

# ROZDZIAŁ XIV

## SZEREGI FOURIERA

**§ 1. Funkcje periodyczne.** Liczba rzeczywista skończona  $\tau$  nazywa się *okresem* funkcji  $f$  określonej na prostej  $\mathcal{R}$ , jeżeli  $\tau \neq 0$  i

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathcal{R}.$$

Mówimy, że funkcja  $f$  określona na  $\mathcal{R}$  jest *okresowa* lub *periodyczna*, jeżeli posiada co najmniej jeden okres.

Przykładem funkcji okresowych są funkcje  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^{ix}$ . Okresem jest tu liczba  $2\pi$ . Funkcja stała jest również okresowa — okresem jej jest każda liczba  $\tau \neq 0$ .

Głównym zagadnieniem niniejszego rozdziału jest przedstawianie funkcji  $f$  (rzeczywistych lub zespolonych) w postaci sumy szeregu nieskończonego

$$(1) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie  $a_n, b_n$  są odpowiednio dobranymi współczynnikami liczbowymi. Szereg funkcyjny postaci (1) nazywa się *szeregiem trygonometrycznym*<sup>1)</sup>. Jeżeli  $f$  jest sumą szeregu (1), to  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $2\pi$ . Rozważania nasze będą więc dotyczyć wyłącznie funkcji okresowych o okresie  $2\pi$ .

W celu uproszczenia terminologii przez *funkcję okresową* będziemy w dalszym ciągu rozumieć zawsze funkcję (określoną na  $\mathcal{R}$ ) o okresie  $2\pi$ :

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathcal{R}.$$

Przez miarę i mierzalność będziemy zawsze rozumieć miarę Lebesgue'a  $l$  na prostej  $\mathcal{R}$  i mierzalność względem tej miary, chyba że z tekstu będzie jasno wynikać, że mowa o innej mierze.

Funkcja okresowa jest w zupełności wyznaczona przez swoje wartości w jakimkolwiek przedziale domkniętym lub jednostronnie domkniętym

<sup>1)</sup> Rozdział XIV zawiera tylko niewielką liczbę podstawowych twierdzeń teorii szeregów trygonometrycznych. Teorii tej poświęconych jest wiele dzieł specjalnych. Por. np. książkę Hardy i Rogosinsky [1] i obszerną monografię Zygmunda [1].

tym o długości  $2\pi$ , np. w przedziale  $[-\pi; \pi]$  lub  $[0; 2\pi]$ . Badanie funkcji okresowej na całej prostej  $\mathcal{R}$  można więc sprowadzić do badania jej własności w dowolnym domkniętym lub jednostronnie domkniętym przedziale o długości  $2\pi$ , np. w przedziale  $[-\pi; \pi]$ ,  $[0; 2\pi]$  lub  $[0; 2\pi]$  itd. W szczególności, funkcja okresowa jest mierzalna, ciągła, bezwzględnie ciągła, o wahanii skończonym itp. na całej prostej  $\mathcal{R}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy jest mierzalna, ciągła, bezwzględnie ciągła, o wahanii skończonym itp. w pewnym przedziale  $a; a+2\pi$ .

Pochodna funkcji okresowej jest także funkcją okresową.

Jeżeli funkcja okresowa  $f$  jest całkowalna w jakimś przedziale  $a; a+2\pi$ , to jest także całkowalna w każdym innym przedziale  $b; b+2\pi$  oraz

$$(2) \quad \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_b^{b+2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x+c) dx = \int_a^{a+2\pi} f(-x) dx,$$

gdzie  $c \in \mathcal{R}$  jest dowolną stałą liczbą. Z własności (2) całki na przedziale o długości  $2\pi$  będziemy często korzystać w dalszym ciągu nie powołując się na nią wyraźnie.

Wzór na całkowanie przez części na przedziale o długości  $2\pi$  dla funkcji okresowych  $f, g$  bezwzględnie ciągłych ma postać

$$(3) \quad \int_a^{a+2\pi} f(x)g'(x) dx = - \int_a^{a+2\pi} f'(x)g(x) dx.$$

Symbolem  $L_{2\pi}^p$  ( $\tilde{L}_{2\pi}^p$ ) oznaczają będziemy przestrzeń funkcji mierzalnych okresowych rzeczywistych (zespolonych) takich, że

$$(4) \quad \|f\|_p = \left( \int_a^{a+2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$(5) \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{a \leq x \leq a+2\pi} |f(x)| = \sup_{x \in \mathcal{R}} |f(x)| < \infty \quad \text{dla } p = \infty.$$

Normy (4) i (5) nie zależą od liczby  $a$ . Funkcje okresowe równoważne będziemy stale utożsamiać ze sobą.

Łatwo widzieć, że  $L_{2\pi}^p$  ( $\tilde{L}_{2\pi}^p$ ) przy normie  $\| \cdot \|_p$  jest rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią Banacha, równoważną przestrzeni  $L^p(\bar{0}; 2\pi)$  ( $L^p(\bar{0}; 2\pi)$ ); równoważność ustala odwzorowanie, przyporządkowujące funkcji okresowej  $f$  funkcję zredukowaną  $f|_{\bar{0}; 2\pi}$ . Z tej przyczyny przestrzenie  $L_{2\pi}^p$  i  $L^p(\bar{0}; 2\pi)$  (przestrzenie  $\tilde{L}_{2\pi}^p$  i  $\tilde{L}^p(\bar{0}; 2\pi)$ ) możemy utożsamiać ze sobą. Zarazem wynika stąd, że normy (4) i (5) posiadają wszelkie własności normy  $\| \cdot \|_p$ , wymienione w § 2, rozdział XII.

Zamiast  $L_{2\pi}^1$  ( $\tilde{L}_{2\pi}^1$ ) będziemy również pisać  $L_{2\pi}$  ( $\tilde{L}_{2\pi}$ ).

Symbol  $C_{2\pi}$  ( $\tilde{C}_{2\pi}$ ) będzie oznaczać rzeczywistą (zespoloną) przestrzeń Banacha funkcji okresowych ciągłych rzeczywistych (zespólnych) z normą

$$\|f\|_C = \sup_{a \leq x \leq a+2\pi} |f(x)| = \sup_{x \in \mathcal{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Przestrzeń  $C_{2\pi}$  ( $\tilde{C}_{2\pi}$ ) jest równoważna podprzestrzeni domkniętej przestrzeni  $C(0; 2\pi)$  ( $\tilde{C}(0; 2\pi)$ ), złożonej z funkcji  $g$  takich, że  $g(0) = g(2\pi)$ . Równoważność ustala to samo odwzorowanie, co poprzednio.

Z równoważności przestrzeni  $L_{2\pi}^p$ ,  $\tilde{L}_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $C_{2\pi}$ ,  $\tilde{C}_{2\pi}$  z analitycznymi przestrzeniami funkcji na odcinku  $0; 2\pi$  lub  $0; 2\pi$  wynika, że wszystkie te przestrzenie są ośrodkowe.

Zbiór  $0; 2\pi$  liczb rzeczywistych może być interpretowany jako grupa ilorazowa  $\mathcal{G} = \mathcal{R}/I$ , gdzie  $I$  jest podgrupą grupy  $\mathcal{R}$  liczb rzeczywistych, złożoną ze wszystkich liczb  $2n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), albo — jeszcze inaczej — jako grupa liczb zespolonych  $e^{ix}$  ( $x \in \mathcal{R}$ ) o module 1. Miara niezmiennicza w grupie  $\mathcal{G}$  jest miara Lebesgue'a  $l_1$ , zredukowana do odcinka  $0; 2\pi$ . Można więc wprowadzić definicję spłotu: spłotem dwu funkcji okresowych mierzalnych  $f, g$  jest funkcja okresowa

$$f * g(x) = \int_a^{a+2\pi} f(x-t)g(t)dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Na mocy (2) całki definiujące spłot nie zależą od liczby  $a$ .

Spłot  $f * g$  posiada wszystkie własności, wymienione w rozdziale XII, § 8 (por. uwagi na końcu tego paragrafu). Bezpośrednie sprawdzenie nie nastręcza żadnych trudności — wszystkie dowody przebiegają analogicznie, jak w przypadku spłotu na prostej  $\mathcal{R}$ .

**ĆWICZENIA.** 1. Podać ogólną postać funkcyjaliów liniowych w przestrzeniach  $C_{2\pi}$  i  $L_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

2. Obliczyć spłoty dowolnej pary funkcji spośród następujących funkcji okresowych:

$$e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \sin nx, \quad \cos nx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Jeżeli ciąg  $\{d_n\}$  jest zbieżny monotonicznie do zera, to szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx$$

są zbieżne niemal jednostajnie w zbiorze  $\mathcal{R}-I$ , gdzie  $I$  jest zbiorem wszystkich całkowitych wielokrotności liczby  $\pi$ .

(Wsk.: Zastosować twierdzenie Abela o szeregach funkcyjnych.)

4. Jeśli funkcja okresowa  $f$  posiada ciągłą pochodną  $m$ -tego rzędu, a funkcja okresowa  $g$  posiada ciągłą pochodną  $n$ -tego rzędu ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ), to spłot  $f * g$  posiada ciągłą pochodną  $(m+n)$ -tego rzędu i pochodna ta równa się spłotowi  $f^{(m)} * g^{(n)}$ .

## § 2. Elementarne własności szeregów Fouriera. Ciąg funkcji

$$(1) \quad \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

jest — jak stwierdziliśmy w rozdziale XIII, § 5 — układem ortogonalnym w przedziale  $0; 2\pi$ . Układ ten nie jest unormowany, gdyż

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{2\pi} (\cos nx)^2 dx = \int_0^{2\pi} (\sin nx)^2 dx = \pi.$$

Szeregi trygonometryczne

$$(3) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

rozpatrywane w przedziale  $0; 2\pi$  są więc szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia szeregów ortogonalnych. Mówiąc o zbieżności (w jakimkolwiek sensie) szeregu trygonometrycznego (3) mamy zawsze na myśli zbieżność ciągu sum częściowych

$$(4) \quad s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Szeregiem Fouriera funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  nazywamy szereg (3), gdzie

$$(5) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(6) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Liczby  $a_n, b_n$ , zdefiniowane wzorami (5), (6), nazywamy współczynnikami Fouriera funkcji  $f$ .

Szereg (3) jest więc szeregiem Fouriera funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ , jeżeli — interpretując  $f$  i funkcje (1) jako funkcje określone jedynie na przedziale  $0; 2\pi$  — jest on rozwinięciem ortogonalnym funkcji  $f$  względem układu ortogonalnego (1) (por. rozdział XII, § 4, (4)).

Szereg trygonometryczny (3) nazywamy szeregiem Fouriera, jeżeli jest on szeregiem Fouriera pewnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ .

Zgodnie z umową z rozdziału XIII, § 4, (7), zdanie orzekające, że szereg (3) jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$  (tzn. że spełnione są równości (5) i (6)), będziemy zapisywać krótko w postaci wzoru

$$(7) \quad f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ze względów omówionych we wstępie do § 5 z rozdziału XIII wystarczy właściwie badać szeregi Fouriera funkcji rzeczywistych. Niekiedy jednak wygodnie jest przejść w dziedzinę zespoloną (por. twierdzenia 2.1 i 8.5) i zamiast układu (1) rozpatrywać układ funkcji

$$(8) \quad e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

który – rozważany jako ciąg funkcji na przedziale  $\overline{0; 2\pi}$  – jest układem ortogonalnym nieunormowanym, gdyż

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi.$$

Przyjmując

$$(10) \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{dla} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

gdzie

$$(11) \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad b_0 = 0,$$

równość (4) możemy zapisać w postaci

$$(12) \quad s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Badanie szeregu trygonometrycznego (3) sprowadza się więc do badania szeregu

$$(13) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Rozwiązując równania (10) (por. także (11)) względem  $a_n$  i  $b_n$  otrzymujemy

$$(14) \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Jeżeli szereg (3) jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$ , to z (5), (6), (10), (11) wynika, że

$$(15) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx.$$

Zatem szereg (13) jest wówczas rozwinięciem ortogonalnym funkcji  $f$  względem układu (8) (interpretując wszystkie funkcje jako funkcje określone na  $\overline{0; 2\pi}$ ). Piszemy wtedy również

$$(16) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

i mówimy, że szereg (13) jest *szeregiem Fouriera* funkcji  $f$ .

Zauważmy, że liczby  $a_n, b_n$  są rzeczywiste, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(17) \quad c_n = \overline{c_{-n}}.$$

W dalszym ciągu będziemy najczęściej rozważać rozwinięcia funkcji okresowych zespolonych i zespolone przestrzenie funkcyjne  $\tilde{C}_{2\pi}$  i  $\tilde{L}_{2\pi}^p$ . Przejście od przypadku zespolonego do rzeczywistego otrzymujemy, jak w poprzednim rozdziale, przez pominięcie znaków  $\sim$  i  $-$ . Z drugiej strony, twierdzenia udowodnione w przypadku rzeczywistym przenoszą się natychmiast na przypadek zespolony przez oddzielne zastosowanie ich do części rzeczywistej i urojonej funkcji.

$n$ -tą sumę częściową  $s_n(x)$  szeregu Fouriera (3) (lub – co na jedno wychodzi – szeregu (13)) funkcji  $f$  oznaczać będziemy także symbolem  $s_n(f; x)$ . Z definicji

$$\begin{aligned} s_n(x) &= s_n(f; x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-t)}{\sin \frac{1}{2}(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$(18) \quad d_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right)$$

mamy

$$\begin{aligned} (19) \quad s_n(x) &= s_n(f; x) = \int_0^{2\pi} f(t) d_n(x-t) dt = d_n * f(x) = \\ &= f * d_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t) d_n(t) dt. \end{aligned}$$

Funkcja okresowa  $\pi d_n(x)$  nosi nazwę  $n$ -tego *jądra Dirichleta*.

Jeżeli zachodzi wzór (7) oraz

$$(20) \quad g(x) \sim a'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

to

$$f(x) \pm g(x) \sim \frac{a_0 \pm a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n \pm a'_n) \cos nx + (b_n \pm b'_n) \sin nx)$$

oraz

$$cf(x) \sim \frac{ca_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (ca_n \cos nx + cb_n \sin nx).$$

Analogicznie, jeżeli zachodzi wzór (16) oraz

$$(21) \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx},$$

to

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \pm c'_n) e^{inx}$$

oraz

$$cf(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} cc_n e^{inx}.$$

Nieco trudniej jest udowodnić, że

2.1. Jeżeli zachodzą wzory (16) i (21) dla funkcji  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}$ , to

$$(22) \quad f * g(x) \sim 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c'_n e^{inx}.$$

Funkcja  $f * g$  należy do  $\tilde{L}_{2\pi}$  na mocy twierdzenia 8.2 z rozdziału XII (gdzie grupę  $\mathcal{R}$  trzeba zastąpić przez grupę  $\mathcal{G} = \bar{0}; 2\pi$ ).

Równość (22) wynika z następujących wzorów

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f * g(x) \cdot e^{-inx} dx &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-inx} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) e^{-in(x-t)} e^{-int} dx \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( g(t) e^{-int} \int_0^{2\pi} f(x-t) e^{-in(x-t)} dx \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( g(t) e^{-int} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \cdot \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = 2\pi c_n \cdot 2\pi c'_n. \end{aligned}$$

2.2. Jeżeli funkcja okresowa  $f$  jest bezwzględnie ciągła, to szereg Fouriera pochodnej  $f'$  otrzymuje się przez zrózniczkowanie każdego wyrazu szeregu Fouriera funkcji  $f$ .Inaczej mówiąc, jeżeli zachodzą wzory (7) i (16) i  $f$  jest funkcją bezwzględnie ciągłą, to

$$(23) \quad f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx), \quad f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

Istotnie, z wzoru (3), § 1, wynika, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (e^{-inx})' dx = in \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = inc_n,$$

co dowodzi prawdziwości drugiego z wzorów (23). Dowód pierwszego jest analogiczny.

2.3. Jeżeli szereg trygonometryczny (3) jest zbieżny w przestrzeni  $\tilde{C}_{2\pi}$  lub  $\tilde{L}_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) do pewnej funkcji  $f$ , to jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$ .Przez przecalkowanie sprawdzamy, że  $n$ -ta suma częściowa  $s_n(x)$  szeregu (3) spełnia równość

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n(x) \cos kx dx \quad \text{dla} \quad n \geq k,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n(x) \sin kx dx \quad \text{dla} \quad n \geq k.$$

Ponieważ, dla ustalonego  $k$ , wyrażenia  $T(g) = \int_0^{2\pi} g(x) \cos kx dx$ ,  $T'(g) = \int_0^{2\pi} g(x) \sin kx dx$  są funkcjonalami liniowymi na  $\tilde{C}_{2\pi}$  i  $\tilde{L}_{2\pi}^p$ , więc z założenia, że  $s_n \rightarrow f$ , wynika przez przejście do granicy, że

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 2.3 pozostałoby prawdziwe, gdybyśmy zamiast zbieżności w  $\tilde{C}_{2\pi}$  (tzn. zbieżności jednostajnej) lub zbieżności w  $\tilde{L}_{2\pi}^p$  ciągu  $\{s_n\}$  do  $f$  założyli, że

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \text{ prawie wszędzie,}$$

przy tym istnieje funkcja  $g \in \tilde{L}_{2\pi}$  taka, że  $|s_n(x)| \leq g(x)$ . Istotnie, przejście do granicy pod znakiem całki byłoby w tym przypadku również wykonalne (por. rozdział VII, 3.7). Znacznie trudniej jest udowodnić<sup>1)</sup>, że teza twierdzenia 2.3 pozostaje prawdziwa, gdy  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  dla każdego  $x \in \mathcal{R}$  ( $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ ).<sup>1)</sup> De la Vallée Poussin [1].

Następujący lemat będzie użyteczny w dalszych rozważaniach.

2.4. Jeżeli  $f \in \tilde{L}(a; b)$ , gdzie  $a; b \in \mathcal{R}$  jest przedziałem ograniczonym lub nieograniczonym, to

$$(24) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \xi x dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \xi x dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\xi x} dx = 0.$$

Wystarczy udowodnić wzory (24) dla funkcji rzeczywistej.

Przez proste obliczenie całek sprawdzamy, że równości (24) są prawdziwe, gdy  $f$  jest funkcją charakterystyczną przedziału. Stąd bezpośrednio wynika, że równości (24) są prawdziwe, gdy  $f$  jest funkcją schodkową.

Dla dowolnej funkcji  $f \in L(a; b)$  niech  $g$  będzie funkcją schodkową taką, że

$$\|f - g\|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon > 0$  jest dowolną liczbą. Ponieważ dla dostatecznie dużych  $\xi$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \xi x dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \cdot |\sin \xi x| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin \xi x dx \right| < \\ &< \varepsilon + \left| \int_a^b g(x) \sin \xi x dx \right| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

więc  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \xi x dx = 0$ . Dowód pozostałych równości jest analogiczny.

2.5. Niech

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

(i) Dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(ii) Jeżeli  $f$  jest funkcją bezwzględnie ciągłą, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} nb_n.$$

(iii) Jeżeli pochodna  $f^{(k-1)}$  jest bezwzględnie ciągłą, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n.$$

(iv) Jeżeli  $f$  jest funkcją o wahanii skończonym, to

$$|a_n| \leq \frac{V}{\pi n} \quad i \quad |b_n| \leq \frac{V}{\pi n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie  $V$  jest wahaniem bezwzględnym funkcji  $f$  w przedziale  $[0; 2\pi]$ .

Uwaga (i), nosząca nazwę *twierdzenia Riemanna-Lebesgue'a*, wynika natychmiast z twierdzenia 2.4 (por. także ogólniejsze twierdzenie Mercera, rozdział XIII, § 6, ćwiczenie 2).

(ii) wynika natychmiast z (i), gdzie  $f$  trzeba zastąpić przez  $f'$ , gdyż liczby  $nb_n, -na_n$  na mocy 2.2 są współczynnikami Fouriera funkcji  $f'$ .

(iii) wynika również z (i), gdyż na mocy 2.2 liczby  $n^k a_n, n^k b_n$  — z dokładnością do znaku — są współczynnikami Fouriera funkcji  $f^{(k)}$ .

Jeżeli  $f$  jest funkcją o wahanii skończonym, to całkując przez części otrzymujemy

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} df \right| \leq \frac{V}{\pi n}$$

i analogicznie dla  $b_n$ .

Lemat 2.4 jest szczególnym przypadkiem następującego ogólniejszego twierdzenia.

2.6. Niech  $a; b$  i  $\alpha; \beta$  będą przedziałami ograniczonymi lub nieograniczonymi i niech  $1/p + 1/q = 1$  ( $1 < p < \infty$ ). Dla dowolnych funkcji  $f \in L^p(\alpha; \alpha + a; \beta + b)$ ,  $g \in L^q(a; b)$

$$(25) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x+t)g(t) \sin \xi t dt = 0,$$

$$(26) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x+t)g(t) \cos \xi t dt = 0$$

jednostajnie w przedziale  $\alpha; \beta$ .

Analogicznie, jeżeli  $f \in L^p(a-b; \beta-a)$ ,  $g \in L^q(a; b)$ , to

$$(25') \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x-t)g(t) \sin \xi t dt = 0,$$

$$(26') \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b f(x-t)g(t) \cos \xi t dt = 0$$

jednostajnie w przedziale  $\alpha; \beta$ .

Wzory (25), (26), (25'), (26') są również prawdziwe w przypadku  $p = 1$  ( $q = \infty$ ), jeżeli funkcja  $g \in L^\infty(a; b)$  spełnia warunek: dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja schodkowa  $g_1$  taka, że  $\|g - g_1\|_\infty < \varepsilon$ . Warunek ten jest spełniony w szczególności, gdy  $g$  jest funkcją ciągłą w  $a; b$ , granice  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-} g(x)$  istnieją oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \quad \text{w przypadku gdy } a = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \quad \text{w przypadku gdy } b = \infty.$$

Wystarczy udowodnić pierwszą część twierdzenia 2.6. Drugą część otrzymuje się z pierwszej przez podstawienie  $-t$  zamiast  $t$ . Ograniczymy się do podania dowodu własności (25). Dowód (26) jest analogiczny.

Rozpatrzmy przypadek, gdy  $a = \alpha = -\infty$  i  $b = \beta = \infty$ , co nie zmniejsza ogólności rozważań, bo przyjmując  $g(x) = 0$  dla  $x \in \mathcal{R} - (a; b)$  i  $f(x) = 0$  dla  $x \in \mathcal{R} - (a + \alpha; \beta + b)$  sprowadzamy dowolny przypadek do powyższego.

Wykażemy więc, że jeśli  $f \in L^p(\mathcal{R})$  i  $g \in L^q(\mathcal{R})$ , to

$$(27) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t) \sin \xi t dt \rightarrow 0$$

jednostajnie na całej prostej  $\mathcal{R}$ , gdy  $\xi \rightarrow \infty$ .

Uwaga (27) jest prawdziwa, gdy  $f$  i  $g$  są funkcjami charakterystycznymi przedziałów ograniczonych, gdyż przez bezpośrednie przeliczenie otrzymuje się, że wartością całki (27) jest liczba

$$\frac{\cos \xi c_x - \cos \xi d_x}{\xi},$$

gdzie  $c_x$  i  $d_x$  są końcami przedziału, w którym funkcja  $f(x+t)g(t)$  jednej zmiennej  $t$  jest różna od zera. Wartość bezwzględna całki (27) nie przewyższa więc liczby  $2/\xi$ .

Tym samym uwaga (27) jest prawdziwa, gdy  $f$  i  $g$  są funkcjami schodkowymi.

Żałujemy obecnie, że  $f \in L^p(\mathcal{R})$  i  $g \in L^q(\mathcal{R})$  są dowolnymi funkcjami. Dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją funkcje schodkowe  $f_1$  i  $g_1$  (por. rozdział XII 2.10 (i), a w przypadku  $q = \infty$  również dodatkowe założenia o  $g$  na końcu twierdzenia 2.6) takie, że

$$\|f - f_1\|_p < \varepsilon, \quad \|g - g_1\|_q < \varepsilon,$$

skąd wynika, że

$$\|g_1\|_q \leq \|g - g_1\|_q + \|g\|_q \leq \|g\|_q + \varepsilon.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t) \sin \xi t dt \right| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)g(t) - f_1(x+t)g_1(t)| \cdot |\sin \xi t| dt + \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x+t)g_1(t) \sin \xi t dt \right|. \end{aligned}$$

Ponieważ z udowodnionej już części twierdzenia

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x+t)g_1(t) \sin \xi t dt \right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad \xi > \xi_0$$

oraz z nierówności Höldera

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)g(t) - f_1(x+t)g_1(t)| \cdot |\sin \xi t| dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)(g(t) - g_1(t))| dt + \int_{-\infty}^{\infty} |(f(x+t) - f_1(x+t))g_1(t)| dt \leq \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|g - g_1\|_q + \|f - f_1\|_p \cdot \|g_1\|_q \leq \varepsilon (\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon), \end{aligned}$$

więc

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t) \sin \xi t dt \right| \leq \varepsilon (\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon + 1) \quad \text{dla} \quad \xi > \xi_0$$

i dowolnego  $x$ , co dowodzi jednostajnej zbieżności do zera na całej prostej  $\mathcal{R}$ .

ĆWICZENIA. 1. Rozwinąć na szereg Fouriera funkcje  $\max(0, \sin x)$  i  $\max(0, \cos x)$ .

2. Jeżeli funkcja okresowa  $f$  jest parzysta (tzn.  $f(-x) = f(x)$ ), to współczynniki Fouriera  $a_n, b_n$  tej funkcji wyrażają się wzorami:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

Jeżeli funkcja okresowa  $f$  jest nieparzysta (tzn.  $f(-x) = -f(x)$ ), to współczynniki Fouriera  $a_n, b_n$  tej funkcji wyrażają się wzorami

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

3. Współczynniki Fouriera funkcji okresowej nieujemnej spełniają nierówności

$$|c_n| \leq c_0, \quad |a_n| \leq a_0, \quad |b_n| \leq a_0.$$

4. Jeżeli funkcja okresowa  $f$  jest nieparzysta i  $f(x) \geq 0$ , gdy  $0 < x < \pi$ , to  $|b_n| \leq nb_1$ .

(Wsk.: Skorzystać z nierówności  $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ .)

5. Udowodnić nierówności

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} \omega_f \left( \frac{\pi}{n} \right) \quad (f \in C_{2\pi}),$$

$$|c_n| \leq \frac{1}{4\pi} \omega_f^{(p)} \left( \frac{\pi}{n} \right) \quad (f \in I_{2\pi}^p, \quad 1 \leq p < \infty),$$

gdzie  $\omega_f$  jest modulem ciągłości funkcji  $f$  (por. rozdz. III, § 4), a  $\omega_f^{(p)}$  jest  $p$ -tym całkowym modulem ciągłości funkcji  $f$ , tzn.

$$\omega_f^{(p)}(\xi) = \int_0^{2\pi} |f(x+\xi) - f(x)|^p dx.$$

(Wsk.: Zauważyć, że

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-inx} dx.$$

6. Jeżeli funkcja  $f$  jest nierosnąca w przedziale  $0; 2\pi$ , to  $b_n \geq 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$

(Wsk.: Zauważyć, że

$$\pi b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n} \left( f\left(\frac{2j\pi}{n} + x\right) - f\left(\frac{2(j+1)\pi}{n} + x\right) \right) \sin nx dx.$$

7. Wyrazić współczynniki Fouriera  $a_n, b_n$  spłotu  $f \cdot g$  przez analogiczne współczynniki Fouriera funkcji okresowych  $f$  i  $g$ .

8. Jeżeli  $f \in L(\mathcal{R})$  i  $g \in L^\infty(\mathcal{R})$ , to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \sin \xi t dt \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty$$

niemal jednostajnie w  $\mathcal{R}$ .

9. Niech  $f$  będzie funkcją charakterystyczną przedziału  $0; \pi$  i niech  $g(x) = \sin nx$ , gdy  $(n-1)\pi \leq |x| < n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Sprawdzić, że ciąg funkcji

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \sin nt dt$$

jest zbieżny niemal jednostajnie do zera na prostej  $\mathcal{R}$ , lecz nie jest zbieżny jednostajnie.

Uwaga. Wynika stąd, że druga część twierdzenia 2.6 nie jest prawdziwa, gdy pominąć dodatkowe założenia o funkcji  $g$ . Założenia te mogą jednak być osłabione. Na przykład:

10. Jeżeli  $f \in L(\mathcal{R})$ ,  $g \in L^\infty(\mathcal{R})$  i dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja  $g_1$ , będąca kombinacją liniową skończonej liczby funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych o mierze skończonej, i taka, że  $\|g - g_1\|_\infty < \varepsilon$ , to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \sin \xi t dt \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty$$

jednostajnie na  $\mathcal{R}$ . Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy zamiast  $\sin \xi t$  rozważać funkcję  $\cos \xi t$ .

11. Twierdzenie 2.6 jest prawdziwe, gdy zamiast funkcji  $\sin \xi t, \cos \xi t$  przyjąć funkcje  $h_\xi(t)$  o następujących własnościach:

$$\begin{aligned} \sup_{\xi, t} |h_\xi(t)| &< \infty, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b h_\xi(t) dt &= 0 \quad \text{dla każdego przedziału ograniczonego } a; b. \end{aligned}$$

12. Na to, by szereg trygonometryczny (3) był szeregiem Fouriera pewnej funkcji okresowej różniczkowalnej nieskończenie wiele razy, potrzeba i wystarcza, by dla każdej liczby naturalnej  $k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n.$$

(Wsk.: Konieczność wynika z 2.5 (iii). Jeśli podane wyżej warunki są spełnione, to suma szeregu (3) jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Por. 2.3).

§ 3. Kryteria zbieżności. Niech  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ . Z wzoru (19), § 2, wynika, że

$$\begin{aligned} (1) \quad s_n(x) &= s_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} dt. \end{aligned}$$

Podstawiając na miejsce  $f$  funkcję stałą, równą jedności, otrzymujemy

$$(2) \quad 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} dt,$$

gdyż  $s_n(1; x) = 1$ . W rezultacie,

$$\begin{aligned} (3) \quad s_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} dt, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4) \quad \varphi_x(t) = f(x-t) + f(x+t) - 2f(x).$$

Funkcja  $\varphi_x(t)$  jednej zmiennej  $t$  jest całkowalna w całym przedziale  $0; \pi$ . Stąd wynika, że funkcja  $\varphi_x(t)/t$  zmiennej  $t$  jest całkowalna w każdym przedziale  $0; \pi$  ( $0 < \delta < \pi$ ), jako iloczyn funkcji całkowalnej przez funkcję ograniczoną  $1/t$ . Jednak funkcja  $\varphi_x(t)/t$  zmiennej  $t$  nie zawsze jest całkowalna w przedziale  $0; \pi^1$ .

3.1 (Kryterium Diniego). Jeżeli dla danej liczby  $x$  funkcja  $\varphi_x(t)/t$  zmiennej  $t$  jest całkowalna w pewnym przedziale  $0; \delta$  ( $0 < \delta \leq \pi$ ), to szereg Fouriera funkcji  $f$  jest zbieżny w punkcie  $x$  do liczby  $f(x)$ .

W szczególności, szereg Fouriera funkcji  $f$  jest zbieżny do liczby  $f(x)$  w każdym punkcie  $x$ , w którym funkcja  $f$  jest różniczkowalna.

Istotnie,

$$(5) \quad s_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2 \sin(t/2)} \sin(n + \frac{1}{2})t dt.$$

<sup>1)</sup> Hardy i Littlewood [1] podali przykład takiej funkcji okresowej ciągłej  $f$ , że  $\varphi_x(t)/t$  nie jest całkowalna w  $0; \pi$  dla prawie wszystkich  $x$ . Mazurkiewicz [1] wykazał, że zbiór funkcji  $f \in C_{2\pi}$ , dla których funkcja  $\varphi_x(t)/t$  nie jest całkowalna w  $0; \pi$  dla każdego  $x$ , jest drugiej kategorii w  $C_{2\pi}$ .

Funkcja  $\frac{\varphi_x(t)}{2\sin(t/2)} = \frac{\varphi_x(t)}{t} \cdot \frac{t}{2\sin(t/2)}$  jest całkowalna w całym przedziale  $0; \pi$ , gdyż funkcja  $t/2\sin(t/2)$  jest ograniczona w tym przedziale. Całka po prawej stronie (5) dąży do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ , na mocy 2.4.

Aby udowodnić drugą część twierdzenia 3.1, wystarczy zauważyć, że z założenia różniczkowalności funkcji  $f$  w punkcie  $x$  wynika, że  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_x(t)}{t} = 0$ . Zatem w otoczeniu punktu 0 funkcja  $\varphi_x(t)/t$  jest ograniczona, a więc całkowalna.

3.2 (Kryterium Jordana). Jeżeli funkcja  $f$  ma wahanie skończone w przedziale  $\alpha; \beta$ , to szereg Fouriera funkcji  $f$  jest zbieżny w każdym punkcie  $x$  przedziału  $\alpha; \beta$  do liczby

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

a więc do liczby  $f(x)$ , w każdym punkcie  $x \in \alpha; \beta$  ciągłości funkcji  $f$ .

Jeśli ponadto funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale  $\alpha; \beta$ , to szereg Fouriera funkcji  $f$  jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji  $f$  w całym przedziale  $\alpha; \beta$ .

Wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy funkcja  $f$  jest rzeczywista.

W podobny sposób, jak przy wyprowadzaniu wzoru (3), otrzymujemy

$$s_n(f; x) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{\pi} (\varphi_n(x) + \psi_n(x)),$$

gdzie

$$\varphi_n(x) = \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} dt,$$

$$\psi_n(x) = \int_0^\pi (f(x-t) - f(x-)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} dt.$$

Trzeba wykazać więc, że  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$  i  $\psi_n(x) \rightarrow 0$  w  $\alpha; \beta$ , przy tym niemal jednostajnie, jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w  $\alpha; \beta$ . Dowód przeprowadzimy jedynie dla ciągu  $\{\varphi_n\}$ , przypadek ciągu  $\{\psi_n\}$  rozpatruje się analogicznie.

Z definicji

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) = & \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt - \\ & - \int_0^\pi f(x+t) \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(t/2)} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + \\ & + f(x+) \int_0^\pi \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(t/2)} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt. \end{aligned}$$

Środkowa całka po prawej stronie (6) jest zbieżna jednostajnie do zera w przedziale  $\alpha; \beta$  na mocy 2.6 (gdzie  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $p = 1$ ,  $g(t) = 1/t - 1/2\sin(t/2)$ ). Ostatnia całka po prawej stronie (6) jest zbieżna do zera na podstawie 2.4. Ponieważ funkcja  $f(x)$  (a więc także  $f(x+)$ ) jako funkcja o wahanu skończonym jest ograniczona na każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale  $\alpha; \beta$ , ostatni składnik po prawej stronie (6) jest zbieżny niemal jednostajnie do 0 w  $\alpha; \beta$ . Wystarczy wykazać więc, że pierwsza całka po prawej stronie (6) jest zbieżna do zera, przy tym niemal jednostajnie w  $\alpha; \beta$ , jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w  $\alpha; \beta$ . Niech

$$\kappa(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy \quad \text{ i } \quad M = \sup_{x \geq 0} |\kappa(x)|.$$

Liczba  $M$  jest skończona, bo całka niewłaściwa  $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy$  jest zbieżna.

Udowodnimy najpierw, że dla każdej funkcji  $h$  o wahanu skończonym w przedziale  $0; \delta$ , takiej, że  $h(0) = 0$ , prawdziwa jest nierówność

$$(7) \quad \left| \int_0^\delta h(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt \right| < 2M\Delta_h^*(0, \delta) \quad \text{ dla dowolnej liczby } \xi > 0.$$

Istotnie, jeżeli  $h$  jest funkcją niemalejącą, to stosując drugie twierdzenie o wartości średniej (rozdział XI, 9.6) i podstawienie  $y = \xi t$ , otrzymujemy

$$\int_0^\delta h(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt = h(\delta) \int_{\delta'}^\delta \frac{\sin \xi t}{t} dt = h(\delta) \int_{\delta'}^\delta \frac{\sin y}{y} dy = h(\delta) (\kappa(\xi\delta) - \kappa(\xi\delta')),$$

gdzie  $\delta'$  jest pewną liczbą, spełniającą nierówność  $0 \leq \delta' \leq \delta$ . Zatem lewa strona (7) jest w tym przypadku  $\leq 2Mh(\delta)$ .

Jeśli  $h$  jest dowolną funkcją o wahanu skończonym,  $h(0) = 0$ , to  $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ , gdzie  $h_1(x) = \Delta_h^+(0, x)$  i  $h_2(x) = \Delta_h^-(0, x)$  są wahaniami nieoznaczonymi, górnym i dolnym funkcji  $h$ . Z poprzednio udowodnionego przypadku wynika, że

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta h(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt \right| & \leq \left| \int_0^\delta h_1(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt \right| + \left| \int_0^\delta h_2(t) \frac{\sin \xi t}{t} dt \right| \leq \\ & \leq 2M(h_1(\delta) + h_2(\delta)) = 2M\Delta_h^*(0, \delta). \end{aligned}$$

Przyjmijmy  $h(t) = h_x(t) = f(x+t) - f(x+)$  dla  $t > 0$  i  $h(0) = 0$ . Ponieważ funkcja  $h$  jest ciągła w punkcie 0, jej wahanie bezwzględne jest

Funkcje rzeczywiste II

także ciągle w punkcie 0 (por. rozdział IX, 5.6). Istnieje więc liczba  $\delta > 0$  ( $\delta < \pi$ ) taka, że

$$(8) \quad \Delta_{h_\varepsilon}^*(0, \delta) < \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  jest z góry daną liczbą dodatnią. Z (7) wynika, że

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \right| \leq \\ & \leq 2M\varepsilon + \left| \int_0^\pi f(x+t) \frac{1}{t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt \right| + \left| f(x+) \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt \right|. \end{aligned}$$

Ostatnie dwa składniki dążą do zera niemal jednostajnie w  $\alpha; \beta$ , gdy  $n \rightarrow \infty$  (dowód jest taki sam, jak w przypadku dwu ostatnich składników po prawej stronie (6)). Wobec dowolności liczby  $\varepsilon > 0$  wnioskujemy stąd, że

$$(9) \quad \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \rightarrow 0$$

dla  $n \rightarrow \infty$  i każdego  $x \in \alpha; \beta$ .

Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w  $\alpha; \beta$  i  $\eta > 0$ , to w przedziale  $\alpha + \eta; \beta - \eta$  zbieżność jest jednostajna. Wystarczy wykazać, że liczba  $\delta$ , spełniająca nierówność (8), może być dobrana do danej liczby  $\varepsilon > 0$  w sposób niezależny od punktu  $x \in \alpha + \eta; \beta - \eta$ . Istotnie, wahanie bezwzględne funkcji  $f$  jest jednostajnie ciągłe w przedziale  $\alpha + \frac{1}{2}\eta; \beta - \frac{1}{2}\eta$ , zatem dla liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  (niezależne od  $x$ ,  $\alpha + \frac{1}{2}\eta \leq x \leq \beta - \frac{1}{2}\eta$ ) takie, że

$$\Delta_{h_\varepsilon}^*(0, \delta) = \Delta_f^*(x, x + \delta) < \varepsilon.$$

Następujące dwa twierdzenia wynikają bezpośrednio z 3.2.

3.3. Jeżeli  $f$  jest funkcją okresową o wahanu skończonym i  $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$  dla każdego  $x$ , to szereg Fouriera funkcji  $f$  jest w każdym punkcie  $x$  zbieżny do  $f(x)$ .

3.4. Szereg Fouriera funkcji okresowej ciągłej o wahanu skończonym (w szczególności każdej funkcji bezwzględnie ciągłej) jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$  na całej prostej  $\mathcal{R}$ .

Niech teraz  $0 < \beta - \alpha < 2\pi$  i niech  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ . Jeżeli zmienimy wartości funkcji  $f$  poza przedziałem  $\alpha; \beta$  z zachowaniem okresowości funkcji, to współczynniki Fouriera funkcji ulegną zmianie, jednak zachowanie się ciągu  $\{s_n(x)\}$  sum częściowych w przedziale  $\alpha; \beta$  w pewnym sensie pozostaje bez zmiany. Dokładniej:

3.5 (Zasada lokalizacji). Jeżeli  $f(x) = g(x)$  dla  $x \in \alpha; \beta$  ( $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ ,  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}$ ), to ciąg

$$s_n(f; x) - s_n(g; x)$$

jest zbieżny do zera niemal jednostajnie w przedziale  $\alpha; \beta$ .

Twierdzenie 3.5 wynika natychmiast z twierdzenia 3.2 (gdzie  $f$  trzeba zastąpić przez  $f - g$ ), gdyż

$$s_n(f; x) - s_n(g; x) = s_n(f - g; x) \quad \text{ i } \quad f(x) - g(x) = 0 \quad \text{ w } \alpha; \beta.$$

Wielomianem trygonometrycznym nazywamy każdą funkcję okresową postaci

$$(10) \quad a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

tnz. postaci

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Na przykład, sumy częściowe szeregu trygonometrycznego lub szeregu Fouriera są wielomianami trygonometrycznymi.

Mówimy, że wielomian trygonometryczny (10) jest rzeczywisty, jeżeli wszystkie współczynniki  $a_k, b_k$  są rzeczywiste.

3.6 (Twierdzenie Weierstrassa). Zbiór wielomianów trygonometrycznych (rzeczywistych) jest gęsty w przestrzeni  $\tilde{C}_{2\pi}$  ( $C_{2\pi}$ ).

Inaczej mówiąc:

Zbiór funkcji

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

jest liniowo gęsty w  $C_{2\pi}$  i  $\tilde{C}_{2\pi}$ .

Tym samym zbiór funkcji

$$e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

jest liniowo gęsty w  $\tilde{C}_{2\pi}$ .

Wystarczy udowodnić twierdzenie 3.6 w przypadku funkcji rzeczywistych. Niech  $f \in C_{2\pi}$  i  $\varepsilon > 0$ . Istnieje funkcja  $g \in C_{2\pi}$  o wahanu skończonym taka, że  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$  dla  $x \in \mathcal{R}$  (wystarczy np. podzielić przedział  $0; 2\pi$  na dostatecznie małe podprzedziały przy pomocy punktów  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 2\pi$ , przyjmując  $g(x_j) = f(x_j)$ , rozszerzyć funkcję  $g(x)$  do funkcji ciągłej liniowej w przedziałach  $x_{j-1}; x_j$  i następnie do funkcji okresowej na całej prostej  $\mathcal{R}$ ). Z twierdzenia 3.4 wynika, że dla  $n$  dostatecznie dużych

$$|g(x) - s_n(g; x)| < \varepsilon/2 \quad \text{ dla } \quad x \in \mathcal{R}.$$

W rezultacie,

$$|f(x) - s_n(g; x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R}.$$

Wielomian trygonometryczny  $s_n(g; x)$  jest więc odległy od  $f$  w przestrzeni  $C_{2\pi}$  o mniej niż z góry dana liczba  $\varepsilon > 0$ .

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli  $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{|t|^a} < \infty$ , gdzie  $a > 0$ , to szereg

Fouriera funkcji okresowej  $f$  jest zbieżny w punkcie  $x_0$  do liczby  $f(x_0)$ .

2. Szereg Fouriera funkcji okresowej  $f$ , spełniającej warunek Höldera, jest zbieżny jednostajnie do  $f$ .

3. Jeżeli  $f$  jest funkcją o wahanii skończonym w przedziale  $a; \beta$  ciągłą w punkcie  $x_0 \in a; \beta$ , to szereg Fouriera jest zbieżny jednostajnie w punkcie  $x_0$  (por. rozdział IV, § 7, ćwiczenie 1).

4. Sprawdzić, że

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = |x|, \quad \text{gdy} \quad |x| \leq \pi;$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad |x| < \pi, \\ 0, & \text{gdy} \quad |x| = \pi; \end{cases}$$

$$\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{gdy} \quad x = 0 \text{ lub } x = 2\pi; \end{cases}$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2} = x^2, \quad \text{gdy} \quad |x| \leq \pi;$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} = |\sin nx| \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R};$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \text{sign}(\sin x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R};$$

$$\frac{2}{\pi} \sin a\pi \left( \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \right) = \cos ax, \quad \text{gdy} \quad |x| \leq \pi, a \notin \mathbb{C};$$

$$\frac{2}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2} = \sin ax, \quad \text{gdy} \quad |x| \leq \pi, a \notin \mathbb{C}.$$

§ 4. Szeregi Fouriera-Stieltjesa. Wyznaczanie funkcji przez jej szereg Fouriera. Niech  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ ,

$$(1) \quad f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

i niech  $\varphi$  będzie całką nieoznaczoną funkcji  $f$ ,

$$\varphi(x) = \gamma + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Funkcja  $\varphi$  na ogół nie jest funkcją okresową, gdyż różnica

$$\varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

może być różna od zera. Całka  $\varphi$  spełnia jedynie równanie

$$(2) \quad \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = \pi a_0 = \text{const},$$

tzn. przyrost funkcji  $\varphi$  na dowolnym przedziale o długości  $2\pi$  ma wartość stałą.

Wzory na współczynniki Fouriera funkcji  $f$  mogą być zapisane obecnie w następujący sposób:

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos nx d\varphi(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(4) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin nx d\varphi(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$(5) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} e^{-inx} d\varphi(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Przyjmijmy obecnie następującą definicję. Niech  $\varphi$  będzie dowolną funkcją o wahanii skończonym, określoną na prostej  $\mathcal{R}$ , spełniającą warunek (2). Szeregiem Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$  nazywamy szereg

$$(6) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

tzn. szereg

$$(7) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gdzie liczby  $a_n, b_n, c_n$  (nazywane współczynnikami Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$ ) są zdefiniowane wzorami (3), (4), (5). Z warunku (2) wynika natychmiast, że całki po prawej stronie wzorów (3), (4), (5) nie zależą od liczby  $a$  oraz że współczynnik  $a_0$  zdefiniowany wzorem (3) pokrywa się ze współczynnikiem  $a_0$  występującym we wzorze (2). Liczby  $a_n, b_n, c_n$

spełniają również równania (10), (11), (14) z § 2. Z definicji współczynników Fouriera-Stieltjesa wynika natychmiast, że

$$(8) \quad |a_n| \leq \frac{V}{\pi}, \quad |b_n| \leq \frac{V}{\pi}, \quad |c_n| \leq \frac{V}{2\pi},$$

gdzie  $V = A^*(a, a+2\pi)$  jest wahaniami bezwzględnym funkcji  $\varphi$  w dowolnym przedziale domkniętym o długości  $2\pi$ .

Z rozważań przeprowadzonych na wstępie niniejszego paragrafu wynika, że jeśli funkcja  $\varphi$  jest całką nieoznaczoną funkcji  $f$ , to szereg Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$  jest identyczny z szeregiem Fouriera funkcji  $f$ .

4.1. Jeżeli  $\varphi$  jest funkcją o wahanii skończonym, spełniającą warunki (2), a szeregi (6) i (7) są szeregami Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$ , to dla dowolnej liczby  $x \in \mathcal{R}$

$$(9) \quad \frac{\varphi(x+) + \varphi(x-)}{2} = c + a_0 x/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) = \\ = c + c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx},$$

gdzie  $c$  jest odpowiednio dobraną stałą. Jeżeli  $\varphi$  jest funkcją ciągłą, to szeregi (9) są jednostajnie zbieżne.

Symbol  $\sum'$  oznacza sumę wszystkich składników dla  $-\infty < n < \infty$  z pominięciem składnika odpowiadającego liczbie  $n = 0$ .

Twierdzenie 4.1 orzeka, że funkcja  $\varphi$  jest (pomijając punkty nieciągłości) wyznaczona przez swój szereg Fouriera-Stieltjesa jednoznacznie z dokładnością do stałej. Większej dokładności nie można oczekiwać, bo zarówno dodanie stałej do funkcji  $\varphi$ , jak i zmiana wartości funkcji  $\varphi$  w pojedynczych punktach, nie zmienia wartości współczynników Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$ .

Zauważmy jeszcze, że szeregi (9) powstają z szeregów (6), (7) przez formalne scałkowanie wyraz za wyrazem.

Aby udowodnić (9), zauważmy najpierw, że z warunku (2) wynika, że funkcja

$$\psi(x) = \varphi(x) - a_0 x/2$$

jest funkcją okresową o wahanii skończonym. Niech  $a'_n, b'_n$  będą współczynnikami Fouriera funkcji okresowej  $\psi$ . Z twierdzenia 3.2 wynika, że dla każdego  $x \in \mathcal{R}$

$$\frac{\varphi(x+) + \varphi(x-)}{2} - \frac{a_0}{2} x = \frac{\psi(x+) - \psi(x-)}{2} = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

przy tym ostatni szereg jest zbieżny jednostajnie, jeśli funkcja  $\varphi$  (a więc także funkcja  $\psi$ ) jest ciągła.

Z definicji współczynników Fouriera funkcji  $\psi$  otrzymujemy przez całkowanie przez części dla  $n = 1, 2, \dots$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} d\psi(x) = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} d\varphi(x) = -\frac{b_n}{n}$$

i analogicznie  $b'_n = a_n/n$ . Z powyższych równości wynika bezpośrednio pierwsza z równości (9). Druga z równości (9) wynika z pierwszej, gdyż  $n$ -te sumy częściowe obydwu szeregów są identyczne.

Jeżeli  $\varphi$  jest całką nieoznaczoną pewnej funkcji  $f \in \tilde{\mathcal{L}}_{2\pi}$ , to szereg Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi$  jest identyczny z szeregiem Fouriera (1) funkcji  $f$  (por. uwagi na początku § 4). Z twierdzenia 4.1 wynika, że w tym przypadku

$$(10) \quad \varphi(x) = c + \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) = c + c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

dla  $x \in \mathcal{R}$ , przy tym szeregi po prawej stronie (10) są jednostajnie zbieżne. W rezultacie,

$$(11) \quad \int_a^{\beta} f(x) \, dx = \varphi(\beta) - \varphi(a) = \\ = \frac{a_0}{2} (\beta - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} (\sin n\beta - \sin na) - \frac{b_n}{n} (\cos n\beta - \cos na) \right) = \\ = \int_a^{\beta} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\beta} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, dx$$

i analogicznie

$$(12) \quad \int_a^{\beta} f(x) \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_a^{\beta} c_n e^{inx} \, dx.$$

Zatem

4.2. Aby obliczyć całkę funkcji  $f \in \tilde{\mathcal{L}}_{2\pi}$  w przedziale  $a; \beta$ , wystarczy scałkować w nim wyraz po wyrazie jej szereg Fouriera.

Podstawiając w (10)  $x = 0$  i odejmując od (10) otrzymaną w ten sposób równość, otrzymujemy następującą tożsamość:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) + \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nx) \right) = \\ &= \varphi(0) + c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in} (e^{inx} - 1).\end{aligned}$$

Stąd przez zróżniczkowanie

4.3. Dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  o rozwinięciu (1)

$$\begin{aligned}(13) \quad f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nx) \right) \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left( c_0 x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in} (e^{inx} - 1) \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^x e^{int} dt \right)\end{aligned}$$

prawie wszędzie w  $\mathcal{R}$ .

Szeregi występujące w tych równościach są zbieżne jednostajnie na całej prostej  $\mathcal{R}$ .

Z twierdzenia 4.3 wynika bezpośrednio, że

4.4. Jeżeli funkcje  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}$  mają ten sam szereg Fouriera, to są równoważne (tzn.  $f = g$  w przestrzeni  $\tilde{L}_{2\pi}$ ).

Każda funkcja  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  jest więc wyznaczona jednoznacznie przez swój szereg Fouriera, chociaż — jak zobaczymy w następnym paragrafie — nie zawsze jest jego sumą.

**ĆWICZENIA. 1.** Współczynnikami Fouriera-Stieltjesa przeliczalnie addytywnej, skończonej funkcji zbioru  $\nu$ , określonej na ciele  $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$  podzbiorów borelowskich przedziału  $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$ , nazywamy liczby

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{G}} \cos nx d\nu(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{G}} \sin nx d\nu(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{G}} e^{-inx} d\nu(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Udowodnić, że funkcja  $\nu$  jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje współczynniki Fouriera-Stieltjesa  $a_n$  i  $b_n$  (lub przez  $c_n$ ).

2. Znaleźć ogólną postać funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$ , dla których

$$f * f = f.$$

(Wsk.: Skorzystań z jednoznaczności rozwinięcia na szereg Fouriera oraz z twierdzenia 2.1.)

3. Dla danej funkcji  $g \in \tilde{L}_{2\pi}$  znaleźć wszystkie funkcje  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  spełniające równość  $f * g = 0$ .

(Wsk.: Scharakteryzować funkcje  $f$  o tej własności za pomocą ich współczynników Fouriera  $c_n$ , korzystając z twierdzenia 2.1.)

4. Znaleźć wszystkie wartości własne  $\lambda$  i funkcje własne  $f$  równania całkowego jednorodnego

$$f(x) - \lambda \int_0^{2\pi} g(x-t)f(t) dt = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

(tzn. wszystkie pary  $\lambda, f$  spełniające to równanie). O funkcjach  $f$  i  $g$  zakładamy jedynie ich całkowalność w  $0; 2\pi$ .

(Wsk.: Rozwinąć  $f$  i  $g$  na szereg Fouriera.)

5. Mówimy, że funkcja  $\varphi$  o wahanii skończonym jest *znormalizowana*, jeżeli

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+) + \varphi(x-)) \text{ dla każdego } x.$$

Zbiór  $V_{2\pi}$  wszystkich znormalizowanych funkcji o wahanii skończonym, określonych na prostej  $\mathcal{R}$  i spełniających warunek (2), jest przestrzenią Banacha, jeśli jako normę  $\|\varphi\|$ , funkcji  $\varphi \in V_{2\pi}$  przyjmą wahanie bezwzględne funkcji  $\varphi$  w przedziale  $0; 2\pi$  (lub — co na jedno wychodzi — w dowolnym przedziale  $a; a+2\pi$ ). Dwie funkcje  $\varphi_1, \varphi_2 \in V_{2\pi}$  uważamy za równe w przestrzeni  $V_{2\pi}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się o stałą. Przestrzeń Banacha  $V_{2\pi}$  jest pierścieniem unormowanym przemennym, jeśli jako iloczyn dwu funkcji  $\varphi, \psi \in V_{2\pi}$  przyjmą funkcję  $\varphi \cdot \psi$  zdefiniowaną wzorem

$$\varphi \cdot \psi(x) = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x-t)\psi(t) dt \quad \text{dla } x \in \mathcal{R}$$

(całka ta nie zależy od liczby  $a$ ).

(Wsk.: Dowody przeprowadza się w taki sam sposób jak w rozdziale XII, § 3, E i w rozdziale XII, § 9, E.)

6. Zbiór wszystkich znormalizowanych funkcji okresowych o wahanii skończonym (funkcje różniące się o stałą utożsamiamy) stanowi podpierścień liniowy pierścienia  $V_{2\pi}$ .

7. Jeśli  $\{c'_n\}$  i  $\{c''_n\}$  są współczynnikami Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi_1, \varphi_2 \in V_{2\pi}$  (w postaci (5)), to współczynniki  $\{c_n\}$  Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$  wyrażają się wzorami

$$c_n = 2\pi c'_n c''_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(Wsk.: Dowód jest taki sam, jak dowód twierdzenia 2.1. Skorzystań z rozdziału XI, 10.2, (5).)

8. Jeśli  $\{c_n\}$  jest ciągiem współczynników Fouriera-Stieltjesa funkcji  $\varphi \in V_{2\pi}$  (w postaci (5)) i  $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$ , to  $\{2\pi|c_n|^2\}$  jest ciągiem współczynników Fouriera-Stieltjesa (w postaci (5)) funkcji  $\varphi \cdot \overline{\varphi}$ .

9. Niech  $\varphi \in V_{2\pi}$ ,  $\check{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$  oraz  $\psi = \varphi \cdot \check{\varphi}$ . Wówczas

$$\psi(0+) - \psi(0-) = \sum_x |\varphi(x+) - \varphi(x-)|^2,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie punkty nieciągłości funkcji  $\varphi$ , położone w przedziale  $\bar{a}$ ;  $a + 2\pi$ .

10. Niech  $\{c_n\}$  będzie ciągiem współczynników Fouriera-Stieltjesa (w postaci (5)) funkcji  $\varphi \in V_{2\pi}$ . Dla dowolnego ciągu  $\{m_n\}$  liczb całkowitych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=m_n}^{m_n+n-1} c_j = \varphi(0+) - \varphi(0-).$$

(Wsk.: Skorzystać z rozdziału XI, 8.1 (c).)

11. Niech  $\{c_n\}$  będzie ciągiem współczynników Fouriera-Stieltjesa (w postaci (5)) funkcji  $\varphi \in V_{2\pi}$ . Dla dowolnego ciągu  $\{m_n\}$  liczb całkowitych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{j=m_n}^{m_n+n-1} |c_n|^2 = \sum_x |\varphi(x+) - \varphi(x-)|^2,$$

sumowanie po prawej stronie rozciąga się na wszystkie punkty nieciągłości funkcji  $\varphi$ , położone w przedziale  $\bar{a}$ ;  $a + 2\pi$ .

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczeń 9 i 10.)

### § 5. Twierdzenia o rozbieżności. Liczbę

$$(1) \quad d_n = \int_0^{2\pi} |b_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(t/2)} \right| dt,$$

(por. § 2, (18)) nazywamy  $n$ -tą stałą Lebesgue'a. Wykażemy, że

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty,$$

dokładniej, że

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log n} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Mamy

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt + r_n,$$

gdzie

$$r_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right) |\sin(n + \frac{1}{2})t| dt$$

jest ciągiem ograniczonym:

$$0 \leq r_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Następnie

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi/(n+\frac{1}{2})}^{k\pi/(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt + r'_n,$$

gdzie

$$r'_n = \int_{n\pi/(n+\frac{1}{2})}^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt \leq \int_{n\pi/(n+\frac{1}{2})}^{\pi} \frac{1}{t} dt$$

jest ciągiem zbieżnym do zera.

Przez podstawienie  $y = (n + \frac{1}{2})t/\pi - k + 1$  otrzymujemy

$$\int_{(k-1)\pi/(n+\frac{1}{2})}^{k\pi/(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y + k - 1} dy.$$

W rezultacie, oznaczając

$$c = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} dy \quad \text{ i } \quad \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \gamma_n + r'_n &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{k} dy + r'_n \leq \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt \leq \\ &\leq c + \sum_{k=2}^n \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{k-1} dy + r'_n = c + \frac{2}{\pi} \gamma_{n-1} + r'_n. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{4}{\pi^2} \gamma_n + \frac{2}{\pi} r'_n + r_n \leq d_{n-1} \leq \frac{2}{\pi} c + \frac{4}{\pi^2} \gamma_{n-1} + \frac{2}{\pi} r'_n + r_n,$$

skąd, ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1}}{\log n} = 1$ , wynika bezpośrednio (3).

Niech  $E \subset C(0; 2\pi)$  oznacza zbiór tych funkcji ciągłych  $f$  na odcinku  $0; 2\pi$ , że  $f(0) = f(2\pi)$ . Wyrażenie

$$(4) \quad F(f) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

gdzie  $g \in L(0; 2\pi)$  jest funkcjonalem liniowym na  $C(0; 2\pi)$  z normą

$$\|F\| = \int_0^{2\pi} |g(x)| dx = \|g\|_1$$

(por. rozdział XII, 6.3 i uwagi na końcu § 6, rozdział XII). Tym samym  $F$  jest funkcyjonałem liniowym na podprzestrzeni  $E$ . Wykażemy, że normą funkcyjonału  $F|E$  jest również liczba  $\|g\|_1$ . Istotnie, z jednej strony

$$\|F(f)\| \leq \|g\|_1 \|f\|_C \quad \text{dla } f \in E,$$

a więc

$$(5) \quad \|F|E\| \leq \|g\|_1.$$

Z drugiej strony, dla danej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja  $f_0 \in C(0; 2\pi)$  taka, że  $\|f_0\|_C = 1$  oraz  $|F(f_0)| \geq \|g\|_1(1 - \varepsilon/2)$ . Modyfikując odpowiednio funkcję  $f_0$  w dostatecznie małym przedziale przyległym do jednego z punktów  $0, 2\pi$  możemy otrzymać funkcję  $f_1 \in E$  taką, że  $\|f_1\|_C = 1$  i  $|F(f_1) - F(f_0)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\|g\|_1$ . Stąd

$$|F(f_1)| \geq \|g\|_1(1 - \varepsilon),$$

a więc  $\|F|E\| \geq \|g\|_1(1 - \varepsilon)$ , co wraz z (5) dowodzi, że  $\|g\|_1$  jest normą funkcyjonału  $F|E$ .

Wyrażenie (4) może być również interpretowane jako funkcyjonał liniowy na  $C_{2\pi}$ . Ponieważ przestrzenie  $C_{2\pi}$  i  $E$  są równoważne, normą funkcyjonału  $F$  na  $C_{2\pi}$  jest również liczba

$$\int_0^{2\pi} |g(x)| dx.$$

Uwagę powyższą wykorzystamy przy dowodzie następującego twierdzenia.

5.1. *Zbiór funkcji  $f \in C_{2\pi}$  takich, że w pewnym ustalonym punkcie  $x_0 \in \mathcal{R}$  ciąg liczbowy  $\{s_n(f; x_0)\}$  jest ograniczony, jest pierwszej kategorii w  $C_{2\pi}$ .*

Przy ustalonym  $x_0$   $n$ -ta suma częściowa

$$s_n(f; x_0) = \int_0^{2\pi} f(t) d_n(x_0 - t) dt$$

(por. § 2, (19)), rozpatrywana jako funkcja zmiennej  $f \in C_{2\pi}$ , jest funkcyjonałem liniowym o normie

$$\int_0^{2\pi} |d_n(x_0 - t)| dt = \int_0^{2\pi} |d_n(t)| dt = d_n.$$

Ponieważ ciąg norm nie jest ograniczony (por. (2)), więc z twierdzenia Banacha-Steinhaus'a (rozdział XII, 4.9) zbiór  $[f: \sup_n |s_n(f; x_0)| < \infty]$  jest pierwszej kategorii w  $C_{2\pi}$ .

5.2. *Istnieje funkcja okresowa ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny w pewnym nieprzeliczalnym zbiorze drugiej kategorii gęstym na prostej  $\mathcal{R}^1$ .*

Niech  $\{x_n\}$  będzie ciągiem zawierającym wszystkie liczby wymierne. Na mocy 5.1 zbiory

$$Z_m = [f: \sup_n |s_n(f; x_m)| < \infty] \subset C_{2\pi} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

są pierwszej kategorii w  $C_{2\pi}$ . Tym samym zbiór  $Z = Z_1 + Z_2 + \dots$  jest pierwszej kategorii w  $C_{2\pi}$ . Ponieważ przestrzeń  $C_{2\pi}$  jest zupełna, więc z twierdzenia Baire'a (rozdział II, 6.1) wynika istnienie funkcji  $f_0 \in C_{2\pi} - Z$ . Funkcja  $f_0$  ma żądane własności. Istotnie, zbiór liczb rzeczywistych

$$A = [x: \sup_n |s_n(f_0; x)| = \infty]$$

zawiera wszystkie liczby wymierne, jest więc gęsty. Z twierdzenia 1.3 z rozdziału IV wynika, że  $A$  jest zbiorem  $G_\delta$ . Zbiór  $\mathcal{R} - A$  jest więc zbiorem  $F_\sigma$  brzegowym, a więc zbiorem pierwszej kategorii (por. rozdział II, 8.4). Z twierdzenia Baire'a wynika, że  $A$  jest zbiorem drugiej kategorii.

5.3. *Istnieje funkcja  $f_0 \in L_{2\pi}$ , której szereg Fouriera nie jest zbieżny w przestrzeni  $L_{2\pi}$ .*

Dokładniej:

*Zbiór wszystkich funkcji  $f \in L_{2\pi}$ , których szereg Fouriera jest zbieżny w przestrzeni  $L_{2\pi}$ , jest pierwszej kategorii w  $L_{2\pi}$ .*

Przypominamy, że na mocy twierdzeń 2.3 i 4.4 jeżeli szereg Fouriera funkcji  $f \in L_{2\pi}$  jest zbieżny w przestrzeni  $L_{2\pi}$ , to sumą jego jest funkcja  $f$ .

Aby udowodnić twierdzenie 5.3 zauważmy, że operacja  $T_n$ , przyporządkowująca każdej funkcji  $f \in L_{2\pi}$   $n$ -tą sumę częściową jej szeregu Fouriera:

$$T_n(f)(x) = s_n(f; x) = \int_0^{2\pi} d_n(x-t) f(t) dt,$$

jest liniowa i odwzorowuje  $L_{2\pi}$  w  $L_{2\pi}$ . Z twierdzenia 5.11, rozdział XII (interpretując funkcje  $f \in L_{2\pi}$  jako funkcje należące do  $L(0; 2\pi)$ ) wynika, że normą operacji  $T_n$  jest liczba

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} |d_n(x-t)| dt = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} |d_n(t)| dt = d_n.$$

<sup>1)</sup> Pierwszy przykład funkcji ciągłej o rozbieżnym szeregu został podany przez du Bois Reymonda [1].

Zastosowana w dowodzie twierdzenia 5.2 metoda zagęszczania punktów rozbieżności pochodzi od Orlicza [4].

Banach i Steinhaus [1] podali przykład funkcji  $f \in L_{2\pi}$ , której szereg Fouriera jest rozbieżny wszędzie z wyjątkiem całkowitych wielokrotności  $2\pi$ .

Ponieważ ciąg norm  $\{\|T_n\|\}$  nie jest ograniczony (por. (2)), więc z twierdzenia Banacha-Steinhausa 4.7 z rozdziału XII wynika, że zbiór  $[f: \sup \|T_n(f)\|_1 < \infty]$  (a więc tym bardziej zbiór funkcji  $f \in L_{2\pi}$ , dla których ciąg  $T_n(f) = s_n$  jest zbieżny), jest pierwszej kategorii w  $L_{2\pi}$ .

Zwracamy uwagę, że — jak już wspominaliśmy o tym w rozdziale XIII, § 5, A — istnieją funkcje  $f \in L_{2\pi}$ , których szereg Fouriera jest wszędzie rozbieżny<sup>1)</sup>. Zagadnienie, czy istnieje funkcja ciągła okresowa o wszędzie rozbieżnym szeregu Fouriera, jest dotąd nierozwiązane.

Nie wiadomo także, czy istnieją funkcje okresowe ciągłe, których szereg Fouriera jest rozbieżny w zbiorze miary dodatniej. Również zagadnienie zbieżności prawie wszędzie szeregów Fouriera funkcji  $f \in L_{2\pi}^2$  jest otwarte.

Można wykazać<sup>2)</sup>, że istnieją funkcje okresowe ciągłe  $f$  takie, że każdy podciąg ciągu  $\{s_n(f; x)\}$  sum częściowych jest rozbieżny co najmniej w jednym punkcie. Z drugiej strony, dowodzi się<sup>3)</sup>, że każda funkcja okresowa ciągła jest sumą dwu funkcji  $f_1, f_2$  okresowych ciągłych takich, że ciągi sum częściowych  $\{s_n(f_1; x)\}$ ,  $\{s_n(f_2; x)\}$  zawierają podciągi zbieżne jednostajnie.

Dla każdej funkcji  $f \in \tilde{C}_{2\pi}$  i dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja  $f_1 \in \tilde{C}_{2\pi}$  taka, że zbiór  $[x: (f_1(x) \neq f(x)) \cdot (0 \leq x \leq 2\pi)]$  ma miarę  $< \varepsilon$  i szereg Fouriera funkcji  $f_1$  jest jednostajnie zbieżny<sup>4)</sup>. Podobnie każdą funkcję  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  można zmodyfikować w zbiorze miary dowolnie małej tak, by jej szereg Fouriera stał się jednostajnie zbieżny<sup>5)</sup>.

Z twierdzenia 5.3 wynika, że dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  całka

$$\int_0^{2\pi} |s_n(f; x) - f(x)| dx$$

na ogół nie dąży do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Natomiast prawdą jest<sup>6)</sup>, że dla dowolnej dodatniej liczby  $\alpha < 1$  i dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} |s_n(f; x) - f(x)|^\alpha dx \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty.$$

Z (6) wynika, że dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  ciąg  $\{s_n(f; x)\}$  sum częściowych jej szeregu Fouriera jest zbieżny według miary do funkcji  $f$

<sup>1)</sup> Kolmogoroff [4]. Marcinkiewicz [2] udowodnił, że istnieje funkcja  $f \in L_{2\pi}$  o prawie wszędzie rozbieżnym szeregu Fouriera taka, że  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; x)| < \infty$  prawie wszędzie.

<sup>2)</sup> Menchoff [6].

<sup>3)</sup> Menchoff [6] i [8].

<sup>4)</sup> Menchoff [5].

<sup>5)</sup> Menchoff [5] i [8].

<sup>6)</sup> Kolmogoroff [3].

w przedziale  $0; 2\pi$  (dowód jest taki sam jak dowód twierdzenia 2.5, rozdział XII). Zatem ciąg sum częściowych szeregu Fouriera każdej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  zawiera podciąg zbieżny prawie wszędzie do  $f$  (dla funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  por. silniejsze twierdzenie 8.7).

ĆWICZENIA. 1. Niech  $T_n(f)$  oznacza  $n$ -tą sumę częściową szeregu Fouriera funkcji  $f \in L_{2\pi}$ . Sprawdzić, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T_n(f)\|_p}{\log n} \leq \frac{4}{\pi^2} \|f\|_p \quad \text{dla} \quad f \in L_{2\pi}^p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

2. Zbiór funkcji  $f \in L_{2\pi}$  takich, że  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta |s_n(f; x)| dx = \infty$  dla każdego przedziału  $\alpha; \beta$ , jest drugiej kategorii w przestrzeni  $L_{2\pi}$  (twierdzenie Banacha-Steinhaus<sup>1)</sup>).

(Wsk.: Z twierdzenia 5.3 wynika, że istnieje funkcja  $f_1 \in L_{2\pi}$  taka, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |s_n(f_1; x)| dx = \infty.$$

Zatem albo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi |s_n(f; x)| dx = \infty, \quad \text{albo} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\pi^{2\pi} |s_n(f; x)| dx = \infty.$$

Przypuścimy, że pierwsza równość jest prawdziwa. Wówczas także

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\pi^{2\pi} |s_n(f_2; x)| dx = \infty,$$

gdzie  $f_2(x) = f_1(x + \pi)$ . Kontynuując opisaną postępowanie wykazujemy, że dla dowolnych liczb naturalnych  $j$  i  $m$  ( $1 \leq j \leq 2^m$ ) istnieje funkcja  $f \in L_{2\pi}$  taka, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(j-1)\pi/2^m}^{j\pi/2^m} |s_n(f; x)| dx = \infty.$$

Zastosować zasadę zągęszczania osobliwości — rozdział XII, § 4, ćwiczenie 2.)

§ 6. Twierdzenie Fejéra. Następująca uwaga z teorii ciągów liczbowych stanowi podstawę dalszych rozważań w niniejszym paragrafie:

$$(1) \quad \text{jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \quad \text{to} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = s.$$

Jeżeli ciąg  $\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$  jest zbieżny do liczby  $s$ , to mówimy, że ciąg  $\{s_n\}$  jest *limitowalny metodą średnich arytmetycznych* (lub: metodą pierwszych średnich) do liczby  $s$ . Każdy ciąg zbieżny (o wyrazach skończonych) jest więc limitowalny metodą średnich arytmetycz-

<sup>1)</sup> Banach i Steinhaus [2].

nych do swojej granicy. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: istnieją ciągi rozbieżne limitowalne metodą średnich arytmetycznych, na przykład ciąg  $s_n = (-1)^n$  jest rozbieżny, a odpowiadający mu ciąg średnich  $\sigma_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$  jest zbieżny do zera. Granicę ciągu średnich  $\{\sigma_n\}$  można uważać więc za pewne uogólnienie pojęcia granicy ciągu  $\{s_n\}$ , a limitowalność metodą średnich arytmetycznych — za uogólnienie pojęcia zbieżności.

W dalszym ciągu jako  $\{s_n\}$  będziemy przyjmować ciąg  $\{s_n(f; x)\}$  sum częściowych szeregu Fouriera pewnej funkcji okresowej  $f$ . W paragrafie poprzednim stwierdziliśmy, że z reguły ciąg  $\{s_n(f; x)\}$  nie jest zbieżny do  $f(x)$ . W paragrafie niniejszym wykazemy, że — dla różnych rodzajów zbieżności — ciąg  $\{s_n(f; x)\}$  jest zawsze limitowalny metodą pierwszych średnich do funkcji,  $f(x)$ .

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$(2) \quad \sigma_n(x) = \sigma_n(f; x) = \frac{s_0(f; x) + s_1(f; x) + \dots + s_n(f; x)}{n+1},$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{f}_n(t) &= \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2\pi \sin(t/2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2. \end{aligned}$$

Funkcję  $\pi \bar{f}_n$  nazywamy  $n$ -tym jądrem Fejéra. Ponieważ

$$s_n(f; x) = f * D_n(x),$$

więc

$$(4) \quad \sigma_n(f; x) = f * \bar{f}_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} f(x-t) \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.$$

Podstawiając we wzorze (4)  $f = 1$  otrzymujemy (ponieważ  $\sigma_n(1; x) = 1$ )

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt = 1,$$

tzn.  $\|\bar{f}_n\|_1 = 1$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$  Z (4) i (5) wynika, że

$$(6) \quad \sigma_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.$$

6.1 (Twierdzenie Fejéra<sup>1)</sup>). Dla każdej funkcji okresowej ciągłej  $f \in \tilde{C}_{2\pi}$  ciąg  $\{\sigma_n(f; x)\}$  jest zbieżny jednostajnie do  $f$  na prostej  $\mathcal{R}$  (tzn. jest zbieżny do  $f$  w przestrzeni  $\tilde{C}_{2\pi}$ ).

Interpretujemy  $\sigma_n(f; x)$  jako operację liniową  $T_n$ , która każdej funkcji  $f \in \tilde{C}_{2\pi}$  przyporządkowuje funkcję  $\sigma_n(f; x)$  należącą również do  $\tilde{C}_{2\pi}$ . Z (4) i (5) wynika, że

$$(7) \quad \|T_n(f)\|_C \leq \|f\|_1 \cdot \|f\|_C^2 = \|f\|_C.$$

$T_n$  jest więc operacją liniową o normie  $\|T_n\| \leq 1$  (można wykazać, że dokładnie  $\|T_n\| = 1$ ), przy tym

$$(8) \quad \text{dla } f(x) = e^{ikx} \quad \sigma_n(f; x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n < |k|, \\ \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}, & \text{gdy } n \geq |k|. \end{cases}$$

Zatem na zbiorze liniowo gęstym (por. 3.6), złożonym z funkcji

$$(9) \quad e^{ikx} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

ciąg operacji liniowych  $T_n$  o normach wspólnie ograniczonych jest zbieżny. Na podstawie twierdzenia 4.6 z rozdziału XII ciąg operacji  $\{T_n\}$  jest zbieżny w całej przestrzeni  $\tilde{C}_{2\pi}$  do pewnej operacji liniowej  $T$ . Z (8) wynika, że  $T(f) = f$  dla każdej funkcji postaci (9). Ponieważ funkcje (9) tworzą zbiór liniowo gęsty, więc  $T(f) = f$  dla każdej funkcji  $f \in \tilde{C}_{2\pi}$  (por. rozdział XII, 4.2), tzn.

$$\sigma_n = T_n(f) \rightarrow f \quad \text{w } \tilde{C}_{2\pi}, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 6.1 jest szczególnym przypadkiem następującego ogólniejszego twierdzenia.

6.2. Jeżeli funkcja  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  jest ciągła w każdym punkcie pewnego zbioru domkniętego  $A \subset \alpha; \alpha + 2\pi$ , to

$$\sigma_n(f; x) \rightarrow f(x) \quad \text{jednostajnie na zbiorze } A.$$

Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy  $A \subset [0; 2\pi]$ . Niech  $\varepsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią i niech  $\delta > 0$  będzie taką liczbą, że (por. rozdział III, 4.1)

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } x \in A \text{ i } |t| \leq \delta.$$

<sup>1)</sup> Fejér [1].

Niech  $|f(x)| \leq M$  dla  $x \in A$ . Jeżeli  $x \in A$ , to z (6) i (5) wynika, że

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \left| \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi(n+1)} \int_{-\delta}^{\delta} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right)^2 dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t)| dt + \frac{|f(x)|}{2\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} dt \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} f_n(t) dt + \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t)| dt + \frac{|f(x)|}{(n+1)\sin^2(\delta/2)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{(n+1)\sin^2(\delta/2)} \left( \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 + M \right) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla  $n$  dostatecznie dużych, co dowodzi jednostajnej zbieżności na  $A$ .

Z twierdzenia 6.2 wynika, że

6.3. W każdym punkcie  $x$  ciągłości funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x).$$

Stąd oraz z (1) wnioskujemy, że

6.4. Jeżeli funkcja  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  jest ciągła w punkcie  $x$  i jej szereg Fouriera jest zbieżny w tym punkcie, to jest zbieżny do liczby  $f(x)$ .

Dowód następującego twierdzenia jest taki sam jak dowód twierdzenia 6.1.

6.5. Dla każdej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ciąg funkcji  $\sigma_n(f; x)$  jest zbieżny do funkcji  $f$  w przestrzeni  $\tilde{L}_{2\pi}^p$ .

Oszacowanie (7) trzeba obecnie zastąpić przez nierówność

$$\|T_n(f)\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|f\|_p = \|f\|_p,$$

wynikającą z twierdzenia Younga, rozdział XII, 8.3 (gdzie  $q = 1$  i  $r = p$ ).

6.6. (Twierdzenie Lebesgue'a<sup>1)</sup>). Dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  ciąg  $\{\sigma_n(f; x)\}$  jest zbieżny prawie wszędzie do  $f(x)$ .

Wystarczy udowodnić, że

$$(10) \quad \sigma_{n-1}(f; x) - f(x) \rightarrow 0$$

w każdym punkcie Lebesgue'a funkcji  $f$  (por. rozdział X, 5.14), tzn. w każdym punkcie  $x$ , w którym

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{y} = 0,$$

gdzie

$$\varphi(y) = \int_0^y |f(x-t) - f(x)| dt.$$

Wyprowadzimy przedtem pewne pomocnicze oszacowania. Ponieważ

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{2}{1+|x|} \quad \text{dla } x \neq 0,$$

więc

$$\left| \frac{\sin n \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right| \leq \frac{4n}{2+n|t|} \quad \text{dla } t \neq 0.$$

Ponieważ dla  $t$  dostatecznie małych ( $|t| \leq \delta_0$ )

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|t|}{2},$$

więc

$$\left| \frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin(t/2)} \right| \leq \frac{8n}{2+n|t|} \quad \text{dla } 0 < |t| \leq \delta_0.$$

Niech  $\varepsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią i niech  $\delta > 0$  będzie taką liczbą, że  $\delta < \min(\delta_0, \pi)$ , oraz

$$\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| \leq \varepsilon \quad \text{dla } 0 < |t| \leq \delta.$$

Stosując powyższe oszacowania i całkując następnie przez części otrzymujemy

<sup>1)</sup> Lebesgue [1].

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^\delta (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \right| \leq \\
& \leq \frac{32n}{\pi} \int_0^\delta |f(x-t) - f(x)| \frac{1}{(2+nt)^2} dt = \frac{32n}{\pi} \int_0^\delta \varphi'(t) \frac{1}{(2+nt)^2} dt = \\
& = \frac{32n}{\pi} \left( \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta}{(2+n\delta)^2} + \int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{2nt}{(2+nt)^3} dt \right) \leq \\
& \leq \frac{32n}{\pi} \left( \varepsilon \frac{\delta}{(2+n\delta)^2} + \varepsilon \int_0^\infty \frac{2nt}{(2+nt)^3} dt \right) = \\
& = \varepsilon \left( \frac{32n\delta}{\pi(2+n\delta)^2} + \frac{16}{\pi} \right) < 6\varepsilon
\end{aligned}$$

dla  $n$  dostatecznie dużych,  $n > n_1$ . Analogicznie dowodzi się, że

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{-\delta}^0 (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin n(t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| < 6\varepsilon$$

dla  $n > n_1$ . Następnie

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi n} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin n(t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2\pi n \sin^2(\delta/2)} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t)| dt + \frac{|f(x)|}{2\pi n \sin^2 \delta} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} dt \leq \\
& \leq \frac{1}{n \sin^2(\delta/2)} \left( \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 + |f(x)| \right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

dla  $n$  dostatecznie dużych,  $n > n_2$ . Zatem dla  $n > \max(n_1, n_2)$  (por. (6))

$$\begin{aligned}
|\sigma_{n-1}(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi n} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin n(t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| < \\
&< 6\varepsilon + 6\varepsilon + \varepsilon = 13\varepsilon,
\end{aligned}$$

co kończy dowód własności (10).

6.7. Jeżeli szereg Fouriera funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}$  jest zbieżny w każdym punkcie pewnego zbioru  $A$ , to jest zbieżny do  $f(x)$  w prawie każdym punkcie zbioru  $A$ .  
Twierdzenie 6.7 bezpośrednio wynika z (1) i twierdzenia 6.6.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli granice  $f(x_0+)$  i  $f(x_0-)$  istnieją, to  $\sigma_n(f; x_0) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$ .

2. Jeżeli funkcja  $f$  jest ograniczona, to funkcje  $\sigma_n(f; x)$  są wspólnie ograniczone. Ponadto

$$f_1(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) \leq f_1(x),$$

gdzie funkcje  $f_1$  i  $f_2$  są zdefiniowane jak w ćwiczeniu 1, rozdział III, § 5.

3. *Sumami de la Vallée Poussina*<sup>1)</sup> funkcji okresowej  $f$  nazywamy wyrażenia

$$\tau_n(x) = \frac{s_n(x) + s_{n+1}(x) + \dots + s_{2n-1}(x)}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Sprawdzić, że sumy  $\tau_n(x)$  posiadają te same własności, co średnie  $\sigma_n(x)$ , tzn. twierdzenia 6.1-6.3, 6.5 i 6.6 pozostają prawdziwe, jeśli zastąpić  $\sigma_n(x)$  przez  $\tau_n(x)$ . Ponadto, jeśli  $f$  jest wielomianem trygonometrycznym stopnia  $< n$ , to  $\tau_n(x) = f(x)$  (średnie  $\sigma_n(x)$  nie mają tej własności).

Znaleźć jądro, tzn. funkcję  $\frac{\pi}{n}(b(x) + \dots + b_{2n-1}(x))$ , sum de la Vallée Poussina.

(Wsk.: Wyrazić  $\tau_n(x)$  przez  $\sigma_n(x)$ .)

4. Wyrażenie

$$v_n(x) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n \frac{x-t}{2} dt$$

nazywa się *całką osobliwą de la Vallée Poussina*. Sprawdzić, że  $v_n(x)$  jest wielomianem trygonometrycznym stopnia  $\leq n$  oraz że wielomiany  $v_n(x)$  spełniają twierdzenia analogiczne do 6.1-6.3, 6.5, 6.6.

5. Jeśli  $x$  nie jest całkowitą wielokrotnością liczby  $\pi$ , to ciąg sum częściowych szeregu trygonometrycznego

$$1/2 + \cos x + \cos 2x + \dots$$

jest limitowalny metodą pierwszych średnich do zera, a ciąg sum częściowych szeregu

$$\sin x + \sin 2x + \dots$$

jest limitowalny metodą pierwszych średnich do  $\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}x$ .

6. Jeżeli ciąg  $\sigma_n(x)$  średnich arytmetycznych sum częściowych  $s_n(x)$  pewnego szeregu trygonometrycznego jest zbieżny jednostajnie, to szereg ten jest szeregiem Fouriera pewnej funkcji okresowej ciągłej.

§ 7. Absolutna zbieżność szeregów trygonometrycznych. Jeżeli

$$(1) \quad |a_0|/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

to szereg trygonometryczny

$$(2) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie  $x$ . Na odwrót,

<sup>1)</sup> De la Vallée Poussin [2], str. 34.

7.1 (Twierdzenie Łuzina-Denjoy<sup>1)</sup>). Jeżeli szereg (2) jest zbieżny bezwzględnie w pewnym zbiorze  $A$  miary dodatniej, to szereg (1) jest zbieżny.

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy współczynniki  $a_n, b_n$  są rzeczywiste.

Niech

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx + x_n),$$

gdzie

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

a  $x_n$  jest odpowiednio dobraną liczbą rzeczywistą. Z założenia funkcja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n |\cos(nx + x_n)|$$

jest skończona dla  $x \in A$ . Istnieje więc zbiór  $A_0 \subset A$  miary dodatniej i liczba skończona  $M$  taka, że

$$g(x) \leq M \quad \text{dla} \quad x \in A_0.$$

Z twierdzenia o całkowaniu szeregów o wyrazach nieujemnych (rozdział VII, 3.3) wynika, że

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n \int_{A_0} |\cos(nx + x_n)| dx = \int_{A_0} g(x) dx \leq M |A_0|.$$

Ponieważ

$$|\cos(nx + x_n)| \geq \cos^2(nx + x_n) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2nx + 2x_n)) = \\ = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx \cdot \cos 2x_n - \sin 2nx \cdot \sin 2x_n),$$

więc

$$\int_{A_0} |\cos(nx + x_n)| dx \geq \frac{1}{2} |A_0| + \frac{1}{2} \cos 2x_n \int_{A_0} \cos 2nx dx - \frac{1}{2} \sin 2x_n \int_{A_0} \sin 2nx dx.$$

Ostatnie dwie całki dążą do zera na podstawie twierdzenia 2.4 (gdzie jako  $f$  trzeba przyjąć funkcję charakterystyczną zbioru  $A_0$ ). Zatem dla  $n > n_0$

$$\int_{A_0} |\cos(nx + x_n)| dx \geq \frac{1}{2} |A_0|.$$

Stąd oraz z (3) wynika, że  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ , co implikuje bezpośrednią własność (1).

<sup>1)</sup> Lusin [2], Denjoy [1].

ĆWICZENIA. 1. Przyjmijmy te same oznaczenia, co w dowodzie twierdzenia 7.1. Jeżeli  $r_1 + r_2 + \dots = \infty$ , to zbiór punktów, w których  $g(x) < \infty$ , jest zbiorem  $F_\sigma$  pierwszej kategorii.

Inaczej mówiąc: jeżeli szereg trygonometryczny (2) jest zbieżny bezwzględnie w zbiorze drugiej kategorii, to zachodzi nierówność (1)<sup>1)</sup>.

(Wsk.: Skorzystań z rozdziału IV, 1.3 i rozdziału II, 8.4.)

2. Jeżeli funkcja  $f \in L_{2\pi}$  o rozwinięciu (2) jest parzysta i  $a_n \geq 0$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ , to  $a_1 + a_2 + \dots < \infty$  (a więc  $f \in C_{2\pi}$ ).

(Wsk.: Sprawdzić, że  $a_0/2 + a_1 + \dots + a_n \leq 2\sigma_n(0)$ .)

3. Jeżeli dla pewnego ciągu  $x_n \in \mathcal{R}$  i pewnego ciągu rosnącego liczb naturalnych  $\{m_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(m_n x + x_n) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in A,$$

to  $|A| = 0$ .

(Wsk.: Skorzystań z twierdzenia 2.5 (i) i tożsamości

$$\int_A dx = 2 \int_A \cos^2(m_n x + x_n) dx + \sin 2x_n \int_A \sin 2m_n x dx - \cos 2x_n \int_A \cos 2m_n x dx.)$$

4. Jeżeli dla pewnych ciągów liczbowych  $\{a_n\}, \{b_n\}$  jest

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \rightarrow 0$$

na pewnym zbiorze  $A$  miary dodatniej, to  $a_n \rightarrow 0$  i  $b_n \rightarrow 0$ .

Zatem, jeśli jakiś szereg trygonometryczny jest zbieżny w zbiorze miary dodatniej, to jego współczynniki dążą do zera (twierdzenie Lebesgue'a-Cantora).

(Wsk.: Skorzystań z ćwiczenia 3.)

Uwaga. Zbieżność do zera współczynników jest warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym zbieżności szeregu trygonometrycznego na zbiorze miary dodatniej. Istnieją szeregi trygonometryczne o współczynnikach dążących do zera, rozbieżne w każdym punkcie<sup>2)</sup>.

Można nawet podać przykład takiego szeregu trygonometrycznego o współczynnikach dążących do zera, że żaden podciąg ciągu sum częściowych nie jest zbieżny prawie wszędzie do granicy skończonej<sup>3)</sup>.

Zauważmy jeszcze, że dla dowolnej funkcji okresowej, mierzalnej, prawie wszędzie skończonej, istnieje szereg trygonometryczny, zbieżny do niej prawie wszędzie<sup>4)</sup>.

## § 8. Funkcje o kwadracie całkownym. Ciągi

$$(1) \quad 1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

oraz

$$(2) \quad e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tworzą układy ortogonalne nieunormowane w przedziale  $0; 2\pi$ . Przez ich normalizację otrzymujemy układy ortogonalne unormowane

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

<sup>1)</sup> Lusin [1].

<sup>2)</sup> Lusin [3], Stecznik [1], Steinhaus [1], Menchoff [9].

<sup>3)</sup> Menchoff [7].

<sup>4)</sup> Menchoff [4] i [8].

oraz

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Jeżeli

$$(5) \quad f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$(6) \quad f(x) \sim a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

to

$$(7) \quad a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \quad \text{oraz} \quad a_n = \sqrt{\pi} \bar{a}_n, \quad b_n = \sqrt{\pi} b_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2,$$

Analogicznie, jeżeli

$$(8) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

oraz

$$(9) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

to

$$(10) \quad \gamma_n = \sqrt{2\pi} c_n.$$

Ponieważ układy (3), (4) są liniowo gęste w  $\tilde{L}_{2\pi}^2 = \tilde{L}^2(0; 2\pi)$ , więc z równości (7), (10) oraz z twierdzeń rozdziału XIII, § 4, otrzymujemy natychmiast następujące twierdzenia.

8.1. Szereg Fouriera dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  jest zbieżny do  $f$  w przestrzeni  $\tilde{L}_{2\pi}^2$ .

8.2 (Równość Parsevala). Dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  o rozwinięciu (5), (8)

$$\int_a^{a+2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \left( |a_0|^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

8.3. Jeżeli  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  oraz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \sim f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx} \sim g(x) \sim a'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

to

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \pi \left( a_0 \bar{a}'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{a}'_n + b_n \bar{b}'_n) \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{c}'_n.$$

8.4. Na to, by szereg

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{lub} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx})$$

był szeregiem Fouriera pewnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$ , potrzeba i wystarcza, by

$$|a_0|^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty \quad \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right).$$

Udowodnimy obecnie, że

8.5. Jeżeli  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}^2$ ,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx},$$

to

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx},$$

gdzie

$$(11) \quad c'_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} c'_k.$$

Z 8.4 wynika natychmiast, że szereg (11) jest bezwzględnie zbieżny. Aby udowodnić 8.5, przyjmijmy

$$f_1(x) = f(x) e^{-inx}.$$

Ponieważ

$$f_1(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n+k} e^{ikx}, \quad \overline{f_1(x)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_{n-k}} e^{ikx},$$

więc z twierdzenia 8.3 (gdzie  $f$  trzeba zastąpić przez  $g$ , zaś  $g$  przez  $\overline{f_1}$ )

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \overline{f_1(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k c_{n-k},$$

c. b. d. o.

8.6 (Twierdzenie o całkowaniu wyraz za wyrazem szeregu Fouriera).  
Jeżeli  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  jest funkcją o rozwinięciu (5), (8), to

$$\int_A f(x) dx = \int_A \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_A (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_A c_n e^{inx} dx$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego  $A$ , zawartego w przedziale  $P$  o długości  $2\pi$ .

Oznaczmy

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \in P-A \end{cases}$$

i rozszerzmy funkcję  $g$  z zachowaniem okresowości na całą prostą. Ponieważ współczynniki Fouriera funkcji  $g$  są liczby

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_A \cos nx dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_A \sin nx dx, \\ c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_A e^{-inx} dx,$$

twierdzenie 8.6 wynika bezpośrednio z wzoru (11) na  $c'_n$ .

Z twierdzenia 8.1 oraz 2.5 z rozdziału XII (por. także rozdział XIII, 6.1) wynika, że szereg Fouriera dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  jest zbieżny według miary do funkcji  $f$  w przedziale  $0; 2\pi$ , zawiera więc podciąg  $\{s_{m_n}(f; x)\}$  ciągu sum częściowych, zbieżny prawie wszędzie do  $f(x)$ . Następujące twierdzenie orzeka, że ciąg wskaźników  $\{m_n\}$  może być dobrany w sposób uniwersalny, niezależnie od rozważanej funkcji  $f$ .

8.7 (Twierdzenie Kołmogorowa<sup>1)</sup>). Niech  $\{m_n\}$  będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że

$$(12) \quad \frac{m_{n+1}}{m_n} \geq \kappa > 1,$$

gdzie  $\kappa$  nie zależy od  $n$ . Dla dowolnej funkcji  $f \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  ciąg  $\{s_{m_n}(f; x)\}$  jest zbieżny prawie wszędzie do  $f(x)$ .

Żałóżmy, że szereg (5) jest rozwinięciem funkcji  $f$ . Na mocy 8.4 szeregi

$$a_0/2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(gdzie  $m_0 = 0$ ) są odpowiednio szeregami Fouriera pewnych funkcji  $g_1, g_2 \in \tilde{L}_{2\pi}^2$ , przy czym

$$f = g_1 + g_2.$$

Ponieważ współczynniki Fouriera funkcji  $g_1$  o numerach  $k$ , gdzie  $m_{2n-1} < k \leq m_{2n}$ , są równe zeru, więc

$$(m_{2n} - m_{2n-1}) s_{m_{2n-1}}(g_1; x) = (m_{2n} - m_{2n-1}) s_{m_{2n}}(g_1; x) = \\ = s_{m_{2n-1}+1}(g_1; x) + \dots + s_{m_{2n}}(g_1; x) = \\ = (m_{2n} + 1) s_{m_{2n}}(g_1; x) - (m_{2n-1} + 1) s_{m_{2n-1}}(g_1; x).$$

$$s_{m_{2n-1}}(g_1; x) = s_{m_{2n}}(g_1; x) = \\ = \frac{m_{2n} + 1}{m_{2n} - m_{2n-1}} s_{m_{2n}}(g_1; x) - \frac{m_{2n-1} + 1}{m_{2n} - m_{2n-1}} s_{m_{2n-1}}(g_1; x) = \\ = s_{m_{2n}}(g_1; x) + \frac{m_{2n-1} + 1}{m_{2n} - m_{2n-1}} (s_{m_{2n}}(g_1; x) - s_{m_{2n-1}}(g_1; x)).$$

Ponieważ  $s_n(g_1; x) \rightarrow g_1(x)$  prawie wszędzie (por. 6.6), a ciąg

$$\frac{m_{2n-1} + 1}{m_{2n} - m_{2n-1}} = \frac{1 + 1/m_{2n-1}}{m_{2n}/m_{2n-1} - 1} < \frac{2}{\kappa - 1}$$

jest ciągiem ograniczonym, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m_n}(g_1; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m_{2n}}(g_1; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m_{2n-1}}(g_1; x) = g_1(x)$$

prawie wszędzie. Analogicznie dowodzi się, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m_n}(g_2; x) = g_2(x)$$

prawie wszędzie. W rezultacie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m_n}(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{m_n}(g_1; x) + s_{m_n}(g_2; x)) = g_1(x) + g_2(x) = f(x)$$

prawie wszędzie.

ĆWICZENIA. 1. Szereg Fouriera splotu  $f * g$  dwu funkcji  $f, g \in \tilde{L}_{2\pi}^2$  jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie.

2. Wykorzystać twierdzenia 8.2 i 8.3 do obliczenia sum szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 - n^2)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 - n^2)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 - 1)}.$$

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 4, § 3.)

3. Udowodnić, że pierścień  $I(\mathbb{C})$  ciągów dwustronnych (por. rozdział XII, § 9, ćwiczenie 1) posiada dzielniki zera.<sup>1)</sup>

(Wsk.: Rozważyć ciągi współczynników Fouriera  $c_n$  dwu dostatecznie regularnych parzystych funkcji  $f, g$ , których iloczyn równa się zeru, np.  $f(x) = \max(0, \cos x)$ ,  $g(x) = \max(0, -\cos x)$ .)

<sup>1)</sup> Żelazko [1].

<sup>1)</sup> Kołmogoroff [2].

**§ 9. Dystrybucje okresowe.** Twierdzenie 8.4 podaje nam prosty warunek konieczny i dostateczny na to, by dany ciąg liczbowy był ciągiem współczynników Fouriera funkcji okresowej o kwadracie całkowalnym. Nasuwa się pytanie, czy istnieją analogiczne kryteria na to, by dany ciąg liczbowy był ciągiem współczynników Fouriera funkcji należącej do jakiejś innej z rozpatrywanych przez nas przestrzeni funkcyjnych, np. by był ciągiem współczynników Fouriera funkcji okresowej ciągłej lub całkowalnej. Poruszone zagadnienie jest bardzo trudne, a uzyskane rezultaty mają charakter fragmentaryczny. Równie proste jak w przypadku przestrzeni  $L^2_{2\pi}$  rozwiązanie postawionego zagadnienia otrzymujemy w przypadku funkcji okresowych nieskończenie wiele razy różniczkowalnych (por. § 2, ćwiczenie 12) oraz w jeszcze jednym, dotychczas nie rozpatrywanym przez nas przypadku, mianowicie w przypadku dystrybucji okresowych, stanowiących uogólnienie funkcji okresowych  $f \in L_{2\pi}$ .

Dla dowolnej funkcji  $f$ , określonej na  $\mathcal{R}$ , niech  $\hat{f}$  oznacza funkcję

$$\hat{f}(x) = f(x + 2\pi).$$

Ogólniej, dla dowolnej dystrybucji  $\theta = \{k, f\} \in D(\mathcal{R})$  (por. rozdział X, § 10) niech

$$\hat{\theta} = \{k, \hat{f}\}.$$

Tak zdefiniowana dystrybucja  $\hat{\theta}$  nie zależy od sposobu przedstawienia dystrybucji  $\theta$  w postaci pary  $\{k, f\}$ . Istotnie, jeśli  $\{k, f\} = \{m, g\}$ , gdzie  $m \geq k$ , to  $g^{(m-k)} - f = w \in W_k$ , gdzie  $W_k$  oznacza, tak jak w rozdziale X, § 10, zbiór wielomianów stopnia  $< k$ . W rezultacie,  $\hat{g}^{(m-k)} - \hat{f} = \hat{w} \in W_k$ , co dowodzi, że  $\{k, \hat{f}\} = \{m, \hat{g}\}$ .

Mówimy, że dystrybucja  $\theta \in D(\mathcal{R})$  jest *okresowa* (o okresie  $2\pi$ ), jeżeli

$$\theta = \hat{\theta}.$$

Zbiór dystrybucji okresowych oznaczamy symbolem  $D_{2\pi}$ .

W szczególności, każda funkcja  $f \in C_{2\pi}$  jest dystrybucją okresową. Ogólniej, każda funkcja  $f \in L_{2\pi}$  jest dystrybucją okresową. Istotnie,

$f = \{1, g\}$ , gdzie  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Ponieważ  $\hat{g}(x) = g(x) + \text{const}$ , więc  $g' = \hat{g}'$ , tzn.  $f = \{1, g\} = \{1, \hat{g}\} = \hat{f}$ .

Suma i różnica dystrybucji okresowych jest dystrybucją okresową. Iloczyn dystrybucji okresowej przez stałą jest dystrybucją okresową. Również iloczyn dystrybucji okresowej przez nieskończenie wiele razy różniczkowalną funkcję okresową jest dystrybucją okresową. Pochodna dystrybucji okresowej jest także dystrybucją okresową. Natomiast całka nieoznaczona  $\theta_0$  dystrybucji okresowej  $\theta$  nie zawsze jest dystry-

bucją okresową (gdyż np. całka z funkcji stałej różnej od zera nie jest okresowa). Ponieważ

$$(\hat{\theta}_0 - \theta_0)' = \hat{\theta}_0' - \theta_0' = \hat{\theta} - \theta = 0,$$

więc  $\hat{\theta}_0 - \theta_0$  jest dystrybucją stałą. W przypadku gdy  $\theta$  jest funkcją, stała  $\hat{\theta}_0 - \theta_0$  jest całką funkcji  $\theta$  na dowolnym przedziale o długości  $2\pi$ . Przez analogię dla dowolnej dystrybucji  $\theta \in D_{2\pi}$  stałą  $\hat{\theta}_0 - \theta_0$ , gdzie  $\theta_0$  jest całką nieoznaczoną dystrybucji  $\theta$ , będziemy oznaczać symbolem

$$\int_0^{2\pi} \theta.$$

Pojęcie zbieżności ciągu dystrybucji w  $D_{2\pi}$  definiujemy tak samo jak w  $D(\mathcal{R})$ . Przestrzeń  $D_{2\pi}$  jest więc domkniętym podzbiorem liniowym przestrzeni  $D(\mathcal{R})$ .

Jeżeli  $\theta_n \rightarrow \theta$  w  $D(\mathcal{R})$ , to także

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \theta_n \rightarrow \int_0^{2\pi} \theta.$$

Mamy bowiem  $\theta_n = \{k, f_n\}$ ,  $\theta = \{k, f\}$ , gdzie  $f_n \rightarrow f$  niemal jednostajnie na  $\mathcal{R}$ , a  $k$  jest liczbą naturalną. Dystrybucją pierwotną dla  $\theta_n$  jest  $\{k-1, f_n\}$ , a dla  $\theta$  jest  $\{k-1, f\}$ . Ponieważ  $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$  i  $f_n \rightarrow f$  niemal jednostajnie, więc

$$\int_0^{2\pi} \theta_n = \{k-1, \hat{f}_n\} - \{k-1, f_n\} \rightarrow \{k-1, \hat{f}\} - \{k-1, f\} = \int_0^{2\pi} \theta \quad \text{w } D_{2\pi}.$$

Niech  $s_n$  i  $c_n$  oznaczają dystrybucje (nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje)  $\sin nx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) i  $\cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

9.1 Twierdzenie Schwartza<sup>1)</sup> (i). Jeżeli szereg dystrybucji okresowych

$$(2) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n s_n)$$

jest zbieżny w  $D_{2\pi}$  do pewnej dystrybucji  $\theta \in D_{2\pi}$ , to

$$(3) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta c_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(4) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta s_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

<sup>1)</sup> Schwartz [2], str. 81. Por. także Mikusiński i Sikorski [1], str. 47.

(ii) Na odwrót, jeżeli liczby  $a_m$  i  $b_m$  są zdefiniowane wzorami (3) i (4), gdzie  $\theta$  jest pewną dystrybucją okresową, to szereg (2) jest zbieżny w  $D_{2\pi}$  do  $\theta$ .

(iii) Na to, by szereg (2) był zbieżny w  $D_{2\pi}$ , potrzeba i wystarcza, by istniała taka liczba naturalna  $k$ , że

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n^k = 0 \quad i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n^k = 0.$$

Wzory (3) i (4) są analogonami wzorów (5) i (6) z § 2.

Uogólniając wprowadzoną w § 2 definicję, będziemy mówili, że szereg (2) o współczynnikach danych wzorami (3) i (4) jest szeregiem Fouriera dystrybucji okresowej  $\theta$ , a współczynniki (3) i (4) będziemy nazywali współczynnikami Fouriera dystrybucji okresowej  $\theta$ .

Twierdzenia 9.1 (i), (ii) orzekają, że — przy zbieżności w przestrzeni  $D_{2\pi}$  — pojęcie zbieżnego szeregu trygonometrycznego pokrywa się z pojęciem szeregu Fouriera. Twierdzenie 9.1 (iii) podaje prosty warunek dostateczny i konieczny na to, by dany szereg trygonometryczny był szeregiem Fouriera pewnej dystrybucji okresowej.

Niech  $s_n$  oznacza  $n$ -tą sumę częściową szeregu (2).

Dowód twierdzenia 9.1 (i) jest taki sam jak dowód twierdzenia 2.3. Załóżmy, że  $s_n \rightarrow \theta$  w  $D_{2\pi}$ . Dla  $n \geq m$  jest

$$(6) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n c_m, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n s_m.$$

Ponieważ  $s_n c_m \rightarrow \theta c_m$  w  $D_{2\pi}$  i  $s_n s_m \rightarrow \theta s_m$  w  $D_{2\pi}$  dla  $n \rightarrow \infty$  (por. rozdział X, § 10, (16)), więc na mocy (1)

$$\int_0^{2\pi} s_n c_m \rightarrow \int_0^{2\pi} \theta c_m \quad i \quad \int_0^{2\pi} s_n s_m \rightarrow \int_0^{2\pi} \theta s_m \quad \text{dla } n \rightarrow \infty,$$

co wraz z (6) dowodzi prawdziwości wzorów (3) i (4).

Dowód twierdzenia 9.1 (ii) oprzemy na następującej uwadze:

A) Jeśli  $\theta_1 \in D_{2\pi}$  i  $\int_0^{2\pi} \theta_1 = 0$ , to  $\theta_1$  jest pochodną pewnej dystrybucji

$\theta_2 \in D_{2\pi}$  takiej, że  $\int_0^{2\pi} \theta_2 = 0$ .

Istotnie, niech  $\theta_0$  będzie całką nieoznaczoną dystrybucji  $\theta_1$ . Ponieważ

$$\hat{\theta}_0 - \theta_0 = \int_0^{2\pi} \theta_1 = 0,$$

dystrybucja  $\theta_0$  jest okresowa. Dystrybucja  $\theta_1 = \theta_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_0$  posiada żądane własności.

Aby udowodnić 9.1 (ii) wystarczy udowodnić, że każda dystrybucja  $\theta \in D_{2\pi}$  jest sumą pewnego szeregu trygonometrycznego (2), zbieżnego w  $D_{2\pi}$ . Istotnie, z 9.1 (i) wynika natychmiast, że szereg ten jest szeregiem Fouriera dystrybucji  $\theta$ , co dowodzi, że szereg Fouriera dystrybucji okresowej  $\theta$  jest zbieżny do  $\theta$ .

Niech  $\theta \in D_{2\pi}$  i niech  $\theta_1 = \theta - a_0/2$ , gdzie  $a_0$  dane jest wzorem (3). Dystrybucję  $\theta_1$  możemy przedstawić w postaci  $\theta_1 = \{4r, f\}$ , gdzie  $f$  jest

funkcją o ciągłej pochodnej. Ponieważ  $\int_0^{2\pi} \theta_1 = 0$ , więc stosując  $4r$ -krotnie lemat A stwierdzamy, że  $\theta_1$  jest  $4r$ -krotną pochodną pewnej dystrybucji okresowej  $\theta_2$ . Ponieważ  $\theta_2^{(4r)} = \theta_1 = f^{(4r)}$ , więc dystrybucja  $\theta_2$  różni się od funkcji  $f$  o wielomian stopnia  $< 4r$ , jest więc funkcją okresową o ciągłej pochodnej. Zatem szereg Fouriera

$$(7) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

funkcji  $\theta_2$  jest zbieżny jednostajnie do  $\theta_2$ , a więc tym bardziej jest zbieżny do  $\theta_2$  w  $D_{2\pi}$ . Z rozdziału X, 10.3, wynika, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n n^{4r} c_n + \beta_n n^{4r} s_n),$$

otrzymany z szeregu (7) przez  $4r$ -krotne zróżniczkowanie wyraz za wyrazem, jest zbieżny w  $D_{2\pi}$  do dystrybucji  $\theta_2^{(4r)} = \theta_1 = \theta - a_0/2$ . Zatem szereg

$$(8) \quad a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n n^{4r} c_n + \beta_n n^{4r} s_n)$$

jest zbieżny w  $D_{2\pi}$  do  $\theta$ , co kończy dowód 9.1 (ii).

Zarazem wynika stąd konieczność warunków (5). Istotnie, założmy, że szereg (2) jest zbieżny do dystrybucji  $\theta$ . Niech  $\theta_1, \theta_2, a_n, \beta_n$  mają takie samo znaczenie jak w dowodzie 9.1 (ii). Z (8) i 9.1 (i) wynika, że

$$a_n = a_n n^{4r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta c_n, \quad b_n = \beta_n n^{4r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta s_n.$$

Ponieważ szereg (7) jest szeregiem Fouriera funkcji ciągłej, więc na mocy 2.5 (i)

$$a_n \rightarrow 0 \quad i \quad \beta_n \rightarrow 0,$$

skąd wynika (5) dla  $k = 4r$ .

Udowodnimy obecnie dostateczność warunków (5). Niech  $r$  będzie taką liczbą naturalną, że  $4r \geq k+2$ . Z (5) wynika, że szereg trygonometryczny

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n^{4r}} \cos nx + \frac{b_n}{n^{4r}} \sin nx \right)$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie do pewnej funkcji  $f \in C_{2\pi}$ . Tym samym jest zbieżny do  $f$  w  $D_{2\pi}$ . Z rozdziału X, 10.3, wynika, że szereg otrzymany przez  $4r$ -krotnie zróżniczkowanie szeregu (9) wyraz za wyrazem, tzn. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n s_n),$$

jest zbieżny w  $D_{2\pi}$  do dystrybucji  $\theta = \{4r, f\}$ . Szereg (2) jest więc zbieżny do dystrybucji  $\theta + a_0/2$ .

Powyżej podaliśmy definicję dystrybucji okresowych rzeczywistych. W analogiczny sposób definiujemy zespolone dystrybucje okresowe (por. rozdział X, § 10, ćwiczenie 5). Twierdzenie 9.1 pozostaje nadal prawdziwe.

**ĆWICZENIA.** 1. Na to, by dystrybucja  $\theta \in D_{2\pi}$  była okresowa, potrzeba i wystarczy, by dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej  $k$  zachodziła równość  $\theta = \{k, f\}$ , gdzie  $f$  jest sumą funkcji okresowej i wielomianu stopnia  $\leq k$ .

2. Jeżeli  $\theta = \{k, f_0 + w\}$ , gdzie  $f_0$  jest funkcją okresową i  $\int_0^{2\pi} f_0(x) dx = 0$ , a  $w$  jest wielomianem

$$w(x) = \frac{c_0}{k!} x^k + \dots + c_k,$$

to  $\int_0^{2\pi} \theta = c_0$ .

3. Jeżeli  $\theta \in D_{2\pi}$  i  $\varphi$  jest funkcją okresową nieskończenie wiele razy różniczkowalną, to

$$\int_0^{2\pi} \varphi' \theta = - \int_0^{2\pi} \varphi \theta'.$$

4. Sprawdzić, że twierdzenie 2.2 jest również prawdziwe dla dystrybucji okresowych.

5. Znaleźć szereg Fouriera dystrybucji okresowej, będącej pochodną dystrybucyjną funkcji  $E(x/2\pi)$ , gdzie  $E(x)$  oznacza największą liczbę całkowitą  $\leq x$ .

**§ 10. Uogólnienia.** Powróćmy obecnie do teorii szeregów Fouriera funkcji okresowych.

Ze względów tradycyjnych operowaliśmy dotychczas współczynnikami Fouriera  $a_n, b_n, c_n$  zdefiniowanymi wzorami (5), (6), (15), § 2. Bar-

dziej symetryczną postać różnych wzorów można otrzymać operując wyłącznie funkcjami  $e^{inx}$  i współczynnikami

$$(1) \quad \gamma_n = \sqrt{2\pi} c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oraz zastępując sumy nieskończone przez całki. W tym celu będziemy rozpatrywać zbiór  $\mathcal{C}$  liczb całkowitych jako grupę z miarą niezmienniczą  $l_0$  (por. końcowe uwagi w § 8, rozdział XII), zdefiniowaną wzorem

$$l_0(A) = \text{ilość elementów zbioru } A \subset \mathcal{C}.$$

Literą  $\mathcal{G}$  będziemy oznaczać, podobnie jak w § 1, przedział  $\overline{0; 2\pi}$ , interpretowany jako grupa liczb rzeczywistych modulo całkowite wielokrotności liczby  $2\pi$ , z miarą niezmienniczą  $l_1$ .

Każda funkcja  $f \in \check{L}(\mathcal{G}) = \check{L}_{2\pi}$  wyznacza pewną funkcję  $F$ , określoną na  $\mathcal{C}$  wzorem

$$(2) \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{G}} f(x) e^{-ixy} dl_1(x).$$

Funkcję  $F$  nazywać będziemy *transformatą* funkcji  $f$ . Funkcja  $F$  jest to po prostu ciąg współczynników (1). Szereg Fouriera funkcji  $f$  można obecnie zapisać w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{y=-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy},$$

tzn. w postaci całki

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}} F(y) e^{ixy} dl_0(y).$$

Zasadniczy problem sprowadza się więc do pytania, kiedy zachodzi równość

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}} F(y) e^{ixy} dl_0(y),$$

dualna do równości (2).

Gdybyśmy interpretowali całkę  $\int_{\mathcal{C}}$  we wzorach (3), (4) jako całkę właściwą, zdefiniowaną w rozdziale VII, § 9, to równość (4) odpowiadałaby bezwzględnej zbieżności szeregu Fouriera funkcji  $f$  do funkcji  $f$ , co — jak wynika z § 7 — ma miejsce przy dość ograniczających założeniach.

niach o funkcji  $f$ . Aby uzyskać większą ogólność rozważań trzeba całkę (3) uważać jako pewnego rodzaju całkę niewłaściwą, mianowicie jako granicę, gdy  $n \rightarrow \infty$ , ciągu całek ( $n$ -tych sum częściowych szeregu Fouriera funkcji  $f$ )

$$(5) \quad s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{C_n} F(y) e^{iwy} dl_0(y),$$

gdzie

$$C_n = [-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-2, n-1, n].$$

Oczywiście można tu rozpatrywać różne typy zbieżności ciągu funkcyjnego  $\{s_n\}$ , otrzymując w rezultacie różne pojęcia całki niewłaściwej (3).

Konieczność rozpatrywania całki (3) jako pewnego typu całki niewłaściwej powodowana jest tym, że zbiór  $C$  ma miarę  $l_0$  nieskończoną. Ponieważ  $l_1(\mathcal{G}) < \infty$ , trudność tego rodzaju nie występuje przy całce (2), która jest zawsze całką właściwą.

Można również postawić problem dualny do wyżej postawionego: dana jest pewna funkcja  $F(y)$  na grupie  $C$  taka, że — przy pewnej ustalonej definicji całki niewłaściwej — całka (3) istnieje. Definiujemy funkcję  $f$  przy pomocy wzoru (4) i pytamy się teraz, czy zachodzi równość (2).

Na przykład, gdybyśmy całkę niewłaściwą (3) definiowali jako granicę „wszędzie” ciągu całek (5), problem ten można by wysłowić w następujący sposób: Szereg trygonometryczny o współczynnikach  $F(y)$  jest zbieżny do pewnej funkcji (całkowalnej)  $f$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{y \in C} F(y) e^{iwy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C F(y) e^{iwy} dl_0(y).$$

Czy liczby  $F(y)$  są wówczas współczynnikami Fouriera funkcji  $f$  (w sensie definicji (1))?

Jak nadmieniliśmy już w § 2 (str. 169), można udowodnić, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Gdybyśmy jednak w definicji całki niewłaściwej (3) zbieżność wszędzie zastąpili przez zbieżność prawie wszędzie, odpowiedź byłaby negatywna.

Z twierdzeń § 8 wynika, że najprostszym jest przypadek funkcji o kwadracie całkowalnym. Operacja  $T$ ,

$$F = T(f),$$

przyporządkowująca funkcji  $f$  jej transformatę, odwzorowuje przestrzeń  $\tilde{L}^2(\mathcal{G}, l_1)$  na przestrzeń  $\tilde{L}^2(C, l_0)$  — więcej nawet: ustala ona równoważność tych przestrzeni (por. 8.2 i 8.4). Twierdzenia 8.2, 8.3, 2.1, 8.5 można obecnie przepisać w następującej postaci

$$(6) \quad \|f\|_2 = \|F\|_2,$$

$$(7) \quad (f, g) = (F, G),$$

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T(f * g) = F \cdot G,$$

$$(9) \quad T(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F * G,$$

gdzie  $F = T(f)$ ,  $G = T(g)$  są transformatami funkcji  $f, g \in \tilde{L}^2(\mathcal{G}, l_1)$ .

W przypadku innych klas funkcji i w przypadku innej definicji całki niewłaściwej (3) (tzn. innego rodzaju zbieżności ciągu funkcyjnego  $\{s_n(x)\}$ ) uzyskaliśmy jedynie pewne fragmentaryczne rezultaty.

Zauważmy, że wzór (13), § 4, możemy obecnie zapisać w postaci

$$(10) \quad f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C \left( \int_0^x F(y) e^{iwt} dt \right) dy.$$

W przeprowadzonych rozważaniach korzystaliśmy wielokrotnie z wielu specjalnych własności funkcji  $\sin nx$ ,  $\cos nx$ ,  $e^{inx}$ . Wszystkie te własności mogą być wyprowadzone z jednej zasadniczej równości

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}.$$

W istocie więc korzystaliśmy z faktu, że funkcja  $e^{ix}$  przy ustalonym  $y \in C$  jest charakterem grupy  $\mathcal{G}$ , a przy ustalonym  $x$  — jest charakterem grupy  $C$ . Przypominamy<sup>1)</sup>, że *charakterem* jakiejś grupy  $H$  nazywamy funkcję zespoloną  $h$ , określoną na tej grupie, taką, że

$$|h(x)| = 1 \quad \text{ i } \quad h(x+y) = h(x)h(y).$$

Bliższa analiza wykazuje, że uczyniona wyżej uwaga trafia w sedno rzeczy. Dokładniej:

Załóżmy, że  $H$  i  $H_1$  są grupami abelowymi z miarami niezmienniczymi odpowiednio  $\mu$  i  $\mu_1$  i że  $h(x, y)$  jest funkcją określoną na produkcie  $H \times H_1$  taką, że przy ustalonym  $y$  jest ona charakterem grupy  $H$ , a przy ustalonym  $x$  — charakterem grupy  $H_1$ , przy tym wszystkie charaktery mierzalne grupy  $H$  są postaci  $h(x, y)$ ,  $y = \text{const}$ , a wszystkie mierzalne

<sup>1)</sup> Czytelnik, nie znający omawianych tu pojęć algebraicznych, może opuścić ten ustęp, którego znajomość nie jest konieczna przy dalszym czytaniu.

charaktery grupy  $H_1$  są postaci  $h(x, y)$ ,  $x = \text{const}$  (ponadto  $h$  musi spełniać pewne warunki mierzalności, których nie będziemy tu dokładnie formułować). Analogami wzorów (2) i (4) są teraz wzory

$$(11) \quad F(y) = c \int_{\bar{H}} f(x) \overline{h(x, y)} d\mu(x),$$

$$(12) \quad f(x) = c \int_{\bar{H}_1} F(y) h(x, y) d\mu_1(y),$$

gdzie  $c$  jest odpowiednio dobranym czynnikiem normującym w rodzaju czynnika  $1/\sqrt{2\pi}$  we wzorach (2) i (4). Z poprzednich rozważań wiemy już, że całki (11), (12) należy interpretować jako pewnego rodzaju całki niewłaściwe.

Główny problem brzmi teraz tak: dana jest funkcja  $f$ , wzór (11) definiuje jej transformatę  $F$ . Kiedy zachodzi wzór (12)?

Okazuje się, że przy pewnych założeniach o  $H$  i  $H_1$  pewna część dotychczasowych rozważań uogólnia się, zwłaszcza przypadek funkcji o kwadracie całkownym. Dokładne omówienie tego rodzaju uogólnień należy do teorii grup topologicznych i wykracza poza ramy tej książki<sup>1)</sup>. W następnym rozdziale zajmiemy się jedynie przypadkiem  $H = H_1 = \mathcal{R}$  i  $h(x, y) = e^{ixy}$  z miarą Lebesgue'a jako miarą niezmienniczą. Zwracamy uwagę czytelnika na pełną analogię wyników uzyskanych w rozdziale XV z wynikami uzyskanymi w niniejszym rozdziale.

**ĆWICZENIE.** Sprawdzić, że wzory (2), (4), (6)-(9) przyjmują następującą, prostszą postać, gdy miary  $l_1$  i  $l_0$  zastąpić wszędzie (również w definicji splotu) przez miary

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l_1 \quad \text{i} \quad l_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l_0:$$

$$F(y) = \int_{\mathcal{G}} f(x) e^{-ixy} dl_1(x), \quad f(x) = \int_{\mathcal{G}} F(y) e^{ixy} dl_0(y),$$

$$\|f\|_1 = \|F\|_2, \quad (f, g) = (F, G),$$

$$T(f * g) = F \cdot G, \quad T(fg) = F * G.$$

<sup>1)</sup> Por. np. Weil [1], Loomis [1].

## ROZDZIAŁ XV

### CAŁKI FOURIERA

**§ 1. Transformaty Fouriera.** W rozdziale niniejszym wszystkie funkcje określone są na prostej  $\mathcal{R}$  lub półprostej  $0; \infty$ . Przez miarę i mierzalność rozumiemy zawsze miarę Lebesgue'a  $l_1$  i mierzalność względem tej miary, o ile inne założenia nie zostały wyraźnie wypowiedziane.

*Transformatą Fouriera* funkcji zespolonej mierzalnej  $f$ , określonej na  $\mathcal{R}$ , nazywamy funkcję

$$(1) \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Piszemy wówczas

$$(2) \quad F = T(f).$$

*Sprzężoną transformatą Fouriera* funkcji zespolonej mierzalnej  $F$ , określonej na  $\mathcal{R}$ , nazywamy funkcję

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy.$$

Piszemy wówczas

$$(4) \quad f = T^*(F).$$

Przyjmując

$$g(x) = f(-x)$$

stwierdzamy, że

$$T^*(f) = T(g).$$

Zatem badanie transformat sprzężonych można zawsze sprowadzić do badania transformat (1).

Główny problemat, którym będziemy zajmować się w niniejszym rozdziale, polega na wyznaczeniu warunków na to, aby równość (2) implikowała równość (4), tzn. by zachodziła równość

$$(5) \quad f = T^*(T(f)).$$