Dann wird aus (1)

$$\Psi(\overset{1}{\Omega} J, \overset{2}{\Omega}|J|) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})|J|\,. \tag{3}$$

Die Funktion $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ muß also jedenfalls *positiv homogen von erster Ordnung sein*; darüber hinaus besitzt sie, wie das Einsetzen von $J = -1$ zeigt, die Eigenschaft

$$\Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})\,, \tag{4}$$

d. h. die Ebene $x = 0$ *ist eine Symmetrieebene der Fläche* $z = \Psi(x, y)$. Umgekehrt beweist man leicht durch Einsetzen, daß jede positiv homogene Funktion erster Ordnung mit der Eigenschaft (4) eine Lösung der Funktionalgleichung (3) ist. Damit ist das Problem der Algebra eines G-Objektes mit einem W-Objekt, wo das Ergebnis ein W-Objekt ist, vollständig gelöst. (2) gibt die allgemeine Lösung an, wo Ψ eine positiv homogene Funktion erster Ordnung mit der Eigenschaft (4) ist, während Λ beliebig ist.

II. Setzen wir jetzt

$$\bar{\overset{1}{\Omega}} = \overset{1}{\Omega}|J|\,, \qquad \bar{\overset{2}{\Omega}} = \overset{2}{\Omega}|J|\,, \qquad \bar{\Omega} = \Omega J$$

voraus. Aus (1) wird jetzt

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}|J|, \overset{2}{\Omega}|J|) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) J\,. \tag{5}$$

Setzt man $J = -1$ ein, so folgt

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = 0\,,$$

die Funktionalgleichung (5) hat also keine nichttriviale Lösung und die Algebra zweier W-Objekte kann nie ein G-Objekt ergeben.

III. Es sei num

$$\begin{aligned} \bar{\overset{1}{\Omega}} &= \overset{1}{\Omega} J && (\overset{1}{\Omega} \in (-\infty, 0) + (0, \infty))\,, \\ \bar{\overset{2}{\Omega}} &= \overset{2}{\Omega} && (\overset{2}{\Omega} = 1 \text{ oder } \overset{2}{\Omega} = -1)\,, \\ \bar{\Omega} &= \Omega \operatorname{sg} J && (\Omega = -1, 1)\,. \end{aligned}$$

Aus (1) wird dann

$$\Psi(\overset{1}{\Omega} J, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) \operatorname{sg} J$$

oder mit $J = 1/\overset{1}{\Omega}$

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(1, \overset{2}{\Omega}) \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega}\,,$$

was die Gleichung auch tatsächlich erfüllt. Da $\Omega = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -1, 1$ ist, gilt entweder $\Psi(1, \overset{2}{\Omega}) = \overset{2}{\Omega}$, oder $\Psi(1, \overset{2}{\Omega}) = -\overset{2}{\Omega}$.

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega}$$

und

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega}$$

und nur diese sind also in diesem Falle Lösungen der Funktionalgleichung (1) von der man zu den allgemeinen Lösungen wieder mittels (2) übergeht.

IV. Es sei endlich

$$\overline{\overset{1}{\Omega}} = \overset{1}{\Omega} J \qquad (\overset{1}{\Omega} \epsilon (-\infty, 0) + (0, \infty)),$$
$$\overline{\overset{2}{\Omega}} = \overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} J \qquad (\overset{2}{\Omega} = -1, 1),$$
$$\overline{\Omega} = \Omega \operatorname{sg} J \qquad (\Omega = -1, 1).$$

In diesem Falle wird aus (1)

$$\Psi(\overset{1}{\Omega} J, \overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} J) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) \operatorname{sg} J .$$

Wir setzen $J = 1/\overset{2}{\Omega}$ und erhalten

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(1, \overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega}) \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega} .$$

Laut unserer Voraussetzungen nimmt $\overset{2}{\Omega} \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega}$ ebenso wie Ψ eines der Werte $1, -1$ an. So ist $\Psi(1, \Omega)$ eine auf der Menge $\{-1, 1\}$ definierte Funktion, deren Werte in derselben Menge liegen. Solche Funktionen gibt es nur viere:

$$\Psi(1, \Omega) = \Omega ,$$
$$\Psi(1, \Omega) = -\Omega ,$$
$$\Psi(1, \Omega) = |\Omega| :$$
$$\Psi(1, \Omega) = -|\Omega| .$$

Diese ergeben

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \overset{2}{\Omega} ,$$
$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\overset{2}{\Omega} ,$$
$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = |\overset{2}{\Omega}| \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega} = \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega} ,$$
$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -|\overset{2}{\Omega}| \operatorname{sg} \overset{1}{\Omega} = -\operatorname{sg} \overset{1}{\Omega} .$$

Die ersten zwei Funktionen sind von $\overset{1}{\Omega}$, die dritte und die vierte von $\overset{2}{\Omega}$ unabhängig. Also hat die Funktionalgleichung (1) in diesem Falle keine Lösung, die nicht von einer ihrer Veränderlichen unabhängig wäre, und deshalb kann die Algebra eines G und eines B Objektes kein B-Objekt ergeben.

Ähnlich erfolgt die Diskussion in den übrigen Fällen. Das Endergebnis fassen wir in einer Tabelle zusammen. Diese braucht nur den folgenden kleinen Kommentar. Ein Strich in der entsprechenden Zelle bedeutet, daß die entsprechende Art von Objekten nicht erreichbar ist. Das nachstehende Verzeichnis gibt in jedem positiven Falle (d. h. in solchen, wo die gegebenen $\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}$ zu dem gegebenen Ω zusammengesetzt werden können) die allgemeine Lösung, d. h. die allgemeine Form der Funktion Ψ an. Für Zwecke dieses Verzeichnisses haben wir die Zeilen

und Spalten der Tabelle von 1 bis 8 nummeriert. Aus Symmetriegründen haben wir nur das untere Dreieck der quadratischen Tabelle ausgefüllt.

Satz 1. *Es ist nicht möglich, daß die Zusammensetzung*
von Objekten S mit einander Objekte B,
von Objekten S oder B mit einander Objekte W oder G,
von Objekten W mit Objekten S oder B Objekte S oder B,
von Objekten W mit Objekten S Objekte G,
von Objekten W mit einander Objekte B oder G,
von Objekten G mit Objekten S Objekte S,
von Objekten G mit Objekten B Objekte B
ergebe.

Die möglichen Zusammensetzungen sind in der folgenden Tabelle und im nachstehenden Verzeichnis enthalten.

$\overset{1}{\Omega}$ \ $\overset{2}{\Omega}$		S		B		W		G	
		1	2	3	4	5	6	7	8
S	1	S	–						
	2	–	–						
B	3	S	B	S	B				
	4	–	–	–	–				
W	5	–	–	–	–	S	–		
	6	W	–	W	G	W	–		
G	7	–	B	S	–	S	B	S	B
	8	W	G	W	G	W	G	W	G

Die möglichen Zusammensetzungen, d. h. die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\tilde{\Psi}[\overset{1}{\Phi}(\overset{1}{\Sigma}; J), \overset{2}{\Phi}(\overset{2}{\Sigma}; J)] = \Phi[\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}); J] \tag{6}$$

werden durch die Funktionen

$$\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}) = \Lambda\{\Psi[\overset{1}{\Theta}{}^{-1}(\overset{1}{\Sigma}), \overset{2}{\Theta}{}^{-1}(\overset{2}{\Sigma})]\} \tag{2}$$

angegeben, wo die Funktionen $\overset{1}{\Theta}$ und $\overset{2}{\Theta}$ die Äquivalenz der Objekte $\overset{1}{\Sigma}$ bzw. $\overset{2}{\Sigma}$ des Typus J mit den Skalaren, Biskalaren, Weylschen und gewöhnlichen

Dichten erzeugen, Λ eine beliebige eindeutig umkehrbare Funktion ist, und Ψ in den verschiedenen Fällen durch das folgende Verzeichnis angegeben wird:

(1,1) Ψ *eine beliebige Funktion von zwei Veränderlichen.*

(3,1) Ψ *beliebig mit der Bedingung* $\Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{1}{\Omega})$.

(3,2) Ψ *beliebig mit der Bedingung* $\Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(3,3) Ψ *beliebig mit der Bedingung* $\Psi(-\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(3,4) Ψ *beliebig mit der Bedingung* $\Psi(-\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(5,5) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0$.

(6,1) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0$.

(6,3) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0, \quad \Psi(\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(6,4) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0, \quad \Psi(\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(6,5) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0$.

(7,2) $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \pm\overset{2}{\Omega}\,\mathrm{sg}\,\overset{1}{\Omega}$.

(7,3) $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \pm\,\mathrm{sg}\,\overset{1}{\Omega}\,\mathrm{sg}\,\overset{2}{\Omega}$.

(7,5) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0, \quad \Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(7,6) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0,\ \Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(7,7) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K \neq 0$.

(7,8) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0,\ \Psi(-\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(8,1) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = |K|\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K \neq 0$.

(8,2) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K \neq 0$.

(8,3) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0, \quad \Psi(-\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(8,4) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0,\ \Psi(-\overset{1}{\Omega}, -\overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(8,5) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0,\ \Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(8,6) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K > 0,\ \Psi(-\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = -\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$.

(8,7) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = |K|\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K \neq 0$.

(8,8) $\Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}),\ K \neq 0$.

Die Formeln (2) und (8,8) ergeben z. B. für

$$\overset{1}{\Theta}(\overset{1}{\Omega}) = |\overset{1}{\Omega}|^{\alpha_1}\mathrm{sg}\,\overset{1}{\Omega}\,, \quad \overset{2}{\Theta}(\overset{2}{\Omega}) = |\overset{2}{\Omega}|^{\alpha_2}\mathrm{sg}\,\overset{2}{\Omega}\,, \quad \Lambda(\Omega) = |\Omega|^{\beta}\mathrm{sg}\,\Omega\,, \tag{7}$$

d. h., bei der Zusammensetzung zweier gewöhnlichen Dichten $\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}$ von den Gewichten $(-\alpha_1), (-\alpha_2)$:

$$\overline{\overset{1}{\Sigma}} = \overset{1}{\Sigma}|J|^{\alpha_1}\mathrm{sg}\,J\,, \quad \overline{\overset{2}{\Sigma}} = \overset{2}{\Sigma}|J|^{\alpha_2}\mathrm{sg}\,J\,, \tag{8}$$

zu einer gewöhnlichen Dichte Π vom Gewicht $(-\beta)$:

$$\overline{\Pi} = \Pi|J|^{\beta}\mathrm{sg}\,J\,,$$

das folgende: die Operation

$$\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}) = \Lambda\{\Psi(|\overset{1}{\Sigma}|^{1/\alpha_1}\mathrm{sg}\,\overset{1}{\Sigma},\ |\overset{2}{\Sigma}|^{1/\alpha_2}\mathrm{sg}\,\overset{2}{\Sigma})\}$$

$$(\Lambda(\Omega) = |\Omega|^{\beta}\mathrm{sg}\,\Omega;\ \Psi(K\overset{1}{\Omega}, K\overset{2}{\Omega}) = K\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) \quad (K \neq 0))$$

wird die allgemeinste sein, unter welcher diese Objekte eine Algebra mit dem gewünschten resultierenden Objekte zulassen.

Wünschen wir andererseits, daß $\overset{1}{\Sigma}$ und $\overset{2}{\Sigma}$ wieder gewöhnliche Dichten von Gewichte $(-\alpha_1), (-\alpha_2)$ seien, d. h. (7) und (8) gelte, und dazu noch $\tilde{\Psi}(\overset{1}{\Sigma}, \overset{2}{\Sigma}) = \overset{1}{\Sigma}\overset{2}{\Sigma}$ vorgeschrieben sei (d. h. es handelt sich um das Produkt zweier gewöhnlichen Dichten), so folgt aus (6) gleich

$$\begin{aligned} \overline{\Pi} &= \Phi(\Pi; J) = \Pi|J|^{\alpha_1+\alpha_2}\,, \\ \Lambda(\Omega) &= |\Omega|^{\alpha_1+\alpha_2}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

d. h. $\Pi = \overset{1}{\Sigma}\overset{2}{\Sigma}$ ist eine Weylsche Dichte vom Gewicht $(-\alpha_1-\alpha_2)$. (2), (7) und (9) ergeben

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = |\overset{1}{\Omega}|^{\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2)}|\overset{2}{\Omega}|^{\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)}$$

in Einklang mit (8,7).

§ 2. Verallgemeinerte Addition. (S. Gołąb - H. Pidek 1957, J. Aczél 1960 [1]). Es ist wohlbekannt, daß z. B. zwei gewöhnliche Dichten von verschiedenen Gewichten nicht addiert werden können, d. h. daß ihre Summe kein geometrisches Objekt darstellt. Es ist aber gestattet zwei gewöhnliche Dichten von demselben Gewicht zu addieren. Zwei gewöhnliche Dichten von demselben Gewicht gehören nicht nur zu demselben Typus G, gehorchen aber auch derselben Transformationsformel, besitzen also dieselbe erzeugende Funktion Θ. Andererseits können, wie wir gesehen haben, auch Dichten mit verschiedenen Gewichten *multipliziert* werden.

Man kann nun allgemein definieren, welche Funktionen $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ als „verallgemeinerte Addition" angesehen werden können und folglich kann man die Frage stellen, unter welchen Bedingungen zwei Objekte $\overset{1}{\Omega}$ und $\overset{2}{\Omega}$ (z. B. vom Typus G) eine verallgemeinerte Addition zulassen.

Wir sagen nämlich, daß die Operation $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ eine *verallgemeinerte Addition* ist, wenn Ψ von der Gestalt

$$(10) \qquad \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = F[G(\overset{1}{\Omega}) + H(\overset{2}{\Omega})]$$

ist, wo alle drei Funktionen F, G, H einer Veränderlichen *umkehrbar* sind.

Wir setzen voraus, daß $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ *von der Form* (10) *ist und daß zugleich* $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ *ein geometrisches Objekt vom Typus G darstellt*, d. h.

$$(11) \qquad \Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = \Lambda\{\Phi[\overset{1}{\Theta}{}^{-1}(\overset{1}{\Omega}), \overset{2}{\Theta}{}^{-1}(\overset{2}{\Omega})]\}$$

gilt, wobei Φ homogen von erster Ordnung ist. Wir wollen die Transformationsformeln der Objekte $\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}$ finden, die eine verallgemeinerte Addition zulassen, d. h. wir wollen $\overset{1}{\Theta}$ und $\overset{2}{\Theta}$ bestimmen. Dies bedeutet wegen (10), (11) und wegen der Homogenität von Φ, daß wir die Funktionalgleichung

$$(12) \qquad \Lambda^{-1}\big(F\{G[\overset{1}{\Theta}(tx)] + H[\overset{2}{\Theta}(ty)]\}\big) = t\Lambda^{-1}\big(F\{G[\overset{1}{\Theta}(x)] + H[\overset{2}{\Theta}(y)]\}\big)$$

lösen sollen.

Wir setzen zu diesem Zweck

$$x \overset{\text{df}}{=} \overset{1}{\Theta}{}^{-1}(\overset{1}{\Omega}), \quad y \overset{\text{df}}{=} \overset{2}{\Theta}{}^{-1}(\overset{2}{\Omega}),$$

$$g_1(x) \overset{\text{df}}{=} G[\overset{1}{\Theta}(x)], \quad g_2(y) \overset{\text{df}}{=} H[\overset{2}{\Theta}(y)], \quad g_3(z) \overset{\text{df}}{=} F^{-1}[\Lambda(z)].$$

Die Funktionen $g_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ müssen also auch *eindeutig umkehrbar* sein. Aus (10) und (11) erhalten wir

$$(13) \qquad \Phi(x, y) = \Lambda^{-1}\big(F\{G[\overset{1}{\Theta}(x)] + H[\overset{2}{\Theta}(y)]\}\big) = g_3^{-1}[g_1(x) + g_2(y)].$$

Nehmen wir ein $t_0 \neq 0$. Da

$$\Phi(t_0x, t_0y) = t_0\Phi(x, y)$$

ist, haben wir laut (13) (vgl. (12))

$$g_3^{-1}[g_1(t_0x) + g_2(t_0y)] = t_0 g_3^{-1}[g_1(x) + g_2(y)].$$

Setzen wir weiter

$$(14) \qquad \bar{g}_i(x) = g_i(t_0x) \quad (i = 1, 2, 3),$$

so läßt sich die letzte Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\bar{g}_3^{-1}[\bar{g}_1(x) + \bar{g}_2(y)] = g_3^{-1}[g_1(x) + g_2(y)].$$

Wir setzen

$$\psi_i(u) \overset{\text{df}}{=} \bar{g}_i[g_i^{-1}(u)] \quad (i = 1, 2, 3),$$

so bekommen wir

$$\psi_3(u+v) = \psi_1(u) + \psi_2(v).$$

Die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung, die durch Einsetzen von $u = 0$ bzw. $v = 0$ auf die Cauchysche Gleichung $f(u+v) = f(u) + f(v)$ zurückgeführt werden kann, lautet aber, unter Voraussetzung z. B. der Meßbarkeit von $\psi_3(u)$, folgendermaßen:

$$\psi_1(u) = cu + c_1,$$
$$\psi_2(u) = cu + c_2,$$
$$\psi_3(u) = cu + c_1 + c_2,$$

wo c_1, c_2, c drei beliebige Konstanten sind (die aber von dem vorläufig fest gehaltenen t_0 noch abhängen). Bei uns muß natürlich c von Null verschieden sein, $c \neq 0$.

Kehren wir zu den Funktionen g_i $(i = 1, 2, 3)$ zurück, so bekommen wir

$$\bar{g}_i(x) = cg_i(x) + c_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad c_3 = c_1 + c_2.$$

Die Konstanten c_1, c_2, c hängen aber von t_0 ab. Berücksichtigen wir das und eliminieren $\bar{g}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ mittels (14), so erhalten wir

$$(15) \qquad g_i(tx) = c(t)g_i(x) + c_i(t) \quad (i = 1, 2, 3); \quad c_3(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir mit $x = 1$

$$(16) \qquad g_i(t) = c(t)g_i(1) + c_i(t) \quad (i = 1, 2, 3); \quad c_3(t) = c_1(t) + c_2(t),$$

oder, wenn wir

$$(17) \qquad \gamma_i(t) = g_i(t) - g_i(1) \quad (i = 1, 2, 3)$$

einführen und (16) von (15) subtrahieren,

$$(18) \qquad \gamma_i(tx) = c(t)\gamma_i(x) + \gamma_i(t) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Aus Symmetriegründen haben wir weiter

$$\gamma_i(tx) = c(x)\gamma_i(t) + \gamma_i(x) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

woraus

$$\gamma_i(x)[c(t)-1] = \gamma_i(t)[c(x)-1] \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{19}$$

folgt.

Zwei Fälle müssen jetzt unterschieden werden:

$$(\mathrm{A}) \quad c(t) \equiv 1, \qquad (\mathrm{B}) \quad c(t) \not\equiv 1.$$

Im Falle (A) wird aus (15)

$$g_i(tx) = g_i(x) + c_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad c_3(t) = c_1(t) + c_2(t). \tag{20}$$

Setzen wir hier $x = 1$ ein, so erhalten wir einen Zusammenhang zwischen g_i und c_i:

$$g_i(t) = g_i(1) + c_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad c_3(t) = c_1(t) + c_2(t), \tag{21}$$

was, in die Gleichung (20) eingesetzt,

$$c_i(tx) = c_i(x) + c_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ergibt. Dies führt z. B. bei der Meßbarkeitsvoraussetzung zu

$$c_i(x) = \alpha_i \log|x| \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha_i \text{ sind Konstanten}).$$

Daraus und aus (21) folgt weiter

$$g_i(x) = \beta_i + \alpha_i \log|x| \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2;\ \alpha_i, \beta_i \text{ sind Konstanten}).$$

Da $g_i(x)$ umkehrbar ist, muß $x > 0$,

$$g_i(x) = \beta_i + \alpha_i \log x \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2;\ \alpha_1\alpha_2 \neq 0)$$

sein.

Im Falle (B) gibt es ein t^*, so daß $c(t^*) \neq 1$ ist und aus (19) bekommen wir

$$\gamma_i(x) = \gamma_i[c(x)-1] \qquad \left(\gamma_i \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\gamma_i(t^*)}{c(t^*)-1},\ i = 1, 2, 3\right). \tag{22}$$

Setzen wir dies in (18) ein, so erhalten wir

$$-\gamma_i + \gamma_i c(tx) = \gamma_i c(t) c(x) - \gamma_i c(t) + \gamma_i c(t) - \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

oder

$$\gamma_i c(tx) = \gamma_i c(t) c(x) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wäre ein $\gamma_i = 0$, $\gamma_i(x) \equiv 0$, so würde, laut (17), $g_i(x)$ konstant sein im Gegensatz zur vorausgesetzten Umkehrbarkeit. So kann γ_i als von Null verschieden vorausgesetzt werden. (Auch $c(x)$ muß dann eindeutig umkehrbar sein wegen (17) und (22)). Folglich kann man die letzte Gleichung durch γ_i kürzen, so daß

$$c(tx) = c(t)c(x)$$

besteht und daraus folgt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{entweder} & c(x) \equiv 0, \\ \text{oder} & c(x) = |x|^\beta, \\ \text{oder} & c(x) = \operatorname{sg} x, \\ \text{oder aber} & c(x) = |x|^\beta \operatorname{sg} x \quad (\beta \neq 0) \end{array}\right\} \quad (\beta \text{ eine Konstante}).$$

Unter diesen Funktionen ist nur die letzte eindeutig umkehrbar. (Falls man sich auf $x > 0$ beschränkt, ist auch $|x|^\beta$ $(\beta \neq 0)$ eindeutig umkehrbar, sie stimmt aber dann mit $|x|^\beta \operatorname{sg} x$ überein.) So haben wir aus (22) und (17)

$$g_i(x) = \gamma_i |x|^\beta \operatorname{sg} x + a_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ \text{die } a_i, \beta, \gamma_i \text{ sind Konstanten})$$

und aus (16) folgt

$$a_3 = a_1 + a_2.$$

Kehren wir nun zu den Funktionen $\overset{1}{\Theta}$, $\overset{2}{\Theta}$ und Λ zurück, so stellt es sich heraus, daß

$$\overset{1}{\Theta}(x) = G^{-1}[g_1(x)], \qquad \overset{2}{\Theta}(y) = H^{-1}[g_2(y)], \qquad \Lambda(z) = F[g_3(z)]$$

gilt und da

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \gamma_1 |x|^\beta \operatorname{sg} x + a_1, \\ g_2(y) &= \gamma_2 |y|^\beta \operatorname{sg} y + a_2, \\ g_3(z) &= \gamma_3 |z|^\beta \operatorname{sg} z + a_1 + a_2 \qquad (\beta\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \neq 0) \end{aligned}$$

ist, folgt

$$\overset{1}{\Theta}(x) = G^{-1}[\gamma_1 |x|^\beta \operatorname{sg} x + a_1] \qquad (\gamma_1 \neq 0,\ \beta \neq 0), \tag{23}$$

$$\overset{2}{\Theta}(y) = H^{-1}[\gamma_2 |y|^\beta \operatorname{sg} y + a_2] \qquad (\gamma_2 \neq 0,\ \beta \neq 0), \tag{24}$$

$$\Lambda(z) = F[\gamma_3 |z|^\beta \operatorname{sg} z + a_1 + a_2] \qquad (\gamma_3 \neq 0,\ \beta \neq 0). \tag{25}$$

Man sieht auch, daß

$$\Phi(x, y) = |W|^{1/\beta} \operatorname{sg} W,$$

wo

$$W = a|x|^\beta \operatorname{sg} x + b|y|^\beta \operatorname{sg} y \qquad (ab\beta \neq 0)$$

ist (a, b, β Konstanten).

Im Falle (A) erhalten wir dagegen

$$\Phi(x, y) = c x^p y^q \qquad (p + q = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ cpq \neq 0)$$

und

(26) $$\overset{1}{\Theta}(x) = G^{-1}[\beta_1 + \alpha_1 \log x] \qquad (x > 0,\ \alpha_1 \neq 0)\,,$$

(27) $$\overset{2}{\Theta}(y) = H^{-1}[\beta_2 + \alpha_2 \log y] \qquad (y > 0,\ \alpha_2 \neq 0)\,,$$

(28) $$\Lambda(z) = F[\beta_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)\log z] \qquad (z > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)\,.$$

Das Einsetzen in (12) zeigt aber, daß die Objekte mit den $\overset{1}{\Theta}$, $\overset{2}{\Theta}$, Λ in (26)-(28) nur bei positivem J die verallgemeinerte Addition $F[G(\overset{1}{\Omega}) + H(\overset{2}{\Omega})]$ zulassen.

Fordern wir insbesondere, daß die Funktionen F, G, H überall derivierbar sein sollen, so folgt, daß nur der Fall (B) bestehen kann und darin $\beta = 1$ sein muß, so daß

$$\overset{1}{\Theta}(x) = G^{-1}(\gamma_1 x + \alpha_1) \qquad (\gamma_1 \neq 0)\,,$$

$$\overset{2}{\Theta}(y) = H^{-1}(\gamma_2 y + \alpha_2) \qquad (\gamma_2 \neq 0)\,,$$

$$\Lambda(z) = F(\gamma_3 z + \alpha_1 + \alpha_2) \qquad (\gamma_3 \neq 0)$$

ausfällt. Wir haben jedenfalls den

Satz 2a. *Zwei Objekte des Typus G lassen eine verallgemeinerte Addition* (10) *deren Ergebnis wieder ein G-Objekt ist dann und nur dann zu, wenn die Funktionen, die ihre Äquivalenz mit einer gewöhnlichen Dichte erzeugen, von der Gestalt* (23)-(25) *oder* (26)-(28) *sind, die letzteren aber nur falls man sich auf Koordinatentransformationen mit positiven Funktionaldeterminanten beschränkt.*

In anderer Gestalt:

Satz 2b. *Die Funktionalgleichung* (12) *hat bei Zulassen von beliebigen t das Lösungssystem* (23)-(25), *bei Beschränkung auf positive t auch noch das Lösungssystem* (26)-(28), *es gibt aber keine weiteren meßbaren und eindeutig umkehrbaren Lösungen.*

3. Typus $(1, n, r)$

§ 1. Bestimmung der Operation. Die Funktionalgleichung 1 (2) kann für spezielle geometrische Objekte (s. I § 4) folgenderweise geschrieben werden:

$$\Phi[\Psi(\overset{1}{\Omega}, \dots, \overset{q}{\Omega}); u] = \Psi[\overset{1}{\Phi}(\overset{1}{\Omega}; u), \dots, \overset{q}{\Phi}(\overset{q}{\Omega}; u)]\,.$$

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß $\overset{1}{\Omega}, \dots, \overset{q}{\Omega}$ Objekte mit einer einzigen Komponenten sind und $\Phi \equiv \overset{1}{\Phi} \equiv \overset{2}{\Phi} \equiv \dots \equiv \overset{q}{\Phi}$ gilt *(Algebren im engeren Sinne).* $u = \{u_1, \dots, u_p\}$ sind die Parameter. Bei dem Typus $(1, n, r)$ ist speziell $u = \{\underset{0}{\xi}^k, \underset{0}{\bar{\xi}}^\varkappa, A^\varkappa_k, \dots, A^\varkappa_{k_1\dots k_r}\}$, $p = n\left[\binom{n+r}{r}+1\right]$. Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf $q = 2$ beschränken, so daß wir die Funktionalgleichung

(1) $$\Phi[\Psi(\Omega, \Pi); u] = \Psi[\Phi(\Omega; u), \Phi(\Pi; u)]$$

untersuchen werden, wo in unserem Falle die großen griechischen Buchstaben eindimensionale, die kleinen lateinischen dagegen p-dimensionale Größen bezeichnen.

Unsere Betrachtungen werden also nicht nur für den Typus $(1, n, r)$, sondern für alle speziellen geometrischen Objekte mit einer Komponenten gültig bleiben. Ja, wir setzen auch nicht voraus, daß Φ die Fundamentalgleichung I (24) der speziellen Objekte erfüllt, nur daß es ein, zur Identitätstransformation gehörendes Parameter-p-tuppel e gibt, derart, daß

(2) $$\Phi(\Omega; e) \equiv \Omega$$

gelte. Dagegen werden gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften gefordert.

Wir differenzieren nämlich die Gleichung (1) z. B. bezüglich des Parameters u_1 und erhalten

$$\partial_1\Phi[\Psi(\Omega, \Pi); u] = \partial_1\Psi[\Phi(\Omega; u), \Phi(\Pi; u)]\partial_1\Phi(\Omega; u) + \\ + \partial_2\Psi[\Phi(\Omega; u), \Phi(\Pi; u)]\partial_1\Phi(\Pi; u)\,,$$

wo

$$\partial_1\Phi(\Omega; u) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\,, \qquad \partial_1\Psi(\Omega, \Pi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\Psi}{\partial\Omega}\,, \qquad \partial_2\Psi(\Omega; \Pi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi}$$

geschrieben wurde. Setzen wir $u = e$ ein, so geht dies wegen (2) in

(3) $$\partial_1\Phi[\Psi(\Omega, \Pi); e] = \partial_1\Psi(\Omega, \Pi)\partial_1\Phi(\Omega; e) + \partial_2\Psi(\Omega, \Pi)\partial_1\Phi(\Pi; e)$$

über. Jetzt führen wir zwei neue Funktionen $\Theta(\Omega)$ und $\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi)$ mit den Definitionen

(4) $$\Theta'(\Omega) = \frac{1}{\partial_1\Phi(\Omega; e)}\,, \quad \text{d. h.} \quad \Theta(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \int \frac{d\Omega}{\partial_1\Phi(\Omega; e)}$$

und

(5) $$\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega), \Theta(\Pi)] = \Theta[\Psi(\Omega, \Pi)]\,, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Theta\{\Psi[\overset{-1}{\Theta}(\Omega), \overset{-1}{\Theta}(\Pi)]\}$$

ein, die bei

(6) $$\partial_1\Phi(\Omega; e) \neq 0$$

immer einen Sinn haben. ($\overset{-1}{\Theta}$ bezeichnet die inverse Funktion von Θ.) Es ist $\Theta'(\Omega)\neq 0$, $\Theta(\Omega)$ ist also streng monoton.

Wenn wir (5) bezüglich Ω derivieren und (4) anwenden, erhalten wir

$$\partial_1\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega),\,\Theta(\Pi)]\Theta'(\Omega) = \Theta'[\Psi(\Omega,\Pi)]\partial_1\Psi(\Omega,\Pi)\,,$$

$$\partial_1\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega),\,\Theta(\Pi)] = \frac{\partial_1\Psi(\Omega,\Pi)\partial_1\Phi(\Omega;e)}{\partial_1\Phi[\Psi(\Omega,\Pi);e]}$$

und ebenso

$$\partial_2\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega),\,\Theta(\Pi)] = \frac{\partial_2\Psi(\Omega,\Pi)\partial_1\Phi(\Pi;e)}{\partial_1\Phi[\Psi(\Omega;\Pi);e]}\,.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen addieren, ergibt sich wegen (3)

$$\partial_1\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega),\,\Theta(\Pi)]+\partial_2\tilde{\Psi}[\Theta(\Omega),\,\Theta(\Pi)] = 1$$

oder mit $\tilde{\Omega}\overset{\mathrm{df}}{=}\Theta(\Omega)$, $\tilde{\Pi}\overset{\mathrm{df}}{=}\Theta(\Pi)$:

$$\partial_1\tilde{\Psi}(\tilde{\Omega},\tilde{\Pi})+\partial_2\tilde{\Psi}(\tilde{\Omega};\tilde{\Pi}) = 1\,.$$

Die Lösung dieser einfachen partiellen Differentialgleichung ist

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\Omega},\tilde{\Pi}) = \tilde{\Pi}+\Gamma(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})\,.$$

Dies ist für alle $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Pi}$, die im Wertevorrat der Funktion Θ liegen gültig. Aus (5) folgt nun, daß *die gesuchte Lösung Ψ unserer Funktionalgleichung* (1) *von der Gestalt*

(7) $$\Psi(\Omega,\Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi)+\Gamma[\Theta(\Omega)-\Theta(\Pi)]\}$$

sein muß.

§ 2. Bestimmung der Transformationsformel. Wir substituieren (7) in (1) zurück:

(8) $$\Phi(\overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi)+\Gamma[\Theta(\Omega)-\Theta(\Pi)]\};u)$$
$$= \overset{-1}{\Theta}\Big\{\Theta[\Phi(\Pi;u)]+\Gamma\big(\Theta[\Phi(\Omega;u)]-\Theta[\Phi(\Pi;u)]\big)\Big\}\,.$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\Theta(\Omega)=\tilde{\Omega}\,,\qquad \Theta(\Pi)=\tilde{\Pi}\,,$$

(9) $$\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})\overset{\mathrm{df}}{=}\Theta\{\Phi[\overset{-1}{\Theta}(\tilde{\Omega});u]\}$$

ein. (9) zeigt, daß wir von der Abhängigkeit der Funktionen Φ, $\tilde{\Phi}$ von den Parametern u vorläufig absehen. So bleibt uns die Funktionalgleichung

(10) $$\tilde{\Phi}[\tilde{\Pi}+\Gamma(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})] = \tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})+\Gamma[\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})-\tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})]$$

zu untersuchen.

Setzen wir $\tilde{\Pi}=\tilde{\Omega}$, so wird aus (10)

$$\tilde{\Phi}[\tilde{\Omega}+\Gamma(0)] = \tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})+\Gamma(0)\,,$$

d. h. mit $\Sigma\overset{\mathrm{df}}{=}\tilde{\Omega}+\Gamma(0)$:

$$\tilde{\Phi}(\Sigma)-\Gamma(0) = \tilde{\Phi}[\Sigma-\Gamma(0)]\,.$$

Wenn wir dies bei der Subtraktion von $\Gamma(0)$ von beiden Seiten von (10) beachten, erhalten wir

$$\tilde{\Phi}[\tilde{\Pi}+\Gamma(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})-\Gamma(0)] = \tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})+\Gamma[\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})-\tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})]-\Gamma(0)$$

oder mit der Bezeichnung $\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega})\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma(\tilde{\Omega})-\Gamma(0)$:

(11) $$\tilde{\Phi}[\tilde{\Pi}+\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})] = \tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})+\tilde{\Gamma}[\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})-\tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})]\,,$$

wo schon

(12) $$\tilde{\Gamma}(0)=0$$

gilt.

Wir derivieren (11) bezüglich $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Phi}'[\tilde{\Pi}+\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})]\tilde{\Gamma}'(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi}) = \tilde{\Gamma}'[\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})-\tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})]\tilde{\Phi}'(\tilde{\Omega})$$

und dann bezüglich $\tilde{\Pi}$:

$$\tilde{\Phi}''[\tilde{\Pi}+\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})]\tilde{\Gamma}'(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})[1-\tilde{\Gamma}'(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})]-\tilde{\Phi}'[\tilde{\Pi}+\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})]\tilde{\Gamma}''(\tilde{\Omega}-\tilde{\Pi})$$
$$= -\tilde{\Gamma}''[\tilde{\Phi}(\tilde{\Omega})-\tilde{\Phi}(\tilde{\Pi})]\tilde{\Phi}'(\tilde{\Omega})\tilde{\Phi}'(\tilde{\Pi})\,.$$

Hier setzen wir $\tilde{\Pi}=\tilde{\Omega}=\Sigma$ ein und erhalten wegen (12)

(13) $$\tilde{\Phi}''(\Sigma)\tilde{\Gamma}'(0)[1-\tilde{\Gamma}'(0)]-\tilde{\Phi}'(\Sigma)\tilde{\Gamma}''(0) = -\tilde{\Phi}'(\Sigma)^2\tilde{\Gamma}''(0)\,.$$

Ist

(14) $$\partial_1\Psi(\Omega,\Omega)\neq 0\,,\qquad \partial_2\Psi(\Omega,\Omega)\neq 0\,,$$

so gilt wegen $\Theta'(\Omega)\neq 0$ auch

$$0\neq\partial_1\tilde{\Psi}(\Omega,\Omega) = \frac{\partial}{\partial\Omega}\{\Pi+\Gamma(\Omega-\Pi)\}|_{\Pi=\Omega} = \Gamma'(0) = \tilde{\Gamma}'(0)\,,$$

$$0\neq\partial_2\tilde{\Psi}(\Omega,\Omega) = \frac{\partial}{\partial\Pi}\{\Pi+\Gamma(\Omega-\Pi)\}|_{\Pi=\Omega} = 1-\Gamma'(0) = 1-\tilde{\Gamma}'(0)\,,$$

also

$$\widetilde{\Gamma}'(0)[1-\widetilde{\Gamma}'(0)] \neq 0 . \tag{15}$$

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

1) $\widetilde{\Gamma}''(0) = 0$. Dann geht (13) wegen (15) in

$$\widetilde{\Phi}''(\Sigma) \equiv 0 ,$$

d. h. in

$$\widetilde{\Phi}(\Sigma) = A\Sigma + B$$

über. Laut (9) *haben wir dann die Lösung*

$$\Phi(\Omega;\, u) = \overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Omega)+B(u)] . \tag{16}$$

2) $\widetilde{\Gamma}''(0) \neq 0$. Dann schreiben wir (13) in der Gestalt

$$\frac{\widetilde{\Phi}''(\Sigma)}{\widetilde{\Phi}'(\Sigma)} + \Delta\widetilde{\Phi}'(\Sigma) = \Delta ,$$

wo

$$\Delta = \frac{\widetilde{\Gamma}''(0)}{\widetilde{\Gamma}'(0)[1-\widetilde{\Gamma}'(0)]} \neq 0$$

ist. Das Integrieren ergibt

$$\log|\widetilde{\Phi}'(\Sigma)| + \Delta\cdot\widetilde{\Phi}(\Sigma) = \Delta\Sigma + \log A_{\mathrm{sg}\,\widetilde{\Phi}'(\Sigma)} ,$$

$$\widetilde{\Phi}'(\Sigma)\exp[\Delta\cdot\widetilde{\Phi}(\Sigma)] = A_{\mathrm{sg}\,\widetilde{\Phi}'(\Sigma)}\exp(\Delta\cdot\Sigma)\,\mathrm{sg}\,\widetilde{\Phi}'(\Sigma) .$$

Da die rechte Seite bei $\widetilde{\Phi}' = 0$ keine Sprungstelle haben kann, wenn die linke dort stetig ist, muß $A_{\mathrm{sg}\,\widetilde{\Phi}'}\cdot\mathrm{sg}\,\widetilde{\Phi}' = A$ eine Konstante sein. Daher ist

$$\exp[\Delta\cdot\widetilde{\Phi}(\Sigma)]\cdot\widetilde{\Phi}'(\Sigma) = A\exp(\Delta\cdot\Sigma)$$

und wenn wir noch einmal integrieren, erhalten wir

$$\frac{1}{\Delta}\exp[\Delta\cdot\widetilde{\Phi}(\Sigma)] = \frac{A}{\Delta}\exp(\Delta\cdot\Sigma) + \frac{B}{\Delta} ,$$

$$\widetilde{\Phi}(\Sigma) = \frac{1}{\Delta}\log[A\exp(\Delta\cdot\Sigma)+B] .$$

Aus (9) folgt nun

$$\Phi(\Omega;\, u) = \overset{-1}{\Theta}\left\{\frac{1}{\Delta}\log[A(u)\exp[\Delta\cdot\Theta(\Omega)]+B(u)]\right\}$$

oder mit

$$\widetilde{\Theta}(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \exp[\Delta\Theta(\Omega)] , \qquad \overset{-1}{\widetilde{\Theta}}(\Omega) = \overset{-1}{\Theta}\left(\frac{\log\Omega}{\Delta}\right)$$

erhalten wir in diesem Falle die Lösung

$$\Phi(\Omega;\, u) = \overset{-1}{\widetilde{\Theta}}[A(u)\widetilde{\Theta}(\Omega)+B(u)] , \tag{17}$$

die von derselben Gestalt ist wie (16).

(16) und (17) zeigen, daß *nur solche spezielle Objekte mit einer Komponenten Algebren im engeren Sinne bilden können, die mit linearen Objekten äquivalent sind.*

§ 3. Verknüpfung der Ergebnisse. Es würde keine Schwierigkeiten verursachen, (16) in (8) einzusetzen und dadurch die Funktion Γ zu bestimmen. Dagegen wäre die Lösung der durch Einsetzen von (17) in (8) entstandenen Gleichung etwas verwickelt. Deshalb kehren wir zur ursprünglichen Funktionalgleichung (1) zurück und bestimmen in Kenntnis der Funktion Φ die andere gesuchte Funktion Ψ neu.

Wir setzen also einheitlich

$$\Phi(\Omega;\, u) = \overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Omega)+B(u)] \tag{16}$$

in (1) ein:

$$\overset{-1}{\Theta}\{A(u)\Theta[\Psi(\Omega, \Pi)]+B(u)\}$$
$$= \Psi\{\overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Omega)+B(u)] ,\, \overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Pi)+B(u)]\} .$$

Mit der Bezeichnung (vgl. (5) und I § 5)

$$\widetilde{\Psi}(\Omega, \Pi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Theta\{\Psi[\overset{-1}{\Theta}(\Omega),\, \overset{-1}{\Theta}(\Pi)]\} \tag{5}$$

erhalten wir

$$A(u)\widetilde{\Psi}(\Omega, \Pi)+B(u) = \widetilde{\Psi}[A(u)\Omega+B(u),\, A(u)\Pi+B(u)] . \tag{18}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$A(u) \equiv 1; \tag{a}$$

$$A(u) \equiv -1; \tag{b}$$

$$A(u) \not\equiv 1 ,\; A(u) \not\equiv -1 . \tag{c}$$

Da in (16) bzw. (17) $A(u) = \partial_0\widetilde{\Phi}(\Sigma, u)$ bzw. $A(u) = \exp\{\Delta[\widetilde{\Phi}(\Sigma, u) - -\Sigma]\}\cdot\partial_0\widetilde{\Phi}(\Sigma, u)$ war $\left(\widetilde{\Phi}(\Sigma, u) \overset{\mathrm{df}}{=} \Theta\{\Phi[\overset{-1}{\Theta}(\Sigma), u]\} ,\, \partial_0\widetilde{\Phi}(\Sigma, u) \overset{\mathrm{df}}{=} \partial\widetilde{\Phi}/\partial\Sigma\right)$, ist $A(u)$ stetig in u falls $\partial_0\Phi(\Sigma, u)$ in u stetig ist. Deshalb gilt im Falle (c)

$$|A(u)| \not\equiv 1 , \qquad \text{z. B.} \qquad |A(\underset{0}{u})| \neq 1 . \tag{19}$$

Im Falle (a) wird aus (18)

$$\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) + B(u) = \tilde{\Psi}[\Omega + B(u), \Pi + B(u)]\,.$$

Man wähle u derart, daß $B(u) = -\Pi$ sei (oder falls diese Gleichung bezüglich u nicht lösbar ist, so wählen wir eine Konstante E so, daß $B(u) = -\Pi + E$ auflösbar ist):

$$\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \Pi + \Gamma(\Omega - \Pi)\,,$$

wo $\Gamma(\Omega) \overset{\text{df}}{=} \Psi(\Omega, 0)$ (bzw. $\Gamma(\Omega) = \tilde{\Psi}(\Omega + E, E) - E$) ist. Dann wird aus (5)

$$(20) \qquad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}\,.$$

Ebenso wählen wir im Falle (b) in

$$(21) \qquad -\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) + B(u) = \Psi[B(u) - \Omega, B(u) - \Pi]\,,$$

$B(u) = \Pi$ und dann wird

$$\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \Pi - \Gamma(\Pi - \Omega)\,, \qquad [\Gamma(\Omega) \overset{\text{df}}{=} \Psi(\Omega, 0)]\,.$$

Setzen wir aber diese Funktion in (21) zurück, so sehen wir, daß

$$-\Pi + \Gamma(\Pi - \Omega) + B(u) = B(u) - \Pi - \Gamma(\Omega - \Pi)\,,$$

d. h. $\Gamma(\Omega)$ *ungerade* ist:

$$\Gamma(-\Omega) = -\Gamma(\Omega)\,.$$

So folgt aus (5)

$$(22) \qquad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}\,, \qquad \Gamma(-\Omega) = -\Gamma(\Omega)\,.$$

Im Falle (c) differenzieren wir

$$(18) \qquad A(u)\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) + B(u) = \tilde{\Psi}[A(u)\Omega + B(u), A(u)\Pi + B(u)]$$

bezüglich Ω bzw. Π und erhalten

$$\partial_1\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \partial_1\tilde{\Psi}[A(u)\Omega + B(u), A(u)\Pi + B(u)]\,,$$

bzw.

$$\partial_2\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \partial_2\tilde{\Psi}[A(u)\Omega + B(u), A(u)\Pi + B(u)]\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln folgt aber, da wegen (19) entweder

$$\lim_{n\to\infty} A(\underset{0}{u})^n = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to-\infty} A(\underset{0}{u})^n = 0$$

gilt, das Bestehen von

$$\partial_1\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \partial_1\tilde{\Psi}\left(\frac{B(\underset{0}{u})}{1 - A(\underset{0}{u})}, \frac{B(\underset{0}{u})}{1 - A(\underset{0}{u})}\right) = \Gamma$$

und von

$$\partial_2\tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \partial_2\tilde{\Psi}\left(\frac{B(\underset{0}{u})}{1 - A(\underset{0}{u})}, \frac{B(\underset{0}{u})}{1 - A(\underset{0}{u})}\right) = \Delta$$

(Γ und Δ konstant).

So gilt

$$(23) \qquad \tilde{\Psi}(\Omega, \Pi) = \Gamma\Omega + \Delta\Pi + E$$

und wenn wir dies in (18) einsetzen, erhalten wir

$$A(u)\Gamma\Omega + A(u)\Delta\Pi + A(u)E + B(u)$$
$$= \Gamma A(u)\Omega + \Gamma B(u) + \Delta A(u)\Pi + \Delta B(u) + E\,,$$

d. h.

$$(24) \qquad [A(u) - 1]E = B(u)(\Gamma + \Delta - 1)\,.$$

Ist $\Gamma + \Delta \neq 1$, dann ist

$$B(u) = \frac{E}{\Gamma + \Delta - 1}[A(u) - 1]$$

und aus (16)

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}\left\{A(u)\Theta(\Omega) + \frac{E}{\Gamma + \Delta - 1}[A(u) - 1]\right\},$$

speziell für $\Omega = \overset{-1}{\Theta}\left(\frac{E}{1 - \Gamma - \Delta}\right)$:

$$\Phi\left[\overset{-1}{\Theta}\left(\frac{E}{1 - \Gamma - \Delta}\right); u\right] = \overset{-1}{\Theta}\left(\frac{-E}{\Gamma + \Delta - 1}\right) = \text{konstant},$$

so, daß für

$$\Omega = \underset{0}{\Omega} = \overset{-1}{\Theta}\left(\frac{E}{1 - \Gamma - \Delta}\right),$$

$$\partial_1\Phi(\underset{0}{\Omega}; u) \equiv 0\,, \qquad \text{also} \qquad \partial_1\Phi(\underset{0}{\Omega}; e) = 0$$

ist, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung (6). Deshalb ist $\Gamma + \Delta = 1$ und wegen (19) und (24) auch $E = 0$.

So wird aus (23) und aus (5)

$$\Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}[\Gamma\Theta(\Omega) + (1-\Gamma)\Theta(\Pi)] . \tag{25}$$

Wenn wir (20), (22) und (25) zusammenfassen, haben wir den folgenden

Satz. *Sind $\Psi(\Omega, \Pi)$ und $\Phi(\Omega; u)$ zweimal stetig derivierbar, ist $\partial_1\Psi(\Omega, \Omega) \neq 0$, $\partial_2\Psi(\Omega, \Omega) \neq 0$ und bildet die durch* (4) *definierte Funktion die Menge der Ω-Werte auf sich ab, gibt es ferner ein Parameter-p-Tuppel e, für das*

$$\Phi(\Omega; e) \equiv \Omega , \qquad \partial_1\Phi(\Omega; e) \neq 0$$

gilt, so hat die Funktionalgleichung (1) *die folgenden Lösungen und nur diese:*

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[\Theta(\Omega) + B(u)] , \quad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}; \tag{26}$$

$$\Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[B(u) - \Theta(\Omega)] , \quad \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}\{\Theta(\Pi) + \Gamma[\Theta(\Omega) - \Theta(\Pi)]\}, \quad \Gamma(-\Omega) = -\Gamma(\Omega); \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \Phi(\Omega; u) = \overset{-1}{\Theta}[A(u)\Theta(\Omega) + B(u)] , \\ \Psi(\Omega, \Pi) = \overset{-1}{\Theta}[\Gamma\Theta(\Omega) + (1-\Gamma)\Theta(\Pi)] \quad (\Gamma \text{ konstant}) , \end{gathered} \tag{28}$$

wo die Funktionen A, B, Γ, Θ zweimal stetig differenzierbar sind. Θ ist auch streng monoton. Unter diesen Voraussetzungen sind also (26), (27), (28), *und nur diese, die Transformationsformeln und Operationen der speziellen geometrischen Objekten mit einer Komponenten, die eine Algebra im engeren Sinne zulassen (alle äquivalent mit linearen Objekten).*

(Vgl. M. Hosszú 1957, 1959 [5]. Der Fall der nicht-differentiellen Objekte wurde von H. Pidek 1951, 1954 [1], [2] erledigt). Die Betrachtungen des § 1 können auch auf Objekte mit mehreren Komponenten und auch auf den Fall übertragen werden, wo $\Phi, \overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}$ nicht mehr identisch sind, die der §§ 2-3 auch für den Fall von Objekten mit einer Komponenten und $\overset{1}{\Phi} \equiv \overset{2}{\Phi} \not\equiv \Phi$. Weitere Verallgemeinerungen sind uns nicht bekannt.

IV. KOVARIANTE ABLEITUNG

1. Definition

Es sei ein Feld von geometrischen Objekten r-ter Klasse $\Omega_l(\xi)$ gegeben. Wie in I § 5 bemerkt wurde, ist eine Differentialkomitante s-ter Klasse I (27) nicht immer ein geometrisches Objekt. Manchmal ist es aber möglich durch Hinzunahme eines Hilfsobjektenfeldes Π_c von $(r+s)$-ter Klasse, d. h. durch Erhöhung der Komponentenzahl von Ω_l eine *geometrische* Differentialkomitante

$$\mathrm{D}_p\Omega_l = \Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l, \ldots, \partial_{j_1,\ldots,j_s}\Omega_l; \Pi_c) \tag{1}$$

zu gewinnen. Natürlich ist die Dimensionszahl bei Π_c und damit bei $\mathrm{D}_p\Omega_l$ dieselbe wie bei Ω_l.

Falls $\mathrm{D}_p\Omega_l$ von derselben Klasse ist wie Ω_l, so nennen wir sie eine *kovariante Ableitung* s-ter Ordnung. Im Bezugssystem $(\varkappa)$ hat diese Ableitung die Gestalt

$$\overline{\mathrm{D}_\pi\Omega_\lambda} = \Psi_\pi(\bar{\Omega}_\lambda, \partial_\iota\bar{\Omega}_\lambda, \ldots, \partial_{\iota_1,\ldots,\iota_s}; \bar{\Omega}_\lambda; \bar{\Pi}_\gamma) . \tag{2}$$

Die Theorie der kovarianten Ableitung beschäftigt sich mit der Frage, welche Objektenfelder kovariante Ableitungen zulassen und mit der Bestimmung dieser kovarianten Ableitungen.

Die Ableitungen der Skalarfelder und der Biskalarfelder bezüglich der Koordinaten bilden ohne Hinzunahme von Hilfsobjektenfeldern schon selbst geometrische Objekte. Im folgenden werden wir uns daher mit kovarianten Ableitungen erster Ordnung von verwickelteren Objekten beschäftigen.

Laut unseres Prinzips in I § 5 *ist die mit $\mathrm{D}_p\Omega_l$ äquivalente kovariante Ableitung erster Ordnung eines mit Π_c äquivalenten Hilfsobjektes durch die Formel*

$$\mathrm{D}_q\Sigma_k = \tilde{\Psi}_q(\Sigma_k, \partial_j\Sigma_k; \Xi_t) = \Lambda_q\{\Psi_p[T_l(\Sigma_k), \partial^i T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_i; F_c(\Xi_t)]\} \tag{3}$$

angegeben, wo

$$\Omega_l = T_l(\Sigma_k) , \qquad \Pi_c = F_c(\Xi_t) , \qquad \mathrm{D}_q\Sigma_k = \Lambda_q(\mathrm{D}_p\Omega_l)$$

sind.