I. EINLEITUNG

§ 1. Arithmetischer und geometrischer Raum. Koordinatentransformationen

Eine Folge von n (n eine natürliche Zahl) Zahlen (Komponenten)

$$a^1, \ldots, a^n \tag{1}$$

wird ein *arithmetischer Punkt* genannt. Die Menge $\mathfrak{A}_n$ von allen arithmetischen Punkten mit n Komponenten wird n-dimensionaler *arithmetischer Raum* genannt, der mit der üblichen Topologie versehen wird. Ein n-dimensionaler *geometrischer Raum* ist ein topologischer Raum $\mathfrak{M}$ von Elementen, die Punkte genannt werden, von der Eigenschaft, daß zwischen $\mathfrak{M}$ und einem Teile von $\mathfrak{A}_n$ eine topologische Abbildung hergestellt werden kann. Einen solchen geometrischen Raum werden wir kurz mit $\mathfrak{X}_n$ bezeichnen ohne Rücksicht darauf, ob es sich bei dieser Korrespondenz um den ganzen $\mathfrak{A}_n$ oder nur um einen echten Teil von $\mathfrak{A}_n$ handelt. Ist die oben genannte Zuordnung vorhanden, so nennen wir die Zahlen der dem Punkte p zugeordneten Folge (1) die *Koordinaten* des Punktes p.

Es sei betont, daß derselbe $\mathfrak{X}_n$ auf verschiedene Weisen und eventuell auf verschiedene Teile des $\mathfrak{A}_n$ abgebildet werden kann. Eine solche Abbildung wird ein *Koordinatensystem (Bezugssystem)* genannt.

Den Übergang von einem Koordinatensystem (B) zu einem anderen $(\bar{B})$ nennen wir *Koordinatentransformation* T.

Es seien

$$\xi^1, \ldots, \xi^n$$

die Koordinaten des laufenden Punktes p im Koordinatensystem (B) und

$$\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$$

seine Koordinaten im System $(\bar{B})$. Wegen unserer Voraussetzung sind die $\bar{\xi}^\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n)$ eindeutige Funktionen von $\xi^1, \ldots, \xi^n$ und umgekehrt die ξ^k eindeutige Funktionen von $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$. Die Koordinatentransformationen $(B) \to (\bar{B})$ bzw. $(\bar{B}) \to (B)$ lassen sich also analytisch durch die Gleichungssysteme

$$\bar{\xi}^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \varphi^\varkappa(\xi^l) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, \ldots, n \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{2}$$

beziehungsweise

$$\xi^k = \psi^k(\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n) = \psi^k(\bar\xi^\lambda) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n \\ \lambda = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ausdrücken.

Wir werden nicht alle möglichen Koordinatensysteme in Betracht nehmen; wir lassen nur solche Mengen von Koordinatensystemen zu (die sogenannten *zugelassenen* Systeme) in denen der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen durch genügend reguläre Funktionen $\varphi^\varkappa$ und ψ^k in (2) bzw. (3) erfolgt. Die Regularitätsklasse der Transformationen wird durch den entsprechenden Problemkreis beeinflußt. Jedenfalls setzen wir voraus, daß die Funktionen $\varphi^\varkappa$ (und ψ^k) mit den ersten stetigen partiellen Ableitungen ausgestattet sind und daß deshalb die Jacobische Determinanten

$$J = \det \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \xi^i}, \quad J^{-1} = \det \frac{\partial \psi^k}{\partial \bar\xi^\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda, k, i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

in jedem Punkte der entsprechenden Bereiche von Null verschieden sind:

$$J \neq 0, \quad J^{-1} \neq 0. \tag{5}$$

Wir führen eine Reihe von kurzen Bezeichnungen ein. Die laufenden Indizes werden in verschiedenen Koordinatensystemen mit verschiedenen Buchstabentypen bezeichnet z. B. im System (B) mit den kleinen lateinischen, in $(\bar B)$ mit den kleinen griechischen, im eventuellen dritten Bezugssystem $(\bar{\bar B})$ mit großen lateinischen Buchstaben. Dementsprechend bezeichnen wir oft auch die Bezugssysteme $(B), (\bar B), (\bar{\bar B})$ mit $(k), (\varkappa), (K)$. Für die partiellen Derivierten führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_i^\lambda(\xi^1, \ldots, \xi^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \bar\xi^\lambda}{\partial \xi^i}, \qquad A_\lambda^i(\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \psi^i}{\partial \bar\xi^\lambda} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar\xi^\lambda}, \\
&A_\lambda^K(\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \bar{\bar\xi}^K}{\partial \bar\xi^\lambda}, \qquad A_K^\lambda(\bar{\bar\xi}^1, \ldots, \bar{\bar\xi}^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \bar\xi^\lambda}{\partial \bar{\bar\xi}^K}, \\
&A_i^K(\xi^1, \ldots, \xi^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \bar{\bar\xi}^K}{\partial \xi^i}, \qquad A_K^i(\bar{\bar\xi}^1, \ldots, \bar{\bar\xi}^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar{\bar\xi}^K}, \\
&A_{i_1 \ldots i_r}^\lambda(\xi^1, \ldots, \xi^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^r \varphi^\lambda}{\partial \xi^{i_1} \ldots \partial \xi^{i_r}}, \ \ldots
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Falls wir diese Derivierten in einem fixen Punkte p_0 betrachten, so lassen wir die Klammern mit den Veränderlichen weg und schreiben kurz

$$(A_i^\lambda)_{p_0} \quad \text{etc.}$$

oder schlechthin

$$A_i^\lambda \quad \text{etc.} \tag{7}$$

Falls die Funktionen $\varphi^\varkappa$ analytisch in der Umgebung von p_0 sind, so kann die Koordinatentransformation in dieser Umgebung durch die Zahlenfolge

$$(\underset{0}{\xi}{}^i, \underset{0}{\bar\xi}{}^\lambda, A_i^\lambda, A_{ij}^\lambda, \ldots, A_{i_1 \ldots i_r}^\lambda, \ldots), \tag{8}$$

wo $\underset{0}{\xi}{}^i$ bzw. $\underset{0}{\bar\xi}{}^\lambda$ die Koordinaten des Punktes p_0 in den Koordinatensystemen (k) bzw. $(\varkappa)$ bezeichnen, dargestellt werden.

Aus der Analysis entnehmen wir die folgenden wichtigen Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_k^\varkappa A_\lambda^k = \delta_\lambda^\varkappa = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \varkappa = \lambda \\ 0 & \text{falls} \quad \varkappa \neq \lambda \end{cases}, \qquad A_\lambda^k A_l^\lambda = \delta_l^k, \\
&A_\lambda^K A_i^\lambda = A_i^K, \\
&A_\lambda^K A_{ij}^\lambda + A_{\lambda\mu}^K A_i^\lambda A_j^\mu = A_{ij}^K \quad \text{etc.}
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Hier und im folgenden ist bezüglich der in einem Gliede einmal oben und einmal unten vorkommenden Indizes zu summieren.

Im Falle des eindimensionalen Raumes $\mathfrak{X}_1$ werden wir statt (2), (6), (7) und (9) schreiben

$$\bar\xi = \varphi(\xi), \tag{2'}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_1(\xi) = \frac{d\varphi}{d\xi} = \varphi' = \frac{d\bar\xi}{d\xi}, \quad \beta_1(\bar\xi) = \frac{d\bar{\bar\xi}}{d\bar\xi}, \quad \gamma_1(\xi) = \frac{d\bar{\bar\xi}}{d\xi}, \\
&\alpha_r(\xi) = \frac{d^r\varphi}{d\xi^r} \qquad (r \geqslant 1),
\end{aligned}\right. \tag{6'}$$

$$\alpha_1 \quad \text{etc.} \tag{7'}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{d\bar\xi} = \frac{1}{\alpha_1}, \\
&\beta_1 \cdot \alpha_1 = \gamma_1, \\
&\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1^2 = \gamma_2, \\
&\beta_1 \alpha_3 + 3\beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_1^3 = \gamma_3 \quad \text{etc.}
\end{aligned}\right. \tag{9'}$$

§ 2. Zusammensetzung von Transformationen. Gruppoid. Die Menge von Transformationen T bildet keine Gruppe im strengen Sinne dieses Wortes, da nicht jede zwei Transformationen T_1 und T_2 zusammengesetzt werden können.

Die Transformation $T_{\varkappa k}$

$$\bar\xi^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi^k) \tag{10}$$

kann mit der Transformation $T_{K\varkappa}$

$$\bar{\bar{\xi}}^K = \chi^K(\bar{\xi}^\varkappa) \tag{11}$$

nur dann zusammengesetzt werden und die zusammengesetzte Transformation

$$\bar{\bar{\xi}}^K = \chi^K[\varphi^1(\xi^l), \ldots, \varphi^n(\xi^l)]$$

kann nur dann gebildet werden, wenn der Durchschnitt des Wertbereiches der Transformation (10) mit dem Definitionsbereich der Transformation (11) nicht leer ist.

Ist der Definitionsbereich der Transformation $T_{\varkappa k}$ eine Umgebung des arithmetischen Punktes $(\underset{0}{\xi^k})$ und der Wertbereich eine Umgebung des arithmetischen Punktes $(\underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa})$, so fordern wir, daß der Definitionsbereich der Transformation $T_{K\varkappa}$ auch eine Umgebung von $(\underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa})$ sei. Dies ist wegen unserer Voraussetzungen immer der Fall, wenn

$$\varphi^\varkappa(\underset{0}{\xi^k}) = \underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}$$

im Innern des Definitionsbereiches von χ^K liegt.

Die Transformation E_k

$$\bar{\xi}^k = \xi^k\,, \qquad E_k \overset{\mathrm{df}}{=} T_{kk}$$

hat offensichtlich die Eigenschaft

$$T_{\varkappa k} \cdot E_k = T_{\varkappa k}$$

und bedeutet keine Änderung des Koordinatensystems. Ebenso gilt für die Transformation $E_\varkappa$

$$\bar{\bar{\xi}}^\varkappa = \bar{\xi}^\varkappa\,, \qquad E_\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} T_{\varkappa\varkappa}$$

die Beziehung

$$E_\varkappa \cdot T_{\varkappa k} = T_{\varkappa k}\,.$$

Die inverse Transformation $T_{k\varkappa}$

$$\xi^k = \psi^k(\bar{\xi}^\varkappa)$$

erfüllt die Gleichungen

$$T_{k\varkappa} \cdot T_{\varkappa k} = E_k\,,$$
$$T_{\varkappa k} \cdot T_{k\varkappa} = E_\varkappa\,.$$

Nehmen wir einen gewissen festen Punkt p_0. Die in einer Umgebung dieses Punktes definierten Koordinatentransformationen bilden ein *Gruppoid im Sinne von H. Brandt* (A. Nijenhuis 1952). Dies bedeutet eine Menge von Elementen $T, S, \ldots$ mit einem partiellen Produkt $S \cdot T$ von folgenden Eigenschaften:

1. Falls zwischen den Elementen T, S, U die Beziehung

$$T \cdot S = U$$

besteht, dann ist jeder der drei Elementen durch die übrigen zwei eindeutig bestimmt.

2. Falls in der Gleichung

$$(T \cdot S) \cdot U = T \cdot (S \cdot U)$$

die eine Seite oder die in den beiden Klammern stehenden Produkte einen Sinn haben, so haben beide Seiten der Gleichung einen Sinn und es besteht die Gleichheit.

3. Zu jedem Element T aus der Menge existiert eine einzige Rechts-Einheit E_T und eine einzige Linkseinheit ${}_TE$ von den Eigenschaften

$$T \cdot E_T = T = {}_TE \cdot T\,.$$

4. Zu jedem Element T existiert ein einziges inverses Element T^{-1} von der Eigenschaft

$$T^{-1} \cdot T = E_T\,,$$
$$T \cdot T^{-1} = {}_TE\,.$$

5. Zu beliebigen zwei Einheitselementen E_T und E_S existiert wenigstens ein Element U derart, daß

$$U \cdot E_T \quad \text{und} \quad E_S \cdot U$$

einen Sinn haben.

Oft werden wir die Untergruppoide bzw. Untergruppen des Gruppoids der Koordinatentransformationen betrachten.

Wir bemerken, daß die Differentialgeometrie im Kleinen die Invariantentheorie des Gruppoids der Koordinatentransformationen (in der Umgebung eines Punktes) ist.

Bei der Darstellung (8) der Koordinatentransformationen wird ihr Produkt durch die Beziehung

$$(\underset{0}{\xi^i}, \underset{0}{\bar{\xi}^\lambda}, A^\lambda_i, \ldots, A^\lambda_{i_1 \ldots i_r}, \ldots) \cdot (\underset{0}{\bar{\xi}^\lambda}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}, A^K_\lambda, \ldots, A^K_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}, \ldots) = (\underset{0}{\xi^i}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}, A^K_i, \ldots, A^K_{i_1 \ldots i_r}, \ldots) \tag{12}$$

dargestellt. Aus dieser Darstellung ist zu ersehen, daß das Gruppoid der Koordinatentransformationen $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt des Untergruppoides Γ mit der Produktbildung

$$(\underset{0}{\xi^i}, \underset{0}{\bar{\xi}^\lambda}) \cdot (\underset{0}{\bar{\xi}^\lambda}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}) = (\underset{0}{\xi^i}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K})$$

und der Untergruppe G mit der Produktbildung

$$(A_i^\lambda, \ldots, A_{i_1 \ldots i_r}^\lambda, \ldots) \cdot (A_\lambda^K, \ldots, A_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}^K, \ldots) = (A_i^K, \ldots, A_{i_1 \ldots i_r}^K, \ldots) \tag{13}$$

ist.

Die Gruppoide der Koordinatentransformationen, wo die Funktionen φ von der Klasse C^r sind (r-mal stetig differenzierbar), werden mit $\mathfrak{G}_r$ bezeichnet.

§ 3. Das geometrische Objekt. Beispiele. Es sei im Raume $\mathfrak{X}_n$ ein Punkt p_0 und ein Gruppoid $\mathfrak{G}$ von Koordinatentransformationen gegeben.

Falls diesem Punkte p_0 und jedem zugelassenen Bezugssystem (k) in eindeutiger Weise ein m-Tupel von Zahlen

$$\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$$

zugeordnet ist, so sagen wir, daß im Punkte p_0 ein *Objekt* definiert ist. Die Zahlen Ω_i $(i = 1, \ldots, m)$ werden *Komponenten* des Objektes in Bezug auf das Koordinatensystem (k) genannt.

Im Koordinatensystem $(\varkappa)$ bezeichnen wir die Komponenten des Objekts mit $\bar{\Omega}_\iota$ und vereinigen diese im Symbol

$$\bar{\Omega} = (\bar{\Omega}_1, \ldots, \bar{\Omega}_m) .$$

Im allgemeinen lassen sich die $\bar{\Omega}_\iota$ aus den Ω_j und der Transformation $T_{\varkappa k}$ nicht berechnen. Ist dies doch der Fall, d. h.

$$\bar{\Omega}_\iota = \boldsymbol{\Phi}_\iota(\Omega_1, \ldots, \Omega_m; T_{\varkappa k}) = \boldsymbol{\Phi}_\iota(\Omega_j; T_{\varkappa k}) \tag{14}$$

oder kurz

$$\bar{\Omega} = \boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{\varkappa k}) , \tag{14'}$$

so nennen wir das Objekt ein *geometrisches Objekt.*

Wir bemerken, daß die $\boldsymbol{\Phi}_\iota$ Funktionen der Ω_j, dagegen Funktionale der $T_{\varkappa k}$ sind. Die Gestalt von $\boldsymbol{\Phi}_\iota$ ist aber gegenüber den Koordinatentransformationen aus $\mathfrak{G}$ invariant. Dies und die Eindeutigkeit der Zuordnung hat als Konsequenz die folgende *fundamentale Funktionalgleichung*

$$\boldsymbol{\Phi}_M[\boldsymbol{\Phi}_\lambda(\Omega_j; T_{\varkappa k}); T_{K\varkappa}] = \boldsymbol{\Phi}_M(\Omega_j; T_{Kk}) \qquad (M = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

oder kurz

$$\boldsymbol{\Phi}[\boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{\varkappa k}); T_{K\varkappa}] = \boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{Kk}) \tag{15'}$$

aus welcher hervorgeht, daß die Funktionen $\boldsymbol{\Phi}$ nicht beliebig sein können. Ihre Bestimmung kann eben durch die Lösung dieser Gleichung (dieses Gleichungssystems) ermittelt werden. Offenbar gilt auch

$$\boldsymbol{\Phi}(\Omega; E_k) = \Omega \qquad (\textit{Identitätsbedingung}) . \tag{16}$$

Die Formeln (14) bzw. (14′) geben die *Transformationsregel* (*Transformationsformel*) des Objektes an.

Die Gleichungen (15) bzw. (15′) müssen offenbar für alle $T_{\varkappa k}$ und $T_{K\varkappa}$ aus $\mathfrak{G}$ erfüllt werden.

Da meistens in einem Punkte nicht nur ein Objekt, sondern eine Menge von Objekten *mit derselben Transformationsregel* betrachtet wird, kann in (15), (15′), (16) auch $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, in Bezug auf welche diese Gleichungen identisch erfüllt sein sollen.

Der Definitionsbereich der Funktion $\boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{\varkappa k})$ in hezug auf Ω muß die Vereinigungsmenge $\boldsymbol{\Sigma}$ der Mengen der in den zugelassenen Bezugssystemen angenommenen Objektenwerte enthalten.

Wir bemerken, daß falls eine endliche Folge von Objekten $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$ (im Punkte p) mit den Komponentenzahlen $m_1, \ldots, m_q$ gegeben ist, so können wir diese Objekte in ein einziges Objekt Ω von $m = m_1 + \ldots + m_q$ Komponenten *vereinigen.* Dieses Ω *zerfällt* in die Objekte $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$.

Da im Folgenden nicht geometrische Objekte kaum vorkommen werden, werden wir oft statt „geometrische Objekte" schlechthin „Objekte" schreiben.

Wir sprechen über ein *Feld von Objekten*, wenn in jedem Punkte p eines Bereiches ein Objekt definiert wird.

Zwecks Erläuterung der obigen Definitionen geben wir unten einige einfache Beispiele:

1. Ein System von m *Skalaren* $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ (im Falle $m = 1$ ein Skalar) ist ein geometrisches Objekt mit m Komponenten von der Transformationsregel

$$\bar{\Omega} = \boldsymbol{\Phi}(\Omega; T_{\varkappa k}) = \Omega . \tag{17}$$

2. Die *Koordinaten* $\xi^1, \ldots, \xi^n$ eines Punktes bilden ein geometrisches Objekt mit n $(m = n)$ Komponenten und mit der Transformationsregel

$$\bar{\Omega}_\varkappa = \bar{\xi}^\varkappa = \boldsymbol{\Phi}_\varkappa(T_{\varkappa k}) . \tag{18}$$

3. Eine *Dichte* vom Gewicht (-1) (z. B. ein Volumendifferential) ist ein geometrisches Objekt mit einer Komponente und mit der Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \Omega \cdot J . \tag{19}$$

4. Ein *kontravarianter Vektor* im Punkte p_0 ist ein geometrisches Objekt mit n Komponenten und mit der Transformationsformel

$$\bar{v}^\varkappa = A_k^\varkappa v^k . \tag{20}$$

5. Ein zweifach *kovarianter Tensor* im Punkte p_0 (z. B. das Koeffizientenschema einer Bilinearform) ist ein geometrisches Objekt mit n^2 Komponenten und mit der Transformationsformel

$$\bar{g}_{\varkappa\lambda} = A^k_\varkappa A^l_\lambda g_{kl} \,. \tag{21}$$

6. Die Parameter einer *linearen Übertragung* (einer *linearen Konnexion*, z. B. die sogenannten Christoffelschen Symbole zweiter Art) bilden ein Feld von geometrischen Objekten mit n^3 Komponenten. Die Transformationsformel der Objekte dieses Feldes lautet

$$\bar{\Gamma}^{\varrho}_{\varkappa\lambda} = \Gamma^{p}_{kl} A^{\varrho}_{p} A^{k}_{\varkappa} A^{l}_{\lambda} + A^{\varrho}_{j} A^{j}_{\varkappa\lambda} \,. \tag{22}$$

7. Der Quotient v^2/v^1 der Komponenten eines kontravarianten Vektors des $\mathfrak{X}_2$ bildet ein geometrisches Objekt mit einer Komponente und mit der Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \frac{A^1_1 + A^1_2 \Omega}{A^2_1 + A^2_2 \Omega} \qquad \left(A^\lambda_i = \frac{\partial \bar{\xi}^\lambda}{\partial \xi^i}\right).$$

8. Ist in einem Bereiche des Raumes $\mathfrak{X}_n$ ein Skalarfeld $\Sigma(\xi)$ von der Klasse C^2 definiert, so bildet die Hessische Determinante

$$H = \det \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$$

ein Feld von Objekten, die im allgemeinen keine geometrische Objekte sind. Wenn das Gruppoid nicht nur aus den linearen Transformationen besteht (d. h. die A^λ_{ij} im allgemeinen nicht verschwinden), so ist

$$\bar{H} = \det \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \bar{\xi}^\lambda \partial \bar{\xi}^\mu}$$

nicht nur von H und von den Funktionen $\varphi^\varkappa(\xi^l)$, sondern auch von den $\partial\Sigma/\partial\bar{\xi}^\lambda$ abhängig.

Weitere Beispiele werden noch im Laufe der Arbeit vorkommen.

Wir betonen, daß sich die Transformationsformel eines geometrischen Objektes beim Übergang vom ursprünglichen Gruppoid zu einem Untergruppoid vereinfachen kann (z. B. die Transformationsformel (22) geht für das Gruppoid der linearen Transformationen in die Transformationsformel

$$\bar{\Gamma}^{\varrho}_{\varkappa\lambda} = \Gamma^{p}_{kl} A^{\varrho}_{p} A^{k}_{\varkappa} A^{l}_{\lambda}$$

der sogenannten zweifach kovarianten und einfach kontravarianten Tensoren über). Ja sogar kann es vorkommen — wie das Beispiel 8 zeigt — daß ein Objekt, das bei $\mathfrak{G}$ kein geometrisches Objekt ist, bei Einschränkung auf ein Untergruppoid zu einem geometrischen Objekt wird.

§ 4. Spezielle geometrische Objekte. Klasse. Typus. In der Definition (14) eines geometrischen Objektes sind die Φ_ι Funktionale der Koordinatentransformation $T_{\varkappa k}$. Wie die im § 3 vorgeführten Beispiele zeigen, hängen die Φ_ι oft nur von einer endlichen Anzahl von Parametern (z. B. $\bar{\xi}^\varkappa$, $A^\varkappa_k$, $A^k_\varkappa$, $A^j_{\varkappa\lambda}$, J), die von $T_{\varkappa k}$ bestimmt sind, ab. Wenn dies der Fall ist, so sprechen wir über *spezielle* geometrische Objekte. Werden die Parameter mit

$$u = (u_1, \dots, u_p)$$

bezeichnet, so lässt sich die Transformationsformel (14′) in der Gestalt

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; u) \tag{23}$$

und die Fundamentalgleichung (15′) in der Gestalt

$$\Phi[\Phi(\Omega; u); v] = \Phi(\Omega; w) \tag{24}$$

schreiben, wo u, v, w die zu den Koordinantentransformationen $T_{\varkappa k}$, $T_{K\varkappa}$, T_{Kk} gehörende Parameter bedeuten. Im allgemeinen, wenn von der Abhängigkeit der Parameter von der Koordinatentransformation abgesehen wird, charakterisiert (24) eine allgemeine Transformationshalbgruppe. So könnte die Theorie der topologischen und die der Lieschen Gruppen auf unseren Gegenstand angewendet werden; wir wollen aber in diesem Buch mehr elementare Methoden verwenden.

Sind insbesondere

$$u = (\underset{0}{\xi^k}, \underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}, A^\varkappa_k, \dots, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r})$$

die Parameter, so nennen wir das Objekt ein spezielles Objekt von *r-ter Klasse*. Die Transformationsformel und die Fundamentalgleichung lauten in diesem Fall

$$\bar{\Omega} = \Phi(\Omega; \underset{0}{\xi^k}, \underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}, A^\varkappa_k, \dots, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}) \tag{25}$$

bzw.

$$\Phi\big(\Phi(\Omega; \underset{0}{\xi^k}, \underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}, A^\varkappa_k, \dots, A^\varkappa_{k_1 \dots k_r}); \underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}, A^K_\varkappa, \dots, A^K_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}\big) = \Phi(\Omega; \underset{0}{\xi^k}, \underset{0}{\bar{\bar{\xi}}^K}, A^K_k, \dots, A^K_{k_1 \dots k_r}) \,. \tag{26}$$

Es ist klar, daß bei dem Gruppoid $\mathfrak{G}_s$ nur Objekte von höchstens s-ter Klasse existieren.

Die bisher eingeführten drei wichtigen Daten des speziellen Objektes, nämlich die Komponentenzahl m, die Dimensionszahl n der Raumes und die Klassenzahl r werden wir in der Bezeichnung des *Typus*

$$(m, n, r)$$

vereinigen.

Die *Klassifikationstheorie* der geometrischen Objekte beschäftigt sich mit der Bestimmung aller Objekte (d. h. ihrer Transformationsformeln) eines gegebenen Typus.

Falls in (25) die $\underset{0}{\xi^k}$, $\underset{0}{\bar{\xi}^\varkappa}$ nicht vorkommen, so nennen wir das Objekt ein *rein differentielles* oder *differentialgeometrisches* Objekt.

Fals in (25) die $A^\varkappa_k, \ldots, A^\varkappa_{k_1 \ldots k_r}$ nicht vorkommen ($r = 0$), so nennen wir das Objekt ein *nicht differentielles* Objekt.

Falls in (14), (14'), (23), (25) $\boldsymbol{\Phi}$ bzw. Φ eine lineare Funktion von Ω ist, so ist das Objekt *linear*.

Die Skalare 1 sind gleichzeitig rein differentielle und nichtdifferentielle Objekte. Die Koordinaten 2 sind nicht differentielle Objekte, die Objekte 2-7 sind differentiell.

Der Typus der geometrischen Objekte in unseren Beispielen ist

1. $(m, n, 0)$,
2. $(n, n, 0)$,
3. $(1, n, 1)$,
4. $(n, n, 1)$,
5. $(n^2, n, 1)$,
6. $(n^3, n, 2)$,
7. $(1, 2, 1)$.

§ 5. Komitanten. Geometrische Komitanten. Äquivalenz. Eine Funktion $\Psi(\Omega) = \{\Psi_1(\Omega_1 \ldots \Omega_m), \ldots, \Psi_q(\Omega_1 \ldots \Omega_m)\}$, wo die Gestalt von Ψ gegenüber Koordinatentrasformationen invariant ist, wird *Komitante* des Objektes Ω genannt. Eine Komitante eines geometrischen Objektes ist immer ein Objekt, braucht aber nicht unbedingt ein geometrisches Objekt sein.

Ist $\Psi(\Omega)$ auch ein geometrisches Objekt, so nennen wir es eine *geometrische Komitante.*

Ist Ω ein geometrisches Objekt und ist die Funktion Ψ eindeutig umkehrbar, so ist $\Omega^* = \Psi(\Omega)$ immer eine geometrische Komitante und wir nennen Ω und Ω^* *äquivalent.* In diesem Falle muß offenbar $q = m$ sein und übrigens müssen äquivalente Objekte von demselben Typus sein.

In der Klassifikationstheorie pflegt man die Objekte vom gegebenen Typus nur bis auf Äquivalenz zu bestimmen.

Falls Ω^* mit Ω äquivalent ist:

$$\Omega^* = \Psi(\Omega)\,, \qquad \Omega = \Psi^{-1}(\Omega^*)\,,$$

und Ω die Transformationsformel

$$\bar{\Omega} = \boldsymbol{\Phi}(\Omega;\, T_{\varkappa k})$$

hat, so lautet die Transformationsformel von Ω^*

$$\bar{\Omega}^* = \Psi\{\boldsymbol{\Phi}[\Psi^{-1}(\Omega^*);\, T_{\varkappa k}]\}\,.$$

Unter den äquivalenten Objekten pflegt man die von womöglichst einfacher (z. B. linearer) Transformationsformel auszeichnen.

Ist $\Omega_l[\xi^j(\tau^1, \ldots, \tau^q)]$ ein Feld von Objekten bezüglich $\mathfrak{G}_r$ definiert für die Punkte $p[\tau^1, \ldots, \tau^q]$ des geometrischen Raumes und sind die Ω_l Funktionen der Klasse C^s ($s \leqslant r$) von $\tau^1, \ldots, \tau^q$, so können wir Funktionen

$$\Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l, \ldots, \partial_{j_1 \ldots j_s}\Omega_l) \tag{27}$$

betrachten, wo

$$\partial_j\Omega_l = \frac{\partial\Omega_l}{\partial\tau^j}\,, \qquad \partial_{j_1 \ldots j_t}\Omega_l = \frac{\partial^t\Omega_l}{\partial\tau^{j_1} \ldots \partial\tau^{j_t}}$$

ist. Diese sind auch selbst Objekte, aber nicht unbedingt geometrische Objekte (vgl. Beispiel 8 im § 3) und wir nennen sie *Differentialkomitanten* s-ter Ordnung des Objektenfeldes $\Omega(\xi)$.

Im Bezugssystem ($\varkappa$) hat diese Differentialkomitante die Gestalt

$$\Psi_\pi(\bar{\Omega}_\lambda, \partial_\iota\bar{\Omega}_\lambda, \ldots, \partial_{\iota_1 \ldots \iota_s}\bar{\Omega}_\lambda)\,.$$

Es brauchen natürlich in (27) nicht alle Veränderlichen vorkommen. Andererseits kann Ω — wie es im § 3 bemerkt wurde — als Vereinigung mehrerer Objekte $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$ mit $m_1 + \ldots + m_q$ Komponenten ($m_1 + \ldots + m_q = m$) betrachtet werden, so daß wir auch von Komitanten und Differentialkomitanten mehrerer Objekte sprechen können.

Falls

$$\Pi_p = \Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l, \ldots, \partial_{j_1 \ldots j_s}\Omega_l) \tag{28}$$

ein *geometrisches* Objekt ist, so nennen wir es eine *geometrische* Differentialkomitante s-ter Ordnung von Ω_l.

Es genügt geometrische Komitanten und Differentialkomitanten bis auf Äquivalenz zu bestimmen. Dies zeigen wir der Einfachheit halber für geometrische Differentialkomitanten erster Ordnung (J. Aczél 1959 [3], [4]).

Es sei also

$$\Pi_p = \Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l) \quad \left(\partial_j\Omega_l = \frac{\partial\Omega_l}{\partial\tau^j}\right); \quad \bar{\Pi}_\pi = \Psi_\pi(\bar{\Omega}_\lambda, \overline{\partial_\iota\Omega_\lambda}) \quad \left(\overline{\partial_\iota\Omega_\lambda} = \frac{\partial\bar{\Omega}_\lambda}{\partial\bar{\tau}^\iota}\right).$$

Ω_l und Π_p seien *spezielle* geometrische Objekte mit den Parametern u_K bzw. v_R (große lateinische Buchstaben dienen also hier als Indizes der Parameter):

$$\bar{\Omega}_\lambda = \Phi_\lambda(\Omega_l;\, u_K)\,, \qquad \bar{\Pi}_\pi = X_\pi(\Pi_p;\, v_R)\,,$$

dann gilt

$$\overline{\partial_\iota\Omega_\lambda} = \frac{\partial}{\partial\bar{\tau}^\iota}\Phi_\lambda(\Omega_l;\, u_K) = \frac{\partial\tau^j}{\partial\bar{\tau}^\iota}\frac{\partial}{\partial\tau^j}\Phi_\lambda(\Omega_l;\, u_K)$$
$$= B^j_\iota[\partial^i\Phi_\lambda(\Omega_l;\, u_K)\partial_j\Omega_i + \partial^I\Phi_\lambda(\Omega_l;\, u_K)\partial_j u_I]\,,$$

wo

$$\partial_j u_K = \frac{\partial u_K}{\partial \tau^j}\,, \quad B^j_i \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \tau^j}{\partial \bar{\tau}^i}\,, \quad \partial^i \Phi_\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial \Omega_i}\,, \quad \partial^I \Phi_\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u_I}$$

gesetzt wurde. (Da wir den Ω_i und u_I untere Indizes zugeschrieben haben, bezeichnen wir die Differentiation bezüglich diesen Veränderlichen mit oberen Indizes um Summationszeichen auch im folgenden womöglich zu vermeiden.) Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (29) \quad & X_\pi[\Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l); v_R] \\ & = \Psi_\pi\{\Phi_\lambda(\Omega_l; u_K)\,,\ B^j_i[\partial^i\Phi_\lambda(\Omega_l; u_K)\partial_j\Omega_i + \partial^I\Phi_\lambda(\Omega_l; u_k)\partial_j u_I]\}\,. \end{aligned}$$

Es sei nun Σ_k äquivalent zu Ω_l und Ξ_s äquivalent zu Π_p. Dann bestehen die Relationen

$$(30) \quad \begin{aligned} & \Sigma_k = \Theta_k(\Omega_l)\,, \quad \Omega_l = T_l(\Sigma_k); \\ & \Xi_s = \Lambda_s(\Pi_p)\,, \quad \Pi_p = K_p(\Xi_s); \quad \partial_j\Omega_l = \partial^a T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_a \end{aligned}$$

und es werden

$$(31) \quad \begin{aligned} & \bar{\Sigma}_\varkappa = \Theta_\varkappa\{\Phi_\lambda[T_l(\Sigma_k); u_K]\} = \widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K); \\ & \bar{\Xi}_\sigma = \Lambda_\sigma\{X_\pi[K_p(\Xi_s); v_R]\} = \widetilde{X}_\sigma(\Xi_s; v_R) \end{aligned}$$

die Transformationsformeln von Σ_k und Ξ_s sein. Wir beweisen, daß Ξ eine geometrische Differentialkomitante von Σ_k ist.

$$(32) \qquad \Xi_s = \Lambda_s\{\Psi_p[T_l(\Sigma_k), \partial^a T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_a]\} = \widetilde{\Psi}_s(\Sigma_k; \partial_j\Sigma_k)$$

ist tatsächlich eine Funktion von Σ_k und $\partial_j\Sigma_k$ und — da mit Π_p äquivalent — auch ein geometrisches Objekt. Wir haben nur noch zu beweisen, daß die Funktion $\widetilde{\Psi}_s$ gegenüber Koordinatentransformationen invariant ist. Wir setzen dazu (30) und (31) in (29) ein. Aus (31) folgt nämlich

$$\Phi_\lambda(\Omega_l; u_K) = T_\lambda\{\widetilde{\Phi}_\varkappa[\Theta_k(\Omega_l); u_K]\}\,, \qquad X_\pi(\Pi_p; v_R) = K_\pi\{\widetilde{X}_\sigma[\Lambda_s(\Pi_p); v_R]\}$$

und laut der Regel für Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen

$$\begin{aligned} & \partial^i\Phi_\lambda(\Omega_l; u_K) = \partial^\mu T_\lambda\{\widetilde{\Phi}_\varkappa[\Theta_k(\Omega_l); u_K]\}\,\partial^m\widetilde{\Phi}_\mu[\Theta_k(\Omega_l); u_K]\partial^i\Theta_m(\Omega_l)\,, \\ & \partial^I\Phi_\lambda(\Omega_l; u_K) = \partial^\mu T_\lambda\{\widetilde{\Phi}_\varkappa[\Theta_k(\Omega_l); u_K]\}\,\partial^I\widetilde{\Phi}_\mu[\Theta_k(\Omega_l); u_K]\,. \end{aligned}$$

Wenn man all dies in (29) einsetzt und auch (30) sowie die aus (30) folgenden Identitäten

$$\Theta_k[T_l(\Sigma_k)] = \Sigma_k\,, \qquad \partial^i\Theta_k[T_l(\Sigma_m)]\partial^a T_i(\Sigma_m) = \delta^a_k$$

berücksichtigt, erhält man

$$\begin{aligned} & K_\pi\big(\widetilde{X}_\sigma[\Lambda_s\{\Psi_p[T_l(\Sigma_k)\,,\ \partial^a T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_a]\}; v_R]\big) \\ & \quad = \Psi_\pi\big(T_\lambda[\widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K)]\,,\ B^j_i\partial^\mu T_\lambda[\widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K)][\partial^a\widetilde{\Phi}_\mu(\Sigma_k; u_K)\partial_j\Sigma_a + \\ & \qquad\qquad + \partial^I\widetilde{\Phi}_\mu(\Sigma_k; u_K)\partial_j u_I]\big)\,, \end{aligned}$$

d. h. mit (32)

$$\begin{aligned} & \widetilde{X}_\sigma[\widetilde{\Psi}_s(\Sigma_k, \partial_j\Sigma_k); v_R] \\ & \quad = \widetilde{\Psi}_\sigma[\widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K), B^j_i\{\partial^a\widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K)\partial_j\Sigma_a + \partial^I\widetilde{\Phi}_\varkappa(\Sigma_k; u_K)\partial_j u_I\}]\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt mittels (30) und (31)

$$\bar{\Xi}_\sigma = \widetilde{X}_\sigma(\Xi_s; v_R) = \widetilde{\Psi}_\sigma(\bar{\Sigma}_\varkappa, \overline{\partial_i\Sigma_\varkappa})$$

und dies verglichen mit (32) drückt eben die Invarianz der Gestalt der Funktion $\widetilde{\Psi}_\sigma$ gegenüber Koordinatentransformationen aus. Damit ist alles bewiesen und wir haben das folgende allgemeine

Prinzip. *Ist*

$$\Pi_p = \Psi_p(\Omega_l, \partial_j\Omega_l)$$

die allgemeine geometrische Differentialkomitante erster Ordnung des Objektes Ω_l, das einer gegebenen Transformationsformel

$$\bar{\Omega}_\lambda = \Phi_\lambda(\Omega_l; u_K)$$

gehorcht, und ist Σ_k mit Ω_l äquivalent:

$$\Sigma_k = \Theta_k(\Omega_l)\,, \quad \Omega_l = T_l(\Sigma_k)\,,$$

so ist

$$\Xi_s = \widetilde{\Psi}_s(\Sigma_k, \partial_j\Sigma_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda_s\{\Psi_p[T_l(\Sigma_k), \partial^a T_l(\Sigma_k)\partial_j\Sigma_a]\}$$

— wo Λ_s ein beliebiges eindeutig umkehrbares Funktionensystem ist — die allgemeinste geometrische Differentialkomitante erster Ordnung von Σ_k, die mit Π_p äquivalent ist.

Dies ermöglicht, daß man unter den äquivalenten Objekten nur die mit den einfachsten, z. B. linearen Transformationsformeln bezüglich Komitanten und Differentialkomitanten untersuche und dann die Ergebnisse durch dieses Prinzip auf alle äquivalenten Objekte übertrage.