II. KLASSIFIKATIONSTHEORIE

1. Nicht-differentielle und nicht rein differentielle Objekte

§ 1. Nicht-differentielle Objekte. (S. Gołąb 1949 [1]). Wie aus I § 4 erhellt, ist die Transformationsformel der nicht-differentiellen geometrischen Objekte

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \xi^k, \bar{\xi}^\varkappa) \qquad (k, \varkappa = 1, 2, \dots, n)$$

oder kurz

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}) \tag{1}$$

und die Fundamentalgleichung I (26) (vgl. auch I (12)) ist

$$\Phi(\Omega; \xi, \bar{\bar{\xi}}) = \Phi[\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}), \bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]. \tag{2}$$

(ξ, $\bar{\xi}$, $\bar{\bar{\xi}}$ bezeichnen die Koordinaten des Punktes p in drei *ganz beliebigen* Koordinatensystemen, wir haben auch die unteren Indizes weggelassen). Es gilt auch (vgl. I (16))

$$\Phi(\Omega; \xi, \xi) = \Omega\,. \tag{3}$$

Um die Gleichung (2) zu lösen, verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega; \xi, \gamma)\,, \qquad \overset{-1}{\Phi}(\Omega; \xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega; \gamma, \xi)\,,$$

wo $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ ein System von Konstanten darstellt. Aus (2) folgt einerseits

$$\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}) = \Phi[\Phi(\Omega; \xi, \gamma); \gamma, \bar{\xi}] = \overset{-1}{\Phi}[\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi), \bar{\xi}]\,,$$

andererseits wegen

$$\Phi[\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}); \bar{\xi}, \xi] = \Phi(\Omega; \xi, \xi) = \Omega$$

auch

$$\overset{-1}{\Phi}[\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi); \xi] = \overset{1}{\Phi}[\overset{-1}{\Phi}(\Omega; \xi); \xi] = \Omega\,, \tag{4}$$

d. h. die Funktion $\overset{-1}{\Phi}$ ist die Inverse von $\overset{1}{\Phi}(\Omega, \xi)$ bezüglich Ω.

Umgekehrt, überzeugt man sich leicht, daß wenn die Funktion $\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi)$ ganz beliebig ist und in Bezug auf Ω umkehrbar, so erfüllt die Funktion

$$\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}) = \overset{-1}{\Phi}[\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi), \bar{\xi}]$$

die Beziehungen (2) und (3). In der Tat haben wir wegen (4)

$$\overset{-1}{\Phi}\{\overset{1}{\Phi}[\overset{-1}{\Phi}\{\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi); \bar{\xi}\}; \bar{\xi}]; \bar{\bar{\xi}}\} = \overset{-1}{\Phi}\{\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi); \bar{\bar{\xi}}\}$$

und

$$\Phi(\Omega; \xi, \xi) = \overset{-1}{\Phi}[\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi); \xi] = \Omega\,.$$

Wir erhalten weiter aus $\bar{\Omega} = \overset{-1}{\Phi}[\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi), \bar{\xi}]$

$$\overset{1}{\Phi}(\bar{\Omega}; \bar{\xi}) = \overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi)\,,$$

d. h. die

$$\Sigma \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi)$$

bilden ein System von Skalaren. Da das System von Funktionen $\overset{1}{\Phi}$ in Bezug auf Ω umkehrbar ist, haben wir die folgenden Sätze:

SATZ 1. a. *Die Funktion*

$$\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}) = \overset{-1}{\Phi}\{\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi); \bar{\xi}\} \tag{5}$$

mit beliebigem $\overset{1}{\Phi}(\Omega; \xi)$, *das bezüglich* Ω *die Inverse* $\overset{-1}{\Phi}$ *hat, stellt die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungssystems* (2) *und* (3) *dar.*

SATZ 1. b. *Jedes nicht-differentielle Objekt wird durch Hinzunahme von den Koordinaten äquivalent mit einem Objekt, das aus einem System von Skalaren und aus den Koordinaten besteht.*

Im vorigen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß $\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi})$ von den Ω abhängt. Man kann sich die Frage stellen, ob es nicht-differentielle Objekte gibt, bei welchen die Funktionen Φ in der Transformationsformel von Ω unabhängig sind.

Die Gleichung (2) nimmt in diesem Falle die folgende Form an:

$$\Phi(\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}) = \Phi(\xi, \bar{\bar{\xi}})\,.$$

Das bedeutet, daß Φ in diesem Falle von der ersten Veränderlichen unabhängig ist, also letzten Endes $\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi})$ nur von $\bar{\xi}$ abhängt:

$$\Phi(\Omega; \xi, \bar{\xi}) = \Phi(\bar{\xi})\,.$$

Die nicht-differentiellen Objekten, deren Transformationsformel von Ω *nicht abhängt, sind die Koordinaten* I (18), *ihre geometrische Komitanten und nur diese.*

Wir bemerken, daß wir keine Regularitätsvoraussetzungen betreffs der Funktionen Φ gemacht haben.

§ 2. Nicht rein differentielle Objekte. (V. V. Wagner 1945 [2], A. Nijenhuis 1952, J. Aczél 1957 [1].) Ähnlich lassen sich die nicht rein differentiellen Objekte behandeln (und auf rein differentielle zurückführen). Diese haben die Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \bar{\xi}^\varkappa,\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}) \tag{6}$$

und die Fundamentalgleichung

$$\begin{aligned}\Phi[\Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \bar{\xi}^\varkappa,\, A^\varkappa_k,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r});\, \bar{\xi}^\varkappa,\, \bar{\bar{\xi}}^K,\, A^K_\varkappa,\, \dots,\, A^K_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}] \\ = \Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \bar{\bar{\xi}}^K,\, A^K_k,\, \dots,\, A^K_{k_1 \dots k_r})\end{aligned} \tag{7}$$

(vgl. I (25)-(26); da das erste, zweite und dritte Koordinatensystem beliebig gewählt werden kann, schreiben wir hier ξ^k, $\bar{\xi}^\varkappa$, $\bar{\bar{\xi}}^K$ statt $\underset{0}{\xi^k}$, $\underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}$, $\underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}$). Es gilt auch (I (16))

$$\Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \xi^k,\, \delta^k_i,\, 0,\, \dots,\, 0) = \Omega\,. \tag{8}$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\overset{1}{\Phi}(\Omega;\, \xi^k) &\overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \gamma^\varkappa,\, \delta^\varkappa_k,\, 0,\, \dots,\, 0)\,,\\ \overset{-1}{\Phi}(\Omega;\, \bar{\xi}^\varkappa) &\overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega;\, \gamma^k,\, \bar{\xi}^\varkappa,\, \delta^\varkappa_k,\, 0,\, \dots,\, 0)\,,\\ \Psi(\Pi;\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}) &\overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Pi;\, \gamma^k,\, \gamma^\varkappa,\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r})\end{aligned}$$

ein, wo $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ wieder konstant sind. Wegen (7), (8) gilt (4) auch hier, d. h. es ist $\overset{-1}{\Phi}$ die Inverse von $\overset{1}{\Phi}$ bezüglich Ω und es gelten auch die Beziehungen

$$\Psi[\Psi(\Pi;\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}),\, A^K_{\varkappa_1},\, \dots,\, A^K_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}] = \Psi(\Pi;\, A^K_k,\, \dots,\, A^K_{k_1 \dots k_r})\,, \tag{9}$$

$$\Psi(\Pi;\, \delta^\varkappa_k,\, 0,\, \dots,\, 0) = \Pi\,. \tag{10}$$

Andererseits folgt aus (7)

$$\begin{aligned}&\Phi(\Omega;\, \xi^l,\, \overset{\equiv}{\xi}{}^\Lambda,\, A^\Lambda_l,\, \dots,\, A^\Lambda_{l_1 \dots l_r})\\ &= \Phi\{\Phi[\Phi(\Omega;\, \xi^l,\, \gamma^\lambda,\, \delta^\lambda_l,\, 0,\, \dots,\, 0);\, \gamma^\lambda,\, \gamma^L,\, A^L_\lambda,\, \dots,\, A^L_{\lambda_1 \dots \lambda_r}];\, \gamma^L,\, \overset{\equiv}{\xi}{}^\Lambda,\, \delta^\Lambda_L,\, 0,\, \dots,\, 0\}\\ &\qquad = \overset{-1}{\Phi}\{\Psi[\overset{1}{\Phi}(\Omega;\, \xi^l);\, A^\Lambda_l,\, \dots,\, A^\Lambda_{l_1 \dots l_r}],\, \overset{\equiv}{\xi}{}^\Lambda\} \qquad (A^\Lambda_l = \delta^\Lambda_L A^L_\lambda \delta^\lambda_l \quad \text{usw.})\,.\end{aligned}$$

Auch hier erfüllt die Funktion

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \Phi(\Omega;\, \xi^k,\, \bar{\xi}^\varkappa,\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r})\\ &= \overset{-1}{\Phi}\{\Psi[\overset{1}{\Phi}(\Omega;\, \xi^k);\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}],\, \bar{\xi}^\varkappa\}\end{aligned} \tag{11}$$

wegen (4), (9) und (10) die Funktionalgleichungen (7) und (8).

Wir haben also den folgenden

Satz 2. a. *Das Funktionalgleichungssystem* (7), (8) *hat die allgemeine Lösung* (11), *wo* $\overset{1}{\Phi}$, $\overset{-1}{\Phi}$, Ψ *die Gleichungen* (4), (9) *und* (10) *erfüllen, sonst beliebig sind.*

Wir führen das neue Objekt

$$\Pi = \overset{1}{\Phi}(\Omega;\, \xi)$$

ein. Aus (11) ist zu ersehen, daß Π die Transformationsformel

$$\bar{\Pi} = \Psi(\Pi;\, A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}) \tag{12}$$

hat. Diese Formel zusammen mit (9) und (10) bestätigt, daß Π ein *rein differentielles Objekt* ist.

Da gleichzeitig die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned}\Pi &= \overset{1}{\Phi}(\Omega;\, \xi)\,,\\ \xi &= \xi;\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\Omega &= \overset{-1}{\Phi}(\Pi;\, \xi)\,,\\ \xi &= \xi\end{aligned}\right\}$$

zueinander invers sind und folglich eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den (Ω, ξ) und (Π, ξ) realisieren, so haben wir den

Satz 2. b. *Das Vereinigungsobjekt eines beliebigen nicht-differentiellen Objektes mit den Koordinaten ist äquivalent mit einem Vereinigungsobjekt das aus einem rein differentiellen Objekt und aus den Koordinaten zusammengesetzt wird.*

Auch hier machten wir keine Regularitätsannahmen über Φ, nur die Voraussetzung, daß Φ tatsächlich von Ω abhängt. Falls Φ von Ω unabhängig ist, bekomen wir wiederum nur die Komitanten der Koordinaten.

§ 3. Die Bedeutung des Zurückführens aller speziellen geometrischen Objekten auf differentialgeometrische Objekte. Der Satz 2 erlaubt, daß wir uns *im folgenden nur mit differentialgeometrischen Objekten* (kurz: *Objekten*) beschäftigen.

Dies hat außer der einfacheren Gestalt der Transformationsformel und der Grundgleichung auch den großen Vorteil, daß *die Parameter*

$$(A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r})$$

eines differentialgeometrischen Objektes unter der Operation

$$(A^\varkappa_k,\, \dots,\, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}) \cdot (A^K_\varkappa,\, \dots,\, A^K_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}) = (A^K_k,\, \dots,\, A^K_{k_1 \dots k_r})$$

(vgl. I (13)) *eine Gruppe* (also nicht nur ein Gruppoid) *bilden.*

2. Typus $(1, 1, r)$, $r \geqslant 4$

§ 1. Ein Hilfssatz über die Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion.

Mit den Bezeichnungen (I § 1)

$$\bar{\xi} = \varphi(\xi)\,, \qquad \bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi}) = \psi[\varphi(\xi)]\,,$$

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1(\xi) = \dfrac{d\bar{\xi}}{d\xi}\,, \quad \beta_1(\bar{\xi}) = \dfrac{d\bar{\bar{\xi}}}{d\bar{\xi}}\,, \quad \gamma_1(\xi) = \dfrac{d\bar{\bar{\xi}}}{d\xi}\,, \\[2ex] \alpha_2(\xi) = \dfrac{d\alpha_1(\xi)}{d\xi} = \dfrac{d^2\bar{\xi}}{d\xi^2}\,, \ldots, \alpha_r(\xi) = \dfrac{d\alpha_{r-1}(\xi)}{d\xi} = \dfrac{d^r\bar{\xi}}{d\xi^r}\,, \ldots, \\[2ex] \beta_q(\bar{\xi}) = \dfrac{d\beta_{q-1}(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} = \dfrac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{d\bar{\xi}^q}\,, \quad \gamma_q(\xi) = \dfrac{d\gamma_{q-1}(\xi)}{d\xi} = \dfrac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{d\xi^q} \qquad (q = 2, 3, \ldots, r) \end{cases}$$

zeigt unmittelbares Differenzieren

$$\gamma_1(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,,$$

$$\gamma_2(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_2(\xi) + \beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^2\,,$$

$$\gamma_3(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_3(\xi) + 3\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_2(\xi) + \beta_3(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^3$$

und

$$(2) \quad \gamma_4(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_4(\xi) + \beta_4(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^4 + 4\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_3(\xi) + \\ + 6\beta_3(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^2\,\alpha_2(\xi) + 3\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_2(\xi)^2\,.$$

(In Formeln bezüglich des eindimensionalen Raumes bedeuten die oberen Indizes durchwegs Exponenten.)

Im allgemeinen gilt (S. Gołąb 1949 [2], J. Aczél 1956 [1], 1958 [1]) der folgende

Hilfssatz 1. *Es gilt mit den Bezeichnungen* (1)

$$(3) \qquad \gamma_1(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,,$$

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_2(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_2(\xi) + \beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^2\,, \\ \gamma_3(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_3(\xi) + 3\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_2(\xi) + \beta_3(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^3 \end{cases}$$

und für jedes $q \geqslant 4$

$$(5) \quad \gamma_q(\xi) = \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_q(\xi) + \beta_q(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^q + q\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_{q-1}(\xi) + \\ + \binom{q}{2}\beta_{q-1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-2}\,\alpha_2(\xi) + \widetilde{\gamma}_q[\alpha_1(\xi),\,\alpha_2(\xi),\,\ldots,\,\alpha_{q-2}(\xi),\,\beta_1(\bar{\xi}),\,\beta_2(\bar{\xi}),\ldots,\,\beta_{q-2}(\bar{\xi})]$$

mit

$$(6) \quad \begin{aligned} \widetilde{\gamma}_q &= \alpha_2(\xi)\,\delta_2 + \alpha_3(\xi)\,\delta_3 + \ldots + \alpha_{q-2}(\xi)\,\delta_{q-2} \\ &= \beta_2(\bar{\xi})\,\varepsilon_2 + \beta_3(\bar{\xi})\,\varepsilon_3 + \ldots + \beta_{q-2}(\bar{\xi})\,\varepsilon_{q-2}\,, \end{aligned}$$

wo δ_p *und* ε_p $(p = 2, 3, \ldots, q-2)$ *Polynome von* $\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi), \ldots, \alpha_{q-2}(\xi)$, $\beta_1(\bar{\xi}), \beta_2(\bar{\xi}), \ldots, \beta_{q-2}(\bar{\xi})$ *bzw. von* $\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi), \ldots, \alpha_{q-2}(\xi)$ *sind.*

Beweis. (3) und (4) werden — wie erwähnt — durch Differenzieren verifiziert. Wie die Formel (2) zeigt, gelten die Formel (5), (6) für $q = 4$ $(\widetilde{\gamma}_4 = 3\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_2(\xi)^2)$. Wir vollbringen den Beweis durch Induktion. Vorausgesetzt, daß die Gleichungen (5)-(6) für ein q schon gültig sind, derivieren wir (5) bezüglich ξ:

$$\begin{aligned} \gamma_{q+1}(\xi) = \frac{d\gamma_q(\xi)}{d\xi} &= \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_{q+1}(\xi) + \beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_q(\xi) + \\ &+ q\beta_q(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-1}\,\alpha_2(\xi) + \beta_{q+1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q+1} + q\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_q(\xi) + \\ &+ q\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_2(\xi)\,\alpha_{q-1}(\xi) + q\beta_3(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^2\,\alpha_{q-1}(\xi) + \\ &+ \binom{q}{2}\beta_{q-1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-2}\,\alpha_3(\xi) + \binom{q}{2}(q-2)\,\beta_{q-1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-3}\,\alpha_2(\xi)^2 + \\ &+ \binom{q}{2}\beta_q(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-1}\,\alpha_2(\xi) + \frac{d\widetilde{\gamma}_q}{d\xi} \\ &= \beta_1(\bar{\xi})\,\alpha_{q+1}(\xi) + \beta_{q+1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q+1} + (q+1)\,\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)\,\alpha_q(\xi) + \\ &+ \binom{q+1}{2}\beta_q(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-1}\,\alpha_2(\xi) + \\ &+ \widetilde{\gamma}_{q+1}[\alpha_1(\xi),\,\alpha_2(\xi),\,\ldots,\,\alpha_{q-1}(\xi),\,\beta_1(\bar{\xi}),\,\beta_2(\bar{\xi}),\,\ldots,\,\beta_{q-1}(\bar{\xi})]\,, \end{aligned}$$

wo (vgl. (6))

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}_{q+1}[\alpha_1(\xi),\,\alpha_2(\xi),\,\ldots,\,\alpha_{q-1}(\xi),\,\beta_1(\bar{\xi}),\,\beta_2(\bar{\xi}),\,\ldots,\,\beta_{q-1}(\bar{\xi})] \\ &= \alpha_2(\xi)\left[q\beta_2(\bar{\xi})\,\alpha_{q-1}(\xi) + \binom{q}{2}(q-2)\,\beta_{q-1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-3}\,\alpha_2(\xi) + \frac{d\delta_2}{d\xi}\right] + \\ &\quad + \alpha_3(\xi)\left[\binom{q}{2}\beta_{q-1}(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^{q-2} + \frac{d\delta_3}{d\xi} + \delta_2\right] + \ldots \\ &\quad + \alpha_{q-2}(\xi)\left[\frac{d\delta_{q-2}}{d\xi} + \delta_{q-3}\right] + \alpha_{q-1}(\xi)\,[q\beta_3(\bar{\xi})\,\alpha_1(\xi)^2 + \delta_{q-2}] \\ &= \beta_2(\bar{\xi})\left[q\alpha_2(\xi)\,\alpha_{q-1}(\xi) + \frac{d\varepsilon_2}{d\xi}\right] + \beta_3(\bar{\xi})\left[q\alpha_1(\xi)^2\alpha_{q-1}(\xi) + \frac{d\varepsilon_3}{d\xi} + \alpha_1(\xi)\,\varepsilon_2\right] + \ldots \\ &\quad + \beta_{q-2}(\bar{\xi})\left[\frac{d\varepsilon_{q-2}}{d\xi} + \alpha_1(\xi)\,\varepsilon_{q-3}\right] + \\ &\quad + \beta_{q-1}(\bar{\xi})\left[\binom{q}{2}\alpha_1(\xi)^{q-2}\,\alpha_3(\xi) + \binom{q}{2}(q-2)\,\alpha_1(\xi)^{q-3}\,\alpha_2(\xi)^2 + \alpha_1(\xi)\,\varepsilon_{q-2}\right] \end{aligned}$$

ist, und diese sind Formeln der Gestalt (5)-(6), womit der Hilfssatz 1 bewiesen wurde.

Insbesondere bleibt der Hilfssatz 1 auch im fixen Punkte $\xi = \underset{0}{\xi}$ gültig, so daß in den Formeln (5), (6) die Klammern mit $\xi, \bar{\xi}$ auch weggelassen werden können. Speziell folgen aus dem Hilfssatz 1 die folgenden

KOROLLARIEN. 1. *Falls in einem Punkte* ($\xi = \underset{0}{\xi}$) $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-2} = 0$ ($r \geqslant 3$) *bestehen, so gelten dort*

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \gamma_{r-2} = \beta_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + r\beta_2\alpha_{r-1}.$$

2. *Falls in einem Punkte* $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\beta_2 = \ldots = \beta_{r-2} = 0$ ($r \geqslant 3$) *bestehen, so gelten dort*

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ \gamma_{r-2} = \alpha_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + \binom{r}{2}\beta_{r-1}\alpha_2.$$

3. *Falls in einem Punkte* $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ ($r \geqslant 2$) *bestehen, so gelten dort*

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_2\alpha_1^2,\ \ldots,\ \gamma_{r-1} = \beta_{r-1}\alpha_1^{r-1},\ \gamma_r = \beta_1\alpha_r + \beta_r\alpha_1^r.$$

4. *Falls in einem Punkte* $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_{r-1} = 0$ ($r \geqslant 2$) *bestehen, so gelten dort*

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_1\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma_{r-1} = \beta_1\alpha_{r-1},\ \gamma_r = \beta_1\alpha_r + \beta_r\alpha_1^r.$$

5. *Falls in einem Punkte* $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_{r-1} = 0$ ($r \geqslant 2$) *bestehen, so gelten dort*

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1, \qquad \gamma_2 = \ldots = \gamma_{r-1} = 0, \qquad \gamma_r = \beta_1\alpha_r + \beta_r\alpha_1^r.$$

(Für $r = 3$ braucht in 1, 2, für $r = 2$ in 3, 4, 5 keine 0 eingesetzt werden.)

§ 2. Ein Hilfssatz über Transformationen mit einem additiven Parameter.

(J. Aczél — L. Kalmár — J. G. Mikusiński 1951; J. Aczél 1956 [1], 1958 [1]). Wir beweisen den folgenden

HILFSSATZ 2. *Es sei* $\Omega \in (A, B)$, $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$, $\Psi(\Omega; \alpha) \in (A, B)$ *(A oder B kann auch unendlich sein). Die Funktionalgleichung*

$$\Psi[\Psi(\Omega; \alpha); \beta] = \Psi(\Omega; \alpha + \beta) \tag{7}$$

sei für ein $\Omega = \underset{0}{\Omega} \in (A, B)$ *und für alle* $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$ *erfüllt, es sei ferner* $\Psi(\Omega; \alpha)$ *stetig in* Ω *für jedes* α *und* $\Psi(\underset{0}{\Omega}; \alpha)$ *stetig;* $\Psi(\Omega; \alpha)$ *sei endlich für kein* $\Omega \in (A, B)$ *konstant in* α. *Dann und nur dann gibt es eine stetige und streng monotone Funktion* $\vartheta(\Omega)$, *die das Intervall* (A, B) *auf* $(-\infty, \infty)$ *abbildet und deren Inverse mit* $\Theta(\alpha)$ *bezeichnet werden soll, für die*

$$\Psi(\Omega; \alpha) = \Theta[\vartheta(\Omega) + \alpha], \quad \Omega \in (A, B), \quad \alpha \in (-\infty, \infty), \tag{8}$$

gültig ist. Insbesondere gilt

$$\Psi(\Omega; 0) = \Omega, \quad \Omega \in (A; B). \tag{9}$$

Die Funktionen (8) *erfüllen die Gleichung* (7) *für alle* $\alpha \in (-\infty, \infty)$ *und für alle* $\Omega \in (A, B)$.

Beweis. (8) erfüllt (7) und (9):

$$\Psi[\Psi(\Omega; \alpha); \beta] = \Theta\{\vartheta[\Psi(\Omega; \alpha)] + \beta\} = \Theta[\vartheta(\Omega) + \alpha + \beta] = \Psi(\Omega; \alpha + \beta),$$
$$\Psi(\Omega; 0) = \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega.$$

Um nun aus (7) auf (8) folgern zu können, definieren wir

$$\Theta(\alpha) \overset{\text{df}}{=} \Psi(\underset{0}{\Omega}; \alpha). \tag{10}$$

Aus (7) folgt mit $\Omega = \underset{0}{\Omega}$

$$\Psi[\Theta(\alpha), \beta] = \Theta(\alpha + \beta). \tag{11}$$

Die Funktion $\Theta(\alpha)$ ist laut unserer Voraussetzungen *stetig und nichtkonstant*. Wir beweisen, daß sie auch *streng monoton* ist. Gäbe es nämlich ein Wertepaar $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ für das

$$\Theta(\varepsilon_1) = \Theta(\varepsilon_2)$$

gilt, so würde es wegen der Stetigkeit auch ein solches Paar *mit beliebig kleinem* $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ geben. Aus (11) folgt aber

$$\Theta[\alpha + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] = \Theta[\varepsilon_2 + (\alpha - \varepsilon_1)] = \Psi[\Theta(\varepsilon_2); \alpha - \varepsilon_1]$$
$$= \Psi[\Theta(\varepsilon_1); \alpha - \varepsilon_1] = \Theta(\varepsilon_1 + \alpha - \varepsilon_1) = \Theta(\alpha),$$

also wäre die Funktion $\Theta(\alpha)$ periodisch mit beliebig kleinen Perioden $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, sie wäre daher konstant in Widerspruch mit unseren Bedingungen. Der Bestimmtheit halber soll $\Theta(\alpha)$ z. B. wachsen.

Wir beweisen, daß

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \Theta(\alpha) = A, \quad \lim_{\alpha \to \infty} \Theta(\alpha) = B$$

ist. Wäre nämlich z. B.

$$\tilde{B} = \lim_{\alpha \to \infty} \Theta(\alpha) < B,$$

also $\tilde{B} \in (A, B)$, so würde aus (11) mit $\alpha \to \infty$ wegen der Stetigkeit von $\Psi(\Omega, \beta)$ in Ω

$$\Psi(\tilde{B}; \beta) \equiv \tilde{B}$$

folgen, im Gegensatz dazu, daß $\Psi(\Omega; \beta)$ bei keinem Ω konstant bleiben darf, wenn sich β ändert. Also ist $\lim_{\alpha \to \infty} \Theta(\alpha) = B$ und ähnlich $\lim_{\alpha \to -\infty} \Theta(\alpha) = A$ und diese Werte können nicht mehr zum Intervall (A, B) gehören, das also offen ist.

Zusammenfassend: $\Theta(\alpha)$ ist stetig, streng monoton und bildet $(-\infty, \infty)$ auf (A, B) ab. Deshalb gibt es für jedes $\Omega \epsilon (A, B)$ genau ein α derart, daß $\Omega = \Theta(\alpha)$. Bezeichnen wir die inverse Funktion von $\Omega = \Theta(\alpha)$ mit $\alpha = \vartheta(\Omega)$, so wird aus (11)

$$\Psi(\Omega; \beta) = \Theta[\vartheta(\Omega) + \beta], \qquad \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega,$$

d. h. (8). Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

§ 3. Allgemeines über den Typus $(1, 1, r)$, $r \geqslant 1$. (Vgl. S. Gołąb 1938 [2], 1946, J. Aczél 1959 [1]). Bei der Untersuchung des Typus $(1, 1, r)$ $(r \geqslant 1)$ (II. 2, 3, 4) machen wir überall die folgende

Voraussetzung T. *Wenn* $\underset{1}{\Omega}$ *und* $\underset{2}{\Omega}$ *zwei Werte aus derselben Objektenmannigfaltigkeit, d. h. zwei Elemente des Definitionsbereiches von* $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$ (vgl. I § 3) *sind, dann gibt es immer eine Koordinatentransformation* $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$ *und damit ein Parameter-r-Tuppel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *derart, dass*

$$\underset{2}{\Omega} = \Phi(\underset{1}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) \qquad (\alpha_1 \neq 0) \tag{12}$$

gilt. (Transitivität, A. Nijenhuis 1952.)

Diese Voraussetzung ermöglicht, daß man im Falle der eindimensionalen Objekten mit einer Komponenten alle Punkte in dem Definitionsbereich der Funktion $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$ bezüglich Ω als Werte desselben Objektes betrachte.

Wir setzen auch voraus, daß Φ *stetig* ist. Diese Voraussetzungen sind gewissermassen einschränkend (vgl. 4), vereinfachen aber die Untersuchungen beträchtlich.

Φ soll natürlich in α_r nicht-konstant (d. h. von *genau* r-ter Klasse) sein. Es werden auch (vgl. I §§ 1-4) die *Fundamentalgleichung*

$$\Phi[\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r); \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r] = \Phi(\Omega; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r),$$
$$\alpha_q = \left.\frac{d^q \bar{\xi}}{d\xi^q}\right|_{\xi = \underset{0}{\xi}}, \qquad \beta_q = \left.\frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{d\bar{\xi}^q}\right|_{\bar{\xi} = \varphi(\underset{0}{\xi})}, \qquad \gamma_q = \left.\frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{d\xi^q}\right|_{\xi = \underset{0}{\xi}}, \tag{13}$$

sowie die *Identitätsbedingung*

$$\Phi(\Omega; 1, 0, \ldots, 0) = \Omega \tag{14}$$

vorausgesetzt.

Der Definitionsbereich der Funktion $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ bezüglich α_1 besteht aus den Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, bezüglich $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ aus der $(r-1)$-ten Kartesischen Potenz des Intervalles $(-\infty, \infty)$.

Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir, daß *der Definitionsbereich bezüglich* Ω *und der Wertevorrat der Funktion* Φ *aus höchstens zwei Intervallen — speziell Punkten — bestehen kann, es aber nicht möglich ist, dass der eine Bestandteil ein Intervall von nicht-verschwindender Länge, der andere dagegen ein Punkt sei.*

Aus der Voraussetzung T folgt vorerst offenbar, daß *der Definitionsbereich von* $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *bezüglich* Ω *mit dem Wertevorrat von jedem* $\Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *identisch ist.* Da aber Φ als stetig vorausgesetzt wurde und der Definitionsbereich von Φ bezüglich $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ aus zwei r-dimensionalen Gebieten $(\alpha_1 \gtreqless 0)$ besteht, muß auch der Wertevorrat aus höchstens zwei zusammenhängenden eindimensionalen Mengen, d. h. aus höchstens zwei Intervallen bestehen; das war unsere erste Behauptung.

Wegen (14) und der Stetigkeit *liegt* $\Phi(\Omega; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *für* $\alpha_1 > 0$ *immer in demselben Intervall wie* Ω.

Besteht der Definitionsbereich aus zwei verschiedenen Intervallen (A, B) *und* $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$, *so folgt aus* (14) *und aus der Stetigkeit von* Φ *wegen der Voraussetzung* T

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \,\epsilon\, (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}) \quad \textit{für alle} \\ \qquad\qquad \Omega \,\epsilon\, (A, B), \; \alpha_1 < 0, \; \alpha_2, \ldots, \alpha_r \,\epsilon\, (-\infty, \infty), \\ \Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \,\epsilon\, (A, B) \quad \textit{für alle} \\ \qquad\qquad \Omega \,\epsilon\, (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}), \; \alpha_1 < 0, \; \alpha_2, \ldots, \alpha_r \,\epsilon\, (-\infty, \infty). \end{array}\right. \tag{15}$$

Denn wäre für ein Wertesystem $\underset{0}{\Omega} \,\epsilon\, (A, B)$, $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r \,\epsilon\, (-\infty, \infty)$

$$\Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \,\epsilon\, (A, B),$$

so würde wegen der Stetigkeit $\Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ für *beliebige* $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in (A, B) liegen. Aus (14) und aus der Stetigkeit folgt aber, daß $\Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ auch für beliebige $\alpha_1 > 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in (A, B) liegt. Dies wäre aber mit der Voraussetzung T in Widerspruch. Also gilt (15).

Bestände der Definitionsbereich aus einem Intervall (A, B) und aus einem Punkte $\overset{0}{A} \notin (A, B)$, so würde dergestalt

$$\Phi(\Omega; -1, 0, \ldots, 0) = \overset{0}{A} \qquad \textit{für alle} \qquad \Omega \,\epsilon\, (A, B)$$

gelten.

Aus (13), (14) und aus dem Korollar 5 des § 1 folgt aber für *jedes* $\Omega \in (A, B)$

$$\Omega = \Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0) = \Phi[\Phi(\Omega; -1, 0, \dots, 0); -1, 0, \dots, 0]$$
$$= \Phi(\overset{0}{A}; -1, 0, \dots, 0),$$

was aber nur dann möglich ist, falls auch das Intervall (A, B) aus einem einzigen Punkte besteht, und das war unsere zweite Behauptung.

Bestehen Definitionsbereich und Wertevorrat aus einem einzigen Punkte A, so ist die Transformationsformel

$$\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \equiv \Omega,$$

das Objekt also ein *Skalar* (I § 3). Dies erfüllt für *kein* $r \geqslant 1$ die Voraussetzung, daß Φ in α_r nicht-konstant sei, es ist ein nicht-differentielles Objekt des Typus $(1, 1, 0)$. (Vgl. auch 1 § 1.)

Besteht der Definitionsbereich aus zwei Punkten $A \neq \overset{0}{A}$, so folgt aus (14) und aus der Voraussetzung T sowie aus der Stetigkeit von Φ

$$\Phi(A; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = A \quad \text{für alle} \quad \alpha_1 > 0,$$
$$\Phi(A; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \overset{0}{A} \quad \text{für alle} \quad \alpha_1 < 0,$$
$$\Phi(\overset{0}{A}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \overset{0}{A} \quad \text{für alle} \quad \alpha_1 > 0,$$
$$\Phi(\overset{0}{A}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = A \quad \text{für alle} \quad \alpha_1 < 0.$$

Ein Objekt mit solcher Transformationsformel nennt man einen *Biskalar*. Es ist ein Objekt von *genau erster* Klasse.

Im folgenden lassen wir die Skalare und die Biskalare beiseite. Dies bedeutet, daß der Definitionsbereich und Wertevorrat von $\Phi(\Omega; \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ höchstens zwei Intervalle sind, von denen keines sich auf einen Punkt reduziert.

§ 4. Nicht-Existenz von Objekten des Typus $(1, 1, r)$, $r \geqslant 4$.

(J. S. Dubnov 1949, J. E. Pensov 1946, 1950 [2], S. Gołąb 1948 [1], 1949 [2], J. Aczél 1956 [1], 1958 [1].) Wir beschränken uns vorläufig auf *ein* Intervall (A, B) des Definitionsbereiches, falls deren *zweie* sind. Falls der Definitionsbereich aus *einem* einzigen Intervall besteht, so nennen wir dieses (A, B). Wegen (14), (15) und wegen der Stetigkeit von Φ *ist im letzteren Fall auch der Wertevorrat von* $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ *bei beliebigem* $\Omega \in (A, B)$ *in* (A, B) *enthalten, während im ersteren Falle der Wertevorrat von* $\Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ $(\underset{0}{\Omega} \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}))$ *für* $\alpha_1 > 0$ *in* (A, B) *für* $\alpha_1 < 0$ *in* $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ *liegt.* Im weiteren setzen wir vorläufig $r \geqslant 2$ voraus.

Um über die Struktur von $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ näheres zu erfahren, setzen wir in (13) $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \dots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \dots = \beta_{r-1} = 0$ ein. Aus dem Korollar 5 des § 1 folgt

$$\Phi[\Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha_r); 1, 0, \dots, 0, \beta_r] = \Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha_r + \beta_r). \tag{16}$$

Hier ist $\Omega \in (A, B)$, $\Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha_r) \in (A, B)$ wenn α_r das Intervall $(-\infty, \infty)$ durchläuft und laut Voraussetzung ist $\Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha_r)$ stetig in Ω und α_r. Wir beweisen, daß $\Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha)$ für kein $\Omega \in (A, B)$ konstant ist. Wäre es nämlich für ein $\underset{0}{\Omega} \in (A, B)$, $\underset{1}{\Omega} = \Phi(\underset{0}{\Omega}; 1, 0, \dots, \alpha)$ konstant, so würde mit $\alpha = -\alpha_r/\alpha_1$ für *beliebige* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2, \dots, \alpha_r \in (-\infty, \infty)$ aus der Gleichung (13) und aus dem Korollar 3 folgen, daß

$$\Phi(\underset{1}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = \Phi[\Phi(\underset{0}{\Omega}; 1, 0, \dots, 0, \alpha); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r]$$
$$= \Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_1\alpha + \alpha_r) = \Phi(\underset{0}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, 0)$$

von α_r *unabhängig ist.* Also würde

$$\Phi(\underset{1}{\Omega}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = \Phi(\underset{1}{\Omega}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}, 0) \tag{17}$$

für *beliebige* $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}, \gamma_r$ gelten. Laut der Voraussetzung T gäbe es aber für jedes *beliebige* Ω Parameter $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ derart, daß $\Omega = \Phi(\underset{1}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$ und daher würde mit *beliebigen* $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r \in (-\infty, \infty)$ wegen (13), (17) und Hilfssatz 1

$$\Phi(\Omega; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r) = \Phi[\Phi(\underset{1}{\Omega}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r); \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r]$$
$$= \Phi(\underset{1}{\Omega}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}, \gamma_r) = \Phi(\underset{1}{\Omega}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}, 0)$$
$$= \Phi\Big\{\Omega; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, -\alpha_1^{-r}\Big[\beta_1\alpha_r + r\beta_2\alpha_1\alpha_{r-1} +$$
$$+ \binom{r}{2}\beta_{r-1}\alpha_1^{r-2}\alpha_2 + \tilde{\gamma}_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-2}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-2})\Big]\Big\}$$

gelten, d. h. $\Phi(\Omega; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r)$ wäre für *beliebige* $\Omega, \beta_1 \neq 0, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ von β_r unabhängig, d. h. Ω wäre von höchstens $(r-1)$-ter Klasse entgegen unserer Voraussetzung, daß Ω ein Objekt von genau r-ter Klasse ist.

So erfüllt die Funktion $\Psi(\Omega; \alpha) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha)$ alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 und die allgemeine Lösung von (16) ist

$$\Phi(\Omega; 1, 0, \dots, 0, \alpha) = \Psi(\Omega; \alpha) = \Theta[\vartheta(\Omega) + \alpha], \tag{18}$$
$$\Omega \in (A, B), \quad \alpha \in (-\infty, \infty).$$

Die stetige und streng monotone Funktion Θ *bildet* $(-\infty, \infty)$ *in* (A, B) *ab.*

So erhielten wir (18) als *die Transformationsformel der Objekte des Typus* $(1, 1, r)$ $(r \geqslant 2)$ *unter dem Untergruppoid* $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ *von Koordinatentransformationen.*

Setzen wir in (13) $\alpha_1 = 1$ sowie

$$\beta_1 = 1\,, \quad \beta_2 = \ldots = \beta_{r-1} = 0\,,$$

bzw.

$$\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0\,, \quad \alpha_r = -\beta_r/\beta_1$$

ein, so erhalten wir mit Bezugnahme auf die Korollarien 4 bzw. 3

$$(19) \quad \Theta\{\vartheta[\Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)] + \beta_r\} = \Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \beta_r)$$

bzw.

$$\Phi\left\{\Theta\left[\vartheta(\Omega) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right]; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r\right\} = \Phi(\Omega; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, 0) \in (A, B)\,.$$

Wir führen in diese letzte Gleichung die Bezeichnungen

$$\tilde{\Omega} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Theta\left[\vartheta(\Omega) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right] \in (A, B)\,, \qquad \Omega = \Theta\left[\vartheta(\tilde{\Omega}) + \frac{\beta_r}{\beta_1}\right],$$

$$(20) \qquad \mu(\omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \vartheta\{\Phi[\Theta(\omega); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, 0]\}$$

ein und erhalten

$$\Phi(\tilde{\Omega}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r) = \Theta\left\{\mu\left[\vartheta(\tilde{\Omega}) + \frac{\beta_r}{\beta_1}; \beta_1, \beta_2, , \ldots, \beta_{r-1}\right]\right\},$$

d. h.

$$(21) \quad \Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$$
$$= \Theta\left\{\mu\left[\vartheta(\Omega) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}\right]\right\} \in (A, B)\,, \qquad [\Omega \in (A, B)]\,.$$

Falls es zwei verschiedene Definitionsintervalle gibt, so gelten — im Einklang mit unseren Bemerkungen im vorigen Paragraphen und am Anfang dieses Paragraphen — (20) *und* (21) *nur für* $\alpha_1 > 0$. Damit haben wir ins Klare gebracht, wie die Funktion Φ von α_r abhängt.

Wir setzen (21) mit $\alpha_1 = 1$ in (19) ein und erhalten

$$\mu[\vartheta(\Omega) + \alpha_r; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}] + \beta_r = \mu[\vartheta(\Omega) + \alpha_r + \beta_r; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}]$$

oder, mit $\vartheta(\Omega) + \alpha_r = 0$, $\beta_r = \pi$,

$$\mu(\pi; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}) = \pi + \mu(0; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1})\,.$$

Dies bestimmt wegen (21) letzten Endes wie $\Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ von α_r und $\Omega \in (A, B)$ abhängt. Tatsächlich erhalten wir hieraus wegen (21)

$$\Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = \Theta[\vartheta(\Omega) + \alpha_r + \mu(0; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1})]\,.$$

Dies soll wieder in (13) mit $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$ eingesetzt werden:

$$\vartheta(\Omega) + \alpha_r + \mu(0; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}) + \beta_r + \mu(0; 1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1})$$
$$= \vartheta(\Omega) + \gamma_r + \mu(0; 1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1})\,.$$

Von hieran setzen wir $r \geqslant 3$ voraus und substituieren $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-2} = 0$ $(\alpha_{r-1} \neq 0, \beta_2 \neq 0)$, bzw. $\beta_2 = \ldots = \beta_{r-2} = 0$ $(\beta_{r-1} \neq 0, \alpha_2 \neq 0)$. Aus den Korollarien 1, bzw. 2 folgen

$$\mu(0; 1, 0, \ldots, 0, \alpha_{r-1}) + \mu(0; 1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-2}, \beta_{r-1})$$
$$= r\beta_2\alpha_{r-1} + \mu(0; 1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-2}, \alpha_{r-1} + \beta_{r-1})$$

bzw.

$$\mu(0; 1, 0, \ldots, 0, \beta_{r-1}) + \mu(0; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1})$$
$$= \binom{r}{2}\alpha_2\beta_{r-1} + \mu(0; 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1} + \beta_{r-1})\,.$$

Der Vergleich dieser Gleichungen zeigt, daß

$$r = \binom{r}{2}\,, \qquad \text{d. h.} \qquad r = 3$$

ist und daher $r \geqslant 4$ nicht vorkommen kann. So erhielten wir den folgenden

SATZ. *Ist* $\Phi(\Omega; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *stetig für* $\alpha_q \in (-\infty, \infty)$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$, $\alpha_1 \neq 0$ *und nicht-konstant in* α_r *und sind die Voraussetzungen* T *und* (14) *erfüllt, so kann die Funktionalgleichung*

$$\Phi[\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r); \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r] = \Phi(\Omega; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r)$$

$$(13) \qquad \alpha_q = \left.\frac{d^q\bar{\xi}}{d\xi^q}\right|_{\xi=\xi_0}, \qquad \beta_q = \left.\frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{d\bar{\xi}^q}\right|_{\bar{\xi}=\varphi(\xi_0)}, \qquad \gamma_q = \left.\frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{d\xi^q}\right|_{\xi=\xi_0}$$

nur für $r \leqslant 3$ *Lösungen haben.*

Es gibt also für $r \geqslant 4$ *kein geometrisches Objekt des Typus* $(1, 1, r)$ *mit stetiger Transformationsformel unter der Voraussetzung* T.

Wir haben aber gezeigt, dass es solche Objekte unter dem Untergruppoid $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ der Koordinatentransformationen gibt. In dem Abschnitte 3 werden wir zeigen, daß es solche Objekte auch unter dem Untergruppoid $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ gibt. Dazu werden wir die Formel (21) dieses Paragraphen brauchen. Wir betonen, daß *die Formel* (21) *für* $r \geqslant 2$, $\Omega \in (A, B)$ *und falls* (A, B) *den ganzen Definitionsbereich erschöpft, für alle* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r \in (-\infty, \infty)$, *falls dieser Bereich dagegen noch eine Komponente hat, so für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, $\alpha_r \in (-\infty, \infty)$ *gültig ist.*

3. Typus $(1,1,2)$ und Typus $(1,1,3)$

§ 1. Objekte des Typus $(1,1,r)$, $r \geqslant 2$, unter dem Untergruppoid $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$, $\varphi'(\xi) \neq 0$, $\varphi''(\underset{0}{\xi}) = \ldots = \varphi^{(r-1)}(\underset{0}{\xi}) = 0$ der Koordinatentransformationen. (Vgl. S. Gołąb 1948 [1], 1949 [2], J. Aczél 1956 [1], 1958 [1], 1959 [1].) Die Ergebnisse des § 4 des vorigen Abschnittes über die Gestalt der Funktion $\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r)$ $(r \geqslant 2)$ sind außer dem dort erzielten negativen Ergebnis auch geeignet, die Objekte unter dem Untergruppoid $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ der Koordinatentransformationen zu bestimmen. Wir erinnern an die Formeln 2 (13), 2 (14) und 2 (21) des vorigen Abschnittes:

(1) $$\Phi[\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r);\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{r-1},\beta_r] = \Phi(\Omega;\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{r-1},\gamma_r)$$

für alle $\Omega,\ \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r,\ \beta_1 \neq 0,\ \beta_2,\ldots,\beta_{r-1},\beta_r$,

(2) $$\Phi(\Omega;1,0,\ldots,0) = \Omega \quad \textit{für alle} \quad \Omega,$$

und

(3) $$\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r) = \Theta\left\{\mu\left[\vartheta(\Omega) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1};\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1}\right]\right\} \in (A,B),$$
$$r \geqslant 2, \quad \Omega \in (A,B), \quad \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega$$

für alle $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ falls der Definitionsbereich von Φ bezüglich Ω nur aus (A,B) besteht, dagegen nur für alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ falls es noch ein zweites Definitionsintervall $(\overset{0}{A},\overset{0}{B})$ gibt. $\vartheta(\Omega)$ bildet (A,B) auf $(-\infty,\infty)$ in stetiger und streng monotoner Weise ab.

Aus (1) wird für $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \ldots = \beta_{r-1} = 0$ laut des Korollars 5 (2 § 1)

(4) $$\Phi[\Phi(\Omega;\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r);\beta_1,0,\ldots,0,\beta_r] = \Phi(\Omega;\beta_1\alpha_1,0,\ldots,0,\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r)$$

für alle $\Omega,\ \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_r,\ \beta_1 \neq 0,\ \beta_r \quad (r \geqslant 2)$.

Mit der Bezeichnung

$$\varrho(\omega;\alpha_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \mu(\omega;\alpha_1,0,\ldots,0)$$

wird aus (3) für $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$

(5) $$\Phi(\Omega;\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r) = \Theta\left\{\varrho\left[\vartheta(\Omega)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1};\alpha_1\right]\right\}.$$

Aus (2) folgt daher

(6) $$\varrho(\omega;1) = \omega.$$

Wir setzen (5) in (4) ein und erhalten

$$\Theta\left(\varrho\left\{\varrho\left[\vartheta(\Omega)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1};\alpha_1\right]+\frac{\beta_r}{\beta_1};\beta_1\right\}\right) = \Theta\left\{\varrho\left[\vartheta(\Omega)+\frac{\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r}{\beta_1\alpha_1};\beta_1\alpha_1\right]\right\}$$

oder mit den Bezeichnungen $\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \vartheta(\Omega)+\alpha_r/\alpha_1$, $\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_r/\beta_1$:

(7) $$\varrho[\varrho(\tau;\alpha_1)+\sigma;\beta_1] = \varrho(\tau+\sigma\alpha_1^{r-1};\beta_1\alpha_1).$$

Unsere Aufgabe ist es, diese Funktionalgleichung zu lösen ($\sigma,\tau \in (-\infty,\infty)$; $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ und im Falle der zwei Definitionsintervallen $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, sonst beliebig).

Es sei hier zuerst $\tau = 0$, $\beta_1 = 1$ gewählt und $\zeta \overset{\mathrm{df}}{=} \sigma\alpha_1^{r-1}$, $\chi(\alpha_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \varrho(0,\alpha_1)$ geschrieben, dann wird wegen (6)

(8) $$\varrho(\zeta;\alpha_1) = \varrho(0;\alpha_1)+\zeta\alpha_1^{1-r} = \chi(\alpha_1)+\zeta\alpha_1^{1-r},$$

womit wir bestimmt haben, wie ϱ von ζ abhängt. Wir substituieren dies wieder in (7):

$$[\tau\alpha_1^{1-r}+\chi(\alpha_1)+\sigma]\beta_1^{1-r}+\chi(\beta_1) = (\tau+\sigma\alpha_1^{r-1})\alpha_1^{1-r}\beta_1^{1-r}+\chi(\beta_1\alpha_1),$$
$$\chi(\alpha_1)\beta_1^{1-r}+\chi(\beta_1) = \chi(\beta_1\alpha_1).$$

Nun ist aber die rechte Seite dieser Gleichung symmetrisch, so daß auch die linke es sein muß:

$$\chi(\alpha_1)\beta_1^{1-r}+\chi(\beta_1) = \chi(\beta_1)\alpha_1^{1-r}+\chi(\alpha_1),$$
$$\chi(\alpha_1)(1-\beta_1^{1-r}) = \chi(\beta_1)(1-\alpha_1^{1-r})$$

und mit $\beta_1 = \delta \neq 1$ (konstant):

$$\chi(\alpha_1) = \frac{\chi(\delta)}{1-\delta^{1-r}}(1-\alpha_1^{1-r}) = \varepsilon(1-\alpha_1^{1-r}) \quad (\varepsilon \text{ eine Konstante}).$$

So ist laut (8)

$$\varrho(\zeta;\alpha_1) = (\zeta-\varepsilon)\alpha_1^{1-r}+\varepsilon.$$

Diese Funktion erfüllt die Funktionalgleichung (7) bei jedem beliebigen ε und so stellt sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung dar. Aus (5) folgt endlich

$$\Phi(\Omega;\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r) = \Theta\{[\vartheta(\Omega)-\varepsilon]\alpha_1^{1-r}+\alpha_r\alpha_1^{-r}+\varepsilon\}.$$

Wir führen nun die Bezeichnung

(9) $$\lambda(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \vartheta(\Omega)-\varepsilon, \quad \Lambda(\tau) = \Theta(\tau+\varepsilon)$$

ein. *Mit* $\vartheta(\Omega)$ *bildet auch* $\lambda(\Omega)=\vartheta(\Omega)-\varepsilon$ *das Intervall* (A, B) *in stetiger und streng monotoner Weise auf* $(-\infty, \infty)$ *ab.* So gelangen wir endlich zu

$$(10)\qquad \Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right), \qquad \lambda[\Lambda(\Omega)] = \Omega\,.$$

Diese Funktion erfüllt die Funktionalgleichungen (2) und (4).

Wir haben aber (10) nur im Falle eines einzigen Definitionsintervalles für alle $\Omega \in (A, B)$, $\alpha_1 \neq 0$ bewiesen, im Falle zweier verschiedenen Definitionsintervallen nur für $\Omega \in (A, B)$, $\alpha_1 > 0$ (in beiden Fällen für alle α_r).

In dem zweiten Falle gibt es aus gleichen Gründen *eine stetige und streng monotone Funktion* $\overset{0}{\lambda}(\Omega)$, *die das Intervall* $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ *in* $(-\infty, \infty)$ *abbildet* und deren inverse Funktion wir mit $\overset{0}{\Lambda}(\tau)$ bezeichen, so daß

$$(11)\qquad \Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \overset{0}{\Lambda}\left(\frac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) \quad \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}),\ \alpha_1 > 0$$

gilt. Um nun auf *negative* α_1 übergehen zu können, schreiben wir

$$(12)\qquad \Delta(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\Omega; -1, 0, \dots, 0, 0) \in \begin{cases} (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}) \\ (A, B) \end{cases} \quad \text{für} \quad \Omega \in \begin{cases} (A, B) \\ (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}) \end{cases}.$$

Aus (4) folgt für negative α_1

$$\begin{aligned}\Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) &= \Phi[\Phi(\Omega; -\alpha_1, 0, \dots, 0, -\alpha_r); -1, 0, \dots, 0, 0] \\ &= \Phi[\Phi(\Omega; -1, 0, \dots, 0, 0); -\alpha_1, 0, \dots, 0, (-1)^r \alpha_r],\end{aligned}$$

d. h. wegen (10), (11) und (12) z. B. für $\Omega \in (A, B)$

$$\begin{aligned}(13)\qquad \Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) &= \Delta\left\{\Lambda\left[(-1)^{r-1}\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+(-1)^{r-1}\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right]\right\} \\ &= \overset{0}{\Lambda}\left\{(-1)^{r-1}\frac{\overset{0}{\lambda}[\Delta(\Omega)]}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right\}, \qquad \Omega \in (A, B),\ \alpha_1 < 0\,.\end{aligned}$$

Setzen wir hier

$$\alpha_r = (-1)^{r-1}\alpha_1^r \lambda(\Pi) \qquad (\Pi \in (A, B) \text{ sonst beliebig})$$

ein, dann erhalten wir

$$(14)\qquad \Delta\left\{\Lambda\left[(-1)^{r-1}\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\lambda(\Pi)\right]\right\} = \overset{0}{\Lambda}\left\{(-1)^{r-1}\frac{\overset{0}{\lambda}[\Delta(\Omega)]}{\alpha_1^{r-1}}+(-1)^{r-1}\lambda(\Pi)\right\},$$
$$\alpha_1 < 0, \qquad \Omega \in (A, B), \qquad \Pi \in (A, B)\,.$$

Da $\lambda(\Omega)$ jeden Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, gibt es ein $\underset{0}{\Omega} \in (A, B)$, für das

$$\lambda(\underset{0}{\Omega}) = 0$$

gilt. Wenn wir (14) mit diesem $\underset{0}{\Omega}$ aufschreiben, so ist die linke Seite unabhängig von α_1, deshalb muß es auch die rechte sein, d. h. $\overset{0}{\lambda}[\Delta(\underset{0}{\Omega})] = 0$ und (14) geht in

$$(15)\qquad \Delta(\Pi) = \overset{0}{\Lambda}[(-1)^{r-1}\lambda(\Pi)], \qquad \Pi \in (A, B),$$

über. (Dasselbe würde aus (14) auch mit $\alpha_1 \to -\infty$ folgen.) Setzen wir diese Formel in (13) ein, so erhalten wir

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \overset{0}{\Lambda}\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) \quad \text{für} \quad \Omega \in (A, B),\ \alpha_1 < 0\,.$$

Ganz ähnlich gilt auch

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \Lambda\left(\frac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) \quad \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}),\ \alpha_1 < 0\,.$$

Das so erhaltene Objekt mit der Transformationsformel

$$(16)\qquad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \begin{cases} \Lambda\left(\dfrac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\dfrac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B),\ \alpha_1 > 0, \\ \overset{0}{\Lambda}\left(\dfrac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\dfrac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}),\ \alpha_1 > 0, \\ \overset{0}{\Lambda}\left(\dfrac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\dfrac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B),\ \alpha_1 < 0, \\ \Lambda\left(\dfrac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\dfrac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}),\ \alpha_1 < 0, \end{cases}$$

$$(\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,,\ \overset{0}{\Lambda}[\overset{0}{\lambda}(\Omega)] = \Omega)$$

erfüllt — wie man sich unmittelbar überzeugt — die Funktionalgleichungen (2), (4) für *alle* Ω, $\alpha_1 \neq 0$, α_r. Dies ist also die allgemeinste Formel im Falle der zwei verschiedenen Definitionsintervallen. Im Falle eines einzigen Definitionsintervalles haben wir (vgl. (10))

$$(17)\qquad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_r) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right) \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)$$
$$\text{für alle} \quad \alpha_1 \neq 0\,, \quad \Omega \in (A, B)\,, \quad \alpha_r \in (-\infty, \infty)$$

als allgemeine Formel gefunden. So haben wir den

Satz 1. *Ist $\Phi(\Omega; a_1, 0, \ldots, 0, a_r)$ eine für alle $a_1 \neq 0$ und für höchstens zwei Ω-Intervalle von nicht-verschwindender Länge definierte stetige Funktion und gibt es kein Ω für das bei jeder Wahl von $a_1 \neq 0$, $\Phi(\Omega; a_1, 0, \ldots, 0, a_r)$ von a_r unabhängig ist, so ist jede Lösung der Funktionalgleichungen* (2) *und* (4) *von einer der Gestalten* (16), (17), *wo λ bzw. $\overset{0}{\lambda}$ stetige und streng monotone Funktionen sind, die (A, B) bzw. $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ auf $(-\infty, \infty)$ abbilden.*

Unter diesen Voraussetzungen sind also die Objekte mit den Transformationsformeln (16), (17) *die allgemeinsten eindimensionalen Objekte der Klasse $r \geqslant 2$ mit einer Komponenten unter dem Untergruppoid $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$, $\varphi'(\underset{0}{\xi}) \neq 0$, $\varphi''(\underset{0}{\xi}) = \ldots = \varphi^{r-1}(\underset{0}{\xi}) = 0$ der Koordinatentransformationen.*

Hier haben wir statt der Voraussetzung T (2 § 3) ihre Konsequenzen bezüglich der Struktur des Definitionsbereiches und bezüglich der Abhängigkeit der Funktion Φ von a_r vorausgesetzt, da die Voraussetzung T, d. h. die Lösbarkeit von $\Phi(\underset{1}{\Omega}; a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r) = \underset{2}{\Omega}$ bei allen $\underset{1}{\Omega}, \underset{2}{\Omega}$ für $r \geqslant 4$ keinen Sinn hat, denn es gibt laut des Satzes des 2 § 4, keine Objekte des Typus $(1, 1, r)$, $r \geqslant 4$, unter dem allgemeinen Gruppoid der Koordinatentransformationen. *Die Voraussetzung* T *kann also nur für $r = 2$ und $r = 3$ verwendet werden.*

§ 2. Objekte zweiter und dritter Klasse. (Vgl. J. S. Dubnov 1949, J. E. Pensov 1946, 1950 [2], S. Gołąb 1946, 1948 [1], J. Aczél 1956 [1], 1958 [1], 1959 [1].) Für $r = 2$ ergibt das Ergebnis des § 1 alle Objekte unmittelbar. (16) und (17) lauten hier:

$$(18)\qquad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega; a_1, a_2) = \begin{cases} \Lambda\left(\dfrac{\lambda(\Omega)}{a_1} + \dfrac{a_2}{a_1^2}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B)\,, \ a_1 > 0 \\ \overset{0}{\Lambda}\left(\dfrac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{a_1} + \dfrac{a_2}{a_1^2}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B})\,, \ a_1 > 0 \\ \overset{0}{\Lambda}\left(\dfrac{\lambda(\Omega)}{a_1} + \dfrac{a_2}{a_1^2}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B)\,, \ a_1 < 0 \\ \Lambda\left(\dfrac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{a_1} + \dfrac{a_2}{a_1^2}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B})\,, \ a_1 < 0\,, \end{cases}$$

$$(\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,, \quad \overset{0}{\Lambda}[\overset{0}{\lambda}(\Omega)] = \Omega)$$

und

$$(19)\quad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega; a_1, a_2) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2}\right) \quad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,, \Omega \in (A, B)\,, \ a_1 \neq 0)\,.$$

Es sei bemerkt, daß die Objekte mit der Transformationsformel (19) mit dem sogen. *Objekte des affinen Zusammenhanges*

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2}\,, \qquad \Pi \in (-\infty, \infty)$$

(vgl. I, § 3, Beispiel 6), äquivalent sind. So haben wir den

Satz 2. *Unter der Voraussetzung* T *gibt es die folgenden eindimensionalen differentialgeometrischen Objekte mit einer Komponenten von genau zweiter Klasse mit stetigen Transformationsformeln und nur diese: Die mit dem Objekte des affinen Zusammenhanges äquivalenten Objekte mit der Transformationsformel* (19), *deren Werte ein Intervall ausfüllen und die Objekte mit der Transformationsformel* (18), *die aus Formeln der vorigen Art zusammengesetzt ist und deren Werte zwei Intervalle ausfüllen. Die Funktionen, die die Äquivalenz erzeugen, sind stetig und streng monoton.*

Die Formel (18) zeigt, daß die Transformation des Objektes Ω folgenderweise geschieht: *Für $\Omega \in (A, B)$, $a_1 > 0$ führen wir mittels $\lambda(\Omega)$ das Intervall (A, B) in $(-\infty, \infty)$ über, transformieren dort gemäß der Formel des affinen Zusammenhanges und führen das Ergebnis mittels Λ in (A, B) zurück. Für $\Omega \in (A, B)$, $a_1 < 0$ führen wir (A, B) wieder mit $\lambda(\Omega)$ in $(-\infty, \infty)$, transformieren dort mittels der Formel des affinen Zusammenhanges, führen aber das Ergebnis mittels $\overset{0}{\Lambda}$ in $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ über. Ähnlich verfahren wir auch für $\Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$.*

Die Transformationsformel (18) *läßt sich übrigens auch in die Gestalt*

$$\bar{\Omega} = \tilde{\Lambda}\{|\tilde{\lambda}(\Omega)|^{1/a_1} e^{a_2/a_1^2} \operatorname{sg}[\tilde{\lambda}(\Omega)\, a_1]\}\,, \qquad \tilde{\lambda}(\Omega) \neq 0\,,$$

schreiben, so daß die Objekte mit dieser Transformationsformel mit dem Objekt

$$\bar{\Pi} = |\Pi|^{1/a_1} e^{a_2/a_1^2} \operatorname{sg}(\Pi a_1)\,, \qquad \Pi \neq 0\,,$$

äquivalent sind, wo die Funktionen $\tilde{\lambda}(\Omega)$, die die Äquivalenz erzeugen, eindeutig umkehrbar sind und aus je zwei stetigen streng monotonen Teilen bestehen. Dieses Objekt hat bis jetzt keine praktische Bedeutung gefunden.

Für Objekte dritter Klasse verwenden wir die Formel (10), die für $r = 3$ folgenderweise lautet:

$$(20)\qquad \Phi(\Omega; a_1, 0, a_3) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{a_1^2} + \frac{a_3}{a_1^3}\right)\,, \qquad \Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,,$$

und die Formel (3), die für $r = 3$ mit

$$(9)\qquad \lambda(\Omega) = \vartheta(\Omega) - \varepsilon\,, \qquad \Lambda(\tau) = \Theta(\tau + \varepsilon)$$

und mit

$$\chi(\omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \mu(\omega+\varepsilon;\, \alpha_1,\, \alpha_2)-\varepsilon$$

in

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \Lambda\left\{\chi\left[\lambda(\Omega)+\frac{\alpha_3}{\alpha_1},\, \alpha_1,\, \alpha_2\right]\right\} \tag{21}$$

übergeht. *Diese Formeln sind also ebenfalls im Falle eines einzigen Definitionsintervalles für alle* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2, \alpha_3, \Omega$, *im Falle zweier Definitionsintervallen dagegen nur für alle* $\Omega \in (A, B)$, $\alpha_1 > 0$, α_2, α_3 *gültig.*

Die Fundamentalgleichung (1) lautet für $r = 3$ wegen 2 (3), 2 (4)

$$\begin{aligned} &\Phi[\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3);\, \beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3] \\ &\quad = \Phi(\Omega;\, \beta_1\alpha_1,\, \beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2,\, \beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_1\alpha_2+\beta_3\alpha_1^3) \\ &\qquad \textit{für alle} \quad \alpha_1 \neq 0\,,\ \alpha_2,\, \alpha_3,\ \beta_1 \neq 0\,,\ \beta_2,\, \beta_3,\ \Omega\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Wir verwenden diese Gleichung um die Formeln (20) und (21) zusammenzukoppeln.

Wenn wir nämlich in (22) $\alpha_2 = 0$ bzw. $\beta_2 = 0$ setzen (vgl. die Korollarien 3 bzw. 4 in 2 § 1), so erhalten wir mit (20) und (21)

$$\chi\left[\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}+\frac{\beta_3}{\beta_1^3};\, \beta_1,\, \beta_2\right] = \chi\left[\lambda(\Omega)+\frac{\beta_1\alpha_3+\beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1};\, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2\right], \tag{23}$$

bzw.

$$\frac{1}{\beta_1^2}\chi\left[\lambda(\Omega)+\frac{\alpha_3}{\alpha_1};\, \alpha_1,\, \alpha_2\right]+\frac{\beta_3}{\beta_1^3} = \chi\left[\lambda(\Omega)+\frac{\beta_1\alpha_3+\beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1};\, \beta_1\alpha_1,\, \beta_1\alpha_2\right]. \tag{24}$$

Setzen wir in beide Gleichungen

$$\lambda(\Omega)+\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0\,, \quad \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\beta_3\alpha_1^2}{\beta_1}\,, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_3 = -\alpha_1\lambda(\Omega)\,, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\omega}{\alpha_1^2}$$

und in (23)

$$\beta_1 = 1\,, \quad \alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_2\alpha_1^2\,, \quad \text{d. h.} \quad \beta_2 = \frac{\alpha}{\alpha_1^2}\,,$$

bzw. in (24)

$$\alpha_2 = \alpha_1^2\,, \ \tau_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1\alpha_1\,, \ \tau_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1\alpha_2 = \beta_1\alpha_1^2\,, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1},\ \alpha_2 = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2,\ \beta_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_2},$$

dann gelangen wir zu

$$\chi(\omega;\, \alpha_1,\, \alpha) = \chi\left(\frac{\omega}{\alpha_1^2};\, 1,\, \frac{\alpha}{\alpha_1^2}\right), \tag{25}$$

bzw. zu

$$\chi(\omega;\, \tau_1,\, \tau_2) = \frac{\omega}{\tau_1^2}+\frac{\tau_2^2}{\tau_1^4}\chi\left[0;\, \frac{\tau_2}{\tau_1},\, \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2\right] \tag{26}$$

oder durch Einsetzen von (25) mit

$$\alpha = \alpha_1^2 = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2$$

in (26) endlich zu

$$\chi(\omega;\, \tau_1,\, \tau_2) = \frac{\omega}{\tau_1^2}+\frac{\tau_2^2}{\tau_1^4}\chi(0;\, 1,\, 1) = \frac{\omega}{\tau_1^2}+\delta\,\frac{\tau_2^2}{\tau_1^4}\,,$$

wo $\delta \overset{\mathrm{df}}{=} \chi(0;\, 1,\, 1)$ eine Konstante ist. (21) gibt dann

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^2}+\delta\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right). \tag{27}$$

Um die Konstante δ zu bestimmen, setzen wir (27) in (22) z. B. mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ $(\alpha_2 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0)$ ein und erhalten

$$\lambda(\Omega)+\delta\alpha_2^2+\delta\beta_2^2 = \lambda(\Omega)+\delta(\alpha_2^2+2\alpha_2\beta_2+\beta_2^2)+3\alpha_2\beta_2\,,$$

d. h.

$$2\delta+3 = 0\,, \qquad \delta = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Aus (27) wird so

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \Lambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)\,. \tag{28}$$

Alle unsere Betrachtungen und damit auch das Endergebnis (28) ist einerseits im Falle eines einzigen Definitionsintervalles für alle $\alpha_1 \neq 0$, α_2, α_3, Ω, andererseits im Falle zweier verschiedener Definitionsintervallen für alle $\Omega \in (A, B)$, $\alpha_1 > 0$, α_2, α_3 gültig. Im letzteren Falle gilt wieder aus denselben Gründen auch

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \begin{cases} \Lambda\left(\dfrac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B)\,,\ \alpha_1 > 0; \\[2ex] \mathring{\Lambda}\left(\dfrac{\mathring{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\mathring{A}, \mathring{B})\,,\ \alpha_1 > 0; \end{cases}$$

$$\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,, \qquad \mathring{\Lambda}[\mathring{\lambda}(\Omega)] = \Omega\,.$$

Wenn wir diese Formel, sowie (12) und (15) $(r = 3)$ in die aus (22) folgende Gleichung

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \Phi[\Phi(\Omega;\, -\alpha_1,\, -\alpha_2,\, -\alpha_3);\, -1,\, 0,\, 0]$$

einsetzen, erhalten wir

$$\Phi(\Omega;\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = \mathring{\Lambda}\left(\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) \quad \text{für} \quad \Omega \in (A, B)\,,\ \alpha_1 < 0$$

und ähnlich

$$\Phi(\Omega; a_1, a_2, a_3) = \overset{0}{\varLambda}\left(\frac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) \quad \text{fur} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}), \; a_1 < 0 .$$

Die so erhaltenen Funktionen

$$(29)\quad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \varLambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B), \; a_1 > 0 \\ \varLambda\left(\frac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}), \; a_1 > 0 \\ \overset{0}{\varLambda}\left(\frac{\lambda(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (A, B), \; a_1 < 0 \\ \varLambda\left(\frac{\overset{0}{\lambda}(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) & \text{für} \quad \Omega \in (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}), \; a_1 < 0 \end{cases}$$

$$(\varLambda[\lambda(\Omega)] = \Omega, \qquad \overset{0}{\varLambda}[\overset{0}{\lambda}(\Omega)] = \Omega)$$

(im Falle zweier Definitionsintervallen) und

$$(30)\quad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega; a_1, a_2, a_3) = \varLambda\left(\frac{\lambda(\Omega)}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}\right) \qquad (\varLambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)$$

$$\text{für alle} \quad a_1 \neq 0, \; a_2, \; a_3, \; \Omega \in (A, B)$$

(im Falle eines einzigen Definitionsintervalles) erfüllen (22) und (2) für *alle* $a_1 \neq 0$, a_2, a_3, Ω. Wir haben also den

SATZ 3. *Ist $\Phi(\Omega; a_1, a_2, a_3)$ eine für alle $a_1 \neq 0$, a_2, a_3 und für höchstens zwei Ω-Intervalle von nichtverschwindender Länge definierte stetige Funktion, die für kein Ω von a_3 unabhängig ist, so ist jede Lösung der Funktionalgleichungen* (2), (22) *von einer der Gestalten* (29), (30), *wo λ bzw. $\overset{0}{\lambda}$ stetige und streng monotone Funktionen sind, die (A, B) bzw. $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ in $(-\infty, \infty)$ abbilden.*

Nach der Bemerkung, daß die Objekte mit der Transformationsformel (30) mit dem sogen. *Objekte des projektiven Zusammenhanges*

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{a_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3}, \qquad \Pi \in (-\infty, \infty),$$

äquivalent sind, gilt auch der

SATZ 4. *Unter der Voraussetzung* T *gibt es die folgenden eindimensionalen differentialgeometrischen Objekte mit einer Komponenten von genau dritter Klasse mit stetiger Transformationsformel und nur diese: Die mit dem Objekte des projektiven Zusammenhanges äquivalenten Objekte mit der Transformationsformel* (30), *deren Werte ein Intervall ausfüllen, und die Objekte mit der Transformationsformel* (29), *die aus Formeln der vorigen Art zusammengesetzt ist und deren Werte zwei Intervalle ausfüllen. Die Funktionen, die die Äquivalenz erzeugen, sind stetig und streng monoton.*

Die Transformationsformel (29) *läßt sich übrigens auch in der Gestalt*

$$\bar{\Omega} = \tilde{\varLambda}\{|\tilde{\lambda}(\Omega)|^{1/a_1^2} e^{a_3/a_1^3 - (3a_2^2)/(2a_1^4)} \operatorname{sg}[\tilde{\lambda}(\Omega)\, a_1]\},$$

$$\tilde{\lambda}(\Omega) \neq 0, \qquad \tilde{\varLambda}[\tilde{\lambda}(\Omega)] = \Omega$$

schreiben, so daß die Objekte mit dieser Transformationsformel mit dem Objekt

$$\bar{\Pi} = |\Pi|^{1/a_1^2} e^{a_3/a_1^3 - (3a_2^2)/(2a_1^4)} \operatorname{sg}(\Pi a_1), \qquad \Pi \neq 0,$$

äquivalent sind, wo die Funktionen $\tilde{\lambda}(\Omega)$, die die Äquivalenz erzeugen, eindeutig umkehrbar sind und aus je zwei stetigen streng monotonen Teilen bestehen. Auch dieses Objekt scheint aber keine praktische Bedeutung zu haben.

Mit Hilfe der Schwarzschen Ableitung

$$\sigma(z) \overset{\text{df}}{=} \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z''^2}{z'^2}$$

kann die Formel (30) auch so geschrieben werden:

$$\bar{\Omega} = \varLambda\left[\frac{\lambda(\Omega) + \sigma(\varphi)}{(\varphi')^2}\right].$$

Die Formel (29) kann ähnlich wie die Formel (18) (nach dem Satz 2) gedeutet werden.

4. Typus (1, 1, 1)

§ 1. Positive a_1. Laut des in 2 § 3 Gesagten besteht bei den eindimensionalen geometrischen Objekten genau erster Klasse mit einer Komponenten unter der Voraussetzung T der Definitionsbereich bezüglich Ω und der Wertevorrat von $\Phi(\Omega; a_1)$ aus höchstens zwei Intervallen von nichtverschwindender Länge — wenn wir die Biskalare außer Acht lassen. Eines dieser Intervalle sei mit (A, B) bezeichnet und das zweite — falls es ein solches gibt — mit $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$.

Die Fundamentalgleichung 2 (13) lautet hier wegen 2 (3)

$$(1)\qquad \Phi[\Phi(\Omega; a_1); \beta_1] = \Phi(\Omega; \beta_1 a_1), \qquad a_1 \neq 0, \; \beta_1 \neq 0 .$$

Aus der Identitätsbedingung 2 (14) wird hier

$$(2)\qquad \Phi(\Omega; 1) = \Omega .$$

Ist $\Omega \in (A, B)$, so ist wegen (2) und wegen der Stetigkeit von Φ auch für alle $\alpha_1 > 0$: $\Phi(\Omega;\alpha_1) \in (A, B)$. Wir substituieren in (1) für $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$

$$\alpha_1 = e^{\alpha}, \quad \beta_1 = e^{\beta}, \quad \Phi(\Omega;\alpha_1) = \Phi(\Omega; e^{\alpha}) = \Psi(\Omega;\alpha) \tag{3}$$

und erhalten

$$\Psi[\Psi(\Omega;\alpha);\beta] = \Psi(\Omega;\alpha+\beta),$$

d. h. 2 (7). Mit $\Phi(\Omega;\alpha_1)$ ist auch $\Psi(\Omega;\alpha)$ stetig. Wäre, für ein $\Omega = \underset{0}{\Omega}$, $\Phi(\underset{0}{\Omega};\alpha_1) = \text{konstant} = \underset{1}{\Omega}$ für jedes $\alpha_1 > 0$, so wäre wegen (1), für jedes $\alpha_1 < 0$, $\Phi(\underset{0}{\Omega};\alpha_1) = \Phi[\Phi(\underset{0}{\Omega};-\alpha_1);-1] = \Phi(\underset{1}{\Omega};-1) = \underset{2}{\Omega}$ konstant, so daß $\Phi(\underset{0}{\Omega};\alpha_1)$ nicht alle Werte von Ω, sondern höchstens zwei ($\underset{1}{\Omega}$ und $\underset{2}{\Omega}$) aufnehmen würde, entgegen der Voraussetzung T (2 § 3). Also ist $\Phi(\Omega;\alpha_1)$ für kein Ω konstant in $\alpha_1 > 0$ und daher ist auch $\Psi(\Omega;\alpha)$ für kein Ω konstant in α. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 (2 § 2) sind also erfüllt und daher gilt

$$\Psi(\Omega;\alpha) = \Theta[\vartheta(\Omega)+\alpha], \quad \Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)\alpha_1] \quad \text{für} \quad \Omega \in (A, B),\ \alpha_1 > 0$$

mit

$$\lambda(\Omega) \overset{\text{df}}{=} e^{\vartheta(\Omega)} > 0, \quad \Lambda(\tau) \overset{\text{df}}{=} \log\Theta(\tau), \quad \Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega, \quad \Omega \in (A, B).$$

Ebenso gilt im eventuellen zweiten Definitionsintervall $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$

$$\Phi(\Omega; e^{\alpha}) = \overset{0}{\Theta}[\overset{0}{\vartheta}(\Omega)+\alpha]$$

und hier setzen wir $\lambda(\Omega) \overset{\text{df}}{=} -e^{\overset{0}{\vartheta}(\Omega)} < 0$. Deshalb gilt bei *positiven* α_1

$$\Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)\alpha_1], \quad \alpha_1 > 0, \quad \Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega \tag{4}$$

für *beide* Definitionsintervalle, falls es deren zwei gibt, und zwar mit $\lambda(\Omega) \lessgtr 0$ je nachdem $\Omega \in \begin{cases} (\overset{0}{A}, \overset{0}{B}) \\ (A, B) \end{cases}$. Die Funktion $\lambda(\Omega)$ bildet $(\overset{0}{A}, \overset{0}{B})$ auf $(-\infty, 0)$ und (A, B) auf $(0, \infty)$ ab.

§ 2. Beliebige $\alpha_1 \neq 0$. Den Übergang auf *negative* α_1 wird uns (1) auch hier mit Hilfe der Funktion $\Phi(\Omega;-1)$ sichern. Aus (1) folgt nämlich mit $\alpha_1 = \beta_1 = -1$ bzw. mit $\beta_1 = -1$ bzw. $\alpha_1 = -1$ wegen (2) und (4)

$$\Phi[\Phi(\Omega;-1);-1] = \Phi(\Omega;1) = \Omega, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega;\alpha_1) &= \Phi[\Phi(\Omega;-\alpha_1);-1] = \Phi[\Phi(\Omega;-1);-\alpha_1] \\ &= \Phi\{\Lambda[-\lambda(\Omega)\alpha_1];-1\} = \Lambda\{-\lambda[\Phi(\Omega;-1)]\alpha_1\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Mit

$$\Omega = \underset{0}{\Omega}, \quad \Pi \overset{\text{df}}{=} \Lambda[-\lambda(\underset{0}{\Omega})\alpha_1], \quad \delta \overset{\text{df}}{=} \frac{\lambda[\Phi(\underset{0}{\Omega};-1)]}{\lambda(\underset{0}{\Omega})}$$

(Π durchläuft das Definitionsintervall in dem $\underset{0}{\Omega}$ liegt) erhalten wir aus (6)

$$\Phi(\Pi;-1) = \Lambda[\delta\lambda(\Pi)], \quad \lambda(\Pi) \neq 0, \tag{7}$$

für jedes Π des Definitionsbereiches.

Setzen wir (7) in (5) ein, so ergibt sich

$$\Lambda[\delta^2\lambda(\Omega)] = \Omega, \quad \delta^2\lambda(\Omega) = \lambda(\Omega), \quad \delta^2 = 1, \quad \delta = \pm 1,$$

und aus (6) und (7) folgt, daß *entweder*

$$\Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)|\alpha_1|] \tag{8}$$

oder

$$\Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)\alpha_1] \tag{9}$$

gilt. (Stetigkeit schließt aus, daß für gewisse Ω, α_1 die Formel (8), für andere (9) gelte.)

Beide Formeln fallen für $\alpha_1 > 0$ mit (4) zusammen, so daß sie für alle $\alpha_1 \neq 0$ gültig sind. Man sieht auch gleich, daß (8) und (9) beide die Funktionalgleichungen (1) und (2) erfüllen.

Damit haben wir den

Satz 1. *Ist $\Phi(\Omega;\alpha_1)$ eine für alle $\alpha_1 \neq 0$ und für höchstens zwei Ω-Intervalle von nicht-verschwindender Länge definierte stetige Funktion, die für kein Ω konstant in $\alpha_1 > 0$ ist, so ist die allgemeine Lösung der Funktionalgleichungen* (1) *und* (2) *entweder von der Gestalt*

$$\Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)|\alpha_1|], \quad \lambda(\Omega) \neq 0, \tag{8}$$

oder von der Gestalt

$$\Phi(\Omega;\alpha_1) = \Lambda[\lambda(\Omega)\alpha_1], \quad \lambda(\Omega) \neq 0. \tag{9}$$

Hier ist $\Lambda(\tau)$ eine (mit Ausnahme des 0-Punktes stetige und streng monotone) eindeutig umkehrbare Funktion mit der Umkehrfunktion λ.

Man kann bemerken, daß $\Phi(\Omega;-1)$ die Definitionsintervalle im ersten Falle auf sich selbst, im zweiten Falle auf einander abbildet.

Hier haben wir die Voraussetzung T durch die Forderung ersetzt, daß $\Phi(\Omega;\alpha_1)$ für *kein* Ω konstant in $\alpha_1 > 0$ sei. Dies ist berechtigt, da wir die Voraussetzung T bisher außer der Bestimmung der Struktur des Definitionsbereiches nur dazu verwendet haben, um eben das zu beweisen, daß $\Phi(\Omega;\alpha_1)$ bei keinem Ω konstant in $\alpha_1 > 0$ ist.

Fordern wir aber die Voraussetzung T, so kann (8) nur im Falle *eines einzigen* Definitionsintervalles auftreten, da für $\Omega \in (A, B)$ laut (8) $\Phi(\Omega; \alpha_1) \in (A, B)$ für alle *positiven und negativen* α_1 gilt, so daß Werte aus einem eventuellen zweiten Intervall durch $\Phi(\Omega; \alpha_1)$ nicht angenommen werden können. Dies ist eine Einschränkung für die möglichen Objekten des Typus $(1, 1, 1)$, sie schließt z. B.

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \alpha_1) = \Omega|\alpha_1|$$

in dem Falle aus, wo es ein Intervall mit positiven und eines mit negativen Ω gibt.

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \alpha_1) = \Omega|\alpha_1| \quad \text{für} \quad \Omega \in (A, B)\,, \ A < 0\,, \ B > 0\,,$$

wird auch durch jene Konsequenz der Voraussetzung T ausgeschlossen, daß $\Phi(\Omega; \alpha_1)$ für *kein* Ω konstant in α_1 ist. Auch die Stetigkeitsvoraussetzung schließt manche mögliche Objekte aus, z. B. (J. Haantjes — G. Laman 1953 [2], S. 220)

$$\bar{\Omega} = \{\Omega + \log|\alpha_1|\}\,, \quad \Omega \in [0, 1)$$

($\{x\} = x - [x]$ der gebrochene Teil von x). (9) kann andererseits nur in dem Falle gelten, wo tatsächlich zwei Definitionsintervalle vorhanden sind, da, im Falle eines einzigen Definitionsintervalles (A, B), $\lambda(\Omega) > 0$ und $\Lambda(\tau)$ nur für $\tau > 0$ definiert ist, so daß

$$\Lambda[\lambda(\Omega)\alpha_1]$$

für $\alpha_1 < 0$ keinen Sinn hätte.

Man sieht, daß die Objekte Ω mit der Transformationsformel (8) mit der sogen. *Weylschen Dichte* (vom Gewicht -1)

$$\bar{\Pi} = \Pi|\alpha_1|\,, \quad \Pi > 0\,,$$

während die mit der Transformationsformel (9) mit der sogen. *gewöhnlichen Dichte* (vom Gewicht -1)

$$\bar{\Pi} = \Pi\alpha_1\,, \quad \Pi \neq 0\,,$$

äquivalent sind (vgl. I § 3, Beispiel 3).

Wenn wir auch 2 § 3, beachten, haben wir den

Satz 2. *Unter der Voraussetzung* T *gibt es die folgenden eindimensionalen differentialgeometrischen Objekte mit einer Komponenten von genau erster Klasse mit stetigen Transformationsformeln und nur diese: Die genau zwei Werte annehmende Biskalaren, die mit den Weylschen Dichten äquivalente Objekte, deren Werte ein Intervall ausfüllen und die mit den gewöhnlichen Dichten äquivalente Objekte, deren Werte zwei verschiedene Intervalle ausfüllen. Die Funktionen, die die Äquivalenz erzeugen sind bei den Weylschen Dichten stetig und streng monoton, auch bei den gewöhnlichen Dichten sind sie eindeutig umkehrbar und in diesem Falle bestehen sie aus je zwei stetigen streng monotonen Teilen.*

Dieselben Sätze können auch für *mehrdimensionale Objekte genau erster Klasse mit einer Komponenten vom sogen. Typus J* ausgesprochen werden, die Transformationsformeln der Gestalt

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; A_k^{\varkappa}) = \Psi(\Omega; J)$$

haben, wo $J \neq 0$ die Determinante der $A_k^{\varkappa}$ ist (vgl. I § 1); sie sind also *den Biskalaren oder Weylschen oder gewöhnlichen Dichten* ($\bar{\Pi} = \Pi \operatorname{sg} J$, bzw. $\bar{\Pi} = \Pi|J|$, bzw. $\bar{\Pi} = \Pi J$) *äquivalent.*

Es sei bemerkt, daß sich (8) und (9) auch in den Gestalten

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \alpha_1) = \tilde{\Lambda}\left(\frac{\tilde{\lambda}(\Omega)}{|\alpha_1|}\right), \quad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \alpha_1) = \tilde{\Lambda}\left(\frac{\tilde{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1}\right) \quad \left(\tilde{\lambda}(\Omega) = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \neq 0\right)$$

oder

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \alpha_1) = \tilde{\Lambda}\left(\frac{\tilde{\lambda}(\Omega)}{\alpha_1^k}\right), \quad \tilde{\lambda}(\Omega) \neq 0$$

$$(\tilde{\lambda}(\Omega) = \lambda(\Omega)^{-k}\,, \quad k \neq 0 \text{ eine ganze Zahl})$$

darstellen läßt (letzteres ist mit den Weylschen bzw. mit den gewöhnlichen Dichten äquivalent, je nachdem $k \neq 0$ gerade oder ungerade ist). Dies zeigt, daß diese Objekte auch mit Weylschen bzw. gewöhnlichen Dichten von beliebigen ganzen Exponenten (Gewichten) äquivalent sind.

Für Objekte des Typus $(1, 1, 1)$ vgl. u. a. S. Gołąb 1938 [2], [3], J. S. Dubnov 1949, J. E. Pensov 1946, 1950 [2], J. Aczél 1956 [1], 1958 [1].

5. Typus $(1, n, 1)$

§ 1. $n \geqslant 3$. Die Transformationsformel I (25) lautet in diesem Falle

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; A_k^K)\,. \tag{1}$$

Die Fundamentalgleichung lautet dementsprechend

$$\Phi[\Phi(\Omega; A_k^{\varkappa}); A_{\varkappa}^K] = \Phi(\Omega; A_k^K)\,. \tag{2}$$

In diesem Abschnitt wollen wir die Bezeichnungen folgenderweise ändern. Wir schreiben

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ik} & \text{statt} & A_k^{\varkappa}\,, \\ \beta_{ji} & \text{statt} & A_{\varkappa}^K\,, \\ \gamma_{jk} & \text{statt} & A_k^K\,, \\ \Phi_0 & \text{statt} & \partial\Phi/\partial\Omega\,, \\ \Phi_{ik} & \text{statt} & \partial\Phi/\partial A_k^{\varkappa} \quad (= \partial\Phi/\partial\alpha_{ik})\,. \end{array} \tag{3}$$

In den Bezeichnungen (3) schreibt man die Fundamentalgleichung (2) folgendermaßen um:

$$\Phi[\Phi(\Omega;\, a_{ik});\, \beta_{ji}] = \Phi(\Omega;\, \gamma_{jk}) \tag{4}$$

oder kurz

$$\Phi[\Phi(\Omega;\, a);\, \beta] = \Phi(\Omega;\, \gamma)\,.$$

Da

$$\gamma_{jk} = \sum_i \beta_{ji} a_{ik} \tag{5}$$

ist, geht (4) in

$$\Phi[\Phi(\Omega;\, a_{ik});\, \beta_{ji}] = \Phi\Big(\Omega;\, \sum_i \beta_{ji}\cdot a_{ik}\Big) \tag{6}$$

über. Diese Gleichung soll für alle $\Omega \in \Sigma$ (die Natur der Menge Σ brauchen wir vorläufig nicht präzisieren) und für alle a_{ik}, β_{ji}, für welche

$$J = \det a_{ik} \neq 0\,, \qquad K = \det \beta_{ji} \neq 0 \tag{7}$$

besteht, erfüllt sein.

Wir setzen voraus, daß die gesuchte Funktion Φ (von $1+n^2$ unabhängigen Veränderlichen) von der Klasse C^1 ist.

Wir führen noch folgende kurze Bezeichnungen ein:

$$\Psi_{ik}(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi_{ik}(\Omega;\, \delta_{jl}) \quad (i, k = 1, \ldots, n)\,, \qquad \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = l\,, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq l\,. \end{cases} \tag{8}$$

Die Methode der Lösung der Gleichung (6) wird die folgende sein. Wir leiten von der Gleichung (6) ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchte Funktion Φ ab. Nachher bestimmen wir unter allen Lösungen des Systems diejenigen die gleichzeitig auch die Gleichung (6) erfüllen.

Um das gewünschte Differentialgleichungssystem abzuleiten, differenzieren wir die Gleichung (6) in bezug auf a_{ik}. Dies ergibt

$$\Phi_0[\Phi(\Omega;\, a);\, \beta]\cdot \Phi_{ik}(\Omega;\, a) = \sum_{r,s} \Phi_{rs}(\Omega;\, \gamma)\, \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial a_{ik}}$$

oder wegen (5)

$$\Phi_0[\Phi(\Omega;\, a);\, \beta]\cdot \Phi_{ik}(\Omega;\, a) = \sum_{r} \Phi_{rk}(\Omega;\, \gamma)\, \beta_{ri}\,.$$

Jetzt setzen wir $a_{ik} = \delta_{ik}$ ein (vgl. I (16)):

$$\begin{aligned} &\Phi_0(\Omega;\, \beta)\cdot \Phi_{ik}(\Omega;\, \delta) = \sum_r \Phi_{rk}(\Omega;\, \beta)\cdot \beta_{ri}\,, \\ &\Phi_0(\Omega;\, \beta)\cdot \Psi_{ik}(\Omega) = \sum_r \beta_{ri}\cdot \Phi_{rk}(\Omega;\, \beta)\,, \qquad i, k = 1, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Fassen wir jetzt (9) als ein System von n^2 Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchte Funktion $\Phi(\Omega;\, \beta)$ auf, wobei vorläufig die Koeffizienten $\Psi_{ik}(\Omega)$ (die eigentlich auch von Φ abhängen) als gegeben angesehen werden sollen.

Wir transformieren dieses System in ein System von Jacobi, indem wir es in bezug auf $\Phi_{rk}(\Omega;\, \beta)$ auflösen. (Die Doppelfolge Φ_{rk} denken wir dabei in lexikographischer Ordnung in einer Folge aufgeschrieben.) Dies ist möglich, da die Determinante D des Systems in bezug auf Φ_{rk}, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$D = [\det \beta_{ri}]^n = K^n \neq 0 \tag{10}$$

ist. Die explizite Auflösung ergibt

$$\Phi_{ik} = \frac{\Phi_0}{K} \sum_j B_{ij} \Psi_{jk}\,, \tag{11}$$

wo B_{ij} den algebraischen Minor von β_{ij} in K bedeutet.

Wir setzen natürlich voraus, daß die Lösung Φ tatsächlich von den Ableitungen β_{jl} abhängt, daß sie also insbesondere nicht konstant ist. Es handelt sich jedenfalls um nicht triviale Lösungen des Systems (9) (das System besteht ja aus lauter homogenen Gleichungen).

Wir bilden jetzt die Poissonschen Klammern für das System (11), die identisch verschwinden müssen, da das System (11) ein Jacobisches ist. Die Nullsetzung der Klammern von Poisson wird uns einige notwendige Bedingungen für die Ψ_{jk} ergeben. Zu diesem Zwecke führen wir die kurze Bezeichnungen

$$\boldsymbol{X}_{ik}\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi_{ik} - \frac{\Phi_0}{K} \sum_j B_{ij} \Psi_{jk} \tag{12}$$

ein.

Wir setzen zwei verschiedene Paare (i, k) und (j, l) von den Zahlen $1, \ldots, n$ fest. Es ist also

$$(i-j)^2 + (k-l)^2 > 0 \tag{13}$$

und wir bilden die Klammern

$$(\boldsymbol{X}_{ik}, \boldsymbol{X}_{jl})\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \boldsymbol{X}_{ik}(\boldsymbol{X}_{jl}\Phi) - \boldsymbol{X}_{jl}(\boldsymbol{X}_{ik}\Phi)\,.$$

Bei der Bezeichnung

$$(\ )_{jl} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial(\ )}{\partial \beta_{jl}}\,, \qquad (\ )_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial(\ )}{\partial \Omega}\,, \tag{14}$$

haben wir die folgenden Relationen:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
(X_{ik}\Phi)_{jl} &= -\sum_r \Phi_0 \Psi_{rk}\left(\frac{B_{ir}}{K}\right)_{jl},\\
(X_{jl}\Phi)_{ik} &= -\sum_r \Phi_0 \Psi_{rl}\left(\frac{B_{jr}}{K}\right)_{ik},\\
(X_{ik}\Phi)_0 &= -\sum_r \Phi_0 \Psi'_{rk}\frac{B_{ir}}{K},\\
(X_{jl}\Phi)_0 &= -\sum_r \Phi_0 \Psi'_{rl}\frac{B_{jr}}{K},
\end{aligned}
$$

wo mit dem Strich einfach die gewöhnliche Ableitung nach Ω bezeichnet wurde.

Aus den obigen Formeln erhalten wir für die gesuchte Klammer den folgenden Ausdruck:

$$
(16)\qquad (X_{ik}, X_{jl})\Phi = \Phi_0\left\{\sum_r\left[-\left(\frac{B_{jr}}{K}\right)_{ik}\Psi_{rl}+\left(\frac{B_{ir}}{K}\right)_{jl}\Psi_{rk}\right]-\right.
$$
$$
\left.-\sum_{r,s}\frac{1}{K^2}B_{js}B_{ir}[\Psi_{sl}\Psi'_{rk}-\Psi_{rk}\Psi'_{sl}]\right\}.
$$

Von nun an schließen wir auch den Fall aus, wo Φ einen Biskalar darstellt, also soll die Menge Σ weder aus einem Punkt, noch aus zwei Punkten bestehen. Aus Stetigkeitsgründen muß dann Σ ein eigentliches Intervall Σ_0 enthalten. Durch eventuelle Einschränkung dieses Intervalls können wir erreichen, daß

$$
(17)\qquad \Phi_0 \neq 0 \quad \text{für} \quad \Omega \in \Sigma_0
$$

besteht. Setzen wir die Klammern (16) gleich Null und berücksichtigen die Ungleichung (13), so erhalten wir (für $\Omega \in \Sigma_0$):

$$
(18)\qquad \sum_r\left[\left(\frac{B_{ir}}{K}\right)_{jl}\Psi_{rk}-\left(\frac{B_{jr}}{K}\right)_{ik}\Psi_{rl}\right]+\sum_{r,s}\frac{1}{K^2}B_{ir}B_{js}[\Psi_{rk}\Psi'_{sl}-\Psi_{sl}\Psi'_{rk}]=0\,.
$$

Die bekannte Regel für die Ableitung des Quotienten

$$
\left(\frac{B_{ir}}{K}\right)_{jl} = \frac{K(B_{ir})_{jl}-B_{ir}(K)_{jl}}{K^2},
$$

sowie die Regel für die Ableitung einer Determinante

$$
(K)_{jl} = \frac{\partial K}{\partial \beta_{jl}} = B_{jl}
$$

ergeben uns die Formeln

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{B_{ir}}{K}\right)_{jl} &= \frac{(B_{ir})_{jl}}{K}-\frac{B_{ir}B_{jl}}{K^2},\\
\left(\frac{B_{jr}}{K}\right)_{ik} &= \frac{(B_{jr})_{ik}}{K}-\frac{B_{jr}B_{ik}}{K^2},
\end{aligned}
$$

was in (18) berücksichtigt zu

$$
(20)\qquad K\sum_r[(B_{ir})_{jl}\Psi_{rk}-(B_{jr})_{ik}\Psi_{rl}]+\sum_r[B_{jr}B_{ik}\Psi_{rl}-B_{ir}B_{jl}\Psi_{rk}]+
$$
$$
+\sum_{r,s}B_{ir}B_{js}[\Psi_{rk}\Psi'_{sl}-\Psi_{sl}\Psi'_{rk}]=0
$$

führt. Die Relationen (20) bestehen für alle i, j, k, l für welche die Ungleichung (13) gilt.

Wir behaupten nun, daß

$$
(21)\qquad (B_{ir})_{jk} = (B_{jr})_{ik}
$$

ist. Tatsächlich erhält man die linke Seite von (21) durch zwei Operationen: man streicht in K die i-te Zeile und r-te Spalte und nachher die j-te Zeile und k-te Spalte. Die rechte Seite dagegen entsteht durch Ausführung der folgenden Operationen: man streicht zuerst die j-te Zeile und r-te Spalte und nachher die i-te Zeile und k-te Spalte. Es ist klar, daß die Ausübung der beiden Operationsfolgen zu demselben Resultat führt, womit (21) bestätigt ist.

Die Relationen (20) nehmen also auf Grund von (21) die folgende Gestalt an:

$$
K\sum_r(B_{ir})_{jl}[\Psi_{rk}-\Psi_{rl}]+\sum_r[B_{jr}B_{ik}\Psi_{rl}-B_{ir}B_{jl}\Psi_{rk}]+
$$
$$
+\sum_{r,s}B_{ir}B_{js}[\Psi_{rk}\Psi'_{sl}-\Psi_{sl}\Psi'_{rk}]=0\,.
$$

Setzen wir nun in der obigen Formel $l = k$, so erhalten wir

$$
(22)\qquad \sum_r[B_{jr}B_{ik}-B_{ir}B_{jk}]\Psi_{rk}+\sum_{r,s}B_{ir}B_{js}[\Psi_{rk}\Psi'_{sk}-\Psi_{sk}\Psi'_{rk}]=0
$$
$$
\text{für} \quad i\neq j \quad \text{und} \quad \Omega\in\Sigma_0\,.
$$

Für konstantes Ω ist das für jedes Tripel (i, j, k) eine Identität in β und zwar stellen die Terme der linken Seite Polynome des $(2n-2)$-ten Grades dar. Auf Grund eines Satzes von Cayley (da die linken Seiten in bezug auf B homogen sind) erhalten wir äquivalente Relationen indem wir die B_{ik} durch $K\beta_{ik}$ oder — da $K \neq 0$ ist — durch β_{ik} ersetzen. Statt (22) können wir also

(23) $$\sum_r (\beta_{jr}\beta_{ik} - \beta_{ir}\beta_{jk})\Psi_{rk} + \sum_{r,s} \beta_{ir}\beta_{js}(\Psi_{rk}\Psi'_{sk} - \Psi_{sk}\Psi'_{rk}) = 0$$

schreiben. Wir differenzieren die beiden Seiten dieser Identität in bezug auf β_{ik}. Dies ergibt

(24) $$\sum_r \Psi_{rk}(\beta_{jr} + \beta_{ik}\delta_{ij}\delta_{kr} - \beta_{ir}\delta_{ji}\delta_{kk} - \beta_{jk}\delta_{ii}\delta_{rk}) + \\ + \sum_{r,s} (\Psi_{rk}\Psi'_{sk} - \Psi_{sk}\Psi'_{rk})(\beta_{ir}\delta_{ji}\delta_{sk} + \beta_{js}\delta_{ii}\delta_{rk}) = 0.$$

Nach der Reduktion (man beachte, daß $\delta_{ji} = 0$, da $i \neq j$) bekommen wir daraus

(25) $$\sum_r \Psi_{rk}\beta_{jr} - \Psi_{kk}\beta_{jk} + \sum_s (\Psi_{kk}\Psi'_{sk} - \Psi_{sk}\Psi'_{kk})\beta_{js} = 0$$

für beliebige $k, j = 1, \ldots, n$.

Differenzieren wir jetzt die obige Relation in bezug auf β_{jp}. Die Ausführung dieser Differentiation ergibt

$$\sum_r \Psi_{rk}\delta_{jj}\delta_{rp} - \Psi_{kk}\delta_{jj}\delta_{kp} + \sum_s (\Psi_{kk}\Psi'_{sk} - \Psi_{sk}\Psi'_{kk})\delta_{jj}\delta_{sp} = 0$$

oder

$$-\Psi_{kk}\delta_{kp} + \Psi_{pk} + \Psi_{kk}\Psi'_{pk} - \Psi_{pk}\Psi'_{kk} = 0 .$$

Für $k \neq p$ bekommen wir daraus

(26) $$\Psi_{pk} + \Psi_{kk}\Psi'_{pk} - \Psi_{pk}\Psi'_{kk} = 0 .$$

Eine längere Rechnung führt zum Schluss (S. Gołąb 1947):

(27) $$\Psi_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k .$$

Berücksichtigen wir dieses Ergebnis in der Formel (20). Wir erhalten dann

(28) $$K\{(B_{ik})_{jl}P_k - (B_{jl})_{ik}P_l\} + B_{ik}B_{jl}\{P_l - P_k + P_kP'_l - P_lP'_k\} = 0 ,$$

wenn P_k kurz für

(29) $$P_k = \Psi_{kk}$$

gesetzt wurde.

Bemerken wir aber, daß

(30) $$(B_{ik})_{jl} = 0 ,$$

falls die Paare (i, k) und (j, l) ein gemeinsames gleichartiges Element haben (d. h. falls $i = j$ oder $k = l$). Setzen wir also in der Relation (28) $i = j$, so bekommen wir

$$B_{ik}B_{il}\{P_l - P_k + P_kP'_l - P_lP'_k\} = 0 ,$$

woraus

(31) $$P_l - P_k + P_kP'_l - P_lP'_k = 0 \quad \text{für alle} \quad k, l$$

folgt. Berücksichtigen wir dies nochmals in (28), so erhalten wir wegen $K \neq 0$

$$(B_{ik})_{jl}P_k - (B_{jl})_{ik}P_l = 0 .$$

Es ist aber

$$(B_{ik})_{jl} = (B_{jl})_{ik} \neq 0$$

und schließlich haben wir

(32) $$P_k = P_l \quad \text{für alle} \quad k, l = 1, \ldots, n .$$

Wir können also

(33) $$\Psi_{kk}(\Omega) = \Psi(\Omega)$$

setzen.

Wir behaupten, daß

$$\Psi(\Omega) \neq 0 .$$

Wäre es nicht so, dann hätten wir auf Grund von (27) und (33) $\Psi_{ik} = 0$, was infolge (11) $\Phi_{ik} = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ nach sich ziehen würde entgegen der Voraussetzung. Die Formeln (27) und (33) lassen sich in der einheitlichen Form

(34) $$\Psi_{ik}(\Omega) = \delta_{ik} \cdot \Psi(\Omega)$$

schreiben und das System (11) nimmt folgende Gestalt an:

(35) $$\Phi_{ik} - \frac{B_{ik}}{K}\Psi(\Omega)\Phi_0 = 0; \quad i, k = 1, \ldots, n .$$

Das obige Verfahren gilt nur im Falle $n \geqslant 3$. Im Falle $n = 2$ verlieren die Symbole

$$(B_{ik})_{jl}$$

ihren Sinn. Der Fall $n = 2$ muß also extra behandelt werden. Das wird später geschehen und, wie wir sehen werden, gestaltet sich das Ergebnis in diesem Spezialfalle anders und zwar komplizierter.

Wir kehren zur Weiterführung des Verfahrens für $n \geqslant 3$ zurück.

Um das System (35) zu lösen, bilden wir das entsprechende System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches in üblicher Form geschrieben, folgendermaßen lautet:

$$\frac{d\beta_{jl}}{0} = \frac{d\beta_{ik}}{1} = -\frac{K\,d\Omega}{B_{ik}\Psi(\Omega)}, \quad j \neq i \quad \text{oder} \quad l \neq k .$$

Die Gleichheit der rechten und mittleren Terme gibt

$$\int \frac{B_{ik}}{K}\,d\beta_{ik} = -\int \frac{d\Omega}{\Psi(\Omega)} .$$

Nehmen wir aber in Betracht, daß

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_{ik}} = B_{ik}$$

ist, so kann das Integral auf der linken Seite durch das Integral

$$\int \frac{dK}{K}$$

ersetzt werden und folglich bekommen wir

$$(36)\quad K = C_j \exp\left(-\int \frac{d\Omega}{\Psi}\right), \quad j=1,2 \quad \begin{cases} \text{wo} & C_1 > 0 \quad \text{für} \quad K>0\,, \\ \text{wo} & C_2 < 0 \quad \text{für} \quad K<0\,. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich Σ in bezug auf Ω kann sich wegen der Stetigkeit von Φ unter der Voraussetzung T (2 § 3) aus einem oder aus zwei Intervallen zusammensetzen. Im ersten Falle ist die Funktion

$$|K| \exp\left(\int \frac{d\Omega}{\Psi}\right)$$

im zweiten die Funktion

$$K \exp\left(\int \frac{d\Omega}{\Psi}\right)$$

ein erstes Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d\beta_{ik}}{d\Omega} = -\frac{K}{\Psi(\Omega) B_{ik}}\,.$$

(36) hängt aber von den Indizes i, k nicht ab. Der Ausdruck (36) stellt also eine gemeinsame Lösung für alle Gleichungen des Systems (11) dar. Das System (11) ist aber ein System von Jacobi, wo die Anzahl von Veränderlichen um eins größer ist als die Anzahl von Gleichungen. Auf Grund der bekannten Theorie besitzt das System nur eine einzige unabhängige Lösung, während die allgemeine Lösung Φ eine beliebige Funktion X dieser speziellen Lösung ist:

$$\Phi(\Omega;\beta) = X\left\{\varepsilon K \exp\left(\int \frac{d\Omega}{\Psi}\right)\right\},$$

wo $\varepsilon = \mathrm{sg}K$ bzw. $\varepsilon = 1$ ist.

Es bleibt noch die Frage zu klären ob die gefundene Lösung Φ des Systems (11) auch eine Lösung der Funktionalgleichung (6) ist. Dies verifiziert man einfach durch Einsetzen. Da Φ die Bedingung

$$\Phi(\Omega;\delta_{ik}) = \Omega$$

erfüllen muß, so erhalten wir die Bedingung

$$X\left[\exp\left(\int \frac{d\Omega}{\Psi}\right)\right] = \Omega\,,$$

woraus folgt

$$X(u) = \chi^{-1}[u]\,,$$

wo mit χ die exponentiale Funktion des unbestimmten Integrals von $1/\Psi$ bezeichnet wurde:

$$\chi(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \exp\left(\int \frac{d\Omega}{\Psi(\Omega)}\right).$$

Wir haben also

$$\Phi(\Omega;\alpha) = X\{\varepsilon_\alpha J \chi(\Omega)\}\,, \qquad \chi[X(\tau)] = \tau\,,$$
$$\Phi(\Omega;\beta) = X\{\varepsilon_\beta K \chi(\Omega)\}$$

und

$$\Phi\{\Phi[\Omega;\alpha];\beta\} = X\{\varepsilon_\beta K \chi[X(\varepsilon_\alpha J\chi(\Omega))]\} = X\{\varepsilon_\beta K\, \varepsilon_\alpha J \chi(\Omega)\}\,.$$

Ist $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1$, so ist auch $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = 1$. Ist dagegen $\varepsilon_\alpha = \mathrm{sg}J$, $\varepsilon_\beta = \mathrm{sg}K$, so ist $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = \mathrm{sg}J\cdot\mathrm{sg}K = \mathrm{sg}[J\cdot K]$. Die Gleichung (6) ist also erfüllt. Wir erhalten, daß Ω entweder mit einer Weylschen Dichte oder mit einer gewöhnlichen Dichte äquivalent, also jedenfalls ein Objekt vom Typus J ist (vgl. II. 4, § 2).

Die Formel

$$(37)\qquad \Phi(\Omega;\alpha_{ik}) = X\{\varepsilon J \chi(\Omega)\}$$

ist auf Grund der obigen Betrachtungen in solchen Intervallen Σ_0 gültig, wo $\Phi_0 \neq 0$ ist. Es gilt aber

$$\Phi_0 = X'\{\varepsilon J\chi(\Omega)\}\varepsilon J\cdot\chi'(\Omega) \neq 0\,.$$

Die Formel (37) ist also immer gültig. Da die Funktion $\Phi(\Omega;\alpha_{ik})$ für alle α_{ik} definiert ist für welche $J = \det(\alpha_{ik}) \neq 0$, so kann der Definitionsbereich Σ von Φ unter Voraussetzung der Transitivität (2 § 3) in bezug auf Ω aus höchstens zwei Intervallen bestehen. Er besteht nämlich aus einem Intervall wenn $\varepsilon = \mathrm{sg}J$ ist und aus zwei Intervallen wenn $\varepsilon = 1$ ist. Wir haben also die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1a. *Unter der Voraussetzung, daß die Funktion Φ transitiv und von der Klasse C^1 ist und daß wenigstens eine von den partiellen Ableitungen $\partial\Phi/\partial\alpha_{ik}$ von Null verschieden ist, besitzt die Gleichung* (6) *für $n \geqslant 3$ die allgemeine Lösung von folgender Form:*

$$(37)\qquad \Phi(\Omega;\alpha_{ik}) = X\{\varepsilon J\cdot\chi(\Omega)\} \qquad \left(\varepsilon = \begin{cases}1\\ \mathrm{sg}J\end{cases},\ X[\chi(\Omega) = \Omega]\right),$$

wo χ eine umkehrbare Funktion einer Veränderlichen der Klasse C^2 und X ihre Umkehrfunktion ist.

Man sieht sogar fast unmittelbar, daß, wenn nur χ eine umkehrbare Funktion ist, in einer Menge Σ, die aus einem oder aus zwei Intervallen besteht, so stellt (37) eine Lösung der Funktionalgleichung (6) dar.

Satz 1b. *Für $n \geqslant 3$ ist, unter den obigen Bedingungen, jedes rein differentielle Objekt erster Klasse mit einer Komponenten ein Objekt vom Typus J.*

§ 2. $n = 2$. Jetzt gehen wir zum Falle $n = 2$ über. Das System (11) nimmt in diesem Falle die folgende Form an:

$$(38)\qquad \begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{\Phi_0}{K}(\beta_{22}\Psi_{11} - \beta_{21}\Psi_{21}) , \\ \Phi_{12} &= \frac{\Phi_0}{K}(\beta_{22}\Psi_{12} - \beta_{21}\Psi_{22}) , \\ \Phi_{21} &= \frac{\Phi_0}{K}(\beta_{11}\Psi_{21} - \beta_{12}\Psi_{11}) , \\ \Phi_{22} &= \frac{\Phi_0}{K}(\beta_{11}\Psi_{22} - \beta_{12}\Psi_{12}) . \end{aligned}$$

Das obige System ist zwar ein Jacobisches, seine Klammern von Poisson haben jedoch ziemlich komplizierte Struktur und es empfiehlt sich von dem primitiven System (9) auszugehen:

$$(39)\qquad \begin{aligned} X_1\Phi &= \Psi_{11}\Phi_0 - \beta_{11}\Phi_{11} - \beta_{21}\Phi_{21} = 0 , \\ X_2\Phi &= \Psi_{12}\Phi_0 - \beta_{11}\Phi_{12} - \beta_{21}\Phi_{22} = 0 , \\ X_3\Phi &= \Psi_{21}\Phi_0 - \beta_{12}\Phi_{11} - \beta_{22}\Phi_{21} = 0 , \\ X_4\Phi &= \Psi_{22}\Phi_0 - \beta_{12}\Phi_{12} - \beta_{22}\Phi_{22} = 0 . \end{aligned}$$

Die sechs Poissonsche Klamern für dieses System lauten jetzt:

$$(40)\qquad \begin{aligned} (X_1, X_2)\Phi &= (\Psi_{11}\Psi'_{12} - \Psi_{12}\Psi'_{11})\Phi_0 + \beta_{11}\Phi_{12} + \beta_{21}\Phi_{22} , \\ (X_1, X_3)\Phi &= (\Psi_{11}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{11})\Phi_0 - (\beta_{12}\Phi_{11} + \beta_{22}\Phi_{21}) , \\ (X_1, X_4)\Phi &= (\Psi_{11}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{11})\Phi_0 , \\ (X_2, X_3)\Phi &= (\Psi_{12}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{12})\Phi_0 + \beta_{11}\Phi_{11} + \beta_{21}\Phi_{21} - (\beta_{12}\Phi_{12} + \beta_{22}\Phi_{22}) , \\ (X_2, X_4)\Phi &= (\Psi_{12}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{12})\Phi_0 + \beta_{11}\Phi_{12} + \beta_{21}\Phi_{22} , \\ (X_3, X_4)\Phi &= (\Psi_{21}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{21})\Phi_0 - (\beta_{12}\Phi_{11} + \beta_{22}\Phi_{21}) . \end{aligned}$$

Da das System (39) ein vollständiges System ist, müssen alle diese Klammern lineare Kombinationen von $X_1\Phi, X_2\Phi, X_3\Phi$ und $X_4\Phi$ sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (X_1, X_2)\Phi &= -X_2\Phi , & (X_2, X_3)\Phi &= -X_1\Phi + X_4\Phi , \\ (X_1, X_3)\Phi &= X_3\Phi , & (X_2, X_4)\Phi &= -X_2\Phi , \\ (X_1, X_4)\Phi &= 0 , & (X_3, X_4)\Phi &= X_3\Phi . \end{aligned}$$

Wenn wir hier unter Berücksichtigung von (39) und (40) die Koeffizienten von Φ_0 vergleichen, erhalten wir die folgenden sechs Relationen:

$$(41)\qquad \begin{aligned} \Psi_{11}\Psi'_{12} - \Psi_{12}\Psi'_{11} &= -\Psi_{12} , \\ \Psi_{11}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{11} &= \Psi_{21} , \\ \Psi_{11}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{11} &= 0 , \\ \Psi_{12}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{12} &= -\Psi_{11} + \Psi_{22} , \\ \Psi_{12}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{12} &= -\Psi_{12} , \\ \Psi_{21}\Psi'_{22} - \Psi_{22}\Psi'_{21} &= \Psi_{21} . \end{aligned}$$

Von diesen sechs Relationen gibt es nur 4 unabhängige. Man bestätigt in der Tat ohne Schwierigkeit, daß die letzten zwei Folgen aus den ersten vier sind.

Aus der dritten Gleichung von (41) bekommen wir

$$(42)\qquad \Psi_{22} = p\Psi_{11} ,$$

wo p eine Konstante bedeutet. Die fünfte und die sechste Gleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} p(\Psi_{12}\Psi'_{11} - \Psi_{11}\Psi'_{12}) &= -\Psi_{12} , \\ p(\Psi_{21}\Psi'_{11} - \Psi_{11}\Psi'_{21}) &= \Psi_{21} , \end{aligned}$$

was mit der ersten und zweiten Gleichung verglichen zu

$$(43)\qquad \begin{aligned} \Psi_{12}(p+1) &= 0 , \\ \Psi_{21}(p+1) &= 0 \end{aligned}$$

führt. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder haben wir

$$(44)\qquad \Psi_{12} = \Psi_{21} = 0$$

oder haben wir

$$(45)\qquad p = -1 .$$

(44) zusammen mit der vierten Gleichung von (41) führt zu $\Psi_{22} = \Psi_{11}$. Wir haben in diesem Falle

$$(45)\qquad \Psi_{ik}(\Omega) = \delta_{ik}\Psi(\Omega) ,$$

also dasselbe Ergebnis wie im Falle $n \geqslant 3$ und das Objekt ist also vom Typus J.

Die zweite Möglichkeit $p = -1$ gestaltet sich nicht so einfach und führt — wie wir unten sehen werden — zu Objekten, die nicht vom Typus J sind, und die wir *Pensovsche Objekte von einer Komponenten* nennen wollen.

Die Elimination von

$$\Psi_{22} = -\Psi_{11} \tag{46}$$

ergibt für die drei unbekannten Funktionen $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{21}$ das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}\Psi'_{12} - \Psi_{12}\Psi'_{11} &= -\Psi_{12}\,, \\ \Psi_{11}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{11} &= \Psi_{21}\,, \\ \Psi_{12}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{12} &= -2\Psi_{11}\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Dieses System ist in Bezug auf die Ableitungen der unbekannten Funktionen leider nicht lösbar, da die Determinante identisch verschwindet. Wenn wir $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{21}$ als Koordinaten des Punktes eines dreidimensionalen Raumes auffassen, so füllt die Gesamtheit der Punkte $[\Psi_{11}(\Omega), \Psi_{12}(\Omega), \Psi_{21}(\Omega)]$ kein dreidimensionales Gebiet aus, sondern höchstens eine zweidimensionale Fläche. Diese läßt sich übrigens leicht bestimmen. Wenn wir nämlich die erste der Gleichungen (47) mit Ψ_{21} multiplizieren, die zweite mit Ψ_{12} und voneinander substrahieren, so bekommen wir

$$\Psi_{11}(\Psi_{12}\Psi'_{21} - \Psi_{21}\Psi'_{12}) = 2\Psi_{12}\Psi_{21}\,,$$

was mit der dritten Gleichung (47) vergleichen

$$\Psi_{11}^2 + \Psi_{12}\Psi_{21} = 0 \tag{48}$$

ergibt. Die Punkte $(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{21})$ liegen also auf einer Quadrik.

Wir behaupten, daß keine der Funktionen $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{21}$ identisch verschwinden kann. Dies folgt einfach aus den Gleichungen (47). Das identische Verschwinden einer von diesen Funktionen würde nämlich das identische Verschwinden der beiden anderen nach sich ziehen und dann würde aus (11) und (46) das identische Verschwinden von Φ_{ik} folgen, entgegen der Voraussetzung.

Die Relation (48) gestattet die Funktion Ψ_{21} zu eliminieren und das System (47) zu einem System von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen Ψ_{11} und Ψ_{12} zu reduzieren. Diese zwei Gleichungen erweisen sich aber als nicht unabhängig, so daß letzten Endes nur eine einzige Gleichung mit zwei unbekannten Funktionen bleibt:

$$\Psi_{11}\Psi'_{12} - \Psi_{12}\Psi'_{11} = -\Psi_{12}\,. \tag{49}$$

Wird in der obigen Gleichung die Funktion Ψ_{12} als gegeben betrachtet, so erhalten wir für Ψ_{11} eine lineare (nicht homogene) Gleichung

$$\Psi'_{11} = \frac{\Psi'_{12}}{\Psi_{12}}\Psi_{11} + 1\,,$$

für welche die allgemeine Lösung folgende Form hat:

$$\Psi_{11}(\Omega) = \Gamma\Psi_{12}(\Omega) + \Psi_{12}(\Omega)\int\frac{d\Omega}{\Psi_{12}(\Omega)}\,, \tag{50}$$

wo Γ die Integrationskonstante ist.

Die allgemeine Lösung des Systems (47) hängt also von einer beliebigen Funktion $\Psi_{12}(\Omega)$ und von einer beliebigen Konstanten Γ ab und sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(\Omega) &= \Gamma\Psi_{12} + \Psi_{12}\int\frac{d\Omega}{\Psi_{12}}\,, \\ \Psi_{12}(\Omega) &= \Psi_{12}\,, \\ \Psi_{21}(\Omega) &= -\frac{\left[\Gamma\Psi_{12} + \Psi_{12}\int\frac{d\Omega}{\Psi_{12}}\right]^2}{\Psi_{12}}\,, \\ \Psi_{22}(\Omega) &= -\Gamma\Psi_{12} - \Psi_{12}\int\frac{d\Omega}{\Psi_{12}}\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Diese Werte von Ψ_{ik} werden jetzt in die Gleichungen des Systems (39) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}\Phi_0 - \beta_{11}\Phi_{11} - \beta_{21}\Phi_{21} &= 0\,, \\ \Psi_{12}\Phi_0 - \beta_{11}\Phi_{12} - \beta_{21}\Phi_{22} &= 0\,, \\ -\frac{\Psi_{11}^2}{\Psi_{12}}\Phi_0 - \beta_{12}\Phi_{11} - \beta_{22}\Phi_{21} &= 0\,, \\ -\Psi_{11}\Phi_0 - \beta_{12}\Phi_{12} - \beta_{22}\Phi_{22} &= 0\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Die Integration dieses Systems kann einfach folgendermaßen geschehen. Durch Addition der ersten und der vierten Gleichung bekommen wir

$$\sum_{i,k}\beta_{ik}\Phi_{ik} = 0\,. \tag{53}$$

Dies ist eine Eulersche Gleichung, die die homogenen Funktionen nullter Ordnung charakterisiert. Die Funktion Φ ist folglich in bezug auf die Variablen β_{ik} homogen von nullter Ordnung. Wir können also schreiben

$$\Phi = \Theta\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}, \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}, \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}, \Omega\right). \tag{54}$$

Daraus bekommen wir

$$\Phi_0 = \Theta_4\,, \qquad \Phi_{11} = -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}^2}\Theta_1 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}^2}\Theta_2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}^2}\Theta_3\,,$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\beta_{11}}\Theta_1\,, \qquad \Phi_{21} = \frac{1}{\beta_{11}}\Theta_2\,, \qquad \Phi_{22} = \frac{1}{\beta_{11}}\Theta_3\,.$$

Diese Werte setzen wir in die erste und zweite Gleichung von (52). Dies ergibt

$$\begin{aligned} \Psi_{11}\Theta_4 + \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Theta_1 + \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Theta_3 &= 0\,, \\ \Psi_{12}\Theta_4 \quad - \Theta_1 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Theta_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Eliminieren wir daraus Θ_4 indem wir die erste Gleichung mit Ψ_{12}, die zweite mit $-\Psi_{11}$ multiplizieren und nachher addieren, so erhalten wir

$$\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}\right)\Theta_1+\left(\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Psi_{11}\right)\Theta_3=0\,. \tag{55}$$

Das entsprechende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen lautet

$$\frac{d\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\right)}{\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}}=\frac{d\left(\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\right)}{\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Psi_{11}}\,,$$

woraus

$$\int\frac{d\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\right)}{\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}}=\int\frac{d\left(\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\right)}{\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Psi_{11}}\,,$$

$$\log\left|\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}\right|=\log\left|\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Psi_{11}\right|+\bar{\Gamma}_{\pm}$$

(bei der Integration treten zwei Konstanten $\bar{\Gamma}_+$ und $\bar{\Gamma}_-$ auf, je nachdem $\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}\gtreqless 0$ ist),

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\Psi_{11}=\Gamma\left(\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}\Psi_{12}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\Psi_{11}\right)\qquad(\Gamma=\pm e^{\bar{\Gamma}_{\pm}})$$

oder anders geschrieben

$$\beta_{11}\Psi_{11}+\beta_{12}\Psi_{12}=\Gamma(\beta_{21}\Psi_{11}+\beta_{22}\Psi_{12})$$

folgt.

Daraus folgt, daß

$$\frac{\beta_{11}\Psi_{11}+\beta_{12}\Psi_{12}}{\beta_{21}\Psi_{11}+\beta_{22}\Psi_{12}} \tag{56}$$

ein erstes Integral ist und folglich können wir

$$\Phi=\Lambda\left\{\frac{\beta_{11}\Psi_{11}+\beta_{12}\Psi_{12}}{\beta_{21}\Psi_{11}+\beta_{22}\Psi_{12}},\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}},\Omega\right\} \tag{57}$$

setzen. Wird dies in die erste der Gleichungen (52) eingesetzt, so erhält man

$$\Lambda_3=0\,.$$

In die dritte Gleichung eingesetzt (die einfachen aber etwas schwerfälligen Rechnungen überlassen wir dem Leser), ergibt es

$$\Lambda_2=0\,.$$

So daß endlich

$$\Phi=\Lambda\left\{\frac{\Psi_{11}\beta_{11}+\Psi_{12}\beta_{12}}{\Psi_{11}\beta_{21}+\Psi_{12}\beta_{22}}\right\} \tag{58}$$

folgt.

Bemerkung. Man könnte auch etwas anders verfahren. Nachdem wir festgestellt haben, daß Φ in bezug auf β_{ik} homogen von nullter Ordnung ist [(54)], erkennen wir, daß es spezielle Lösungen von der Gestalt

$$\Phi=\frac{\sum_{i,k}\varrho_{ik}(\Omega)\,\beta_{ik}}{\sum_{i,k}\sigma_{ik}(\Omega)\,\beta_{ik}}$$

gibt.

Das Einsetzen dieses Ausdruckes in die Gleichungen (52) und das Vergleichen der korrespondierenden Koeffizienten β_{ik} gestattet nun die Ausrechnung von ϱ_{ik}, σ_{ik}. Eine der Lösungen ist folgende:

$$\varrho_{11}=\Psi_{11}\,,\qquad \varrho_{12}=\Psi_{12}\,,\qquad \varrho_{21}=\varrho_{22}=0\,,$$
$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=0\,,\qquad \sigma_{21}=\Psi_{11}\,,\qquad \sigma_{22}=\Psi_{12}\,.$$

Auf diese Weise erhalten wir die spezielle Lösung

$$\frac{\Psi_{11}\beta_{11}+\Psi_{12}\beta_{12}}{\Psi_{11}\beta_{21}+\Psi_{12}\beta_{22}}\,.$$

Da wir von der anderen Seite wissen, daß das vorliegende System nur ein einziges unabhängiges Integral besitzt, so muß die allgemeine Lösung eben die Form (58) haben.

Nun handelt es sich darum, welche von den Lösungen (58) (in welchen zwei beliebige Funktionen Λ und Ψ_{12} einer veränderlichen — Ψ_{11} ist auf Grund von (51) durch Ψ_{12} ausdrückbar — und eine beliebige Konstante enthalten sind) auch die Funktionalgleichung (6) erfüllen. Zunächst bemerken wir, daß die Lösung Φ der Identitätsbedingung

$$\Phi(\Omega;\delta_{ik})=\Omega$$

genügen muß. Dies ergibt die Relation

$$\Lambda\left(\frac{\Psi_{11}}{\Psi_{12}}\right)=\Omega\,. \tag{59}$$

Differenzieren wir beide Seiten dieser Identität nach Ω, so erhalten wir

$$\Lambda'\left(\frac{\Psi_{11}}{\Psi_{12}}\right)\frac{\Psi_{12}\Psi_{11}'-\Psi_{11}\Psi_{12}'}{\Psi_{12}^2}=1\,,$$

was unter Berücksichtigung von (49) zu

$$\Lambda'\left(\frac{\Psi_{11}}{\Psi_{12}}\right)=\Psi_{12}$$

führt. Im Intervalle, wo $\Psi_{12} \neq 0$ ist, ist also Λ' vom konstanten Zeichen, also streng monoton, also umkehrbar. Aus (59) erhalten wir dann

$$\lambda(\Omega) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Lambda^{-1}(\Omega) = \frac{\Psi_{11}}{\Psi_{12}}.$$

Die Relation (58) kann also in jedem Intervall, wo Ψ_{12} von Null verschieden ist, in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\Phi = \Lambda\left\{\frac{\beta_{11}\lambda(\Omega)+\beta_{12}}{\beta_{21}\lambda(\Omega)+\beta_{22}}\right\} \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)\,. \tag{60}$$

$\Lambda(u)$ kann auch in gewissen isolierten Punkten nicht definiert sein, wie $\Lambda(u) = 1/u$ in $u = 0$.

Umgekehrt, kann man leicht nachweisen, daß wenn eine umkehrbare Funktion $\Lambda(u)$ nur in isolierten Punkten nicht definiert ist, so bestimmt die Formel

$$\overline{\Omega} = \Lambda\left\{\frac{\alpha_{11}\lambda(\Omega)+\alpha_{12}}{\alpha_{21}\lambda(\Omega)+\alpha_{22}}\right\} \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)$$

eine Transfomationsformel eines geometrischen Objektes mit einer Komponenten. Diese Objekte wollen wir *Pensovsche Objekte mit einer Komponenten* nennen. Setzen wir insbesondere $\Lambda(u) = 1/u$ (wie im obigen Beispiel), so erhalten wir die Transformationsformel für den Quotienten von Komponenten eines kontravarianten Vektors. In analoger Weise, wenn $\Lambda(u) = -u$ angenommen wird, so bekommen wir die Transformationsformel für den Quotienten von Komponenten eines kovarianten Vektors der Ebene.

Trotz eines scheinbar korrekten Verfahrens können wir aber nicht behaupten, daß alle geometrischen Objekte bestimmt worden sind. Der Grund des heiklen Fehlers liegt im Schlusse, welchen wir gezogen haben, daß eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die die Eulersche Differentialgleichung

$$\sum_i x_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0$$

erfüllt, eine homogene Funktion von nullter Ordnung der Gestalt

$$\varphi = \Theta\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \tag{61}$$

ist. Diesen Schluß liefert uns die klassische Theorie der Differentialgleichungen, denn aus

$$dx_i/x_i = dx_k/x_k$$

wird auf die Relation

$$x_k/x_1 = \Gamma_k$$

bestanden, woraus

$$\varphi = \Theta\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \tag{61}$$

folgt. Man soll aber beachten, daß der Satz der Theorie der Differentialgleichungen, der hier angewendet wird, nur einen *lokalen* Charakter besitzt, so daß die Form (61) der Funktion φ nur in einer Umgebung des betrachteten Punktes (der vom Koordinatenursprung verschieden sein soll) richtig ist. Genauer gesagt, kann aus dem Bestehen der Eulerschen Differentialgleichung nur auf *positive* Homogeneität der Funktion φ geschlossen werden. Wird diese Feinheit im obigen Verfahren berücksichtigt, so erhalten wir statt der allgemeinen Formel (60) die folgende:

$$\Phi = \Lambda\big(\beta_{11}\Psi_{11}(\Omega)+\beta_{12}\Psi_{12}(\Omega),\, \beta_{21}\Psi_{11}(\Omega)+\beta_{22}\Psi_{12}(\Omega)\big)\,, \tag{62}$$

wo Λ eine *positiv homogene* Funktion von nullter Ordnung ist. Aus

$$\Phi(\Omega; \delta) = \Omega$$

erhalten wir die Bedingung

$$\Lambda[\Psi_{11}(\Omega), \Psi_{12}(\Omega)] = \Omega\,. \tag{63}$$

Führen wir nun die folgenden kurzen Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(u) &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \Lambda(u, 1)\,, \\ \Lambda_{-1}(u) &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \Lambda(u, -1)\,, \\ \lambda(\Omega) &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\Psi_{11}}{\Psi_{12}} = \Gamma + \int \frac{d\Omega}{\Psi_{12}}\,, \end{aligned} \tag{64}$$

so schreiben wir die obige Transformationsformel (62) folgendermaßen um:

$$\overline{\Omega} = \Lambda_\varepsilon\left[\varepsilon\,\frac{\beta_{11}\lambda(\Omega)+\beta_{12}}{\beta_{21}\lambda(\Omega)+\beta_{22}}\right], \tag{65}$$

wo

$$\varepsilon^2 = 1 \tag{66}$$

und

$$\varepsilon\Psi_{12}[\beta_{21}\lambda(\Omega)+\beta_{22}] > 0\,. \tag{67}$$

Zwischen den Funktionen Λ_ε und der Funktion $\lambda(\Omega)$ bestehen die Relationen (die durch Einsetzen von $\beta_{11} = \beta_{22} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$ in (65) entstehen)

$$\Lambda_\varepsilon[\varepsilon\lambda(\Omega)] = \Omega\,.$$

Für $\varepsilon = 1$ bekommt man daraus

$$\Lambda_1[\lambda(\Omega)] = \Omega\,,$$

woraus folgt, daß die Funktion $\Lambda_1(u)$ invers zu $\lambda(\Omega)$ ist (λ ist umkehrbar, da $\lambda'(\Omega) = 1/\Psi_{12}(\Omega)$ also vom konstanten Zeichen ist). Es ist also

$$\Lambda_1(u) = \Lambda(u)\,, \qquad \Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,.$$

Für $\varepsilon = -1$ haben wir

$$\Lambda_{-1}[-\lambda(\Omega)] = \Omega\,,$$

woraus

$$\Lambda_{-1}(u) = \Lambda(-u) \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)$$

folgt. Berücksichtigt man dies in der Formel (65) so bekommt man ebenso für $\varepsilon = 1$ wie auch für $\varepsilon = -1$ die einheitliche Formel

$$\overline{\Omega} = \Lambda\left\{\frac{\beta_{11}\lambda(\Omega) + \beta_{12}}{\beta_{21}\lambda(\Omega) + \beta_{22}}\right\} \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)\,, \tag{68}$$

die mit (60) übereinstimmt. Da $\Lambda_{-1}(u) = \Lambda_1(-u)$ besteht, so haben wir

$$\Lambda(u, -1) = \Lambda(-u, 1)\,,$$

so daß die Funktion $\Lambda(u, v)$ nicht nur positiv homogen, sondern auch homogen von nullter Ordnung sein muß.

(68) gilt für $\beta_{21}\lambda(\Omega) + \beta_{22} \neq 0$. Ist $\beta_{21}\lambda(\Omega) + \beta_{22} = 0$, so folgt aus (62) $\Phi = \Gamma$ (konstant). Aus (6) folgt, daß diese Konstante für $\beta_{11}\lambda(\Omega) + \beta_{22} \gtrless 0$ die selbe ist. Ebenfalls folgt aus (6), daß $\lim\limits_{\Omega\to\Gamma} \lambda(\Omega) = \pm\infty$ ist.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 2a. *Unter der Voraussetzung, daß die Funktion Φ transitiv und von der Klasse C^1 ist und daß wenigstens eine der partiellen Ableitungen $\partial\Phi/\partial a_{ik} \neq 0$ ist, besitzt die Gleichung (6) für $n = 2$ die Lösungen*

$$\Phi(\Omega;\, a_{ik}) = X\{\varepsilon J \chi(\Omega)\} \qquad \left(\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ \operatorname{sg} J \end{cases},\ X[\chi(\Omega)] = \Omega\right),$$

wo X eine umkehrbare Funktion der Klasse C^2 ist und

$$\Phi(\Omega;\, a_{ik}) = \Lambda\left(\frac{a_{11}\lambda(\Omega) + a_{12}}{a_{21}\lambda(\Omega) + a_{22}}\right) \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)\,,$$

wo λ eine umkehrbare Funktion der Klasse C^2 ist, deren Wertevorrat die ganze Zahlengerade höchstens mit Ausnahme von isolierten Punkten ist. Für Koordinatensysteme, wo der Nenner in der letzten Formel verschwinden würde, ist $\Phi(\Omega) = \Gamma$ (konstant) und es gilt $\lim\limits_{\Omega\to\Gamma} \lambda(\Omega) = \pm\infty$. Es gibt keine andere Lösungen.

Satz 2b. *Für $n = 2$ sind unter den obigen Bedingungen die Objekte erster Klasse mit einer Komponente entweder Objekte vom Typus J oder Pensovsche Objekte.*

§ 3. Äquivalenz. Es entsteht die Frage, ob ein Pensovsches Objekt einem Objekt vom Typus J äquivalent sein kann oder zwei Pensovsche Objekte zueinander äquivalent sein können (wir wissen schon, wie die Sache mit der Äquivalenz von zwei Objekten vom Typus J steht). Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Zwei Pensovsche Objekte $\overset{1}{\Omega}$ und $\overset{2}{\Omega}$ sind immer äquivalent.*

Beweis. Es sei

$$\overline{\overset{1}{\Omega}} = \overset{1}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{22}}\right\} \qquad (\overset{1}{\lambda}[\overset{1}{\Lambda}(\tau)] = \tau)\,,$$

$$\overline{\overset{2}{\Omega}} = \overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Omega}) + a_{22}}\right\} \qquad (\overset{2}{\lambda}[\overset{2}{\Lambda}(\tau)] = \tau)\,.$$

Setzen wir nun

$$\Psi(\Omega) \overset{\text{df}}{=} \overset{2}{\Lambda}[\overset{1}{\lambda}(\Omega)]\,.$$

Wir behaupten, daß die Relation

$$\overset{2}{\Omega} = \Psi(\overset{1}{\Omega})$$

in allen Koordinatensystemen gültig ist. Dazu ist es hinreichend zu zeigen, daß die obige Relation

$$\overline{\overset{2}{\Omega}} = \Psi(\overline{\overset{1}{\Omega}})$$

nach sich zieht. In der Tat, ergibt die rechte Seite nach Umformungen

$$\Psi(\overline{\overset{1}{\Omega}}) = \overset{2}{\Lambda}\{\overset{1}{\lambda}(\overline{\overset{1}{\Omega}})\} = \overset{2}{\Lambda}\left\{\overset{1}{\lambda}\left[\overset{1}{\Lambda}\left(\frac{a_{11}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{22}}\right)\right]\right\}$$

$$= \overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{22}}\right\}.$$

Die linke Seite ist dagegen

$$\overline{\overset{2}{\Omega}} = \overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Omega}) + a_{22}}\right\} = \overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Lambda}[\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega})]) + a_{12}}{a_{21}\overset{2}{\lambda}(\overset{2}{\Lambda}[\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega})]) + a_{22}}\right\}$$

$$= \overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{a_{11}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{12}}{a_{21}\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) + a_{22}}\right\}.$$

Die beiden Seiten sind also identisch und der Satz ist damit bewiesen worden, da die Funktion Ψ umkehrbar ist. Es gilt weiter der

Satz 4. *Ein Pensovsches Objekt $\overset{2}{\Omega}$ ist keinem Objekt $\overset{1}{\Omega}$ vom Typus J äquivalent.*

Beweis. Zwecks der ad absurdum Führung nehmen wir an, dass die Relation

$$\overset{2}{\Omega} = \Psi(\overset{1}{\Omega})$$

in allen Koordinatensystemen besteht oder — was auf dasselbe auskommt— daß die Relation

$$\overline{\overset{2}{\Omega}} = \Psi(\overline{\overset{1}{\Omega}})$$

für alle a_{ik} (mit $J \neq 0$) und alle $\overset{1}{\Omega}$ erfüllt ist, wo Ψ eine umkehrbare Funktion bedeutet.

Für $J > 0$ erhalten wir daraus die Identität

$$\overset{2}{\Lambda}\left\{\frac{\alpha_{11}\overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]+\alpha_{12}}{\alpha_{21}\overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]+\alpha_{22}}\right\} = \overset{1}{\Lambda}\{(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\,\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega})\}\,. \tag{69}$$

Wir halten $\overset{1}{\Omega}$ fest und zwar so, daß

$$\gamma = \overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]\cdot\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega}) \neq 0$$

ausfällt. Nachher setzen wir in die Formel (69)

$$\alpha_{11} = \alpha \neq 0\,, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0\,, \qquad \alpha_{22} = \overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]$$

ein. Dies ergibt

$$\overset{2}{\Lambda}(\alpha) = \overset{1}{\Lambda}(\gamma\alpha)\,,$$

was für alle $\alpha \neq 0$ erfüllt ist. Wird diese Beziehung in (69) berücksichtigt, so erhalten wir wegen der Umkehrbarkeit der Funktion $\overset{1}{\Lambda}$

$$\gamma\,\frac{\alpha_{11}\overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]+\alpha_{12}}{\alpha_{21}\overset{2}{\lambda}[\Psi(\overset{1}{\Omega})]+\alpha_{22}} = (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\,\overset{1}{\lambda}(\overset{1}{\Omega})\,.$$

Dies würde bedeuten, daß eine linear gebrochene Funktion einer ganzen äquivalent ist, was offenbar ein Unsinn ist und somit ist der Satz bewiesen.

Bezüglich des Typus $(1, n, 1)$ vgl. auch S. Gołąb 1947, 1950 [2].

6. Typus $(m, 1, r)$, $r \leqslant 3$

§ 1. Ein Hilfssatz bezüglich spezieller geometrischer Objekten mit nicht weniger Komponenten als Parametern. (J. Aczél - M. Hosszú 1956, J. Aczél 1957 [1], 1958 [2].) $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ sei ein geometrisches Objekt mit m Komponenten und die $u = (u_1, \ldots, u_p)$ seien p-Tuppeln von Parametern. In diesem § setzen wir $m \geqslant p$ voraus. Wir werden Ω auch in der Gestalt

$$\Omega = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Omega}\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Omega}\\ w_1\\ \vdots\\ w_p\end{pmatrix} \qquad \left(\overset{0}{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_1\\ \vdots\\ \Omega_{m-p}\end{pmatrix}, \quad w_j = \Omega_{m-p+j} \ (j = 1, 2, \ldots, p)\right)$$

schreiben. Die Transformationsformel ist (I (23))

$$\overline{\Omega} = \Phi(\Omega; u)$$

und wir schreiben die Fundamentalgleichung I (24) in der Gestalt

$$\Phi[\Phi(\Omega; u); v] = \Phi(\Omega; u \bigcirc v)\,. \tag{1}$$

Die Werte von Ω durchlaufen eine Menge $\boldsymbol{\Sigma}$ eines m-dimensionalen Raumes; wir setzen voraus, daß *$\boldsymbol{\Sigma}$ jedenfalls die Funktionenwerte Φ enthält.* Wir werden mit $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$ bzw. $\boldsymbol{S}$ die $(m-p)$-dimensionale bzw. p-dimensionale Projektion dieser Menge auf die durch die ersten $(m-p)$ bzw. durch die letzen p Koordinatenachsen aufgespannten Unterräumen bezeichnen. u, v seien Elemente einer p-dimensionalen Menge $\boldsymbol{P}$, die eine Halbgruppe bezüglich der Operation   et, d. h. es gelten

$$u \bigcirc v \in \boldsymbol{P} \quad \text{und} \quad (u \bigcirc v) \bigcirc w = u \bigcirc (v \bigcirc w)$$

für $u, v, w \in \boldsymbol{P}$. Es wird vorausgesetzt, daß *$\boldsymbol{P}$ eine Teilmenge von $\boldsymbol{S}$ ist.* Die m-dimensionale Menge, deren $(m-p)$-dimensionale Projektion $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$ und deren p-dimensionale Projektion $\boldsymbol{P}$ ist, sei mit $\boldsymbol{\Pi}$ bezeichnet.

Um die Funktionalgleichung (1) zu lösen, setzen wir

$$\Omega = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ d\end{bmatrix}, \qquad u = s\,, \qquad S \overset{\text{df}}{=} \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s\end{bmatrix}, \qquad \Lambda(S) \overset{\text{df}}{=} \Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ d\end{bmatrix}, s\right),$$

wo $d \in \boldsymbol{S}$ ein System von p Konstanten $d_1, \ldots, d_p$ ist, während $\overset{0}{\Sigma}$ in $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$, s in $\boldsymbol{P}$ also S in $\boldsymbol{\Pi}$ liegt. So erhalten wir aus (1)

$$\Phi\left(\Lambda(S); v\right) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s \bigcirc v\end{bmatrix}\right). \tag{2}$$

Nimmt nun die Funktion $\Lambda(S)$ jeden Wert Ω in $\boldsymbol{\Sigma}$ genau einmal auf, während S die Menge $\boldsymbol{\Pi}$ durchläuft, so ist

$$\Lambda(S) = \Omega$$

eindeutig lösbar, die Funktion Λ eindeutig umkehrbar. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion mit

$$S = L(\Omega) = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ l(\Omega)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s\end{bmatrix}.$$

So geht (2) in

$$\Phi(\Omega;\, v) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ l(\Omega)\circ v\end{bmatrix}\right),$$

d. h. in

$$\text{(3)}\qquad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\, u) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ l(\Omega)\circ u\end{bmatrix}\right)\qquad \left(\Lambda\big(L(\Omega)\big) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ l(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right)$$

über. Da Λ die Umkehrfunktion von $L = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Lambda}\\ l\end{pmatrix}$ ist, kann (3) auch in der Gestalt

$$\text{(4)}\qquad \overset{0}{\Lambda}\big(\Phi(\Omega;\, u)\big) = \overset{0}{\Lambda}(\Omega)\,,\qquad l\big(\Phi(\Omega;\, u)\big) = l(\Omega)\circ u$$

geschrieben werden. Dies bedeutet, daß das Objekt Ω mit einem Objekt $S = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s\end{bmatrix}$ äquivalent ist, deren Transformationsformel

$$\text{(5)}\qquad \overline{\overset{0}{\Sigma}} = \overset{0}{\Sigma}\,,\qquad \bar{s} = s\circ u$$

ist. Enthält $\boldsymbol{P}$ ein rechtsseitiges Einheitselement:

$$u\circ e = u\,,$$

so folgt aus (3) auch

$$\text{(6)}\qquad \Phi(\Omega;\, e) = \Omega\,.$$

Es muß also nicht gefordert werden, daß die Identitätstransformation das Objekt unverändert läßt; dies ist Konsequenz der übrigen Forderungen.

Andererseits erfüllt die Funktion (3) die Funktionalgleichung (1) immer, falls Λ die Umkehrfunktion der Funktion $L = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Lambda}\\ l\end{pmatrix}$ ist:

$$\Phi(\Phi(\Omega;\, u);\, v) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}[\Phi(\Omega;\, u)]\\ l[\Phi(\Omega;\, u)]\circ v\end{bmatrix}\right) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ [l(\Omega)\circ u]\circ v\end{bmatrix}\right)$$
$$= \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ l(\Omega)\circ(u\circ v)\end{bmatrix}\right) = \Phi(\Omega;\, u\circ v)\,,$$

wegen (4) und wegen der Assoziativität der Operation $u\circ v$.

Wir haben also den folgenden

HILFSSATZ. *Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung* (1) *ist* (3), *falls Ω, Φ, Λ in der m-dimensionalen Menge $\boldsymbol{\Sigma}$ liegen, $u, v, u\circ v$ Elemente der p-dimensionalen Halbgruppe $\boldsymbol{P}\subseteq\boldsymbol{\Sigma}$ sind, $m\geqslant p$ gilt und die Werte von L in der m-dimensionalen Menge $\boldsymbol{\Pi}$ liegen, deren Projektion auf den Unterraum der ersten $(m-p)$ Koordinaten mit der von $\boldsymbol{\Sigma}$ übereinstimmt, während die Projektion auf den Unterraum der letzten p Koordinaten gleich $\boldsymbol{P}$ ist und falls endlich ein System von Konstanten d existiert, derart, daß es zu jedem $\Omega\in\boldsymbol{\Sigma}$ genau ein $S = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s\end{bmatrix}\in\boldsymbol{\Pi}$ mit $\Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ d\end{bmatrix};\, s\right) = \Omega$ gibt. Im Falle $m = p$ fehlen $\overset{0}{\Sigma}$, $\overset{0}{\Lambda}$ in diesen Formeln.*

Unter diesen Voraussetzungen sind also die speziellen geometrischen Objekte mit m Komponenten und p Parametern $(m\geqslant p)$ unter den Koordinatentransformationen deren Parameter in $\boldsymbol{P}$ liegen, mit den Objekten $S = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ s\end{bmatrix}$ äquivalent, die die Transformationsformel (5) *haben.*

§ 2. Differentialgeometrische Objekte erster und zweiter Klasse im eindimensionalen Raume. (J. E. Pensov 1950 [2], 1951, J. Aczél 1957 [1], 1958 [2].) Aus dem Hilfssatz folgt für Objekte erster Klasse im eindimensionalen Raume (vgl. auch (6) und 4 (1)) unmittelbar der

SATZ 1. *Genügt $\Phi(\Omega;\, \alpha_1)$ für die m-dimensionalen $\Omega\in\boldsymbol{\Sigma}$, und für die $\alpha_1\neq 0$ einer Halbgruppe $\boldsymbol{P}\subseteq\boldsymbol{\Sigma}$ der Funktionalgleichung*

$$\text{(7)}\qquad \Phi[\Phi(\Omega;\, \alpha_1);\, \beta_1] = \Phi(\Omega;\, \beta_1\alpha_1)$$

und gibt es ein δ_1, so daß für alle $\Omega\in\boldsymbol{\Sigma}$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \delta_1\end{bmatrix};\, \sigma_1\right) = \Omega$$

bezüglich $S = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\end{pmatrix}$ eindeutig lösbar ist, wo $\sigma_1\neq 0$ bzw. $\overset{0}{\Sigma}$ in $\boldsymbol{P}$ bzw. in der $(m-1)$-dimensionalen Projektion $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$ von $\boldsymbol{\Sigma}$ liegen, so ist für diese Ω und α_1

$$\text{(8)}\qquad \bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\, \alpha_1) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\,\alpha_1\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\Lambda[L(\Omega)] = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,,\qquad \lambda_1(\Omega)\neq 0\right),$$

wo Λ eine umkehrbar eindeutige Funktion mit der Inversen $L = \begin{pmatrix}\overset{0}{\Lambda}\\ \lambda_1\end{pmatrix}$ *ist. Die Formel* (8) *erfüllt* (7) *und speziell*

$$\Phi(\Omega;1)=\Omega$$

für alle $0 \neq \alpha_1 \in \mathbf{P}$, $\Omega \in \mathbf{\Sigma}$.

Unter diesen Bedingungen ist also jedes eindimensionale differentialgeometrische Objekt Ω erster Klasse für $\alpha_1 \in \mathbf{P}$ mit einem Objekt äquivalent, das in $m-1$ Skalaren und in eine Dichte zerfällt.

Wie wir in dem Abschnitte 4 sahen, ist dies auch für $m=1$ gültig, nur fehlen dann die Zeilen mit $\overset{0}{\Sigma}$, $\overset{0}{\Lambda}$.

Auch bei Objekten zweiter Klasse kann der Hilfssatz angewendet werden, falls wir den in dem Abschnitte 3 erledigten Fall $m=1$ außer acht lassen. Aus dem Hilfssatz ergibt sich

$$\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \alpha_1\lambda_1(\Omega)\\ \alpha_1\lambda_2(\Omega)+\alpha_2\lambda_1(\Omega)^2\end{bmatrix}\right),$$

$$\Lambda[L(\Omega)] = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\\ \lambda_2(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,, \qquad \lambda_1(\Omega)\neq 0$$

als Lösung der Funktionalgleichung (vgl. 2 (3), 2 (4))

$$\Phi\big(\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2);\beta_1,\beta_2\big) = \Phi(\Omega;\beta_1\alpha_1,\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2)\,. \tag{9}$$

Führen wir zwecks Trennung der Komponenten λ_1, λ_2 die neuen Funktionen

$$\tilde{\Lambda}\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\sigma_1^2\end{bmatrix}\right), \qquad \begin{aligned}\overset{0}{\tilde{\Lambda}}(\Omega) &\overset{\mathrm{df}}{=} \overset{0}{\Lambda}(\Omega)\,,\\ \tilde{\lambda}_1(\Omega) &\overset{\mathrm{df}}{=} \lambda_1(\Omega)\neq 0\\ \tilde{\lambda}_2(\Omega) &\overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)^2}\end{aligned} \qquad \left(\tilde{\Lambda}\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\tilde{\Lambda}}(\Omega)\\ \tilde{\lambda}_1(\Omega)\\ \tilde{\lambda}_2(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right)$$

ein, so erhalten wir (die oberen Zeichen ~ werden wieder weggelassen) den

Satz 2. *Genügt $\Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2)$ der Funktionalgleichung* (9) *für die m-dimensionalen* $(m>1)$ $\Omega \in \mathbf{\Sigma}$ *und für die* $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$ $(\alpha_1\neq 0)$ *einer Menge* $\mathbf{P}\subseteq\mathbf{\Sigma}$, *die unter der Operation*

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1\alpha_1\\ \beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2\end{bmatrix}$$

eine Halbgruppe bildet, und gibt es ein Wertepaar $\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}$, *so daß*

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix};\sigma_1,\sigma_2\right) = \Omega\,, \qquad \sigma_1\neq 0\,,$$

für alle $\Omega\in\mathbf{\Sigma}$ bezüglich $S = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix}$ *eindeutig lösbar ist, wo* $\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix}$ *bzw.* $\overset{0}{\Sigma}$ *in* $\mathbf{P}$ *bzw. in der $(m-2)$-dimensionalen Projektion $\overset{0}{\mathbf{\Sigma}}$ von $\mathbf{\Sigma}$ liegen, so ist für diese Ω, α_1 und α_2*

$$\overline{\Omega} = \Phi(\Omega;\alpha_1,\alpha_2) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\,\alpha_1\\ \lambda_2(\Omega)/\alpha_1+\alpha_2/\alpha_1^2\end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

$$\left(\Lambda[L(\Omega)] = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\\ \lambda_2(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,,\ \lambda_1(\Omega)\neq 0\right),$$

wo Λ eine umkehrbar eindeutige Funktion mit der Inversen $L = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}\\ \lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$ *ist.* (10) *erfüllt* (9) *und speziell*

$$\Phi(\Omega;1,0)=\Omega$$

für alle $\Omega\in\mathbf{\Sigma}$, $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\in\mathbf{P}$. *Bei $m=2$ fehlen in diesen Formeln $\overset{0}{\Sigma}$ und $\overset{0}{\Lambda}$.*

Unter diesen Bedingungen ist also jedes eindimensionale differentialgeometrische Objekt zweiter Klasse für $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\in\mathbf{P}$ *mit einem Objekte äquivalent, das in $(m-2)$ Skalaren, in eine Dichte und in ein Objekt des affinen Zusammenhanges zerfällt.*

Wie wir in dem Abschnitte 3 sahen, gelten diese Formeln mutatis mutandis auch für $m=1$. Nur wird in diesem Falle die eindeutige Lösbarkeit von

$$\Phi(\delta_2;1,\sigma_2)=\Omega$$

gefordert, und die Zeilen mit $\overset{0}{\Lambda}$, λ_1 fehlen in den Formeln (10).

§ 3. Differentialgeometrische Objekte dritter Klasse im eindimensionalen Raume. Bei Objekten dritter Klasse mit der Funktionalgleichung (vgl. 3 (22))

$$\Phi(\Phi(\Omega;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3);\,\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3) = \Phi(\Omega;\,\beta_1\alpha_1,\,\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2,\,\beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_1\alpha_2+\beta_3\alpha_1^3) \tag{11}$$

ergibt der Hilfssatz unmittelbares Ergebnis nur im Falle $m \geqslant 3$: Ist für ein $\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$ die Gleichung

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix};\,\sigma_1,\,\sigma_2,\,\sigma_3\right) = \Omega$$

bezüglich $\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$ eindeutig lösbar, so gilt

$$\Phi(\Omega;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \alpha_1\lambda_1(\Omega)\\ \alpha_1\lambda_2(\Omega)+\alpha_2\lambda_1(\Omega)^2\\ \alpha_1\lambda_3(\Omega)+3\alpha_2\lambda_1(\Omega)\,\lambda_2(\Omega)+\alpha_3\lambda_1(\Omega)^3\end{bmatrix}\right), \qquad \lambda_1(\Omega) \neq 0\,,$$

$$\Lambda(L(\Omega)) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\\ \lambda_2(\Omega)\\ \lambda_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,.$$

Wir führen die neuen Funktionen:

$$\tilde{\Lambda}\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\sigma_1^2\\ (\sigma_3+\frac{3}{2}\sigma_2^2)\,\sigma_1^3\end{bmatrix}\right), \qquad \begin{aligned}\overset{0}{\tilde{\Lambda}}(\Omega) &= \overset{0}{\Lambda}(\Omega)\,,\\ \tilde{\lambda}_1(\Omega) &= \lambda_1(\Omega) \neq 0\,,\\ \tilde{\lambda}_2(\Omega) &= \lambda_2(\Omega)\,\lambda_1(\Omega)^{-2}\,,\\ \tilde{\lambda}_3(\Omega) &= \lambda_3(\Omega)\,\lambda_1(\Omega)^{-3}-\tfrac{3}{2}\,\lambda_2(\Omega)^2\lambda_1(\Omega)^{-4}\end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\Lambda}\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\tilde{\Lambda}}(\Omega)\\ \tilde{\lambda}_1(\Omega)\\ \tilde{\lambda}_2(\Omega)\\ \tilde{\lambda}_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right)$$

ein und erhalten nach Weglassung der oberen Zeichen $\sim$ die Formel

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\,\alpha_1\\ \dfrac{\lambda_2(\Omega)}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{\lambda_3(\Omega)}{\alpha_1^2}-\dfrac{3}{2}\,\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{bmatrix}\right) \tag{12}$$

$$\left(\Lambda[L(\Omega)] = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Lambda}(\Omega)\\ \lambda_1(\Omega)\\ \lambda_2(\Omega)\\ \lambda_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,,\quad \lambda_1(\Omega) \neq 0\right).$$

Für $m = 1$ wurde die bezügliche Formel in dem Abschnitte 3 schon bewiesen. Es bleibt also nur noch der Fall $m = 2$ übrig. Um den Hilfssatz auch hier anwenden zu können, untersuchen wir zuerst einen Spezialfall von (11), wo in $\Phi(\Omega;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3)$ nicht drei, sondern nur zwei freie Parameter bleiben, aber dergestalt, daß diese zwei-Parameter-Mannigfaltigkeit unter der Operation

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1\alpha_1\\ \beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2\\ \beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_1\alpha_2+\beta_3\alpha_1^3\end{bmatrix} \tag{13}$$

eine Halbgruppe bleibt. Eine an der Hand liegende Weise, dies zu erreichen, ist $\alpha_1 = 1$ zu setzen, was auch durch unsere Bemerkung am Ende des vorigen Paragraphen nahegelegt wird.

Die so erhaltene Gleichung

$$\Phi[\Phi(\Omega;\,1,\,\alpha_2,\,\alpha_3);\,1,\,\beta_2,\,\beta_3] = \Phi(\Omega;\,1,\,\alpha_2+\beta_2,\,\alpha_3+3\beta_2\alpha_2+\beta_3)\,, \qquad \dim\Omega = 2$$

ist von der Gestalt (1), laut des Hilfssatzes gilt also

$$\Phi(\Omega;\,1,\,\alpha_2,\,\alpha_3) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\lambda_2(\Omega)+\alpha_2\\ \lambda_3(\Omega)+3\alpha_2\lambda_2(\Omega)+\alpha_3\end{bmatrix}\right), \qquad \Lambda\left(\begin{bmatrix}\lambda_2(\Omega)\\ \lambda_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\,,$$

falls es ein $\begin{bmatrix}\delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$ gibt, derart, daß

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix};\,1,\,\sigma_2,\,\sigma_3\right) = \Omega$$

bezüglich $\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$ eindeutig lösbar sei. Nach Einführung der Funktionen

$$\Theta\left(\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda\left(\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3+\frac{3}{2}\sigma_2^2\end{bmatrix}\right), \qquad \begin{aligned}\vartheta_2(\Omega) &\overset{\mathrm{df}}{=} \lambda_2(\Omega)\,,\\ \vartheta_3(\Omega) &\overset{\mathrm{df}}{=} \lambda_3(\Omega)-\tfrac{3}{2}\,\lambda_2(\Omega)^2\end{aligned}$$

$$\left(\Theta\left(\begin{bmatrix}\vartheta_2(\Omega)\\ \vartheta_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right)$$

geht dies in

$$(14)\quad \Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \alpha_3) = \Theta\left(\begin{bmatrix}\vartheta_2(\Omega)+\alpha_2\\ \vartheta_3(\Omega)-\frac{3}{2}\alpha_2^2+\alpha_3\end{bmatrix}\right) \qquad \left(\Theta\big(T(\Omega)\big) = \Theta\left(\begin{bmatrix}\vartheta_2(\Omega)\\ \vartheta_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right)$$

über.

Um nun $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zu bestimmen, nehmen wir in Betracht, daß aus (11)

$$(15)\quad \Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Phi\left(\Phi\left(\Omega; 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right); \alpha_1, 0, 0\right) = \Phi\left(\Phi(\Omega; \alpha_1, 0, 0); 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right)$$

folgt. Wenn wir in diese Gleichung (14), sowie

$$U \stackrel{\mathrm{df}}{=} T(\Omega) = \begin{bmatrix}\vartheta_2(\Omega)\\ \vartheta_3(\Omega)\end{bmatrix}, \qquad V \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\end{bmatrix},$$

$$(16)\quad F(U; \alpha_1) \stackrel{\mathrm{df}}{=} T\{\Phi[\Theta(U); \alpha_1, 0, 0]\}$$

einsetzen und die Bezeichnungen

$$(17)\quad \begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}\tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix}\sigma_2\pm\tau_2\\ \sigma_3\pm\tau_3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix}\sigma_2\tau_2\\ \sigma_3\tau_3\end{bmatrix}$$

der direkten Summe bzw. des direkten Produktes einführen, erhalten wir

$$(18)\quad F(U+V; \alpha_1) = F(U; \alpha_1) + V\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}.$$

Aus (16) folgt offenbar

$$(19)\quad F\big(F(U; \alpha_1); \beta_1\big) = F(U; \beta_1\alpha_1).$$

Dies ist eine Gleichung der Gestalt (7), das Einsetzen von (8) würde aber zu langwierigen Rechnungen führen.

Wir haben also die Funktionalgleichung (18) unter der Bedingung (19) zu lösen. Wir setzen $U = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (oder ein beliebiges andere Konstantenpaar) in (18) und erhalten mit

$$C(\alpha_1) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; \alpha_1\right)$$

vorerst

$$(20)\quad F(V; \alpha_1) = C(\alpha_1) + V\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}.$$

Dies setzen wir in (19) ein:

$$C(\beta_1) + C(\alpha_1)\cdot\begin{bmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{bmatrix} + V\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{bmatrix} = C(\beta_1\alpha_1) + V\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{bmatrix}$$

und erhalten aus Symmetriegründen

$$C(\beta_1) + C(\alpha_1)\cdot\begin{bmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{bmatrix} = C(\alpha_1) + C(\beta_1)\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}$$

oder wenn wir $\beta_1 \neq 1, 0$ konstant halten, mit $K \stackrel{\mathrm{df}}{=} C(\beta_1)\cdot\begin{bmatrix}(1-\beta_1^{-1})^{-1}\\ (1-\beta_1^{-2})^{-1}\end{bmatrix}$

$$C(\alpha_1) = K\cdot\begin{bmatrix}1-\alpha_1^{-1}\\ 1-\alpha_1^{-2}\end{bmatrix} = K - K\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}.$$

So wird aus (20)

$$F(V; \alpha_1) = K + (V-K)\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}$$

und aus (16)

$$\Phi(\Omega; \alpha_1, 0, 0) = \Theta\left\{K + \big(T(\Omega)-K\big)\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}\right\} \qquad \big(\Theta\big(T(\Omega)\big) = \Omega\big)$$

oder mit den neuen Bezeichnungen

$$L(\Omega) \stackrel{\mathrm{df}}{=} T(\Omega) - K, \qquad \Lambda(S) = \Theta(K+S) \qquad \big(\Lambda\big(L(\Omega)\big) = \Omega\big):$$

$$\Phi(\Omega; \alpha_1, 0, 0) = \Lambda\left(L(\Omega)\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{bmatrix}\right) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_2(\Omega)}{\alpha_1}\\ \dfrac{\lambda_3(\Omega)}{\alpha_1^2}\end{bmatrix}\right).$$

Die letzteren Bezeichnungen führen wir auch in (14) durch:

$$\Phi(\Omega; 1, \alpha_2, \alpha_3) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\lambda_2(\Omega)+\alpha_2\\ \lambda_3(\Omega)-\frac{3}{2}\alpha_2^2+\alpha_3\end{bmatrix}\right).$$

Schreiben wir all dies in (15) ein, so erhalten wir endlich

$$(21)\quad \Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_2(\Omega)}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{\lambda_3(\Omega)}{\alpha_1^2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{bmatrix}\right) \qquad \left(\Lambda\left(\begin{bmatrix}\lambda_2(\Omega)\\ \lambda_3(\Omega)\end{bmatrix}\right) = \Omega\right).$$

Zusammengefasst haben wir den

Satz 3. *Genügt $\Phi(\Omega; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Funktionalgleichung (11) für die m-dimensionalen $\Omega \in \Sigma$ $(m > 1)$ und für die $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$ $(\alpha_1 \neq 0)$ einer Menge*

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{\Sigma}$, die eine Halbgruppe unter der Operation (13) *bildet, und gibt es ein* $\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$ $(m \geqslant 3)$ *bzw. ein* $\begin{bmatrix}\delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$ $(m = 2)$, *so daß*

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) = \Omega \quad (\sigma_1 \neq 0) \qquad \textit{bzw.} \qquad \Phi\left(\begin{bmatrix}\delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}; 1, \sigma_2, \sigma_3\right) = \Omega$$

für alle $\Omega \in \mathbf{\Sigma}$ bezüglich $S = \begin{bmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$ *bzw. bezüglich* $S = \begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$ *eindeutig lösbar ist, wo* $\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$ *in $\mathbf{P}$, $\overset{0}{\Sigma}$ in der $(m-3)$-dimensionalen Projektion $\overset{0}{\mathbf{\Sigma}}$ von $\mathbf{\Sigma}$ liegen, so gelten* (12) *bzw.* (21) *je nachdem $m \geqslant 3$, bzw. $m = 2$ ist. Diese Funktionen erfüllen* (11) *und speziell*

$$\Phi(\Omega; 1, 0, 0) = \Omega\,.$$

Bei $m = 3$ fehlen $\overset{0}{\Sigma}$ und $\overset{0}{\Lambda}$.

Unter diesen Bedingungen ist also jedes differentialgeometrische Objekt dritter Klasse für $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} \in \mathbf{P}$ *mit einem Objekte äquivalent, das in $(m-3)$ Skalaren, in eine Dichte, in ein Objekt des affinen und in ein Objekt des projektiven Zusammenhanges zerfällt (bei $m = 2$ nur in die beiden letzten).*

Wie wir in dem Abschnitte 3 sahen, gelten diese Formeln mutatis mutandis auch für $m = 1$. Man sieht auch, daß sich (21) bzw. 3 (28) aus (12) durch Weglassen der ersten $(m-2)$ bzw. $(m-1)$ Zeilen, während sich (10) bzw. (8) aus (12) durch Weglassen der letzten, bzw. der beiden letzten Zeilen ergeben.

Es gibt aber für den Fall $m = 2$ auch andere zwei-Parameter-Halbgruppen unter der Operation (13), z. B. die der $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ 0\\ \alpha_3\end{bmatrix}$. J. E. Pensov 1950 [2], 1951 und J. Aczél 1957 [1], 1958 [2] (vgl. auch S. Gołąb - A. Schinzel 1959) haben bewiesen, daß die Objekte in diesem Falle auch mit dem ebenfalls in Objekte von einer Komponenten zerfallenden Objekt

$$\bar\sigma_1 = \sigma_1\alpha_1\,, \qquad \bar\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

oder mit dem sogen. *Pensovschen Objekt von zwei Komponenten*

$$\bar\sigma_1 = \frac{\sigma_1}{\alpha_1}, \qquad \bar\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\sigma_1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

äquivalent sein können. Letzteres genügt den Voraussetzungen des Satzes 3 nicht und ist mit keinem Objekte äquivalent, welches in Objekte mit einer Komponenten zerfällt. Wenn wir aber das Pensovsche Objekt von zwei Komponenten mit einem Objekt von einer Komponenten vereinen, so ist das Vereinigungsobjekt schon mit in Objekten von einer Komponenten zerfallenden Objekten äquivalent. M. Hosszú 1957, 1959 [3], [4] hat bewiesen, daß sich auch unter allgemeineren Bedingungen im wesentlichen keine weitere Objekte ergeben. Er hat auch die eindimensionalen Objekte vierter Klasse mit derselben Methode bestimmt.

Es sei jedenfalls bemerkt, daß hier der Fall der nicht eindeutigen Lösbarkeit in den Bedingungsgleichungen (wie das z. B. bei der Weylschen Dichte der Fall ist) nicht betrachtet wurde. (Vgl. J. Aczél 1957 [1].)

7. Objekte mit speziellen Transformationsformeln

§ 1. Mehrdimensionale Objekte mit mehreren Komponenten unter speziellen Lösbarkeitsbedingungen. (J. Aczél 1957 [1], 1958 [2].) Transformationsformel (I (25)) und Fundamentalgleichung (I (26)) der differentialgeometrischen Objekten der Typen $(m, n, 1)$ bzw. $(m, n, 2)$ können natürlich auch in der Gestalt

$$\bar\Omega = \Psi(\Omega; A^k_\varkappa) \qquad \left(A^k_\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\xi^k}{\partial\bar\xi^\varkappa},\ \det A^k_\varkappa \neq 0\right), \tag{1}$$
$$\Psi[\Psi(\Omega; A^k_\varkappa); A^\varkappa_K] = \Psi(\Omega; A^k_\varkappa A^\varkappa_K)\,,$$

bzw.

$$\bar\Omega = \Psi(\Omega; A^k_\varkappa, A^k_{\varkappa\lambda}) \qquad \left(\det A^k_\varkappa \neq 0,\ A^k_{\varkappa\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^2\xi^k}{\partial\bar\xi^\varkappa\partial\bar\xi^\lambda}\right), \tag{2}$$
$$\Psi[\Psi(\Omega; A^k_\varkappa, A^k_{\varkappa\lambda}); A^\varkappa_K, A^\varkappa_{KL}] = \Psi(\Omega; A^k_\varkappa A^\varkappa_K, A^k_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_K A^\lambda_L + A^k_\varkappa A^\varkappa_{KL})$$

dargestellt werden (vgl. I (9)), wo Ω m Komponenten hat und $k, \varkappa, K, \lambda, L$ die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen. Aus dem Hilfssatze von dem Abschnitte 6 folgen:

Satz 1. *Genügt $\Psi(\Omega; A^k_\varkappa)$ der Funktionalgleichung* (1) *für die m-dimensionalen $\Omega \in \mathbf{\Sigma}$ und für die $A^k_\varkappa$ $(k, \varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ \det A^k_\varkappa \neq 0)$ einer Menge $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{\Sigma}$, die eine Halbgruppe unter der Operation $A^k_\varkappa A^\varkappa_K$ bildet, ist $m \geqslant n^2$ und gibt es ein Wertesystem $D^k_\varkappa$ derart, daß*

$$\Psi\left[\begin{pmatrix}\overset{0}{\Sigma}\\ D^k_\varkappa\end{pmatrix}; S^k_\varkappa\right] = \Omega$$

für alle $\Omega \in \boldsymbol{\Sigma}$ *bezüglich* $S = \begin{pmatrix} \overset{0}{\Sigma} \\ S_\varkappa^k \end{pmatrix}$ *eindeutig lösbar ist, wo* $S_k^\varkappa$ $(k, \varkappa = 1, 2, \ldots, n;$ $\det S_\varkappa^k \neq 0)$ *bzw.* $\overset{0}{\Sigma}$ *in* $\boldsymbol{P}$ *bzw. in der* $(m-n^2)$*-dimensionalen Projektion* $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$ *von* $\boldsymbol{\Sigma}$ *liegen, so ist für diese* Ω *und* $A_\varkappa^k$

$$(3)\quad \begin{gathered} \overline{\Omega} = \Psi(\Omega; A_\varkappa^k) = \Theta\left(\begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta}(\Omega) \\ T_k^j(\Omega)\, A_\varkappa^k \end{bmatrix}\right), \\ \left(\Theta[T(\Omega)] = \Theta\left(\begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta}(\Omega) \\ T_k^j(\Omega) \end{bmatrix}\right) = \Omega\,, \ \det T_k^j(\Omega) \neq 0\right), \end{gathered}$$

wo Θ *eine umkehrbar eindeutige Funktion mit der Inversen* $T = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta} \\ T_k^j \end{bmatrix}$ *ist.* (3) *erfüllt* (1) *für alle* $\Omega \in \boldsymbol{\Sigma}$, $A_\varkappa^k \in \boldsymbol{P}$. *Im Falle* $m = n^2$ *fehlen in diesen Formeln die Zeilen mit* $\overset{0}{\Sigma}$, $\overset{0}{\Theta}$.

Unter diesen Bedingungen sind also die differentialgeometrischen Objekte erster Klasse für $A_\varkappa^k \in \boldsymbol{P}$ *mit den linearen Objekten* $S = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Sigma} \\ S_\varkappa^k \end{bmatrix}$ *äquivalent, die die Transformationsformeln*

$$\overline{\overset{0}{\Sigma}} = \overset{0}{\Sigma}\,, \qquad \overline{S}_\varkappa^j = S_k^j A_\varkappa^k$$

haben.

Satz 2. *Genügt* $\Psi(\Omega; A_\varkappa^k, A_{\varkappa\lambda}^k)$ *der Funktionalgleichung* (2) *für die* m*-dimensionalen* $\Omega \in \boldsymbol{\Sigma}$ *und für die* $A_\varkappa^k$, $A_{\varkappa\lambda}^k$ $(k, \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n,$ $\det A_\varkappa^k \neq 0)$ *einer Menge* $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}$, *die eine Halbgruppe unter der Operation*

$$\begin{bmatrix} A_\varkappa^k \\ A_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_K^\varkappa \\ A_{KL}^\varkappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\varkappa^k A_K^\varkappa \\ A_{\varkappa\lambda}^k A_K^\varkappa A_L^\lambda + A_\varkappa^k A_{KL}^\varkappa \end{bmatrix}$$

bildet, ist weiter $m \geqslant n\left[n + \binom{n+1}{2}\right] = (n^3 + 3n^2)/2$ *und gibt es ein Wertesystem* $D_\varkappa^k$, $D_{\varkappa\lambda}^k$ *derart, daß*

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \overset{0}{\Sigma} \\ D_\varkappa^k \\ D_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix};\ S_\varkappa^k, S_{\varkappa\lambda}^k\right) = \Omega$$

für alle $\Omega \in \boldsymbol{\Sigma}$ *bezüglich* $S = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Sigma} \\ S_\varkappa^k \\ S_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix}$ *eindeutig lösbar ist, wo* $\begin{bmatrix} S_\varkappa^k \\ S_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix}$ $(k, \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n;$ $\det S_\varkappa^k \neq 0)$ *bzw.* $\overset{0}{\Sigma}$ *in* $\boldsymbol{P}$ *bzw. in der* $(m - \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2))$*-di-*

mensionalen Projektion $\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}}$ *von* $\boldsymbol{\Sigma}$ *liegen, so ist für diese* Ω, $A_\varkappa^k$, $A_{\varkappa\lambda}^k$

$$(4)\quad \begin{gathered} \overline{\Omega} = \Psi(\Omega; A_\varkappa^k, A_{\varkappa\lambda}^k) = \Theta\left(\begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta}(\Omega) \\ T_k^j(\Omega)\, A_\varkappa^k \\ T_{kl}^j(\Omega)\, A_\varkappa^k A_\lambda^l + T_k^j(\Omega)\, A_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix}\right), \\ \left(\Theta[T(\Omega)] = \Theta\left(\begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta}(\Omega) \\ T_k^j(\Omega) \\ T_{kl}^j(\Omega) \end{bmatrix}\right) = \Omega\,, \quad \det T_k^j(\Omega) \neq 0\right), \end{gathered}$$

wo Θ *eine umkehrbar eindeutige Funktion mit der Inversen* $T = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Theta} \\ T_k^j \\ T_{kl}^j \end{bmatrix}$ *ist.* (4) *erfüllt* (2) *für alle* $\Omega \in \boldsymbol{\Sigma}$, $\begin{bmatrix} A_\varkappa^k \\ A_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix} \in \boldsymbol{P}$. *Bei* $m = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2)$ *fehlen* $\overset{0}{\Sigma}$, $\overset{0}{\Theta}$ *in diesen Formeln.*

Unter diesen Voraussetzungen sind also die differentialgeometrischen Objekte zweiter Klasse für $\begin{bmatrix} A_\varkappa^k \\ A_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix} \in \boldsymbol{P}$ *mit den linearen Objekten* $S = \begin{bmatrix} \overset{0}{\Sigma} \\ S_\varkappa^k \\ S_{\varkappa\lambda}^k \end{bmatrix}$ *äquivalent, die die Transformationsformel*

$$\overline{\overset{0}{\Sigma}} = \overset{0}{\Sigma}\,, \qquad \overline{S}_\varkappa^j = S_k^j A_\varkappa^k\,, \qquad \overline{S}_{\varkappa\lambda}^j = S_{kl}^j A_\varkappa^k A_\lambda^l + S_k^j A_{\varkappa\lambda}^k$$

haben.

Ähnliche Sätze können auch für Objekte dritter und höherer Klasse ausgesprochen werden. Daß aber die Bedingung der eindeutigen Lösbarkeit hier (im Gegensatz zu 6 §§ 2, 3) einschränkend ist, kann man u. a. an den Beispielen 5 und 6 I (21) und I (22) sehen.

§ 2. Lineare und ähnliche Objekte. O. E. Gheorghiu (1949, 1951, 1952 [1], [2], 1954, 1955 [1], [2], [3], [4], 1956 [2], 1957 [1], [2], 1958 [2], [3], 1959 [1]), O. E. Gheorghiu - B. Crstici (1958), A. Balogh (1959 [1], [2]), M. Kuczma (1959 [1]), M. Kucharzewski - M. Kuczma (1960 [1], [2]) haben in einer Reihe von Arbeiten die Objekte bestimmt, deren Transformationsformeln gewisse spezielle Gestalten haben, insbesondere linear sind. Von diesen geben wir die folgenden zwei Beispiele, die Ergebnisse und Beweise von O. E. Gheorghiu z. T. ergänzend.

Wir suchen statt der linearen gleich die sogen. *quasilinearen Objekte, d. h. solche die mit linearen äquivalent sind.* Z. B. lautet die Transformationsformel der eindimensionalen quasilinearen differentialgeometrischen Objekten erster Klasse mit einer Komponenten

(5) $$\bar{\Omega} = \Theta[\varphi(\alpha_1)\vartheta(\Omega) + \psi(\alpha_1)] \quad (\alpha_1 \neq 0\,,\ \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)\,,$$

wo ϑ eine umkehrbar eindeutige Funktion mit der Inversen Θ ist, und φ, ψ die zu bestimmenden Funktionen bezeichnen. Aus der Fundamentalgleichung 4 (1) folgt

$$\Theta[\varphi(\beta_1)\varphi(\alpha_1)\vartheta(\Omega) + \varphi(\beta_1)\psi(\alpha_1) + \psi(\beta_1)] = \Theta[\varphi(\beta_1\alpha_1)\vartheta(\Omega) + \psi(\beta_1\alpha_1)]\,,$$

d. h. das Bestehen des Funktionalgleichungssystems

(6) $$\varphi(\beta_1\alpha_1) = \varphi(\beta_1)\varphi(\alpha_1)\,, \qquad \alpha_1\beta_1 \neq 0\,,$$

(7) $$\psi(\beta_1\alpha_1) = \varphi(\beta_1)\psi(\alpha_1) + \psi(\beta_1)\,, \qquad \alpha_1\beta_1 \neq 0\,.$$

Die Lösungen

(8) $$\varphi(\alpha_1) = \mu(\alpha_1)$$

der Funktionalgleichung (6) werden *multiplikative* Funktionen genannt; solche sind z. B.

(9) $$\mu(\alpha) = 0\,, \quad \mu(\alpha) = 1\,, \quad \mu(\alpha) = \operatorname{sg}\alpha\,, \quad \mu(\alpha) = |\alpha|^c\,,$$
$$\mu(\alpha) = |\alpha|^c \operatorname{sg}\alpha \quad (c \neq 0)\,, \quad \left(\operatorname{sg}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{für} \quad \alpha = 0 \\ -1 & \text{für} \quad \alpha < 0 \end{cases}\right).$$

Ist

(10) $$\varphi(\alpha_1) \equiv 1\,,$$

so wird aus (7)

$$\psi(\beta_1\alpha_1) = \psi(\beta_1) + \psi(\alpha_1)$$

oder mit

$$\mu(\alpha) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{\psi(\alpha)} > 0; \qquad \mu(\beta_1\alpha_1) = \mu(\beta_1)\mu(\alpha_1)\,,$$

d. h. μ ist eine multiplikative Funktion und

(11) $$\psi(\alpha_1) = \log\mu(\alpha_1)\,, \quad \mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha)\,, \quad \mu(\alpha) > 0\,.$$

So wird in diesem Falle aus (5)

(12) $$\bar{\Omega} = \Theta[\vartheta(\Omega) + \log\mu(\alpha_1)]$$
$$(\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha)\,,\ \mu(\alpha) > 0\,,\ \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)\,.$$

Ist dagegen

(13) $$\varphi(\alpha_1) = \mu(\alpha_1) \not\equiv 1\,,$$

so gibt es ein $\underset{0}{\beta}$ mit

(14) $$\mu(\underset{0}{\beta}) \neq 1\,.$$

Aus (7) folgt wegen der Symmetrie der linken Seite

$$\mu(\beta_1)\psi(\alpha_1) + \psi(\beta_1) = \mu(\alpha_1)\psi(\beta_1) + \psi(\alpha_1)\,.$$

Setzen wir hier $\beta_1 = \underset{0}{\beta}$ ein, so wird, wegen (14) mit $\varkappa \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{\psi(\underset{0}{\beta})}{1 - \mu(\underset{0}{\beta})}$,

(15) $$\psi(\alpha_1) = \varkappa[1 - \mu(\alpha_1)] \quad (\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha))\,,$$

d. h. (5) geht in

(16) $$\bar{\Omega} = \Theta\{\mu(\alpha_1)[\vartheta(\Omega) - \varkappa] + \varkappa\} \quad (\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha)\,,\ \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)$$

über.

(10), (11) und (13), (15) erfüllen aber auch das Gleichungssystem (6)-(7). Mit

$$\lambda(\Omega) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{\vartheta(\Omega)}$$

bzw. mit

$$\lambda(\Omega) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \vartheta(\Omega) - \varkappa$$

wird aus (12) ebenso wie aus (16)

$$\bar{\Omega} = \Lambda\{\mu(\alpha_1)\lambda(\Omega)\}\,, \quad \mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha)\,, \quad \Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega\,.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 3. *Die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungssystems* (6), (7) *ist entweder von der Gestalt* (10)-(11) *oder von der Gestalt* (13)-(15).

Satz 4. *Die eindimensionalen quasilinearen differentialgeometrischen Objekte von höchstens erster Klasse mit einer Komponenten sind alle mit den Objekten Σ von der Transformationsformel*

$$\bar{\Sigma} = \mu(\alpha_1)\Sigma \quad (\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha))$$

äquivalent.

Da (9) sämtliche *meßbare* Lösungen von $\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha)$ darstellt und da $\bar{\Sigma} \equiv 0$ und $\bar{\Sigma} = \Sigma$ Objekte der Klasse 0 sind, sind die eindimensionalen quasilinearen differentialgeometrischen Objekte erster Klasse mit einer Komponenten, die *meßbare* Transformationsformeln haben, entweder mit den Biskalaren von der Transformationsformel

$$\bar{\Pi} = \operatorname{sg}\alpha_1 \Pi$$

oder mit den Objekten von den Transformationsformeln

(17) $$\bar{\Sigma} = |\alpha_1|^c \Sigma$$

oder

(18) $$\bar{\Sigma} = |\alpha_1|^c \operatorname{sg}\alpha_1 \Sigma$$

äquivalent. (18) ist mit dem Objekte $\Pi \overset{\mathrm{df}}{=} |\Sigma|^{1/c}\operatorname{sg}\Sigma$ äquivalent, das die Transformationsformel

$$\bar{\Pi} = \Pi\alpha_1$$

der gewöhnlichen Dichten hat. Aus (17) sieht man, daß Σ und $\bar{\Sigma}$ das gleiche Vorzeichen haben. Es sei z. B. $\Sigma > 0$, $\bar{\Sigma} > 0$, dann gilt für $\Pi \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma^{1/c}$ die Transformationsformel

$$\bar{\Pi} = \Pi|\alpha_1|$$

der Weylschen Dichten. So haben wir auch den

Satz 5. *Die eindimensionalen quasi-linearen differentialgeometrischen Objekte von genau erster Klasse mit einer Komponenten und mit einer meßbaren Transformationsformel sind entweder mit Biskalaren oder mit gewöhnlichen oder mit Weylschen Dichten äquivalent.*

Im Vergleich zu dem Abschnitte 4 erlaubte also die Voraussetzung der Quasilinearität, daß statt der Stetigkeit nur die Meßbarkeit vorausgesetzt wurde. M. Kuczma 1959 [1] hat diesen Satz 5 auch auf mehrdimensionale Objekte mit einer Komponenten übertragen.

Bei eindimensionalen quasilinearen differentialgeometrischen Objekten *zweiter Klasse* mit einer Komponenten braucht man nichts mehr vorauszusetzen, *auch die Meßbarkeit nicht.* Die Transformationsformel und Fundamentalgleichung lauten bei diesen Objekten

$$(19)\qquad \bar{\Omega} = \Theta[\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\vartheta(\Omega) + \psi(\alpha_1, \alpha_2)] \qquad (\alpha_1 \neq 0\,,\ \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)\,,$$
$$\Theta[\varphi(\beta_1, \beta_2)\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\vartheta(\Omega) + \varphi(\beta_1, \beta_2)\psi(\alpha_1, \alpha_2) + \psi(\beta_1, \beta_2)]$$
$$= \Theta[\varphi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2)\vartheta(\Omega) + \psi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2)]\,.$$

So haben wir das Funktionalgleichungssystem

$$(20)\qquad \varphi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2) = \varphi(\beta_1, \beta_2)\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,, \qquad \alpha_1\beta_1 \neq 0\,,$$
$$(21)\qquad \psi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2) = \varphi(\beta_1, \beta_2)\psi(\alpha_1, \alpha_2) + \psi(\beta_1, \beta_2)\,, \qquad \alpha_1\beta_1 \neq 0\,,$$

zu lösen.

Aus (20) folgt wegen der Symmetrie der rechten Seite

$$\varphi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2) = \varphi(\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2)\,.$$

Mit

$$(22)\qquad \gamma_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1\alpha_1\,, \quad \gamma_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2\,, \quad \delta_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2$$

erhalten wir

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \varphi(\gamma_1, \delta_2)\,.$$

Da für beliebige γ_2, δ_2 solche α_2, β_2 gewählt werden können, daß (22) erfüllt ist, außer wenn

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1^2 \\ \beta_1^2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \gamma_1 = \alpha_1\beta_1 = 1$$

ist, sehen wir, daß $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ für $\gamma_1 \neq 1$ von γ_2 unabhängig ist:

$$(23)\qquad \varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \mu(\gamma_1)\,.$$

Dann folgt aber aus (20)

$$(24)\qquad \mu(\beta_1\alpha_1) = \mu(\beta_1)\mu(\alpha_1)\,,$$

d. h. $\mu(\alpha_1)$ ist für $\alpha_1 \neq 1$ multiplikativ. Was nun $\alpha_1 = 1$ betrifft, hierfür ergibt (20) mit $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 \neq 1$ wegen (23)

$$\mu(\beta_1) = \mu(\beta_1)\varphi(1, \alpha_2)\,,$$

d. h.

$$(25)\qquad \varphi(1, \alpha_2) \equiv 1 \qquad \text{für} \qquad \mu(\beta_1) \not\equiv 0\,.$$

Aus (24) folgt mit $\alpha_1 = 1$ auch

$$\mu(1) = 1 \qquad \text{für} \qquad \mu(\beta_1) \not\equiv 0\,,$$

so daß (23) auch für $\gamma_1 = 1$ gültig bleibt, falls $\varphi(\gamma_1, \gamma_2) \not\equiv 0$ für $\gamma_1 \neq 1$ ist.

Ist $\varphi(\beta_1, \beta_2) \equiv 0$ für $\beta_1 \neq 1$, so folgt aus (20) mit $\alpha_1 = 1/\beta_1$, $\alpha_2 = \gamma_2/\beta_1$, $\beta_2 = 0$ auch $\varphi(1, \gamma_2) = 0$, d. h.

$$(26)\qquad \varphi(\gamma_1, \gamma_2) \equiv 0\,.$$

In diesem Falle ergibt (21)

$$\psi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2) = \psi(\beta_1, \beta_2)\,,$$

d. h., mit $\alpha_1 = 1/\beta_1$, $\alpha_2 = -\beta_2/\beta_1^3$, $\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(1, 0)$,

$$(27)\qquad \psi(\beta_1, \beta_2) \equiv \varkappa \qquad \text{(konstant)}.$$

So wird in diesem Falle aus (19)

$$(28)\qquad \bar{\Omega} = \text{konstant}\,.$$

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

A) Ist

$$(29)\qquad \varphi(\beta_1, \beta_2) \equiv 1\,,$$

so folgt aus (21)

$$\psi(\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2) = \psi(\alpha_1, \alpha_2) + \psi(\beta_1, \beta_2)\,.$$

Dies geht mittels $\tilde{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2) \overset{\mathrm{df}}{=} e^{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}$ in eine Gleichung der Gestalt (20) über, so daß in diesem Falle

$$(30)\qquad \psi(\alpha_1, \alpha_2) = \log\mu(\alpha_1)\,, \quad \mu(\alpha_1) > 0\,, \quad \mu(\beta_1\alpha_1) = \mu(\beta_1)\mu(\alpha_1)$$

und

$$(12)\qquad \bar{\Omega} = \Theta[\vartheta(\Omega) + \log\mu(\alpha_1)]\,, \qquad \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega$$

gelten.

B) Ist

(31) $$\varphi(\beta_1, \beta_2) = \mu(\beta_1) \not\equiv 1\,,$$

so gibt es ein $\underset{0}{\beta}$ mit

(32) $$\mu(\underset{0}{\beta}) \neq 1\,.$$

Setzen wir in (21) $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ und (31) ein:

$$\psi(\beta_1\alpha_1, 0) = \mu(\beta_1)\psi(\alpha_1, 0) + \psi(\beta_1, 0)\,.$$

Wegen der Symmetrie der linken Seite gilt

$$\mu(\beta_1)\psi(\alpha_1, 0) + \psi(\beta_1, 0) = \mu(\alpha_1)\psi(\beta_1, 0) + \psi(\alpha_1, 0)$$

oder mit $\beta_1 = \underset{0}{\beta}$, $\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{\psi(\underset{0}{\beta}, 0)}{1-\mu(\underset{0}{\beta})}$ wegen (32)

(33) $$\psi(\alpha_1, 0) = \varkappa[1-\mu(\alpha_1)]\,.$$

Andererseits ergibt ebenfalls (21) mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ wegen (25)

$$\psi(1, \alpha_2+\beta_2) = \psi(1, \alpha_2) + \psi(1, \beta_2)\,,$$

d. h.

(34) $$\nu(\alpha_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(1, \alpha_2)$$

ist eine additive Funktion:

(35) $$\nu(\alpha_2+\beta_2) = \nu(\alpha_2) + \nu(\beta_2)\,.$$

Jetzt setzen wir $\psi(\alpha_1, \alpha_2)$ aus (33) und (34) zusammen, indem wir in (21) $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_2/\gamma_1$ bzw. $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_2/\gamma_1^2$ setzen. So wird

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2) = \mu(\gamma_1)\nu\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}\right) + \varkappa[1-\mu(\gamma_1)] \qquad (\nu(0) = 0)\,,$$

bzw.

(36) $$\psi(\gamma_1, \gamma_2) = \varkappa[1-\mu(\gamma_1)] + \nu\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Wenn wir diese beide Ausdrücke vergleichen, so erhalten wir

(37) $$\nu\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}\right) = \mu(\gamma_1)\nu\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

(37) ergibt mit $\gamma_2 = 0$

$$\nu(0) = 0$$

und mit $\gamma_2 = \gamma_1$, $\delta \overset{\mathrm{df}}{=} \nu(1)$,

$$\nu\left(\frac{1}{\gamma_1}\right) = \mu(\gamma_1)\delta\,,$$

so daß

(38) $$\nu(\gamma) = \begin{cases} \mu(1/\gamma)\delta\,, & \gamma \neq 0\,, \\ 0, & \gamma = 0 \end{cases}$$

gilt. Ist $\delta \neq 0$, so gelten für die Funktion

(39) $$\chi(\alpha) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\nu(\alpha)}{\delta} = \begin{cases} \mu(1/\alpha)\,, & \alpha \neq 0\,, \\ 0, & \alpha = 0\,, \end{cases}$$

wegen (24) und (35)

(40) $$\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$$

und

(41) $$\chi(\alpha+\beta) = \chi(\alpha) + \chi(\beta).$$

Ist $\alpha > 0$, so wird aus (40) $\chi(\alpha) = \chi(\sqrt{\alpha})^2 > 0$. Die allgemeine nichtverschwindende Lösung von (41), die für positive α positiv ist, ist aber $\chi(\alpha) = \varepsilon\alpha$, die (40) nur bei $\varepsilon = 1$ erfüllt, so daß $\chi(\alpha) = \alpha$ und aus (39), (31) und (36) $\mu(\alpha) = 1/\alpha$, $\nu(\alpha) = \delta\alpha$, sowie

(42) $$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{\gamma_1}\,, \qquad \psi(\gamma_1, \gamma_2) = -\frac{\varkappa}{\gamma_1} + \delta\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} + \varkappa \qquad (\delta \neq 0)$$

folgen. Bei $\delta = 0$ gilt wegen (38), (31), und (36)

(43) $$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \mu(\gamma_1) \not\equiv 1\,, \quad \psi(\gamma_1, \gamma_2) = \varkappa[1-\mu(\gamma_1)] \quad (\mu(\beta\alpha) = \mu(\beta)\mu(\alpha))\,.$$

So erhalten wir die Transformationsformeln

(44) $$\bar{\Omega} = \Theta\left(\frac{\vartheta(\Omega)-\varkappa}{\alpha_1} + \delta\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + \varkappa\right) \qquad (\delta \neq 0\,,\ \Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)$$

und

(16) $$\bar{\Omega} = \Theta\{\mu(\alpha_1)[\vartheta(\Omega)-\varkappa]+\varkappa\} \qquad (\Theta[\vartheta(\Omega)] = \Omega)\,.$$

Alle erhaltenen Funktionenpaare erfüllen das Gleichungssystem (20)-(21). (26)-(27) ist der Spezialfall $\mu \equiv 0$ von (43). (28), (12) und (16) sind Transformationsformeln von Objekten der Klasse 0 oder 1, während (44) mit $\lambda(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} (\vartheta(\Omega)-\varkappa)/\delta$ in

$$\bar{\Omega} = \Lambda\left[\frac{\lambda(\Omega)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right] \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega)$$

übergeht. Diese Objekte sind also mit dem Objekt Π des affinen Zusammenhanges

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

äquivalent. Wir fassen zusammen:

Satz 6. *Die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungssystems* (20)-(21) *besteht aus den Funktionenpaaren* (29)-(30), (42) *und* (43).

Satz 7. *Die eindimensionalen quasilinearen differentialgeometrischen Objekte von genau zweiter Klasse mit einer Komponenten sind alle mit dem Objekte des affinen Zusammenhanges äquivalent.*

Die Forderung der Quasilinearität hat also die Stetigkeitsbedingung und auch die Voraussetzung des einzigen Ω-Intervalles in dem Abschnitte 3 vollständig ersetzt.

8. Pseudogrößen

§ 1. Definition. Hauptergebnis. Einer interessanten Klasse von Funktionalgleichungen begegnet man in der Theorie der sogenannten Pseudogrößen. Dies sind auch Objekte mit speziellen linearen Transformationsformeln. Mit diesem Namen werden nämlich die speziellen geometrischen Objekte bezeichnet, deren Transformationsformel folgendermaßen lautet:

(1) $$\overline{\mathfrak{w}}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = \tau A^{\varkappa_1}_{k_1}\ldots A^{\varkappa_p}_{k_p}A^{l_1}_{\lambda_1}\ldots A^{l_q}_{\lambda_q}\mathfrak{w}^{k_1\ldots k_p}{}_{l_1\ldots l_q},$$

wo τ einen Faktor bedeutet, der entweder beliebig sein kann oder von der Koordinatentransformation $T_{\varkappa k}$ abhängen kann. Den ersten Fall (wo also die Komponenten eines Objektes in einem bestimmten Koordinatensystem nicht eindeutig gegeben sind), lassen wir beiseite und betrachten den zweiten Fall, wo τ eindeutig bestimmt ist und von der Koordinatentransformation abhängt. Ein Beispiel solcher Pseudogrößen bilden die Tensordichten mit den Transformationsformeln

$$\overline{\mathfrak{w}}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = |J|^{-\alpha}A^{\varkappa_1}_{k_1}\ldots A^{\varkappa_p}_{k_p}A^{l_1}_{\lambda_1}\ldots A^{l_q}_{\lambda_q}\mathfrak{w}^{k_1\ldots k_p}{}_{l_1\ldots l_q}$$

bzw.

$$\overline{\mathfrak{w}}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = \mathrm{sg}J\cdot|J|^{-\alpha}A^{\varkappa_1}_{k_1}\ldots A^{\varkappa_p}_{k_p}A^{l_1}_{\lambda_1}\ldots A^{l_q}_{\lambda_q}\mathfrak{w}^{k_1\ldots k_p}{}_{l_1\ldots l_q}.$$

Es ist nun die Frage in welcher Weise τ von der Transformation T abhängt, anders gesagt, welches Funktional τ von T ist. Suchen wir die Pseudogrößen r-ter Klasse, so lassen wir das Gruppoid der Transformationen der Klasse C^r ($r\geqslant 2$) zu und bezeichnen die Parameter dieser Transformationen, d. h. die Werte der Ableitungen bis zu der r-ten Ordnung im betrachteten Punkte mit

(2) $$A^{\varkappa}_{k_1\ldots k_s},\qquad 1\leqslant s\leqslant r.$$

Wir werden uns (vgl. I § 1) der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Die Koordinaten in drei beliebigen zulässigen Koordinatensystemen sollen mit ξ^k, $\bar\xi^\varkappa$, $\bar{\bar\xi}^K$ und die entsprechenden Ableitungen mit den Buchstaben A, B, C bezeichnet werden:

(3) $$A^{\varkappa}_{k_1\ldots k_s} = \frac{\partial^s\bar\xi^\varkappa}{\partial\xi^{k_1}\ldots\partial\xi^{k_s}},\qquad B^{K}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} = \frac{\partial^s\bar{\bar\xi}^K}{\partial\bar\xi^{\varkappa_1}\ldots\partial\bar\xi^{\varkappa_s}},\qquad C^{K}_{k_1\ldots k_s} = \frac{\partial^s\bar{\bar\xi}^K}{\partial\xi^{k_1}\ldots\partial\xi^{k_s}}.$$

Für die Ableitungen erster Ordnung der inversen Transformationen verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

(4) $$A^k_\varkappa = \frac{\partial\xi^k}{\partial\bar\xi^\varkappa},\qquad B^\varkappa_K = \frac{\partial\bar\xi^\varkappa}{\partial\bar{\bar\xi}^K},\qquad C^k_K = \frac{\partial\xi^k}{\partial\bar{\bar\xi}^K}.$$

Für die Ableitungen $C^K_{k_1\ldots k_s}$ der zusammengesetzten Transformation gelten die wohlbekannten Beziehungen

(5) $$C^K_k = B^K_\varkappa A^\varkappa_k,\qquad C^K_{k_1k_2} = B^K_{\varkappa_1\varkappa_2}A^{\varkappa_1}_{k_1}A^{\varkappa_2}_{k_2} + B^K_\varkappa A^\varkappa_{k_1k_2},\qquad \ldots\ldots$$

Für festgelegtes n ist die Anzahl der untereinander verschiedenen Ableitungen $A^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ gleich

(6) $$\Pi_s = n\binom{n+s-1}{s}$$

und folglich ist die Anzahl der unabhängigen Parameter unseres Gruppoids gleich

(7) $$p_r = \Pi_1+\ldots+\Pi_r = n\sum_{s=1}^{r}\binom{n+s-1}{s} = n\left[\binom{n+r}{r}-1\right].$$

Die Parameter $A^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ können für $s\geqslant 2$ ganz beliebige Werte annehmen (mit der einzigen Bedingung, daß $A^\varkappa_{l_1\ldots l_s} = A^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ gelte, wenn $l_1\ldots l_s$ eine Permutation von $k_1\ldots k_s$ ist), während für $s=1$ die $A^\varkappa_k$ nur der Bedingung

(8) $$J = \det A^\varkappa_k \neq 0$$

genügen. Schreiben wir nun die Transformationsformeln für $\mathfrak{w}$ dreimal (für die Transformationen $T_{\varkappa k}$, $T_{K\varkappa}$, T_{Kk}) und vergleichen die entsprechenden Glieder, so erhalten wir (da die Beziehung (1) für beliebige $\mathfrak{w}$ gelten muß) folgende Funktionalgleichung:

(9) $$\tau(T_{Kk}) = \tau(T_{K\varkappa})\tau(T_{\varkappa k}) .$$

Diese Funktionalgleichung, ausgeschrieben mit Hilfe der Parameter der Transformationen T lautet also folgendermaßen:

$$\tau(C^K_k, C^K_{k_1k_2}, \ldots, C^K_{k_1\ldots k_r}) = \tau(B^K_\varkappa, B^K_{\varkappa_1\varkappa_2}, \ldots, B^K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r})\tau(A^\lambda_k, A^\lambda_{k_1k_2}, \ldots, A^\lambda_{k_1\ldots k_r}) .$$

Berücksichtigen wir die Beziehungen (5) auf der linken Seite dieser Gleichung, so bekommen wir

(10) $$\tau(B^K_\varkappa A^\varkappa_k, B^K_{\varkappa_1\varkappa_2}A^{\varkappa_1}_{k_1}A^{\varkappa_2}_{k_2}+B^K_\varkappa A^\varkappa_{k_1k_2}, \ldots) = \tau(B^K_\varkappa, B^K_{\varkappa_1\varkappa_2}, \ldots)\tau(A^\lambda_k, A^\lambda_{k_1k_2}, \ldots) .$$

Diese Gleichung soll identisch für alle $2p_r$ Veränderlichen $A^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ und $B^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$ erfüllt sein. Der Hauptsatz lautet nun folgendermaßen:

Satz 1. *Eine Funktion τ, die der Funktionalgleichung* (10) *genügt, hängt von den Veränderlichen $A^\varkappa_{k_1\ldots k_s}$ $(s \geqslant 2)$ nicht ab, ist also nur von den n^2 Veränderlichen $A^\varkappa_k$ abhängig.*

Für diesen Satz werden wir den Beweis nur im Falle $r = 2$ anführen. Im allgemeinen Falle, wo r beliebig ist, geht der Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion und wir verweisen den Leser in dieser Hinsicht zu der Arbeit S. Gołąb - M. Kucharzewski 1958 [2].

§ 2. Pseudogrößen höchstens zweiter Klasse. Für $r = 2$ (n weiterhin ganz beliebig) nimmt die Gleichung (10) folgende Gestalt an:

(11) $$\tau(B^K_\varkappa A^\varkappa_k, B^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_kA^\lambda_l+B^K_\varkappa A^\varkappa_{kl}) = \tau(B^K_\varkappa, B^K_{\varkappa\lambda})\tau(A^\mu_k, A^\mu_{kl}) .$$

Wir führen folgende kurze Bezeichnungen ein:

(12) $$\varphi(A^\varkappa_{kl}) \overset{\text{df}}{=} \tau(\delta^\varkappa_k, A^\varkappa_{kl}) , \qquad \psi(A^\varkappa_k) \overset{\text{df}}{=} \tau(A^\varkappa_k, 0) .$$

Wenn in der Gleichung (11) der Reihe nach

$$A^\varkappa_{kl} = B^K_{\varkappa\lambda} = 0$$

bzw.

$$A^\varkappa_k = \delta^\varkappa_k , \qquad B^K_\varkappa = \delta^K_\varkappa$$

gesetzt wird, so erhält man

(13) $$\psi(B^K_\varkappa A^\varkappa_k) = \psi(B^K_\nu)\psi(A^\mu_k)$$

bzw. (falls auf der rechten Seite B^K_{kl} statt $B^K_{\varkappa\lambda}$ und A^K_{kl} statt $A^\varkappa_{kl}$ geschrieben wird)

(14) $$\varphi(B^K_{kl}+A^K_{kl}) = \varphi(B^K_{kl})\varphi(A^K_{kl}) .$$

Über τ wurde *keine* Regularitätsannahme gemacht und folglich gestaltet sich die Lösung der Gleichungen (13) und (14) nicht ganz einfach.

Zuerst werden wir die gesuchte Funktion τ durch die Hilfsfunktionen φ und ψ ausdrücken. Zu diesem Zweck setzen wir in (11)

$$B^K_{\varkappa\lambda} = 0 , \qquad A^\varkappa_k = \delta^\varkappa_k$$

ein. Dies führt, falls wir auf der linken Seite $B^K_\varkappa$ statt des gleichbedeutenden $B^K_\varkappa\delta^\varkappa_k$ setzen, zu

(15) $$\tau(B^K_\varkappa, B^K_\varkappa A^\varkappa_{kl}) = \psi(B^K_\varkappa)\varphi(A^\varkappa_{kl}) .$$

Wir setzen weiter

(16) $$X^K_\varkappa = B^K_\varkappa , \qquad X^K_{kl} = B^K_\varkappa A^\varkappa_{kl} .$$

Wird die Inverse der Matrix $X^K_\varkappa$ mit $X^\varkappa_K$ bezeichnet, so haben wir

(17) $$A^\varkappa_{kl} = X^K_{kl}X^\varkappa_K$$

und (15) geht in

(18) $$\tau(X^K_\varkappa, X^K_{kl}) = \psi(X^K_\varkappa)\varphi(X^L_{kl}X^\varkappa_L)$$

über. Wird dies weiter in die Gleichung (11) eingesetzt, so erhält man

(19) $$\psi(B^K_\varkappa A^\varkappa_k)\varphi[(B^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_kA^\lambda_l+B^K_\varkappa A^\varkappa_{kl})C^t_K] = \psi(B^K_\varkappa)\varphi(B^L_{\varkappa\lambda}B^\tau_L)\psi(A^\lambda_k)\varphi(A^\tau_{kl}A^t_\tau) .$$

Es gilt aber

(20) $$C^t_K = A^t_\tau B^\tau_K .$$

Berücksichtigen wir diese Relation, sowie die Relation $B^K_\varkappa B^\tau_K = \delta^\tau_\varkappa$ auf der linken Seite der letzten Funktionalgleichung, so erhalten wir

(21) $$\psi(B^K_\varkappa A^\varkappa_k)\varphi(B^L_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_kA^\lambda_lA^t_\tau B^\tau_L+A^\tau_{kl}A^t_\tau) = \psi(B^K_\varkappa)\varphi(B^L_{\varkappa\lambda}B^\tau_L)\psi(A^\varkappa_k)\varphi(A^\tau_{kl}A^t_\tau) .$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß eine Funktion $\psi(A^\varkappa_k)$, die der Funktionalgleichung (13) genügt, entweder identisch verschwindet oder überall von Null verschieden ist (natürlich für nicht singuläre Matrizen $A^\varkappa_k$). Da $\psi \equiv 0$ auf Grund von (18) $\tau \equiv 0$ nach sich zieht und da wir von der trivialen Lösung $\tau \equiv 0$ vom vornherein absehen, so können wir die Identität (21) beiderseits durch

$$\psi(B^K_\varkappa A^\varkappa_k) = \psi(B^K_\varkappa)\psi(A^\varkappa_k)$$

dividieren und erhalten auf diese Weise eine Funktionalgleichung für φ:

$$\varphi(B^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_k A^\lambda_l A^t_\tau B^\tau_K + A^\tau_{kl}A^t_\tau) = \varphi(B^K_{\varkappa\lambda}B^\tau_K)\varphi(A^\tau_{kl}A^t_\tau)\,. \tag{22}$$

Wenn kurz

$$D \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(0, \ldots, 0) \tag{23}$$

gesetzt wird und wenn man in (14) $A^K_{kl} = B^K_{kl} = 0$ einsetzt, so erhält man $D = D^2$, was entweder $D = 0$ oder $D = 1$ ergibt. Setzen wir $A^\tau_{kl} = 0$ in (22) ein, so bekommen wir entweder

$$\varphi(B^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_k A^\lambda_l A^t_\tau B^\tau_K) = 0 \tag{24}$$

oder

$$\varphi(B^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_k A^\lambda_l A^t_\tau B^\tau_K) = \varphi(B^K_{\varkappa\lambda}B^\tau_K)\,. \tag{25}$$

Da $A^\varkappa_k$, $B^K_\varkappa$, $B^K_{\varkappa\lambda}$ beliebig sind, so kann man aus (24) schließen, daß

$$\varphi(A^\varkappa_{kl}) = 0\,,$$

was, auf Grund von (18), $\tau \equiv 0$ nach sicht zieht. Die Möglichkeit (24) muß also ausgeschlossen werden und es bleibt die Möglichkeit (25). In dieser Identität ersetzen wir auf der linken Seite die $A^\varkappa_k$ durch $ZA^\varkappa_k$ ($Z \neq 0$) (die B bleiben unverändert). Dann müssen wir $\frac{1}{Z}A^t_\tau$ statt A^t_τ einsetzen und die linke Seite von (25) nimmt die Form

$$\varphi(B^K_{\varkappa\lambda}ZA^\varkappa_k ZA^\lambda_l Z^{-1}A^t_\tau B^\tau_K) = \varphi(ZB^K_{\varkappa\lambda}A^\varkappa_k A^\lambda_l A^t_\tau B^\tau_K)$$

an, während die rechte Seite von (25) unverändert bleibt. Daraus folgt daß die Funktion φ homogen von nullter Ordnung sein muß

$$\varphi(ZA^\varkappa_{kl}) = \varphi(A^\varkappa_{kl})\,. \tag{26}$$

Berücksichtigen wir dies in (14), so bekommen wir

$$\varphi(A^\varkappa_{kl})^2 = \varphi(A^\varkappa_{kl} + A^\varkappa_{kl}) = \varphi(2A^\varkappa_{kl}) = \varphi(A^\varkappa_{kl})\,, \tag{27}$$

woraus entweder $\varphi(A^\varkappa_{kl}) \equiv 1$ oder $\varphi(A^\varkappa_{kl}) \equiv 0$ folgt. Die letzte Möglichkeit haben wir aber schon ausgeschlossen, so daß

$$\varphi(A^\varkappa_{kl}) \equiv 1 \tag{28}$$

bleibt. Berücksichtigt man dies in (18) so bekommt man

$$\tau(X^\varkappa_k, X^\varkappa_{kl}) = \psi(X^\varkappa_k)\,, \tag{29}$$

was besagt, daß τ von $X^\varkappa_{kl}$ nicht abhängt und somit ist unser Satz bewiesen worden. Im allgemeinen Falle ($r > 2$) beweist man ebenso, daß τ nur von den $A^\varkappa_k$ abhängt.

§ 3. Die Gestalt von τ im allgemeinen Falle. Die Funktion τ erfüllt die Gleichung

$$\tau(B^K_\varkappa A^\varkappa_k) = \tau(B^K_\varkappa)\tau(A^\varkappa_k)\,. \tag{30}$$

Die letzte Gleichung wurde von mehreren Verfassern betrachtet (I. Schur, K. Stephanos, O. Perron und andere). Stephanos hat sie gelöst unter der Annahme, daß die gesuchte Funktion $\tau(A^\varkappa_k)$ in bezug auf alle n^2 Veränderlichen differenzierbar ist. Ohne allen Regularitätsannahmen hat S. Gołąb 1957 [2], 1959 [1] die Gleichung für $n = 2$ gelöst und hat die folgende Formel für die allgemeine Lösung festgestellt:

$$\tau(A^\varkappa_k) = \mu[\det(A^\varkappa_k)]\,, \tag{31}$$

wo $\mu(u)$ eine beliebige Lösung der Funktionalgleichung

$$\mu(uv) = \mu(u)\mu(v) \tag{32}$$

ist. Zugleich hat S. Gołąb 1957 [2] die Vermutung ausgesprochen, daß diese Formel auch für den allgemeinen Fall (eines beliebigen n's) ihre Gültigkeit behält. In dem allgemeinen Fall hat nachher M. Kucharzewski 1959 einen Beweis gegeben. Diesen Beweis hat später M. Kuczma 1959 [2] ein wenig vereinfacht. Zuletzt hat M. Hosszú 1959 [1] auf Grund eines Faktorisationssatzes der Matrizen einen ziemlich kurzen Beweis der Gültigkeit der Formel im allgemeinen Falle erreicht.

Wenn wir von den nichtmeßbaren Lösungen der Gleichung (32) absehen, so sind die Lösungen in einer der zwei folgenden Formen enthalten:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \tau(A^\varkappa_l) = |\det(A^\varkappa_k)|^\alpha; \\ &\text{II.} \quad \tau(A^\varkappa_l) = |\det(A^\varkappa_k)|^\alpha \operatorname{sg}[\det(A^\varkappa_k)]\,, \end{aligned} \tag{33}$$

wo α eine beliebige Konstante ist.

Für $\alpha = p = q = 0$ haben wir mit einem Skalar bzw. mit einem Biskalar, für $\alpha \neq 0$, $p = q = 0$ mit einer Weylschen bzw. gewöhnlichen Dichte zu tun; wenn $\alpha \neq 0$ ist, so ist τ im Falle I eine Tensor-W-Dichte, im Falle II eine gewöhnliche Tensordichte.

Auf diese Weise haben wir den

Satz 2. *Alle Pseudogrößen mit eindeutig bestimmtem meßbaren Faktor τ sind Tensordichten, die durch Multiplizieren von Tensoren mit Dichten entstehen (speziell auch Skalare und Biskalare) und nur diese.*