

ROZDZIAŁ XII

PRZESTRZENIE FUNKCYJNE

§ 1. Przestrzenie liniowe. W wielu zagadnieniach teorii funkcji rzeczywistych jest mowa o własnościach funkcji, należących do pewnego ustalonego zbioru funkcji E , który jest *liniowy*, tzn. spełnia następujące dwa warunki:

- (a) jeśli $f, g \in E$, to także $f + g \in E$,
- (b) jeśli $f \in E$ i $a \in \mathcal{R}$, to także $af \in E$.

Zbiór E rozważa się często jako pewną przestrzeń metryczną, przy tym odległość ϱ definiuje się w ten sposób, że najpierw każdej funkcji $f \in E$ przyporządkowuje się pewną liczbę rzeczywistą nieujemną $\|f\|$, zwaną jej *normą*, następnie przyjmuje się

$$(1) \quad \varrho(f, g) = \|f - g\|.$$

Tak na przykład w rozdziale IV badaliśmy przestrzeń $C(X)$ funkcji rzeczywistych, ciągłych, ograniczonych i przestrzeń $M(X)$ funkcji ograniczonych, które oczywiście spełniają warunki (a), (b). Okazało się przy tym, że zmetryzowanie tych przestrzeni posiada istotny sens, gdyż rzuciło ono pewne światło na pojęcie zbieżności jednostajnej.

W rozdziale VII mówiliśmy o funkcjach całkowalnych w pewnym zbiorze A względem pewnej miary μ . Zbiór $L(A, \mu)$ tych funkcji spełnia również warunki (a), (b). Bliższa analiza wykazuje, że jest celowe zmetryzowanie tego zbioru za pomocą wzoru (1), przyjmując jako normę funkcji $f \in L(A, \mu)$ liczbę

$$\|f\|_1 = \int_A |f| d\mu.$$

Zbieżność ciągu funkcji według metryki wyznaczonej przez tę normę nie pokrywa się z żadnym z rozważanych przez nas dotychczas typów zbieżności ciągów funkcyjnych.

Podobnie można wykazać (por. § 2), że zbiór $L^2(A, \mu)$ funkcji f takich, że

$$\int_A f^2 d\mu < \infty,$$

spełnia warunki (a), (b). Przyjmując jako normę liczbę

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_A f^2 d\mu}$$

otrzymujemy przestrzeń metryczną, której własności metryczne są bardzo podobne do własności przestrzeni euklidesowej. Zbieżność ciągu funkcji według metryki wyznaczonej przez tę normę również nie pokrywa się z żadnym z rozważanych dotychczas typów zbieżności ciągów funkcyjnych. Wprowadzenie tego nowego pojęcia zbieżności okazało się, jak zobaczymy później (rozdział XIII i XIV), bardzo istotne dla teorii szeregów Fouriera i — ogólniej — szeregów ortogonalnych.

Aby uchwycić ogólny charakter opisanego wyżej postępowania, polegającego na rozważaniu pewnych zbiorów funkcji rzeczywistych o własnościach (a), (b) jako przestrzeni metrycznych, a więc na pewnej geometryzacji zagadnień teorii funkcji rzeczywistych, wprowadzimy pojęcie przestrzeni liniowej i przestrzeni Banacha oraz udowodnimy kilka twierdzeń o tych przestrzeniach.

Przestrzenia liniową nazywamy zbiór E elementów (które oznaczamy będziemy najczęściej literami u, v), w którym zdefiniowane są dwa działania:

dodawanie dwu elementów przestrzeni E , przyporządkowujące każdej parze $u, v \in E$ pewien element $u + v \in E$, nazywany ich *sumą*, mnożenie elementów przestrzeni E przez liczby rzeczywiste skończone, przyporządkowujące każdej parze $a \in \mathcal{R}$, $u \in E$ pewien element $au \in E$, zwany *iloczynem* liczby a i elementu u (oznaczany także symbolem $a \cdot u$)¹⁾.

Działania te muszą przy tym spełniać następujące warunki (gdzie $u, u_1, u_2 \in E$, $a, b \in \mathcal{R}$):

- (w₁) $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$ (przemienność dodawania),
- (w₂) $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$ (łączność dodawania),
- (w₃) jeśli $u + u_1 = u + u_2$, to $u_1 = u_2$ (jednoznaczność odejmowania),
- (w₄) $a(u_1 + u_2) = au_1 + au_2$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania elementów)
- (w₅) $(a + b)u = au + bu$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania liczb),
- (w₆) $a(bu) = (ab)u$ (łączność mnożenia),
- (w₇) $1 \cdot u = u$.

Mnożenie elementów przez $\pm\infty$ nie jest w ogóle zdefiniowane.

¹⁾ Zamiast $\frac{1}{a} \cdot u$ piszemy także $\frac{u}{a}$ ($0 \neq a \in \mathcal{R}$).

Podstawiając w (w₅) $a = 1$ i $b = 0$ i korzystając z (w₇) otrzymujemy

$$u = u + 0u.$$

Stąd na mocy (w₁) i (w₂)

$$(u + v) + 0v = u + (v + 0v) = u + v = (u + 0u) + v = (u + v) + 0u.$$

Stosując (w₃) do równości $(u + v) + 0v = (u + v) + 0u$ wnioskujemy, że $0u = 0v$ dla dowolnych $u, v \in E$. Element $0u$ oznaczamy symbolem 0, podobnie jak liczbę zero i zbiór pusty, gdyż spełnia on analogiczne równanie

$$u + 0 = u \quad \text{dla dowolnego } u \in E.$$

Znakowanie to nie prowadzi do nieporozumień, gdyż zawsze z tekstu łatwo będzie można odczytać, w jakim sensie użyliśmy tu symbol 0.

Element $(-1)u$ oznaczamy będziemy symbolem $-u$. Zamiast $v + (-u)$ będziemy pisać

$$v - u.$$

Z (w₃) i (w₅) wynika, że element $u_0 = v - u$ jest jedynym elementem spełniającym równanie

$$u + u_0 = v.$$

Czytelnik znający teorię grup z łatwością sprawdzi, że zbiór E z działaniem $u + v$ jest grupą.

Przykładem przestrzeni liniowej jest zbiór wektorów swobodnych (lub — co na jedno wychodzi — zbiór punktów) przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^n$. Działania dodawania $u + v$, mnożenia au i odejmowania $v - u$ w dowolnej przestrzeni liniowej E podlegają właściwie tym samym prawom, co analogiczne działania na wektorach przestrzeni $\mathcal{R}^n$. Dokładne sprawdzenie tego faktu pozostawiamy czytelnikowi.

Innym przykładem przestrzeni liniowej jest dowolny zbiór funkcji, określonych na tym samym zbiorze A , spełniający warunki (a), (b); dodawanie i mnożenie przez liczbę jest przy tym zdefiniowane w zwykły sposób. W szczególności, $C(X)$, $M(X)$, $L(A, \mu)$ i (jak wykażemy później) $L^2(A, \mu)$ są przestrzeniami liniowymi.

Przestrzeń liniową E nazywamy *przestrzenią unormowaną* (lub *przestrzenią typu B**), jeśli każdemu elementowi $u \in E$ przyporządkowana została jednoznacznie skończona liczba rzeczywista nieujemna $\|u\|$ z zachowaniem następujących warunków:

- (n₁) $\|u\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$,
- (n₂) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,
- (n₃) $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$.

W szczególności (dla $a = -1$)

$$\| -u \| = \| u \|.$$

Liczbę $\|u\|$ nazywamy *normą* elementu $u \in E$ (dokładniej: *normą jednorodną*, gdyż w niektórych zagadnieniach, o których tu nie będziemy mówili, rozważane są normy niejednorodne, tj. nie spełniające warunków (n₃)).

Normy elementów w różnych przestrzeniach unormowanych oznaczać będziemy na ogół tym samym symbolem $\|$, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień. W przeciwnym przypadku będziemy od różniać normy dopisując znaczki u dołu, np. $\|u\|_E$ itp.

Przestrzeń unormowaną E rozważać będziemy zawsze jako przestrzeń metryczną, przyjmując jako odległość punktów $u, v \in E$ liczbę

$$\|u - v\|.$$

Tak określona odległość spełnia warunki (m₁)-(m₃) z § 1, rozdział II, gdyż

$$\|u - v\| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } u - v = 0 \text{ (por. (n}_1\text{))}, \text{ tzn. } u = v,$$

$$\|u - v\| = \|(v - u)\| = \|v - u\|, \text{ na mocy (n}_3\text{)},$$

$$\|u_1 - u_2\| = \|(u_1 - u_3) + (u_3 - u_2)\| \leq \|u_1 - u_3\| + \|u_3 - u_2\|, \text{ na mocy (n}_2\text{)}.$$

Jeżeli $u_n \rightarrow u$ w przestrzeni E , tzn. jeżeli $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ (por. rozdział II, § 2), to będziemy również mówić, że ciąg $\{u_n\}$ jest *zbieżny* do u *według normy* $\|$. Terminologia taka jest nieraz konieczna, bo w przestrzeniach unormowanych oprócz powyższej zbieżności rozważa się niekiedy także inne rodzaje zbieżności (por. § 12 B)).

1.1. *Jeżeli $u_n \rightarrow u$ i $v_n \rightarrow v$, to $u_n \pm v_n \rightarrow u \pm v$. Jeżeli $u_n \rightarrow u$ i $a_n \rightarrow a$, to $a_n u_n \rightarrow au$. Jeżeli $u_n \rightarrow u$, to także $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$.*

Inaczej mówiąc, *funkcje $u + v$, $u - v$, au oraz $\|u\|$ są ciągłe.*

Twierdzenie 1.1 wynika natychmiast z następujących nierówności:

$$\|(u_n \pm v_n) - (u \pm v)\| \leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\|,$$

$$\|a_n u_n - au\| = \|a_n(u_n - u) + (a_n - a)u\| \leq |a_n| \cdot \|u_n - u\| + |a_n - a| \cdot \|u\|,$$

$$\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\|.$$

Ostatnia nierówność dowodzi, że norma, rozważana jako funkcja na E , spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

Oczywiście $u_n \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|u_n\| \rightarrow 0$, oraz $u_n \rightarrow u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n - u \rightarrow 0$.

Przestrzeń unormowaną E nazywa się *przestrzenią Banacha* (lub *przestrzenią typu B*), jeśli jest przestrzenią metryczną zupełną, tzn. jeśli warunek

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad n, m \rightarrow \infty$$

implikuje istnienie elementu $u \in E$ takiego, że $u_n \rightarrow u$ (por. rozdział II, § 6).

Przykładami przestrzeni Banacha są: przestrzeń euklidesowa $\mathcal{R}^k$ (z normą $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2}$, gdzie jak zwykle $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$), przestrzeń $C(X)$ funkcji rzeczywistych ciągłych i ograniczonych oraz przestrzeń $M(X)$ funkcji ograniczonych (por. rozdział IV, twierdzenia 5.1 i 5.2). W szczególności przestrzenie C , c , m (por. rozdział IV, § 5 i 6) są przestrzeniami Banacha. Inne przykłady zostaną podane w §§ 2 i 3, gdzie udowodnimy również, że $L(A, \mu)$ i $L^2(A, \mu)$ są przestrzeniami Banacha.

Podzbiór E_0 przestrzeni liniowej E nazywa się *liniowy*, jeśli $u + v \in E_0$ i $au \in E_0$ dla dowolnych $u, v \in E_0$ i $a \in \mathcal{R}$, tzn. jeśli E_0 jest przestrzenią liniową przy tych samych działaniach jak w E . Podzbiór liniowy przestrzeni unormowanej jest również przestrzenią unormowaną (przy tej samej normie). Podzbiór liniowy E_0 przestrzeni Banacha E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem domkniętym w E .

Kombinacją liniową elementów $u_1, \dots, u_m$ pewnej przestrzeni liniowej E nazywamy każdy element postaci

$$(2) \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = \sum_{j=1}^m a_j u_j,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{R}$. Jeśli wszystkie liczby $a_1, \dots, a_m$ są wymierne, kombinacją liniową (2) nazywa się *wymierną*. Niech $A \subset E$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych (2), gdzie $u_1, \dots, u_m \in A$, oznaczać będziemy symbolem $\text{lin}(A)$. Z definicji wynika, że $\text{lin}(A)$ jest najmniejszym podzbiorem liniowym przestrzeni E , zawierającym zbiór A .

Mówimy, że podzbiór A przestrzeni unormowanej E jest *liniowo gęsty*¹⁾ w E , jeśli zbiór $\text{lin}(A)$ jest gęsty w E (tzn. $\overline{\text{lin}(A)} = E$). Na przykład z twierdzenia Weierstrassa (por. rozdział IV, 6.1) wynika, że zbiór A funkcji x^n ($0 \leq x \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$) jest liniowo gęsty w przestrzeni Banacha C .

1.2. *Jeśli przestrzeń unormowana E zawiera podzbiór przeliczalny D liniowo gęsty, to jest ośrodkowa.*

Mianowicie zbiór wszystkich kombinacji wymiernych elementów należących do D jest zbiorem przeliczalnym, gęstym w E .

Mówimy, że elementy $u_1, \dots, u_m$ przestrzeni liniowej E są *liniowo zależne*, jeśli istnieje liczba $a_1, \dots, a_m$, z których co najmniej jedna jest różna od zera, takie, że

$$(3) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = 0.$$

¹⁾ Termin „liniowo gęsty” wprowadzamy tutaj jako bardziej sugestywny, zamiast dotychczas używanego terminu „zamknięty” (por. np. Kaczmarz i Steinhaus [2]) lub „podstawowy” (por. Banach [5], [6]).

Elementy $u_1, u_2, \dots, u_m \in E$ są więc *liniowo niezależne*, jeśli równość (3) pociąga za sobą równość $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

Jeśli dla każdej liczby naturalnej m elementy $u_1, \dots, u_m$ są liniowo niezależne, to mówimy, że ciąg nieskończony $\{u_n\}$ jest *ciągami elementów liniowo niezależnych*.

Przestrzeń liniowa E jest *skończona wymiarowa*, jeżeli istnieje ciąg skończony $\{u_1, \dots, u_m\}$ taki, że $E = \text{lin}[u_1, \dots, u_m]$. Odrzucając ewentualnie pewne elementy u_i , możemy zakładać, że elementy $u_1, \dots, u_m$ są liniowo niezależne. W tym przypadku każdy element $u \in E$ można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej (2).

Przestrzeń liniowa E jest *nieskończona wymiarowa*, jeżeli zawiera ciąg nieskończony elementów liniowo niezależnych.

Dwie przestrzenie unormowane E i E_1 są *równoważne*, jeżeli istnieje odwzorowanie T przestrzeni E na przestrzeń E_1 takie, że ¹⁾

$$(4) \quad T(u+v) = T(u) + T(v), \quad T(au) = aT(u),$$

$$(5) \quad \|T(u)\| = \|u\|.$$

Dwie przestrzenie unormowane są *izomorficzne*, jeżeli istnieje homeomorfizm T , odwzorowujący E na E_1 , spełniający warunek (4).

Oczywiście w zagadnieniach, gdzie nie interesuje nas natura elementów przestrzeni E i E_1 , lecz jedynie ich własności, zdefiniowane przy pomocy działania dodawania, mnożenia i pojęcia normy, możemy zawsze identyfikować dwie przestrzenie równoważne E i E_1 (utożsamiając elementy u i $T(u)$). Analogiczna uwaga dotyczy pojęcia izomorfizmu w odniesieniu do własności, które mogą być zdefiniowane przy pomocy działania dodawania, mnożenia oraz topologii przestrzeni (tj. pojęcia zbliżności).

Badanie przestrzeni unormowanych i innych typów przestrzeni liniowych, stopologizowanych w pewien sposób, jest przedmiotem odrębnej teorii matematycznej, zwanej *analizą funkcyjną* ²⁾.

ĆWICZENIA. 1. Uzupełnienie (por. rozdział IV, § 5, ćwiczenie 4) E' przestrzeni unormowanej E jest przestrzenią Banacha, przy tym działania w E' są ciągłym rozszerzeniem działań w E .

¹⁾ Drugi z warunków (4) jest właściwie zbędny, bo wynika z pozostałych — por. twierdzenie 4.1. Warunki (4), (5) można zastąpić przez warunki: $T(0) = 0$, $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$. Por. Mazur i Ulam [1] lub Banach [6], str. 166.

²⁾ Książka niniejsza zawiera zaledwie niewielki fragment analizy funkcyjnej. Czytelnika interesującego się bliżej tą dziedziną odsyłamy do dzieł specjalnych, np. Banach [5], [6], Hille [1] lub Lusternik i Sobolew [1]. Twórcą analizy funkcyjnej jest Banach, który w pracach [2], [3] (por. także Banach i Steinhaus [2]) udowodnił podstawowe twierdzenia teorii.

2. Jeżeli $\|u\|$ spełnia jedynie warunek (n_2) i $\|0\| = 0$, to funkcja g , zdefiniowana wzorem (1), jest pseudometryką.

3. Podzbiór A przestrzeni liniowej E nazywa się *wypukły*, jeżeli $tu_0 + (1-t)u_1 \in A$ dla $u_0, u_1 \in A$ i $0 \leq t \leq 1$.

Udowodnić, że najmniejszym zbiorem wypukłym, zawierającym dany zbiór $B \subset E$, jest zbiór wszystkich elementów $a_0u_0 + a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, gdzie $u_0, u_1, \dots, u_n \in B$, liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ są nieujemne i $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 1$.

Uwaga. Najmniejszy zbiór wypukły, zawierający podzbiór $B \subset E$, oznaczać będziemy symbolem $\text{conv}(B)$.

4. Domknięcie podzbioru wypukłego przestrzeni unormowanej jest zbiorem wypukłym. Zbiór $\text{conv}(B)$ jest najmniejszym domkniętym zbiorem wypukłym, zawierającym zbiór B .

5. Jeżeli podzbiór B przestrzeni unormowanej E jest całkowicie ograniczony, to zbiór $\text{conv}(B)$ jest także całkowicie ograniczony.

Jeżeli E jest przestrzenią Banacha i zbiór B jest zwarty w E , to zbiór $\overline{\text{conv}(B)}$ jest zwarty ¹⁾.

6. Zbiór funkcji spełniających warunek Höldera rzędu α ze stałą M jest podzbiorem wypukłym przestrzeni $C(X)$. Zbiór funkcji spełniających warunek Höldera rzędu α jest podzbiorem liniowym przestrzeni $C(X)$.

§ 2. Przestrzeń funkcji całkowalnych w p -tej potęgze. Niech μ będzie miarą określoną na pewnym przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów przestrzeni X . Wszystkie funkcje rozważane w niniejszym paragrafie są określone na X i mierzalne μ , o ile nie zostały wyraźnie przyjęte inne założenia.

2.1 (Nierówności Höldera) ²⁾. Niech $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Dla dowolnych funkcji mierzalnych f i g

$$(1) \quad \int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Jeśli więc funkcje $|f|^p$ i $|g|^q$ są całkowalne, to iloczyn fg jest też funkcją całkowną oraz

$$(2) \quad \left| \int_X fg d\mu \right| \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Zauważmy najpierw, że dla $t > 0$

$$(3) \quad t^{1/p} \leq \frac{1}{p} t + \frac{1}{q}.$$

Istotnie, funkcja

$$\varphi(t) = \frac{1}{p} t + \frac{1}{q} - t^{1/p}$$

¹⁾ Mazur [2].

²⁾ Hölder [1]. Różne dowody nierówności Höldera i Minkowskiego (por. str. 13) oraz ich uogólnienia znajdzie czytelnik w książce Hardy-Littlewood-Pólya [1].

jest malejąca w przedziale $0;1$ i rosnąca w przedziale $1;\infty$ (czego dowodzi się, badając znak pochodnej φ') oraz $\varphi(1) = 0$. W rezultacie $\varphi(t) \geq 0$ dla $t > 0$.

Zastępując w (3) t przez a/b i mnożąc obydwie strony nierówności przez b otrzymujemy

$$(4) \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad \text{dla} \quad a \geq 0 \text{ i } b \geq 0.$$

Jeśli jedna z całek

$$(5) \quad \int_X |f|^p d\mu, \quad \int_X |g|^q d\mu$$

jest równa zero, to iloczyn fg jest funkcją równą zero prawie wszędzie (bo jedna z funkcji f, g jest prawie wszędzie równa zero — por. rozdział VII, 2.17) i nierówność (1) jest prawdziwa. Jeśli jedna z całek (5) jest nieskończona, to nierówność (1) jest również spełniona.

Założmy, że obydwie całki (5) są skończone i dodatnie i przyjmijmy

$$f_1(x) = \frac{|f(x)|^p}{\int_X |f|^p d\mu}, \quad g_1(x) = \frac{|g(x)|^q}{\int_X |g|^q d\mu}.$$

Podstawiając w (4) $f_1(x)$ zamiast a oraz $g_1(x)$ zamiast b i całkując otrzymujemy

$$\frac{\int_X |fg| d\mu}{\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \int_X f_1 d\mu + \frac{1}{q} \int_X g_1 d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

gdyż całki z funkcji f_1 i g_1 są równe jedności.

Nierówność (1) jest więc udowodniona. Nierówność (2) wynika bezpośrednio z (1) (por. rozdział VII, 2.12).

W przypadku gdy $p = q = 2$, nierówności Höldera noszą nazwę *nierówności Schwarza-Buniakowskiego*¹⁾ i mogą być zapisane w sposób następujący:

$$(6) \quad \int_X |fg| d\mu \leq \sqrt{\int_X f^2 d\mu} \cdot \sqrt{\int_X g^2 d\mu},$$

$$(7) \quad \left| \int_X fg d\mu \right| \leq \sqrt{\int_X f^2 d\mu} \cdot \sqrt{\int_X g^2 d\mu}.$$

Nierówność (6) można udowodnić w znacznie prostszy sposób niż nierówność (1). Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy całki po prawej stronie (6) są skończone. Ponieważ $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, więc całka po lewej

¹⁾ Buniakowski [1], Schwarz [1].

stronie (6) jest także skończona. Dla dowolnej liczby rzeczywistej t

$$t^2 \int_X f^2 d\mu + 2t \int_X |f| \cdot |g| d\mu + \int_X g^2 d\mu = \int_X (t|f| + |g|)^2 d\mu \geq 0,$$

a więc trójmian po lewej stronie powyższej nierówności ma wyróżnik niedodatni, tzn. zachodzi nierówność (6).

2.2 (Nierówność Minkowskiego)¹⁾. Jeśli $1 \leq p < \infty$ i funkcje $|f|^p$ i $|g|^p$ są całkowalne, to funkcja $|f+g|^p$ jest także całkowalna oraz

$$(8) \quad \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Przypadek $p = 1$ jest oczywisty.

Niech $p > 1$ i q będzie taką liczbą, że $1/p + 1/q = 1$, tzn. $q = p/(p-1)$. Ponieważ $|f+g|^p \leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$, więc funkcja $|f+g|^p$ jest całkowalna. Posługując się nierównością Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p d\mu &\leq \int_X (|f| + |g|) \cdot |f+g|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Dzieląc początkowy i końcowy człon powyższego łańcucha nierówności przez $\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$ otrzymujemy nierówność (8).

Zauważmy, że nierówność (8) jest też prawdziwa dla dowolnych funkcji mierzalnych nieujemnych.

Dla dowolnej funkcji mierzalnej f wprowadzimy oznaczenie

$$(9) \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{dla} \quad 1 \leq p < \infty$$

oraz

$$(10) \quad \|f\|_\infty = \begin{cases} \sup_{x \in X} |f(x)|, & \text{gdy} \quad \mu(X) > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad \mu(X) = 0. \end{cases}$$

Symbol $\sup_{x \in A} g(x)$ oznacza tzw. *istotny kres górny* funkcji mierzalnej g na zbiorze mierzalnym A ($\mu(A) > 0$), tzn. kres dolny liczb a takich, że $\mu\{x: (x \in A) \cdot (g(x) > a)\} = 0$ (definicja *istotnego kresu dolnego* $\inf_{x \in A} g(x)$ jest analogiczna).

¹⁾ Minkowski [1].

Zauważmy, że także

$$\sup_{x \in A} g(x) = \inf_{B} \sup_{x \in A-B} g(x),$$

gdzie B przebiega wszystkie podzbiory zbioru A miary μ zero. Istnieje przy tym zbiór B_0 miary μ zero taki, że

$$\sup_{x \in A} g(x) = \sup_{x \in A-B_0} g(x)$$

(wystarczy mianowicie przyjąć $B_0 = [x: (x \in A) \cdot (g(x) > a_0)]$, gdzie $a_0 = \sup_{x \in A} g(x)$).

Mówiąc jeszcze inaczej, istotny kres $\sup_{x \in A} g(x)$ jest to kres dolny liczb $\sup_{x \in A} g_1(x)$, gdzie g_1 przebiega zbiór wszystkich funkcji równoważnych funkcji g . Zawsze istnieje funkcja g_1 równoważna funkcji g taka, że $\sup_{x \in A} g(x) = \sup_{x \in A} g_1(x)$.

Nierówności Höldera (2) i Minkowskiego (8) możemy obecnie zapisać w następującej postaci

$$(11) \quad \left| \int_X fg d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (1 \leq p, q \leq \infty, 1/p + 1/q = 1),$$

$$(12) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Przypadek, gdy $p = 1$ i $q = \infty$, oraz przypadek, gdy $p = \infty$ i $q = 1$ w nierówności (11), wymaga właściwie oddzielnego dowodu (który pozostawiamy czytelnikowi), gdyż nie wynika bezpośrednio z 2.1. Podobnie trzeba dodatkowo udowodnić nierówność (12), gdy $p = \infty$ (co również pozostawiamy czytelnikowi).

Nierówność Höldera uogólnia się również na przypadek trzech funkcji (i – ogólniej – n funkcji):

2.3. Jeśli $1/p + 1/q + 1/r = 1$ ($1 \leq p, q, r \leq \infty$), to

$$(13) \quad \left| \int_X fgh d\mu \right| \leq \int_X |fgh| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \|h\|_r.$$

Niech $1/s = 1/p + 1/q$. Z (1) wynika, że

$$\int_X |fgh| d\mu \leq \|fg\|_s \cdot \|h\|_r.$$

Wystarczy wykazać więc, że

$$\|fg\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Jeśli $s = \infty$, to także $p = \infty$ i $q = \infty$ i nierówność powyższa jest prawdziwa. Jeśli $1 \leq s < \infty$, to $s/p + s/q = 1$, więc z nierówności Höldera (1) (gdzie p i q trzeba zastąpić przez p/s i q/s)

$$\|fg\|_s = \left(\int_X |f|^s |g|^s d\mu \right)^{1/s} \leq (\|f\|_{p/s}^s \cdot \|g\|_{q/s}^s)^{1/s} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Dla $1 \leq p \leq \infty$ niech $L^p(X, \mu)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji f mierzalnych μ , określonych (prawie wszędzie) na X , takich że $\|f\|_p < \infty$. W przypadku gdy $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ jest więc zbiorem wszystkich funkcji f całkowalnych w p -tej potęgde (tzn. takich, że $|f|^p$ jest funkcją całkowalną). $L^\infty(X, \mu)$ jest zbiorem wszystkich funkcji mierzalnych, równoważnych funkcjom ograniczonym. Funkcje równoważne, należące do $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, będziemy zawsze identyfikować.

Z nierówności Minkowskiego (12) wynika, że przestrzeń $L^p(X, \mu)$ jest przestrzenią liniową, oraz że norma $\|\cdot\|_p$ spełnia warunek (n_2) z § 1. Warunek (n_1) jest również spełniony, gdyż funkcje równe zero prawie wszędzie utożsamiamy z funkcją równą tożsamościowo zero. Ponieważ warunek (n_3) jest także spełniony, przestrzeń $L^p(X, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_p$ jest więc przestrzenią unormowaną ($1 \leq p \leq \infty$). Udowodnimy obecnie, że $L^p(X, \mu)$ jest przestrzenią zupełną, tzn.

2.4. $L^p(X, \mu)$ jest przestrzenią Banacha ($1 \leq p \leq \infty$).

Dowód w przypadku $p = \infty$ jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.2 z rozdziału IV, gdyż zbieżność $f_n \rightarrow f$ według normy $\|\cdot\|_\infty$ jest zbieżnością jednostajną ciągu $\{f_n\}$ do funkcji f na zbiorze $X - A$, gdzie A jest odpowiednio dobranym zbiorem miary zero.

W przypadku gdy $1 \leq p < \infty$, dowód oprzemy na następującej nierówności (gdzie $\eta > 0$ i $f \in L^p(X, \mu)$):

$$(14) \quad \mu(\{x: |f(x)| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta^p} (\|f\|_p)^p.$$

Istotnie, jeśli $B = \{x: |f(x)| \geq \eta\}$, to

$$(\|f\|_p)^p = \int_X |f|^p d\mu \geq \int_B |f|^p d\mu \geq \eta^p \mu(B).$$

Załóżmy, że ciąg $\{f_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni $L^p(X, \mu)$, tzn. dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba n_0 taka, że

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m > n_0.$$

Podstawiając w (14) za f funkcję $f_n - f_m$ wnioskujemy, że ciąg $\{f_n\}$ spełnia również warunek Cauchy'ego według miary (por. rozdział VI,

§ 7), zawiera więc podciąg $\{f_{r_n}\}$ zbieżny prawie wszędzie do pewnej funkcji f (por. rozdział VI, 7.6). Ponieważ

$$\int_X |f_{r_n} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon^p \quad \text{dla} \quad n, m > n_0,$$

więc przechodząc do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$ przy ustalonym $m > n_0$, i stosując lemat Fatou (rozdział VII, 3.5), otrzymujemy

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_{r_n} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon^p \quad \text{dla} \quad m > n_0.$$

Stąd wynika, że funkcja $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X, \mu)$ oraz $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$ dla $m > n_0$, tzn. $f_n \rightarrow f$ w przestrzeni $L^p(X, \mu)$, co kończy dowód zupełności tej przestrzeni.

Podstawiając w nierówności (14) $f_n - f$ zamiast f otrzymujemy twierdzenie

2.5. Jeśli $f_n \rightarrow f$ w przestrzeni $L^p(X, \mu)$ (tzn. według normy $\|\cdot\|_p$), to także $f_n \rightarrow f$ według miary μ , a więc ciąg $\{f_n\}$ zawiera podciąg zbieżny prawie wszędzie do f ($1 \leq p < \infty$).

Twierdzenie odwrotne bez dodatkowych założeń nie jest prawdziwe (por. ćwiczenie 14).

2.6. (i) Jeśli $g, f_n \in L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$), $|f_n| \leq g$ dla $n = 1, 2, 3 \dots$ i $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie (lub: według miary μ), to $f \in L^p(X, \mu)$ i $f_n \rightarrow f$ według normy $\|\cdot\|_p$ (tzn. w przestrzeni $L^p(X, \mu)$).

(ii) Jeśli $\{f_n\}$ jest ciągiem monotonicznym funkcji należących do $L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) oraz $f_n \rightarrow f \in L^p(X, \mu)$ prawie wszędzie, to także $f_n \rightarrow f$ według normy $\|\cdot\|_p$.

Dowód (i). Ponieważ $|f| \leq g$ prawie wszędzie, więc $f \in L^p(X, \mu)$. Ponieważ $|f - f_n|^p \leq (2g)^p$ prawie wszędzie, więc (por. rozdział VII, 3.6 i 3.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|^p d\mu = 0, \quad \text{tzn.} \quad \|f_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

Dowód (ii). Ciąg $\{|f_n - f|^p\}$ jest nierosnącym ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym prawie wszędzie do zera, zatem (por. rozdział VII, 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

2.7. Zbiór funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych o mierze skończonej jest liniowo gęsty w przestrzeni $L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$).

Niech $\varepsilon > 0$ i $f \in L^p(X, \mu)$. Część nieujemna f^+ funkcji f jest granicą ciągu niemalejącego funkcji prostych. Ciąg ten jest zarazem zbieżny do f^+ według normy $\|\cdot\|_p$ (por. 2.6). Istnieje więc funkcja prosta $g_1 \in L^p(X, \mu)$ taka, że $\|f^+ - g_1\|_p < \varepsilon/2$. Analogicznie stwierdzamy istnienie funkcji prostej $g_2 \in L^p(X, \mu)$ takiej, że $\|f^- - g_2\|_p < \varepsilon/2$. Funkcja $g = g_1 - g_2$ jest kombinacją liniową funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych o mierze skończonej oraz

$$\|f - g\|_p = \|(f^+ - g_1) - (f^- - g_2)\|_p \leq \|f^+ - g_1\|_p + \|f^- - g_2\|_p < \varepsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia 2.7 (por. rozdział II, 4.3).

2.8. Jeśli $1 \leq p < \infty$ i miara μ jest ośrodkowa, to przestrzeń $L^p(X, \mu)$ jest też ośrodkowa.

Z założenia istnieje przeliczalna klasa $\mathfrak{R}$ podzbiorów mierzalnych (o mierze skończonej) przestrzeni X taka, że dla każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ o mierze skończonej i dla dowolnej liczby $\eta > 0$ istnieje zbiór $B \in \mathfrak{R}$ taki, że $\mu(A - B) + \mu(B - A) < \eta$ (por. rozdział VI, § 9), tzn.

$$(15) \quad \|\chi_A - \chi_B\|_p < \eta^{1/p}.$$

Wystarczy wykazać (por. 1.2), że zbiór funkcji charakterystycznych χ_B , gdzie $B \in \mathfrak{R}$, jest liniowo gęsty w przestrzeni $L^p(X, \mu)$, tzn. że zbiór kombinacji liniowych funkcji charakterystycznych χ_B ($B \in \mathfrak{R}$) jest gęsty w tej przestrzeni. Ze względu na twierdzenie 2.7 (por. rozdział II, 4.2) wystarczy wykazać, że zbiór kombinacji liniowych funkcji charakterystycznych zbiorów należących do $\mathfrak{R}$ jest gęsty w zbiorze kombinacji liniowych funkcji charakterystycznych dowolnych zbiorów mierzalnych o mierze skończonej. To zaś wynika łatwo z (15). Istotnie, jeśli $\varepsilon > 0$ i

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}, \quad a_j \in \mathcal{R}, \quad a_j \neq 0, \quad \mu(A_j) < \infty \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, m,$$

to funkcja

$$g = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{B_j},$$

gdzie $B_j \in \mathfrak{R}$ i $\|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_p < \varepsilon/|a_j|m$, spełnia nierówność

$$\|f - g\|_p \leq \sum_{j=1}^m \|a_j \chi_{A_j} - a_j \chi_{B_j}\|_p = \sum_{j=1}^m |a_j| \cdot \|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_p < \varepsilon,$$

co dowodzi gęstości zbioru kombinacji liniowych funkcji χ_B , $B \in \mathfrak{R}$ (por. rozdział II, 4.3).

Jeśli X jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^k$, $X \in \mathcal{Q}_k$ i μ jest miarą Lebesgue'a l_k zredukowaną do zbioru X , to zamiast $L^p(X, l_k|X)$

piszemy po prostu $L^p(X)$. Jeśli $X = \overline{0;1}$, to zamiast $L^p(\overline{0;1})$ piszemy L^p . Zatem L^p ($1 \leq p < \infty$) jest przestrzenią funkcji całkowalnych w p -tej potęgze, określonych na odcinku $\overline{0;1}$, a L^∞ jest przestrzenią funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a na tym odcinku, równoważnych funkcjom ograniczonym.

W przypadku $p = 1$ piszemy $L(X, \mu)$, $L(X)$, L zamiast $L^1(X, \mu)$, $L^1(X)$, L^1 . Przestrzeń L^∞ bywa również oznaczana symbolem M .

2.9. Przestrzeń $L^p(X)$, w szczególności przestrzeń L^p , jest ośrodkowa ($1 \leq p < \infty$).

Twierdzenie 2.9 wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.8 i z ośrodkowości miary Lebesgue'a (por. rozdział VI, 9.5).

2.10. (i) Dla dowolnego ograniczonego lub nieograniczonego przedziału $Z \subset \mathcal{R}$ zbiór wszystkich funkcji schodkowych $f \in L^p(Z)$ jest gęsty w $L^p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$).

(ii) Dla dowolnego przedziału domkniętego $Z \subset \mathcal{R}$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych, określonych w Z , jest gęsty w przestrzeni $L^p(Z)$, $1 \leq p < \infty$.

Zbiór funkcji x^n , gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$ ($x \in Z$), jest liniowo gęsty w przestrzeni $L^p(Z)$, $1 \leq p < \infty$ (inaczej mówiąc, zbiór wszystkich wielomianów, rozważanych jako funkcje na przedziale Z , jest gęsty w $L^p(Z)$).

Twierdzenie, że zbiór funkcji schodkowych jest gęsty w $L(Z)$, jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.6 z rozdziału XI. Dowód gęstości zbioru funkcji schodkowych w przestrzeni $L^p(Z)$, gdzie $1 < p < \infty$, jest podobny do dowodu przypadku $p = 1$, tzn. do dowodu twierdzenia 4.6 z rozdziału XI (por. także dowód twierdzenia 2.7).

Aby udowodnić, że zbiór funkcji ciągłych jest gęsty w przestrzeni $L^p(Z)$, wystarczy wykazać (por. rozdział II, twierdzenie 4.2), że zbiór funkcji ciągłych jest gęsty w zbiorze funkcji schodkowych, tzn. że dla dowolnej funkcji schodkowej f i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła g taka, że $\|f - g\|_p < \varepsilon$ (por. rozdział II, 4.3). Niech

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

będzie podziałem przedziału $Z = \overline{a; b}$ takim, że w każdym z przedziałów $x_{j-1}; x_j$ funkcja f jest stała. Dla liczby $\eta > 0$ mniejszej od połowy długości najmniejszego z przedziałów $x_{j-1}; x_j$ niech g będzie funkcją zdefiniowaną w następujący sposób:

$$g(x) = f(x), \quad \text{gdy } a \leq x \leq x_1 - \eta$$

$$\text{lub } x_{j-1} + \eta \leq x \leq x_j - \eta \quad (j = 2, \dots, m-1), \text{ lub } x_{m-1} + \eta \leq x \leq b,$$

$$g(x) \text{ jest funkcją liniową w przedziałach } \overline{x_j - \eta; x_j + \eta}, \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

Oznaczając $M = \sup_{x \in Z} |f(x)|$ z łatwością stwierdzamy, że

$$\|f - g\|_p \leq ((m-1)2\eta(2M)^p)^{1/p}.$$

Stąd wynika, że dla dostatecznie małej liczby $\eta > 0$ jest $\|f - g\|_p < \varepsilon$, co należało dowieść.

Aby udowodnić końcową część twierdzenia 2.10 wystarczy okazać (por. rozdział II, 4.2), że zbiór wielomianów jest gęsty w zbiorze funkcji ciągłych (obydwa zbiory rozpatrywane jako podzbiory przestrzeni metrycznej $L^p(Z)$), tzn. że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ i dowolnej funkcji ciągłej f istnieje wielomian g taki, że $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Z twierdzenia Weierstrassa (por. rozdział IV, 6.1 i uwagi na str. 152) wynika, że dla dowolnej liczby $\eta > 0$ istnieje wielomian g taki, że $|f(x) - g(x)| < \eta$ dla $x \in Z$. Stąd $\|f - g\|_p \leq (\eta^p |Z|)^{1/p} = \eta |Z|^{1/p} < \varepsilon$, o ile tylko η jest dostatecznie małą liczbą.

2.11. Jeśli $\mu(X) < \infty$ i $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, to

$$(16) \quad \|f\|_p \leq \|f\|_{p'} \mu(X)^{1/p - 1/p'}$$

oraz

$$(17) \quad L^\infty(X, \mu) \subset L^{p'}(X, \mu) \subset L^p(X, \mu) \subset L(X, \mu).$$

W szczególności,

$$(18) \quad L^\infty \subset L^{p'} \subset L^p \subset L \quad \text{dla } 1 \leq p \leq p' \leq \infty.$$

Nierówność (16) wynika z nierówności Höldera, gdzie f trzeba zastąpić przez $|f|^p$, g — przez funkcję równą tożsamościowo jedności, p — przez p'/p , a q — przez $p'/(p' - p)$. Inkluzje (17) wynikają bezpośrednio z (16).

W przypadku gdy $\mu(X) = \infty$, inkluzje (17) są fałszywe.

Inkluzje (17) mają charakter czysto mnogościowy. Jeśli $p < p'$, to zbieżność według normy $\|\cdot\|_{p'}$ ciągu funkcji należących do przestrzeni $L^{p'}(X, \mu)$ jest inna niż zbieżność według normy $\|\cdot\|_p$. Dokładniej:

2.12. Jeśli $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ i ciąg $f_n \in L^{p'}(X, \mu)$ jest zbieżny według normy $\|\cdot\|_{p'}$ do funkcji $f \in L^{p'}(X, \mu)$, to także $f_n \rightarrow f$ według normy $\|\cdot\|_p$.

Twierdzenie odwrotne (w przypadku $p < p'$) nie jest na ogół prawdziwe (por. ćwiczenie 15).

Twierdzenie 2.12 wynika wprost z nierówności (16), gdzie f trzeba zastąpić przez $f_n - f$.

Jeśli $X = \mathcal{N}$, tzn. X jest zbiorem liczb naturalnych, i $\mu = l_0$ jest miarą zdefiniowaną w rozdziale VII, § 9 (tzn. $l_0(A)$ = ilość elementów zbioru $A \subset \mathcal{N}$), to zamiast $L^p(\mathcal{N}, l_0)$ piszemy l^p . Zamiast l^p piszemy l .

Elementami przestrzeni l^p ($1 \leq p < \infty$) są więc ciągi nieskończone liczb rzeczywistych $u = \{a_n\}$ takie, że

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

W szczególności, elementami przestrzeni l są ciągi nieskończone $u = \{a_n\}$ takie, że

$$\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Elementami przestrzeni l^∞ są wszystkie ciągi ograniczone $u = \{a_n\}$ z normą $\|u\| = \sup_n |a_n|$, tzn. $l^\infty = m$ zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w rozdziale IV, § 5, A).

Z twierdzenia 2.4 wynika, że l^p ($1 \leq p \leq \infty$) jest przestrzenią Banacha. Z twierdzenia 2.9 wynika, że

2.13. Przestrzeń l^p ($1 \leq p < \infty$) jest ośrodkowa. Dokładniej, zbiór elementów

$$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\},$$

$$e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\},$$

$$e_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots\},$$

$$\dots$$

jest liniowo gęsty w l^p .

Przeprowadzenie szczegółowego dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

Nierówności Höldera i Minkowskiego dla ciągów mają postać następującą:

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \beta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^q \right)^{1/q} \quad (1/p + 1/q = 1, \quad 1 < p, q < \infty),$$

$$(20) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + \beta_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Z (19) i (20) natychmiast wynikają następujące nierówności Höldera i Minkowskiego dla ciągów skończonych

$$(21) \quad \sum_{n=1}^m |a_n \beta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^m |\beta_n|^q \right)^{1/q} \quad (1/p + 1/q = 1, \quad 1 < p, q < \infty),$$

$$(22) \quad \left(\sum_{n=1}^m |a_n + \beta_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^m |\beta_n|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Przyjmując $p = 2$ w nierównościach Höldera (19) i (21) otrzymujemy następujące nierówności Cauchy'ego

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \beta_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2},$$

$$(24) \quad \sum_{n=1}^m |a_n \beta_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^m |a_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^m |\beta_n|^2}.$$

W przypadku gdy $\beta_n = 1$ dla $n = 1, \dots, m$, otrzymujemy z (24) następujące oszacowanie

$$(25) \quad \left| \sum_{n=1}^m a_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_n| \leq \sqrt{m} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^m |a_n|^2}.$$

ĆWICZENIA. 1. Niech $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$, $1/p + 1/q = 1$. W nierówności Höldera (1) zachodzi znak równości wtedy i tylko wtedy, gdy pomijając zbiór miary zero stosunek funkcji $|f|^p$ i $|g|^q$ jest stały, tzn. jeżeli istnieją liczby c_1, c_2 nierówne zero równocześnie takie, że $c_1 |f(x)|^p = c_2 |g(x)|^q$ dla prawie każdego x .

2. Niech μ i ν będą półskończonymi miarami, określonymi odpowiednio na przeliczalnie addytywnych ciałach podzbiorów przestrzeni X i Y , i niech $f(x, y)$ będzie funkcją, określoną na $X \times Y$, mierzalną względem miary produktowej $\mu \times \nu$.

Udowodnić następujące uogólnienie nierówności Minkowskiego

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y)$$

dla $1 \leq p < \infty$.

Sformułować analogiczną nierówność dla $p = \infty$.

3. Dla dowolnego ciągu podwójnego $\{a_{n,m}\}$ i $1 \leq p < \infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}|^p \right)^{1/p} \right)^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}|^p \right)^{1/p}.$$

4. Jeżeli miary μ i ν są określone na tym samym przeliczalnie addytywnym ciele zbiorów i $\nu \leq \mu$, to $L^p(X, \mu) \subset L^p(X, \nu)$.

5. Jeżeli $\mu(X) < \infty$, to

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \quad \text{dla} \quad f \in L^{\infty}(X, \mu).$$

6. Ośrodkowość miary μ jest nie tylko warunkiem dostatecznym (por. 2.8), lecz również koniecznym na to, by przestrzeń $L^p(X, \mu)$ była ośrodkowa ($1 \leq p < \infty$).

7. Dla $f, g \in L^2(X, \mu)$

$$\|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 - \left(\int_X fg d\mu \right)^2 = \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

8. Jeżeli $f \in L^{p'}(X, \mu)$, $g \in L^{p''}(X, \mu)$ oraz $1/p' + 1/p'' \leq 1$, to $fg \in L^p(X, \mu)$, gdzie $1/p = 1/p' + 1/p''$.

9. Jeżeli $f \in L^p(0; \infty)$ ($1 \leq p < \infty$) jest funkcją jednostajnie ciągłą, to $f(x) \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow \infty$.

10. Całka nieoznaczona φ funkcji $f \in L^p$ ($1 < p < \infty$) spełnia warunek Höldera rzędu $1 - 1/p$. Dokładniej,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{|\xi|^{1-1/p}} = 0.$$

11. Funkcja $(x^{1/p} \log^2(x/2))^{-1}$ należy do L^p , lecz nie należy do L^r dla $r > p$ ($1 \leq p < \infty$).

12. Funkcja $(x^{1/p}(1 + |\log x|))^{-1}$ należy do $L^p(0; \infty)$, lecz nie należy do $L^r(0; \infty)$ dla $r \neq p$ ($1 \leq p < \infty$).

13. Jeżeli $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, to $L^p \subset L^{p'}$ i $\|u\|_{p'} \leq \|u\|_p$.

14. Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \text{ i dla } 1/n \leq x \leq 1, \\ n & \text{dla } 0 < x < 1/n. \end{cases}$$

Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny wszędzie i według miary do zera, lecz nie jest zbieżny do zera w żadnej przestrzeni L^p ($1 \leq p \leq \infty$).

15. Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/p} \log(n+1) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{dla } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny do zera w przestrzeni L^p , lecz nie jest zbieżny w żadnej przestrzeni $L^{p'}$, $p' > p$.

16. Jeżeli $f, f_n \in L(X, \mu)$, $f_n \geq 0$ dla $n = 1, 2, \dots$, $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie oraz $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$, to $f_n \rightarrow f$ w przestrzeni $L(X, \mu)$.

(Wsk.: Zauważyć, że części niedodatnie różnic $f - f_n$ tworzą ciąg ograniczony funkcją $f \geq 0$.)

17. Funkcja T

$$T(f) = \text{sign } f \cdot |f|^{1/p}$$

jest homeomorfizmem, odwzorowującym przestrzeń $L(X, \mu)$ na przestrzeń $L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$)¹⁾.

(Wsk.: Skorzystać z nierówności

$$\begin{aligned} |\text{sign } a \cdot |a|^{1/p} - \text{sign } b \cdot |b|^{1/p}|^p &\leq 2^p |a - b|, \\ |\text{sign } a \cdot |a|^p - \text{sign } b \cdot |b|^p| &\leq p |a - b| (|a| + |b|)^{p-1}. \end{aligned}$$

18. Jeśli f jest funkcją całkowalną w p -tej potęgde, to dla prawie każdego x_0

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_{x_0}^{x_0+\xi} |f(x) - f(x_0)|^p dx = 0.$$

(Wsk.: Por. rozdział X, twierdzenie 5.14 i ćwiczenie 12 z § 5.)

¹⁾ Mazur [1].

19. Niech $f \in L^p(X \times Y, \mu \times \nu)$, gdzie $1 \leq p < \infty$, a μ i ν są miarami w przestrzeniach X i Y . Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją funkcje proste $g_1, \dots, g_m \in L^p(X, \mu)$ i $h_1, \dots, h_m \in L^p(Y, \nu)$ takie, że funkcja $f_0(x, y) = g_1(x)h_1(y) + \dots + g_m(x)h_m(y)$ spełnia nierówność $\|f - f_0\|_p < \varepsilon$.

20. Niech f będzie ustaloną funkcją mierzalną. Funkcja $g(p) = \|f\|_p$, określona na zbiorze $\{p: \|f\|_p < \infty\}$, jest ciągłą.

§ 3. Inne przykłady przestrzeni Banacha. Przykłady A), B), C) podane poniżej były już rozpatrywane przez nas w rozdziale IV. Dlatego podajemy tutaj tylko kilka uzupełniających uwag i oznaczeń.

A) Przestrzeń $M(X)$ wszystkich funkcji rzeczywistych, ograniczonych, określonych na pewnym zbiorze $X \neq \emptyset$ z normą

$$\|f\| = \|f\|_M = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Jeśli X jest zbiorem skończonym, k -elementowym

$$X = [a_1, a_2, \dots, a_k],$$

to przestrzeń $M(X)$ jest izomorficzna (lecz — w przypadku $k > 1$ — nierównoważna) z przestrzenią euklidesową $\mathcal{R}^k$. Odwzorowanie T , realizujące izomorfizm, jest zdefiniowane wzorem

$$T(f) = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)\} \text{ dla } f \in M(X).$$

W tym przypadku przestrzeń $M(X)$ jest ośrodkowa.

Jeśli X jest zbiorem przeliczalnym,

$$X = [a_1, a_2, \dots] \quad (a_n \neq a_m \text{ dla } n \neq m),$$

to przestrzeń $M(X)$ jest równoważna przestrzeni m wszystkich ciągów ograniczonych. Przekształcenie realizujące równoważność dane jest wzorem

$$T(f) = \{f(a_1), f(a_2), \dots\} \text{ dla } f \in M(X).$$

W tym przypadku $M(X)$ nie jest przestrzenią ośrodkową (por. rozdział IV, § 5, A). Ogólniej, jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to $M(X)$ nie jest przestrzenią ośrodkową, gdyż zbiór wszystkich funkcji charakterystycznych podzbiorów zbioru X jest nieprzeliczalny oraz

$$\|\chi_A - \chi_B\|_M = 1 \text{ dla } A \neq B, A, B \subset X.$$

B) Przestrzeń $C(X)$ funkcji ciągłych ograniczonych, określonych na pewnej przestrzeni metrycznej X (w szczególności przestrzeni C funkcji ciągłych na odcinku $[0; 1]$ z normą

$$\|f\| = \|f\|_C = \|f\|_M = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

C) Przestrzeń c ciągów zbieżnych oraz przestrzeń c_0 ciągów zbieżnych do zera z normą

$$(1) \quad \|u\| = \|u\|_M = \sup_n |a_n| \quad (u = \{a_n\}).$$

Obydwie przestrzenie są podprzestrzeniami domkniętymi przestrzeni m wszystkich ciągów ograniczonych (z tą samą definicją normy (1)). Jak zauważyliśmy w rozdziale IV, § 5, B), przestrzeń c jest równoważna przestrzeni $C(\mathcal{N}_\infty)$, gdzie $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N} + [\infty]$ jest zbiorem liczb naturalnych, powiększonym o liczbę ∞ .

Przestrzeń c jest ośrodkowa. Dokładniej, zbiór elementów

$$(2) \quad \begin{aligned} e_0 &= \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}, \\ e_1 &= \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}, \\ e_2 &= \{0, 1, 0, 0, 0, \dots\}, \\ e_3 &= \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

jest liniowo gęsty w c . Przestrzeń c_0 , jako podzbiór domknięty przestrzeni metrycznej ośrodkowej c , jest także ośrodkowa (por. rozdział II, 9.4), dokładniej — zbiór $[e_1, e_2, e_3, \dots]$ jest liniowo gęsty w c_0 .

D) Przestrzeń $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ wszystkich przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru ν , określonych na pewnym ustalonym przeliczalnie addytywnym ciecie $\mathcal{M}$ podzbiorów przestrzeni X z normą

$$\|\nu\| = \nu^*(X),$$

gdzie (por. rozdział VI, § 10) $\nu^*(A)$ oznacza wahanie bezwzględne funkcji ν na zbiorze $A \in \mathcal{M}$.

Liniowość przestrzeni $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ i spełnianie warunków (n_1) i (n_3) przez normę $\|\nu\|$ jest oczywista. Aby udowodnić warunek (n_2) , założymy, że $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{M})$ i $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Ponieważ

$$\nu = (\nu_1^+ - \nu_1^-) + (\nu_2^+ - \nu_2^-) = (\nu_1^+ + \nu_2^+) - (\nu_1^- + \nu_2^-),$$

zatem (por. rozdział VI, 10.3) $\nu^+ \leq \nu_1^+ + \nu_2^+$, $\nu^- \leq \nu_1^- + \nu_2^-$, a więc $\nu^* = \nu^+ + \nu^- \leq \nu_1^* + \nu_2^*$. W szczególności $\|\nu\| = \nu^*(X) \leq \nu_1^*(X) + \nu_2^*(X) = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$.

Aby wykazać zupełność przestrzeni $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ założymy, że ciąg $\{\nu_n\}$ elementów tej przestrzeni spełnia warunek Cauchy'ego. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{M}$

$$|\nu_n(A) - \nu_m(A)| = |(\nu_n - \nu_m)(A)| \leq (\nu_n - \nu_m)^*(A) \leq \|\nu_n - \nu_m\|.$$

Zatem ciąg $\{\nu_n(A)\}$ także spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnej liczby skończonej $\nu(A)$. Z rozdziału VI, 10.7 wynika,

że $\nu(A)$ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru $A \in \mathcal{M}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Dla n, m większych od odpowiednio dobranej liczby n_0 jest

$$|\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leq \|\nu_n - \nu_m\| \leq \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy, gdy $m \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$|(\nu_n - \nu)(A)| = |\nu_n(A) - \nu(A)| \leq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0,$$

a więc

$$\|\nu_n - \nu\| = (\nu_n - \nu)^*(X) \leq 2\varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0,$$

skąd wynika, że $\|\nu_n - \nu\| \rightarrow 0$. Zupełność przestrzeni $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ jest więc udowodniona.

W przypadku gdy $X = \overline{0;1}$, a $\mathcal{M}$ jest ciałem wszystkich podzbiorów borelowskich odcinka $\overline{0;1}$, piszemy krótko: $\mathcal{W}$ zamiast $\mathcal{W}(\mathcal{B}(\overline{0;1}))$. $\mathcal{W}$ jest więc przestrzenią wszystkich przeliczalnie addytywnych skończonych funkcji zbioru, określonych na ciecie podzbiorów borelowskich odcinka $\overline{0;1}$.

Niech $\mathcal{W}_0$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{W}$ złożoną z przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru ν bezwzględnie ciągłych względem miary Lebesgue'a l_1 , tzn. spełniających warunek

$$\nu(A) = 0 \quad \text{dla} \quad |A| = 0.$$

Przestrzeń $\mathcal{W}_0$ jest równoważna przestrzeni L . Równoważność ustala odwzorowanie T , przyporządkowujące każdej funkcji $f \in L$ funkcję $\nu = T(f)$ zdefiniowaną wzorem

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx$$

(por. rozdział VII, 4.2). Ponieważ L jest przestrzenią zupełną, więc $\mathcal{W}_0$ jest także przestrzenią zupełną.

Ogólniej, jeśli μ jest miarą półskończoną, określoną na $\mathcal{M}$, to przestrzeń $L(X, \mu)$ jest równoważna z podzbiorem przestrzeni $\mathcal{W}(\mathcal{M})$, złożonym z funkcji ν bezwzględnie ciągłych względem miary μ .

E) Przestrzeń $\mathcal{V}(Z)$ wszystkich funkcji φ o wahanii ograniczonym, określonych w pewnym przedziale (ograniczonym lub nieograniczonym) $Z \subset \mathcal{R}$, z normą

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_V = |\varphi(a)| + \Delta_\varphi^*(Z),$$

gdzie a jest lewym końcem przedziału Z . W przypadku gdy $a \notin Z$, przez $\varphi(a)$ rozumiemy $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x)$.

Liniowość przestrzeni $\mathcal{V}(Z)$ i spełnianie warunków (n_1) - (n_3) przez normę $\|\cdot\|_V$ wynika z rozdziału IX, § 3, wzory (5), (6), (8).

Aby udowodnić zupełność przestrzeni $V(Z)$, założmy, że ciąg $\{\varphi_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego według normy $\|\cdot\|_V$. Ponieważ dla dowolnego punktu $x \in Z$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq |\varphi_n(a) - \varphi_m(a)| + |(\varphi_n(x) - \varphi_m(x)) - (\varphi_n(a) - \varphi_m(a))| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|,$$

ciąg $\{\varphi_n(x)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnej liczby skończonej $\varphi(x)$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Dla n, m większych od odpowiednio dobranej liczby n_0 jest

$$\Delta_{\varphi_n - \varphi_m}^*(Z) \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_V \leq \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy dla $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy (por. rozdział IX, 5.7)

$$\Delta_{\varphi_n - \varphi}^*(Z) \leq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Ponieważ

$$|\varphi_n(a) - \varphi(a)| \leq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0,$$

więc $\|\varphi_n - \varphi\|_V \leq 2\varepsilon$ dla $n > n_0$, co dowodzi, że $\|\varphi_n - \varphi\|_V \rightarrow 0$. Zupełność przestrzeni $V(Z)$ jest więc wykazana.

Zbiór $V_0(Z)$ funkcji $\varphi \in V(Z)$ lewostronnie ciągłych wewnątrz przedziału Z (o końcach a, b) i takich, że

$$\varphi(a) = 0, \quad \text{w przypadku gdy } a \in Z,$$

$$\varphi(a+) = 0, \quad \text{w przypadku gdy } a \notin Z,$$

jest równoważny przestrzeni $W(\mathfrak{B}(Z))$. Równoważność ustala odwzorowanie $\varphi = T(\nu)$, przyporządkujące funkcji $\nu \in W(\mathfrak{B}(Z))$ jej dystrybuantę $\varphi \in V_0(Z)$ (por. rozdział XI, § 2, wzór (6) oraz twierdzenia 2.4, 2.5, 2.6).

W szczególności, $V_0(\mathcal{R})$ jest przestrzenią wszystkich lewostronnie ciągłych funkcji φ o wahanu ograniczonym, określonych na linii prostej $\mathcal{R}$, takich, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$, z normą

$$\|\varphi\|_V = \Delta_{\varphi}^*(\mathcal{R}).$$

W przypadku gdy $Z = \overline{0;1}$, piszemy V i V_0 zamiast $V(\overline{0;1})$ i $V_0(\overline{0;1})$. Przestrzeń V_0 jest więc równoważna przestrzeni W .

ĆWICZENIA. 1. Niech $\nu_n \in W(\mathfrak{M})$ dla $n = 1, 2, \dots$ i niech

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\nu_n^*(A)}{1 + \|\nu_n\|} \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Z twierdzenia Radona-Nikodyma wynika istnienie funkcji f_n takiej, że

$$\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Wykazać, że ciąg $\{\nu_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni $W(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{f_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni $L(X, \mu)$.

Uwaga. Korzystając z powyższej własności można w prosty sposób wydedukować zupełność przestrzeni $W(\mathfrak{M})$ z zupełności przestrzeni $L(X, \mu)$.

2. Dla każdej osobiwej, ciągłej funkcji $f \in V$ i dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła osobiwa $g \in V$ taka, że $\|f - g\|_V < \varepsilon$ i suma wszystkich przedziałów stałości funkcji g ma miarę Lebesgue'a 1.

3. Zbiór wszystkich funkcji ciągłych $\varphi \in V(Z)$ (ciągłych w danym punkcie $x_0 \in Z$, ciągłych jednostronnie w punkcie $x_0 \in Z$) jest domknięty w przestrzeni $V(Z)$.

4. Przestrzeń wszystkich addytywnych funkcji przedziału Φ o wahanu ograniczonym, określonych w pewnym podziorze $Z \subset \mathcal{R}^k$, z normą

$$\|\Phi\| = \Phi^*(Z)$$

jest przestrzenią Banacha.

5. Iloczyn kartezjański skończonej liczby przestrzeni unormowanych $E_1, E_2, \dots, E_m$ jest przestrzenią unormowaną przy każdej z następujących norm:

$$\|u\| = \max(\|u_1\|_{E_1}, \|u_2\|_{E_2}, \dots, \|u_m\|_{E_m}),$$

$$\|u\| = \|u_1\|_{E_1} + \|u_2\|_{E_2} + \dots + \|u_m\|_{E_m},$$

$$\|u\| = \sqrt{\|u_1\|_{E_1}^2 + \|u_2\|_{E_2}^2 + \dots + \|u_m\|_{E_m}^2},$$

gdzie $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Wszystkie te normy są równoważne, tzn. zbieżność według jednej normy implikuje zbieżność według obu pozostałych norm.

Jeżeli $E_1, E_2, \dots, E_m$ są przestrzeniami Banacha, to $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ jest przestrzenią Banacha przy każdej z wyżej wymienionych norm.

6. Przestrzeń $C_k(Q)$ funkcji f , o ciągłej k -tej pochodnej, określonych w przedziale domkniętym $Q = \overline{a; b} \subset \mathcal{R}$, z normą

$$\|f\|_{C_k} = |f(a)| + |f'(a)| + \dots + |f^{(k-1)}(a)| + \sup_{x \in Q} |f^{(k)}(x)|$$

jest przestrzenią Banacha, izomorficzna z produktem $C(Q) \times \mathcal{R}^k$.

7. Zbiór wszystkich $\nu \in W$ czysto atomowych (tzn. równych identycznie zeru poza pewnym zbiorem przeliczalnym) jest podzbiorem liniowym domkniętym przestrzeni W .

Zbiór wszystkich $\nu \in W$ osobiwych względem miary Lebesgue'a jest podzbiorem liniowym domkniętym przestrzeni W .

8. Niech $C_1(\overline{0; \infty})$ (niech $C_0(\overline{0; \infty})$) oznacza podprzestrzeń przestrzeni Banacha $C(\overline{0; \infty})$ złożoną z funkcji f takich, że granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ istnieje i jest skończona (istnieje i równa się zeru). Zbiór funkcji e^{-nx} ($n = 0, 1, 2, \dots$) jest liniowo gęsty w $C_1(\overline{0; \infty})$. Zbiór funkcji e^{-nx} ($n = 1, 2, \dots$) jest liniowo gęsty w $C_0(\overline{0; \infty})$.

(Wsk.: Zastosować podstawienie $x = -\log t$ ($0 < t \leq 1$) i twierdzenie 6.1 Weierstrassa z rozdziału IV.)

§ 4. Operacje i funkcjonały liniowe. Funkcje określone na pewnej przestrzeni liniowej E o wartościach w przestrzeni liniowej E_1 nazywamy zwykle *operacjami*. Funkcje rzeczywiste skończone określone na pewnej przestrzeni liniowej E nazywamy zwykle *funkcjonałami*. Pojęcie funkcyjonału jest szczególnym przypadkiem pojęcia operacji.

Niech E i E_1 będą przestrzeniami liniowymi unormowanymi i niech T będzie operacją, odwzorowującą E w E_1 . Mówimy, że operacja T jest *addytywna*, jeśli

$$(1) \quad T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \text{dla dowolnych } u, v \in E.$$

Warunek (1) implikuje, że $T(0) = 0$, gdyż $T(0) = T(0) + T(0)$.

Mówimy, że operacja T jest *liniowa*, jeśli jest addytywna i ciągła.

W szczególności, funkcjonal T określony na przestrzeni unormowanej E jest addytywny, jeśli spełnia warunek (1), a jest liniowy, jeśli jest addytywny i ciągły.

Przykłady. A) Niech $E = M(X)$ i niech $x_0 \in X$. Funkcjonał

$$T(f) = f(x_0) \quad \text{dla } f \in M(X)$$

jest liniowy, gdyż warunek $f_n \rightarrow f$ w $M(X)$ implikuje $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

B) Niech $E = M(X)$ i niech $0 \neq X_0 \subset X$, $E_1 = M(X_0)$. Operacja

$$T(f) = f|X_0$$

jest liniowa.

C) Niech $E = L$. Funkcjonał

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{dla } f \in L$$

jest liniowy.

D) Niech $E = E_1 = C$. Operacja T przyporządkowująca funkcji $f \in C$ funkcję $g = T(f)$ zdefiniowaną wzorem

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

jest liniowa.

E) Niech $E = L^{p'}(X, \mu)$, $E_1 = L^p(X, \mu)$, gdzie $1 \leq p \leq p' \text{ i } \mu(X) < \infty$. Operacja T , odwzorowująca $L^{p'}(X, \mu)$ w $L^p(X, \mu)$, określona wzorem

$$T(f) = f \quad \text{dla } f \in L^{p'}(X, \mu),$$

jest liniowa (por. 2.12).

Inne przykłady funkcyjonałów i operacji będą podane w §§ 5 i 6.

4.1. Operacja (funkcjonał) liniowa T jest *jednorodna*, tzn.

$$(2) \quad T(au) = aT(u) \quad \text{dla } a \in \mathcal{R}.$$

W szczególności,

$$T(-u) = -T(u).$$

Istotnie, z (1) wynika, że

$$(3) \quad T(nu) = nT(u)$$

dla $n = 1, 2, \dots$ Ponieważ $T(-nu) + T(nu) = T(0) = 0$, więc $T(-nu) = -T(nu)$, tzn. wzór (3) jest prawdziwy dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Podstawiając w (3) za u element $\frac{1}{m}u$ otrzymujemy $mT\left(\frac{1}{m}u\right) = T(u)$, tzn.

$$T\left(\frac{1}{m}u\right) = \frac{1}{m}T(u).$$

Stąd oraz z (3) wynika, że

$$T\left(\frac{n}{m}u\right) = \frac{n}{m}T(u) \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots \text{ i } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

tzn. równość (2) jest prawdziwa dla dowolnej liczby a wymiernej.

Niech teraz a będzie dowolną liczbą rzeczywistą skończoną i niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb wymiernych, zbieżnym do a . Ponieważ $a_n u \rightarrow au$ (por. 1.1), więc

$$T(au) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n u) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n T(u) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) T(u) = aT(u), \quad \text{c. b. d. o.}$$

Zauważmy, że na to, by operacja (funkcjonał) addytywna T była liniowa, wystarcza, żeby była ciągła w jednym punkcie u_0 . Istotnie, jeśli $u_n \rightarrow u$, to $u_n - u + u_0 \rightarrow u_0$, więc $T(u_n) - T(u) + T(u_0) = T(u_n - u + u_0) \rightarrow T(u_0)$, co dowodzi, że $T(u_n) \rightarrow T(u)$.

4.2. Jeśli T_1 i T_2 są operacjami (funkcjonałami) liniowymi odwzorowującymi E w E_1 (w $\mathcal{R}$) i $T_1(u) = T_2(u)$ dla $u \in D$, gdzie D jest podzbiorem liniowo gęstym przestrzeni E , to $T_1 = T_2$.

W szczególności, jeśli T jest operacją liniową odwzorowującą E w E i $T(u) = u$ dla każdego elementu u pewnego zbioru liniowo gęstego przestrzeni E , to $T(u) = u$ dla każdego $u \in E$.

Niech $u \in E$. Z założenia wynika istnienie ciągu $u_n \rightarrow u$, $u_n \in \text{lin}(D)$. Z addytywności i jednorodności operacji T_1, T_2 wynika, że $T_1(u_n) = T_2(u_n)$. Stąd

$$T_1(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_1(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_2(u_n) = T_2(u).$$

4.3. Operacja (funkcjonał) addytywna T , określona na przestrzeni unormowanej E , jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona liczba rzeczywista M taka, że

$$(4) \quad \|T(u)\| \leq M\|u\| \quad \text{dla każdego } u \in E.$$

Inaczej mówiąc: operacja addytywna T jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Lipschitza, gdyż (4) można zapisać w postaci

$$(5) \quad \|T(u_1) - T(u_2)\| \leq M \|u_1 - u_2\| \quad \text{dla} \quad u_1, u_2 \in E.$$

Przypuśćmy, że operacja T jest ciągła (a więc także jednorodna) oraz że warunek (4) nie jest spełniony. Zatem dla każdej liczby naturalnej n istnieje element $u_n \in E$ ($u_n \neq 0$) taki, że

$$\|T(u_n)\| > n \|u_n\|.$$

Niech $v_n = \frac{1}{n \|u_n\|} u_n$. Ponieważ $\|v_n\| = 1/n$, więc $v_n \rightarrow 0$, natomiast $\|T(v_n)\| = \frac{1}{n \|u_n\|} \|T(u_n)\| > 1$, co jest sprzeczne z założeniem ciągłości operacji T w punkcie 0. Warunek (4) jest więc konieczny.

Na odwrót, jeśli warunek (4) jest spełniony i $u_n \rightarrow 0$, to także $T(u_n) \rightarrow 0$. Operacja T jest zatem ciągła w punkcie $0 \in E$, a więc jest liniowa.

Niech T będzie operacją (funkcjonałem) liniową. Kres dolny liczb M spełniających warunek (4) będziemy oznaczali symbolem $\|T\|$ i nazywali normą operacji (funkcjonału) T . Kres dolny $\|T\|$ liczb M , spełniających warunek (4), również spełnia warunek (4), tzn.

4.4. Dla dowolnej operacji (funkcjonału) liniowej T , określonej na przestrzeni unormowanej E ,

$$(6) \quad \|T(u)\| \leq \|T\| \cdot \|u\| \quad \text{dla każdego } u \in E.$$

Ponadto

$$(7) \quad \|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|T(u)\|.$$

Istotnie, z (6) wynika, że $\|T\| \geq \sup_{\|u\| \leq 1} \|T(u)\|$. Z drugiej strony, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje element v taki, że $\|T(v)\| > (\|T\| - \varepsilon) \|v\|$. Podstawiając $u = v/\|v\|$, mamy $\|u\| = 1$ oraz $\|T(u)\| > \|T\| - \varepsilon$, co kończy dowód równości (7).

Zauważmy, że jeśli liczba M spełnia warunek (4) i $\|T(u)\| = M \|u\|$ dla pewnego elementu $u \neq 0$, to $M = \|T\|$. Podobnie, jeśli liczba M spełnia warunek (4) oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = M \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$ dla pewnego ciągu elementów $\{u_n\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \neq 0$, to $M = \|T\|$.

Z wzoru (7) wynika natychmiast, że norma operacji i funkcyjonałów, podanych w A), B), C), D), równa się jedności. Norma operacji podanej w przykładzie E) równa się $\mu(X)^{1/p-1/p'}$ (por. 2.11). We wszystkich tych przykładach istnieje element u o normie 1 (mianowicie funkcja równa tożsamościowo jedności) taki, że $\|T(u)\| = \|T\|$, tzn. kres górny we wzo-

rze (7) jest osiągany w pewnym punkcie. Można jednak wykazać (por. § 5, ćwiczenie 2), że kres górny po prawej stronie wzoru (7) nie zawsze jest osiągany.

Zbiór wszystkich operacji liniowych T odwzorowujących przestrzeń unormowaną E w przestrzeń unormowaną E_1 jest przestrzenią liniową unormowaną przy normie $\|T\|$ oraz przy zwykłej definicji działań:

$$T = T_1 + T_2 \quad \text{jest to operacja } T(u) = T_1(u) + T_2(u),$$

$$T = aT_1 \quad \text{jest to operacja } T(u) = aT_1(u).$$

Jedynie warunek (n_2) wymaga sprawdzenia. Jeśli $T = T_1 + T_2$, to

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \|T_1(u) + T_2(u)\| \leq \|T_1(u)\| + \|T_2(u)\| \leq \\ &\leq \|T_1\| \cdot \|u\| + \|T_2\| \cdot \|u\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \|u\|, \end{aligned}$$

skąd wynika $\|T_1 + T_2\| = \|T\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Elementem zerowym przestrzeni liniowej wszystkich operacji liniowych odwzorowujących E w E_1 jest przekształcenie odwzorowujące całą przestrzeń E na element zerowy przestrzeni E_1 .

W szczególności (przypadek $E_1 = \mathcal{R}$), zbiór wszystkich funkcyjonałów liniowych, określonych na przestrzeni unormowanej E , jest przestrzenią liniową unormowaną (przy podanej powyżej definicji normy funkcyjonału). Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią sprzężoną do E i oznaczamy symbolem E^* .

4.5. Niech E będzie przestrzenią unormowaną. Przestrzeń wszystkich operacji liniowych, przekształcających przestrzeń E w pewną przestrzeń Banacha E_1 , jest przestrzenią Banacha. W szczególności, przestrzeń sprzężona E^* jest przestrzenią Banacha.

Istotnie, jeśli ciąg $\{T_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, tzn. $\|T_n - T_m\| \rightarrow 0$, gdy $n, m \rightarrow \infty$, to dla dowolnego $u \in E$ z nierówności

$$\|T_n(u) - T_m(u)\| = \|(T_n - T_m)(u)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$$

wynika, że ciąg $\{T_n(u)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnego elementu $T(u)$. Addytywność granicy T jest oczywista. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Dla $n, m > n_0$, gdzie n_0 jest odpowiednio dobraną liczbą, jest $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$, a więc

$$\|T_n(u) - T_m(u)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Przechodząc do granicy, gdy $m \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\|T_n(u) - T(u)\| \leq \varepsilon \|u\| \quad \text{dla } n > n_0.$$

Operacja $T_n - T$ jest więc liniowa i $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ dla $n > n_0$. Operacja $T = T_n - (T_n - T)$ jest więc także liniowa oraz $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, tzn. ciąg $\{T_n\}$ jest zbieżny do T według normy w przestrzeni operacji liniowych.

Zwracamy uwagę, że należy zawsze odróżniać od siebie dwa rodzaje zbieżności ciągu operacji lub funkcjonałów liniowych: zbieżność w każdym punkcie (tzn. $\|T_n(u) - T(u)\| \rightarrow 0$ dla każdego $u \in E$) oraz zbieżność według normy w przestrzeni operacji (funkcjonałów) liniowych (tzn. $\|T_n - T\| \rightarrow 0$). Drugi rodzaj zbieżności pociąga za sobą zawsze zbieżność w każdym punkcie, gdyż

$$\|T_n(u) - T(u)\| = \|(T_n - T)(u)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|u\|,$$

twierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe (por. ćwiczenie 3).

4.6. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji liniowych, określonych w przestrzeni unormowanej E , o wartościach w przestrzeni Banacha E_1 . Niech D będzie podzbiorem liniowo gęstym przestrzeni E . Jeśli ciąg norm $\{\|T_n\|\}$ jest ograniczony (tzn. $\|T_n\| \leq M < \infty$ dla $n = 1, 2, \dots$) i jeśli ciąg $\{T_n(u)\}$ jest zbieżny dla każdego elementu $u \in D$, to ciąg $\{T_n(u)\}$ jest zbieżny dla każdego elementu $u \in E$ i granica $T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u)$ jest operacją liniową.

Z warunku $\|T_n\| \leq M$ wynika, że

$$\|T_n(u_1) - T_n(u_2)\| = \|T_n(u_1 - u_2)\| \leq \|T_n\| \cdot \|u_1 - u_2\| \leq M \|u_1 - u_2\|.$$

$\{T_n\}$ jest więc ciągiem funkcji jednakowo ciągłych (por. rozdział IV, § 9, A), zbieżnym na gęstym zbiorze $A = \text{lin}(D)$. Stąd oraz z twierdzenia 9.4, rozdział IV, wynika, że ciąg $\{T_n\}$ jest zbieżny w każdym punkcie $u \in E$ i jego granica T jest funkcją ciągłą. Addytywność operacji T jest oczywista. T jest więc operacją liniową.

4.7 (Twierdzenie Banacha-Steinhausa)¹⁾. Jeśli $\{T_n\}$ jest ciągiem operacji liniowych (funkcjonałów liniowych), określonych w przestrzeni Banacha E , takim, że

$$(8) \quad \sup_n \|T_n(u)\| < \infty \quad \text{dla} \quad u \in A,$$

gdzie A jest podzbiorem drugiej kategorii przestrzeni E , to

$$(9) \quad \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

W szczególności (por. twierdzenie 6.1 Baire'a, rozdział II),

Jeśli ciąg $\{\|T_n(u)\|\}$ jest ograniczony dla każdego elementu u przestrzeni Banacha E , to ciąg norm $\{\|T_n\|\}$ jest także ograniczony.

Niech $F_m = [u: \prod_{n=1}^{\infty} (\|T_n(u)\| \leq m)]$ dla $m = 1, 2, \dots$. Zbiory F_m są domknięte oraz $A \subset \sum_{m=1}^{\infty} F_m$. Ponieważ zbiór A nie jest pierwszej kategorii,

¹⁾ Banach i Steinhaus [2].

więc co najmniej jeden ze zbiorów F_m nie jest nigdziegęsty. Istnieje więc liczba naturalna m , liczba rzeczywista $r > 0$ i punkt $u_0 \in E$ taki, że kula domknięta $\overline{K}(u_0, r) = [u: \|u - u_0\| \leq r]$ zawiera się w F_m , tzn.

$$\|T_n(u)\| \leq m \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{jeśli} \quad \|u - u_0\| \leq r.$$

W szczególności

$$\|T_n(u_0)\| \leq m \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Jeśli $\|u\| \leq 1$, to $\|(ru + u_0) - u_0\| \leq r$, zatem $\|T_n(ru + u_0)\| \leq m$, skąd wynika, że

$$\|T_n(ru)\| \leq \|T_n(ru + u_0)\| + \|T_n(u_0)\| \leq 2m.$$

W rezultacie

$$\|T_n(u)\| \leq 2m/r \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots \text{ i } \|u\| \leq 1,$$

tzn. $\|T_n\| \leq 2m/r$ dla $n = 1, 2, \dots$, co kończy dowód twierdzenia.

4.8. Granica ciągu zbieżnego operacji (funkcjonałów) liniowych, określonych w przestrzeni Banacha, jest operacją (funkcjonałem) liniową.

Założmy, że $\|T_n(u) - T(u)\| \rightarrow 0$ dla każdego $u \in E$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(u)\| = \|T(u)\| < \infty$, więc z twierdzenia 4.7 wynika, że ciąg $\{\|T_n\|\}$ jest ograniczony. Stąd oraz z twierdzenia 4.6 (gdzie $D = E$) wynika liniowość operacji T .

4.9. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji (funkcjonałów) liniowych określonych na przestrzeni Banacha E . Zbiór $B = [u: \sup_n \|T_n(u)\| < \infty]$ jest albo pierwszej kategorii, albo identyczny z całą przestrzenią E , w zależności od tego, czy $\sup_n \|T_n\|$ jest liczbą nieskończoną, czy skończoną.

Istotnie, jeśli zbiór B jest drugiej kategorii, to z twierdzenia 4.7 wynika, że ciąg norm $\{\|T_n\|\}$ jest ograniczony. Ponieważ $\|T_n(u)\| \leq \|T_n\| \cdot \|u\|$, więc ciąg $\{\|T_n(u)\|\}$ jest ograniczony dla dowolnego $u \in E$, tzn. $B = E$.

Jeśli B jest zbiorem pierwszej kategorii, to $\sup_n \|T_n\| = \infty$, albowiem założenie ograniczoności ciągu norm implikuje, jak zauważyliśmy wyżej, równość $B = E$.

W przypadku gdy mowa jest o funkcyjonałach, we wszystkich powyższych twierdzeniach zamiast $\|T(u)\|$ należy pisać $|T(u)|$.

ĆWICZENIA. 1. Operacja, która każdej funkcji $\varphi \in V(Z)$ przyporządkowuje liczbicznie addytywną funkcję zbioru $v_\varphi = \mu_\varphi + -\mu_\varphi \in W(\mathfrak{B}(Z))$ (por. rozdział XI, § 1), jest liniowa.

2. Niech, dla każdej ustalonej liczby naturalnej m , $\{T_{m,n}\}$ będzie ciągiem operacji liniowych, odwzorowujących przestrzeń Banacha E w przestrzeń unormowaną E_m . Jeżeli dla każdej liczby naturalnej m istnieje punkt $x_m \in E$ taki, że $\sup_n \|T_{m,n}(x_m)\| = \infty$,

to istnieje taki punkt $x_0 \in E$, że

$$\sup_n \|T_{m,n}(x_0)\| = \infty \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Uwaga. Twierdzenie to nosi nazwę *zasady zagęszczania osobliwości*¹⁾.

3. Niech dla $f \in C$

$$T_n(f) = f(1/n), \quad T(f) = f(0).$$

Mamy $T_n(f) \rightarrow T(f)$ dla każdego $f \in C$, jednakże normy $\|T_n - T\|$ nie dążą do zera

4. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji liniowych, określonych na przestrzeni Banacha E . Zbiór $E_1 = [u: \sup_n \|T_n(u)\| < \infty]$ jest przestrzenią Banacha przy normie

$$\|u\|' = \|u\| + \sup_n \|T_n(u)\|.$$

5. Niech μ będzie skończoną miarą, określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X , niech $\mathfrak{M}_0$ będzie przeliczalnie addytywnym podciałem ciała $\mathfrak{M}$ i niech $\mu_0 = \mu|_{\mathfrak{M}_0}$. Dla dowolnej funkcji $f \in L(X, \mu)$ niech

$$v(A) = \int_A f d\mu \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Funkcja $v_0 = v|_{\mathfrak{M}_0}$ jest przeliczalnie addytywną skończoną funkcją zbioru, określoną na $\mathfrak{M}_0$. Z twierdzenia Radona-Nikodyma (4.2, rozdział VII) wynika, że istnieje funkcja f_0 mierzalna $\mathfrak{M}_0$ taka, że

$$v_0(A) = \int_A f_0 d\mu_0 \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad A \in \mathfrak{M}_0$$

(funkcja f_0 może być różna od f).

Przekształcenie, przyporządkowujące funkcji $f \in L(X, \mu)$ funkcję $f_0 \in L(X, \mu_0)$, jest liniowe o normie 1.

6. Niech T będzie jednojednoznaczną operacją liniową, odwzorowującą przestrzeń unormowaną E na przestrzeń unormowaną E_1 . Operacja T^{-1} , odwzorowująca E_1 na E , jest addytywna i jednorodna. Operacja T^{-1} jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

$$\alpha = \inf_{\|u\|=1} \|T(u)\|$$

jest dodatnia. W tym przypadku $\|T^{-1}\| = 1/\alpha$.

Uwaga. Można udowodnić, że w przypadku gdy E i E_1 są przestrzeniami Banacha oraz $T(E) = E_1$, operacja T^{-1} jest zawsze liniowa²⁾.

7. Niech E będzie skończeniem wymiarową przestrzenią unormowaną i niech $\{u_1, \dots, u_k\}$ będzie ciągiem liniowo niezależnych elementów tej przestrzeni takim, że $E = \text{lin}[u_1, \dots, u_k]$. Operacja T , przyporządkowująca punktowi $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \in \mathcal{R}^k$ punkt $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_k u_k \in E$ jest liniowa i jednojednoznaczna. Operacja T^{-1} jest także liniowa. Zatem przestrzenie $\mathcal{R}^k$ i E są izomorficzne.

(Wsk.: Liniowość operacji T^{-1} wynika z faktu, że $\inf_{\|x\|=1} \|T(x)\| > 0$, gdyż ten kres dolny jest osiągany w pewnym punkcie $x_0 \in \mathcal{R}^k$, $\|x_0\| = 1$. Por. ćwiczenie 6.)

8. Niech E będzie skończeniem wymiarową przestrzenią unormowaną i niech $\{u_1, \dots, u_k\}$ będzie ciągiem liniowo niezależnych elementów tej przestrzeni, $E = \text{lin}[u_1, \dots, u_k]$. Każdy element $u \in E$ jest więc postaci $u = \sum_{j=1}^k \alpha_j u_j$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{R}$).

¹⁾ Banach i Steinhaus [2].

²⁾ Twierdzenie to, będące jednym z podstawowych twierdzeń analizy funkcyjnej, zostało udowodnione przez S. Banacha. Por. Banach [5], str. 43.

Funkcjonał T_j ($j = 1, \dots, k$), przyporządkowujący elementowi u współczynnik a_j jest liniowy.

(Wsk.: $T_j(u) = F_j(T^{-1}(u))$, gdzie T jest operacją zdefiniowaną w ćwiczeniu 7, a F_j jest funkcjonałem liniowym, przyporządkowującym punktowi $x \in \mathcal{R}^k$ jego j -tą współrzędną.)

9. Operacja liniowa T , odwzorowująca przestrzeń unormowaną E w przestrzeń unormowaną E_1 , jest *skończeniem wymiarową*, jeżeli przestrzeń liniowa $T(E) \subset E_1$ (tzn. przeciwdziałina odwzorowania T) jest skończeniem wymiarową.

Jeżeli $F_1, \dots, F_k$ są funkcjonałami liniowymi na E oraz $u_1, \dots, u_k \in E_1$, to operacja

$$T(u) = F_1(u)u_1 + \dots + F_k(u)u_k$$

jest skończeniem wymiarową. Udowodnić, że — na odwrót — każda skończeniem wymiarową operacja liniowa może być przedstawiona w tej postaci.

(Wsk.: Niech $T(E) = \text{lin}[u_1, \dots, u_k]$, gdzie $u_1, \dots, u_k$ — liniowo niezależne. Funkcjonał F_j jest superpozycją operacji T i funkcjonału liniowego T_j , który elementowi $v = \sum_{j=1}^k a_j u_j \in T(E)$ przyporządkowuje liczbę a_j . Por. ćwiczenie 8.)

10. Operacja liniowa T , odwzorowująca przestrzeń unormowaną E w przestrzeń unormowaną E_1 , jest *pełnociągłą*, jeżeli dla dowolnego zbioru ograniczonego $A \subset E$ zbiór $T(A)$ jest zwarty w przestrzeni E_1 (inaczej mówiąc, jeżeli dla dowolnego ciągu elementów $u_n \in E$ o normach wspólnie ograniczonych można z ciągu $T(u_n)$ wyjąć podciąg zbieżny do pewnego elementu $v \in E_1$). Na przykład każda operacja skończeniem wymiarowa jest pełnociągłą.

Niech T, T_n będą operacjami liniowymi, odwzorowującymi przestrzeń unormowaną E w przestrzeń Banacha E_1 . Wykazać, że jeśli operacje T_n są pełnociągłe (w szczególności, jeśli operacje T_n są skończeniami wymiarowymi) i $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, to operacja T jest także pełnociągłą.

(Wsk.: Jeśli $A \subset E$ jest zbiorem ograniczonym, to zbiory $T_n(A)$ są całkowicie ograniczone. Aby wykazać, że zbiór $T(A)$ jest całkowicie ograniczony, skorzystać np. z rozdziału II, § 7, ćwiczenie 6 lub 7.)

11. Niech $\tau(x, y)$ będzie funkcją rzeczywistą ciągłą, określoną w prostokącie $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$. Operacja liniowa $g = T(f)$, gdzie

$$g(x) = \int_a^\beta \tau(x, y) f(y) dy,$$

odwzorowująca $C(\overline{\alpha}; \overline{\beta})$ w $C(\overline{\alpha}; \overline{\beta})$, jest pełnociągłą.

(Wsk.: Por. rozdział IV, § 10, ćwiczenie 1.)

12. Superpozycja dwu operacji liniowych jest pełnociągłą, jeśli jedna z tych operacji jest pełnociągłą.

13. Niech E będzie przestrzenią wszystkich ciągów $u = \{a_n\}$, których wszystkie wyrazy z wyjątkiem skończonej liczby są równe zeru. E jest przestrzenią liniową unormowaną, jeśli jako normę w E przyjmie normę $\|\cdot\|_p$ z przestrzeni $\mathcal{P}$. Funkcjonał

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{dla} \quad u = \{a_n\} \in E$$

jest addytywny i jednorodny. Jeśli $p = 1$, funkcjonal F jest liniowy. Jeżeli $1 < p \leq \infty$, funkcjonal F nie jest liniowy.

14. Niech E będzie przestrzenią zdefiniowaną w ćwiczeniu 13. Ciąg funkcyjnowy liniowych

$$F_n(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \quad (u = \{\alpha_j\} \in E)$$

jest zbieżny dla każdego $u \in E$ oraz $\|F_n\| = n^{1-1/p}$. Zatem $\|F_n\| \rightarrow \infty$, gdy $1 < p \leq \infty$.

Uwaga. Przykład ten wskazuje, że założenie zupełności przestrzeni E w twierdzeniu Banacha-Steinhausa 4.7 jest istotne.

§ 5. Funkcjonały liniowe i operacje całkowe w przestrzeni funkcji całkowalnych w p -tej potędze. W paragrafie niniejszym μ oznacza stale pewną miarę, określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów pewnej przestrzeni X .

W sformułowaniu wielu twierdzeń będziemy zakładać, że miara μ spełnia następujący warunek:

(s) Każdy zbiór mierzalny miary nieskończonej zawiera podzbiór miary skończonej dodatniej.

Oczywiście miara półskończona (i skończona) spełnia zawsze warunek (s).

5.1. Niech $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, i niech $g \in L^q(X, \mu)$. Wzór

$$(1) \quad F(f) = \int_X fg d\mu \quad \text{dla} \quad f \in L^p(X, \mu)$$

definiuje funkcjonal liniowy w przestrzeni $L^p(X, \mu)$, przy tym

$$(2) \quad \|F\| = \|g\|_q, \quad \text{gdy} \quad 1 \leq q < \infty.$$

Równość (2) jest prawdziwa również w przypadku $q = \infty$, jeśli miara μ posiada własność (s). Bez tego założenia w przypadku $q = \infty$ prawdziwa jest tylko nierówność $\|F\| \leq \|g\|_\infty$.

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy funkcja g nie jest równoważna zeru.

Liniowość funkcyjnowa F , zdefiniowanego wzorem (1), oraz nierówność $\|F\| \leq \|g\|_q$ wynika natychmiast z nierówności Höldera (por. § 2, wzór (11) oraz twierdzenie 4.3).

Jeśli $1 < p < \infty$, to przyjmując $f(x) = |g(x)|^{q/p} \cdot \text{sign } g(x)$ mamy $0 \neq f \in L^p(X, \mu)$ oraz $F(f) = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, skąd wynika równość (2). Podobnie w przypadku $p = \infty$, $q = 1$ przyjmując $f(x) = \text{sign } g(x)$ mamy $0 \neq f \in L^\infty(X, \mu)$ oraz $F(f) = \|g\|_1 \cdot \|f\|_\infty$, co również dowodzi równości (2). Załóżmy obecnie, że $p = 1$, $q = \infty$. Zbiór $A_n = [x: |g(x)| \geq \|g\|_\infty - 1/n]$ ma miarę dodatnią, więc na mocy (s) zawiera podzbiór mierzalny B_n o mierze dodatniej skończonej.

Funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B_n)} \text{sign } g(x) & \text{dla} \quad x \in B_n, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in X - B_n \end{cases}$$

należy do $L(X, \mu)$, $\|f_n\|_1 = 1$ oraz $F(f_n) \geq \|g\|_\infty - 1/n$ dla dostatecznie dużych n , skąd wynika, że

$$\|g\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |F(f)| = \|F\|.$$

Równość (2) jest więc prawdziwa także i w tym przypadku.

5.2¹⁾. Niech μ będzie miarą spełniającą warunek (s), $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Jeśli g jest funkcją mierzalną, określoną na X , i jeśli dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ całka

$$(3) \quad F(f) = \int_X fg d\mu$$

istnieje i jest skończona, to $g \in L^q(X, \mu)$ i F jest funkcjonalem liniowym.

W przypadku gdy $p = \infty$ ($q = 1$), założenie, że miara spełnia warunek (s), jest zbędne.

Jeśli $p = \infty$, to przyjmując $f(x) = 1$ dla każdego $x \in X$, wnioskujemy z (3), że funkcja g jest całkowalna, tzn. $g \in L(X, \mu)$.

Założmy, że $1 \leq p < \infty$.

A) Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy miara μ jest półskończona, tzn. X jest sumą ciągu wstępującego zbiorów mierzalnych $\{X_n\}$ o mierze skończonej. Niech

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \in X - X_n, \\ g(x), & \text{gdy} \quad x \in X_n \text{ i } |g(x)| \leq n, \\ n \text{sign } g(x), & \text{jeśli} \quad x \in X_n \text{ i } |g(x)| > n. \end{cases}$$

Ponieważ $g_n \in L^q(X, \mu)$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc wzór

$$F_n(f) = \int_X fg_n d\mu \quad \text{dla} \quad f \in L^p(X, \mu)$$

definiuje ciąg funkcyjnowy liniowych, określonych w przestrzeni $L^p(X, \mu)$ (por. 5.1). Dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X fg_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} fg_n d\mu = \int_X fg d\mu = F(f),$$

ponieważ $g_n \rightarrow g$ oraz $|fg_n| \leq |fg| \in L(X, \mu)$ (por. rozdział VII, 3.6). Stąd oraz z twierdzenia 4.8 i twierdzenia 4.7 Banacha-Steinhausa wynika, że $F(f)$ jest funkcjonalem liniowym oraz że (por. 5.1)

$$\sup_n \|g_n\|_q = \sup_n \|F_n\| < \infty.$$

Z drugiej strony,

$$\|g\|_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_q,$$

skąd

$$\|g\|_q < \infty, \quad \text{c. b. d. o.}$$

¹⁾ Riesz [2].

B) Rozważymy obecnie przypadek ogólniejszy, gdy miara μ spełnia jedynie warunek (s).

Niech $A \in \mathfrak{M}$ będzie dowolnym zbiorem miary μ półskończonej. Rozważając wszystkie funkcje, należące do $L^p(X, \mu)$, równe zero poza zbiorem A , stwierdzamy, że całka $\int_A fg d\mu$ jest skończona dla dowolnej funkcji $f \in L^p(A, \mu)$. Z poprzednio udowodnionej części twierdzenia 5.2 wynika, że $g|_A \in L^q(X, \mu)$, tzn.

(4) $\|g|_A\|_q < \infty$ dla każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ miary półskończonej.

Jeśli $A_1 \subset A_2$, to

$$\|g|_{A_1}\|_q \leq \|g|_{A_2}\|_q.$$

Niech a oznacza kres górny liczb $\|g|_A\|_q$, gdzie $A \in \mathfrak{M}$ jest zbiorem miary μ półskończonej, i niech $A_n \in \mathfrak{M}$ będzie ciągiem zbiorów miary półskończonej takim, że $\|g|_{A_n}\|_q \rightarrow a$. Zbiór $B = A_1 + A_2 + \dots$ ma też miarę półskończoną oraz

$$\|g|_{A_n}\|_q \leq \|g|_B\|_q \leq a,$$

skąd dla $n \rightarrow \infty$ wynika (por. wzór (4)), że

$$a = \|g|_B\|_q < \infty.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $1 < p$, tzn. $q < \infty$. W tym przypadku wystarczy udowodnić, że $g(x) = 0$ dla prawie każdego $x \in X - B$, gdyż stąd bezpośrednio wynika, że $\|g\|_q = \|g|_B\|_q < \infty$, tzn. $g \in L^q(X, \mu)$.

Przypuśćmy, że zbiór $D = [x: (x \in X - B) \cdot (g(x) \neq 0)]$ ma miarę dodatnią. Zatem dla pewnej liczby naturalnej m zbiór

$$D_0 = [x: (x \in X - B) \cdot (|g(x)| \geq 1/m)]$$

ma miarę dodatnią (bo D jest sumą zbiorów tej postaci, gdy $m = 1, 2, \dots$). Niech C będzie podzbiorem zbioru D_0 , $0 < \mu(C) < \infty$. Ponieważ $|g(x)| \geq 1/m$ dla $x \in C$, więc

$$\int_C |g|^q d\mu > 0.$$

Zbiór $B + C$ ma miarę półskończoną, więc

$$a \geq \|g|_{B+C}\|_q = \left(\int_B |g|^q + \int_C |g|^q \right)^{1/q} > \left(\int_B |g|^q \right)^{1/q} = \|g|_B\|_q = a.$$

Założenie, że zbiór D ma miarę dodatnią, prowadzi więc do sprzeczności, c. n. d.

Rozpatrzmy obecnie przypadek $p = 1$, $q = \infty$. Wystarczy okazać, że $|g(x)| \leq a$ dla prawie każdego $x \in X$, gdyż stąd bezpośrednio wynika, że $\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)| \leq a < \infty$, tzn. $g \in L^\infty(X, \mu)$.

Przypuśćmy, że zbiór $[x: |g(x)| > a]$ ma miarę dodatnią. Zatem dla pewnej liczby naturalnej m zbiór $D_1 = [x: |g(x)| \geq a + 1/m]$ ma miarę dodatnią. Niech C będzie podzbiorem zbioru D_1 , $0 < \mu(C) < \infty$. Ponieważ $|g(x)| \geq a + 1/m$ dla $x \in C$, więc

$$a < a + 1/m \leq \sup_{x \in C} |g(x)| = \|g|_C\|_\infty \leq a,$$

co daje sprzeczność.

5.3¹⁾. Jeżeli $1 < p < \infty$, to każdy funkcyjonał liniowy F w przestrzeni $L^p(X, \mu)$ ma postać

$$F(f) = \int fg d\mu \quad \text{dla} \quad f \in L^p(X, \mu),$$

gdzie $g \in L^q(X, \mu)$ ($1/p + 1/q = 1$).

Twierdzenie powyższe jest prawdziwe również w przypadku $p = 1$, jeżeli miara μ jest półskończona.

A) Udowodnimy najpierw twierdzenie 5.3 w przypadku $1 \leq p < \infty$ przy założeniu, że miara μ jest półskończona. Niech $X = X_1 + X_2 + \dots$ będzie rozkładem przestrzeni X na sumę zbiorów mierzalnych rozłącznych o mierze skończonej.

Jeśli $\{B_n\}$ jest ciągiem rozłącznych zbiorów mierzalnych i $B = B_1 + B_2 + \dots$, $\mu(B) < \infty$, to ciąg $\chi_{B_1} + \chi_{B_2} + \dots + \chi_{B_n}$ jest zbieżny monotonicznie do funkcji χ_B , a więc jest także zbieżny w przestrzeni $L^p(X, \mu)$ (por. 2.6 (ii)). W rezultacie

$$(5) \quad F(\chi_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\chi_{B_1} + \dots + \chi_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\chi_{B_n}).$$

Stąd wynika, że wzór

$$v_m(B) = F(\chi_B) \quad \text{dla zbiorów mierzalnych } B \text{ zawartych w } X_m$$

definiuje przeliczalnie addytywną skończoną funkcję v_m zbioru. Ponieważ funkcja v_m jest bezwzględnie ciągła względem miary μ , więc z twierdzenia Radona-Nikodyma (por. rozdział VII, 4.2) wynika, że istnieje funkcja g_m , określona na X_m , taka, że

$$(6) \quad F(\chi_B) = \int_B g_m d\mu = \int_{X_m} \chi_B g_m d\mu \quad \text{dla} \quad B \subset X_m.$$

Oznaczmy $g(x) = g_m(x)$ dla $x \in X_m$, $m = 1, 2, \dots$. Funkcja g jest mierzalna i określona na całej przestrzeni X .

¹⁾ Przypadek $p > 1$ udowodnił Riesz [2]. Przypadek $p = 2$ udowodnił wcześniej Fréchet [1]. Przypadek $p = 1$ udowodnił Steinhaus [2].

Z (6) i (5) wynika, że dla dowolnego zbioru B miary skończonej

$$\int_X \chi_B g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} \chi_{B \cap X_n} g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} F(\chi_{B \cap X_n}) = F(\chi_B),$$

tzn.

$$(7) \quad F(f) = \int_X f g d\mu$$

dla dowolnej funkcji charakterystycznej f zbioru miary skończonej. Stąd od razu wynika, że wzór (7) jest również prawdziwy, gdy $f \in L^p(X, \mu)$ jest funkcją prostą.

Niech $A_1 = [x: g(x) \geq 0]$ i $A_2 = [x: g(x) < 0]$.

Niech $f \in L^p(X, \mu)$ będzie funkcją nieujemną. Funkcja f jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych $f_n \in L^p(X, \mu)$. Ponieważ $\{f_n \chi_{A_1}\}$, $\{f_n \chi_{A_2}\}$, $\{f_n \chi_{A_1} g\}$, $\{-f_n \chi_{A_2} g\}$ są niemalejącymi ciągami funkcji nieujemnych, zbieżnymi odpowiednio do $f \chi_{A_1}$, $f \chi_{A_2}$, $f \chi_{A_1} g$, $-f \chi_{A_2} g$, oraz

$$(8) \quad F(f \chi_{A_1}) = \int_X f \chi_{A_1} g d\mu, \quad F(f \chi_{A_2}) = - \int_X (-f \chi_{A_2} g) d\mu,$$

na podstawie wyżej uczynionej uwagi o funkcjach prostych, więc (por. 2.6 (ii) i rozdział VII, 3.1) dla $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$F(f \chi_{A_1}) = \int_X f \chi_{A_1} g d\mu, \quad F(f \chi_{A_2}) = \int_X f \chi_{A_2} g d\mu.$$

W rezultacie

$$F(f) = F(f \chi_{A_1}) + F(f \chi_{A_2}) = \int_X f g d\mu,$$

gdyż $\chi_{A_1} + \chi_{A_2} = 1$. Zatem wzór (7) jest prawdziwy dla dowolnej nieujemnej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$.

Stąd wynika, że równość (7) zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ (przedstawiając f jako różnicę części nieujemnej i niedodatniej). Z twierdzenia 5.2 wynika, że $g \in L^q(X, \mu)$.

B) Załóżmy obecnie, że μ jest dowolną miarą i $1 < p < \infty$. Przypadek B) wydedukujemy z udowodnionego już przypadku A). Załóżmy, że F jest funkcjonałem liniowym na $L^p(X, \mu)$.

Niech $A \in \mathfrak{M}$. Dla dowolnej funkcji $f \in L^p(A, \mu)$ oznaczmy

$$F_A(f) = F(\tilde{f}),$$

gdzie $\tilde{f} \in L^p(X, \mu)$ jest funkcją zdefiniowaną wzorami

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \in X - A. \end{cases}$$

F_A jest więc funkcjonałem liniowym na $L^p(A, \mu)$ o normie $\|F_A\|$. Jeśli $A, B \in \mathfrak{M}$ i $A \subset B$, to

$$(9) \quad \|F_A\| \leq \|F_B\|.$$

Istotnie, jeśli f jest elementem przestrzeni $L^p(A, \mu)$ o normie ≤ 1 , to funkcja

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \in B - A \end{cases}$$

jest elementem przestrzeni $L^p(B, \mu)$ o tej samej normie, przy tym $F_A(f) = F_B(f_1)$. Ponieważ $\|f_1\|_p \leq 1$, więc

$$|F_A(f)| = |F_B(f_1)| \leq \|F_B\|.$$

Stąd

$$\|F_A\| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |F_A(f)| \leq \|F_B\|.$$

Niech α będzie kresem górnym liczb $\|F_A\|$, gdzie $A \in \mathfrak{M}$ jest dowolnym zbiorem miary μ półskończonej. Niech $\{A_n\}$ będzie takim ciągiem zbiorów miary μ półskończonej, że $\|F_{A_n}\| \rightarrow \alpha$. Zbiór $B = A_1 + A_2 + \dots$ ma też miarę półskończoną. Z (9) wynika, że $\|F_{A_n}\| \leq \|F_B\| \leq \alpha$, co daje równość

$$(10) \quad \|F_B\| = \alpha.$$

Wykażemy teraz, że dla dowolnej funkcji $f_0 \in L^p(X, \mu)$

$$(11) \quad \text{jeśli } f_0(x) = 0 \text{ dla } x \in B, \text{ to } F(f_0) = 0.$$

Istotnie, zbiór $C = [x: f_0(x) \neq 0]$ ma miarę półskończoną (por. rozdział VII, 2.18), tę samą własność ma zbiór $B + C$. Z A) wynika, że

$$(12) \quad F_{B+C}(f) = \int_{B+C} f g d\mu \quad \text{dla wszystkich } f \in L^p(B+C, \mu),$$

gdzie $g \in L^q(B+C, \mu)$. Ponadto (por. 5.1)

$$(13) \quad \|F_B\| = \alpha \geq \|F_{B+C}\| = \left(\int_{B+C} |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \left(\int_B |g|^q d\mu + \int_C |g|^q d\mu \right)^{1/q},$$

ponieważ zbiory B i C są rozłączne. Z (12) wynika również, że

$$(14) \quad F_B(f) = \int_B f g d\mu \quad \text{dla } f \in L^p(B, \mu),$$

co otrzymuje się rozszerzając dowolną funkcję $f \in L^p(B, \mu)$ na zbiór $B+C$ za pomocą wzoru: $f(x) = 0$ dla $x \in C$. W rezultacie

$$\left(\int_B |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \|F_B\|.$$

Stąd oraz z (13) wynika, że $g(x) = 0$ dla prawie każdego $x \in C$. Zatem

$$F(f_0) = F_{B+C}(f_0) = \int_B f_0 g d\mu + \int_C f_0 g d\mu = 0,$$

co kończy dowód własności (11).

Niech $g \in L^p(B, \mu)$ będzie funkcją spełniającą (14) (por. A)). Rozszerzmy funkcję g na całą przestrzeń X przyjmując $g(x) = 0$ dla $x \in X - B$. Dla dowolnej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ niech

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in B, \\ 0 & \text{dla } x \in X - B \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in B, \\ f(x) & \text{dla } x \in X - B. \end{cases}$$

Ponieważ $f = f_1 + f_0$, więc na mocy (11) i (14)

$$F(f) = F(f_1) + F(f_0) = F(f_1) = F_B(f_1|B) = \int_B fg d\mu = \int_X fg d\mu,$$

c. b. d. o.

Z 5.3 oraz 5.1 natychmiast wynika, że

5.4. Jeśli $1 < p < \infty$, to przestrzeń $L^p(X, \mu)^*$ wszystkich funkcyjów liniowych na $L^p(X, \mu)$ jest równoważna przestrzeni $L^q(X, \mu)$, gdzie $1/p + 1/q = 1$.

Uwaga powyższa jest prawdziwa również w przypadku $p = 1$ przy założeniu, że miara μ jest półskończona.

Z 5.1 (por. także § 4, wzór (7)) wynika bezpośrednio następująca uwaga.

5.5. Niech $1/p + 1/q = 1$. Dla dowolnej funkcji $g \in L^q(X, \mu)$ ($1 \leq q < \infty$)

$$(15) \quad \|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int fg d\mu \right|.$$

Wzór (15) jest prawdziwy również w przypadku $q = \infty$, jeśli miara μ ma własność (s), w szczególności jeżeli jest półskończona.

Przyjmując w twierdzeniach 4.7 i 4.9 $T_n(f) = \int fg d\mu$ dla $f \in E = L^p(X, \mu)$, otrzymujemy na mocy 5.1 następujące twierdzenie:

5.6. Niech $1/p + 1/q = 1$ i niech $g_n \in L^q(X, \mu)$ dla $n = 1, 2, \dots$ ($1 \leq q < \infty$). Jeśli dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$

$$\sup_n \left| \int fg_n d\mu \right| < \infty,$$

to także

$$\sup_n \|g_n\|_q < \infty.$$

Jeśli dla pewnej funkcji $f_0 \in L^p(X, \mu)$

$$\sup_n \left| \int f_0 g_n d\mu \right| = \infty,$$

to zbiór tych funkcji $f \in L^p(X, \mu)$, dla których $\sup_n \left| \int fg_n d\mu \right| < \infty$, jest pierwszej kategorii w przestrzeni $L^p(X, \mu)$.

Twierdzenie powyższe pozostaje prawdziwe również w przypadku $q = \infty$ przy założeniu, że μ jest miarą półskończoną, lub — ogólniej — miarą spełniającą warunek (s).

W przypadku gdy $q = 1$ ($p = \infty$) i μ jest miarą skończoną, założenia twierdzenia 5.4 można osłabić: zamiast wszystkich funkcji ograniczonych f wystarczy rozważać jedynie funkcje charakterystyczne zbiorów mierzalnych. Mianowicie

5.7. Niech $g_n \in L(X, \mu)$ dla $n = 1, 2, \dots$, $\mu(X) < \infty$. Jeśli dla każdego zbioru mierzalnego A

$$\sup_n \left| \int_A g_n d\mu \right| < \infty,$$

to

$$(16) \quad \sup_n \|g_n\|_1 = \sup_n \int_X |g_n| d\mu < \infty.$$

Przyjmijmy w twierdzeniu 10.6 z rozdziału VI

$$\nu_n(A) = \int_A g_n d\mu \quad \text{dla } A \in \mathfrak{M}.$$

Ciąg $\{\nu_n\}$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia 10.8 z rozdziału VI, istnieje więc stała a taka, że

$$\left| \int_A g_n d\mu \right| \leq a < \infty \quad \text{dla dowolnego zbioru } A \in \mathfrak{M} \text{ i } n = 1, 2, \dots$$

Podstawiając za A zbiory $[x: g_n(x) \geq 0]$ oraz $[x: g(x) < 0]$, otrzymujemy stąd

$$\|g_n\|_1 = \int_X |g_n| d\mu \leq 2a \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Przyjmując w twierdzeniu 5.4, że X = zbiór liczb naturalnych $\mathfrak{N}$ i $\mu(A) = l_0(A)$ = ilość elementów zbioru $A \subset X$, wnioskujemy, że ogólna postać funkcyjonału liniowego w przestrzeni l^p ($1 \leq p < \infty$) jest

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \quad \text{dla } u = \{\alpha_n\} \in l^p,$$

gdzie $\{\beta_n\} \in l^q$ ($1/p + 1/q = 1$). Z twierdzenia 5.2 wynika, że

5.8. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $u = \{a_n\} \in \ell^p$, to $v = \{\beta_n\} \in \ell^q$ ($1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$)¹⁾.

Następujący lemat będzie użyteczny przy dowodzie twierdzenia 5.10.

5.9. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji liniowych, odwzorowujących pewną przestrzeń Banacha E w przestrzeń $L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) i niech T będzie operacją addytywną, odwzorowującą przestrzeń E w $L^p(X, \mu)$. Jeśli dla każdej funkcji $g \in L^q(X, \mu)$ ($1/p + 1/q = 1$) i dla każdego elementu $u \in E$

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X T_n(u) g d\mu = \int_X T(u) g d\mu,$$

to T jest operacją liniową.

Twierdzenie jest również prawdziwe w przypadku $p = \infty$ przy założeniu, że miara μ ma własność (s).

Z 5.6 i (17) wynika, że $\sup_n \|T_n(u)\|_p < \infty$ dla każdego elementu $u \in E$.

Stąd oraz z twierdzenia Banacha-Steinhausa 4.7 wynika, że $\sup_n \|T_n\| = a < \infty$. Ponieważ dla $g \in L^q(X, \mu)$

$$\left| \int_X T_n(u) g d\mu \right| \leq \|T_n(u)\|_p \cdot \|g\|_q \leq \|T_n\| \cdot \|u\| \cdot \|g\|_q \leq a \|u\| \cdot \|g\|_q,$$

więc dla $n \rightarrow \infty$ (por. (17))

$$\left| \int_X T(u) g d\mu \right| \leq a \|u\| \cdot \|g\|_q \quad \text{dla} \quad g \in L^q(X, \mu).$$

W rezultacie (por. 5.5)

$$\|T(u)\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_X T(u) g d\mu \right| \leq a \|u\| \quad \text{dla każdego } u \in E,$$

co dowodzi, że T jest operacją liniową.

Lemat 5.9 jest szczególnym przypadkiem (por. 5.4) następującego ogólnego twierdzenia z analizy funkcjonalnej: Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji liniowych, odwzorowujących przestrzeń Banacha E w przestrzeń Banacha E_1 i niech T będzie operacją addytywną, odwzorowującą E w E_1 . Jeśli dla każdego funkcjonału $\varphi \in E_1^*$ i dla każdego $u \in E$

$$\varphi(T_n(u)) \rightarrow \varphi(T(u)),$$

to T jest operacją liniową.

¹⁾ Landau [1].

Oprócz miary μ na ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów przestrzeni X rozważmy jeszcze drugą miarę ν , określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{N}$ podzbiorów pewnej przestrzeni Y .

5.10. Niech $1/p + 1/q = 1$, $1/p' + 1/q' = 1$, $1 \leq p, p' \leq \infty$, i niech miary μ, ν spełniają warunek (s). Jeśli $\tau(x, y)$ jest funkcją rzeczywistą, określoną na produkcie $X \times Y$, mierzalną $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, taką, że

$$(18) \quad \iint_{X \times Y} |g(x) \tau(x, y) f(y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty$$

dla dowolnych funkcji $f \in L^{p'}(Y, \nu)$, $g \in L^q(X, \mu)$,

to wzór

$$(19) \quad T(f) = \hat{f}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{f}(x) = \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \quad (x \in X, f \in L^{p'}(Y, \nu)),$$

definiuje operację liniową T , odwzorowującą przestrzeń $L^{p'}(Y, \nu)$ w przestrzeń $L^p(X, \mu)$, a wzór

$$(20) \quad T^*(g) = \hat{g}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{g}(y) = \int_X g(x) \tau(x, y) d\mu(x) \quad (y \in Y, g \in L^q(X, \mu)),$$

definiuje operację liniową T^* , odwzorowującą przestrzeń $L^q(X, \mu)$ w przestrzeń $L^{q'}(Y, \nu)$.

Normy operacji T i T^* są równe.

Operacje liniowe postaci (19) i (20) nazywamy całkowymi. Operację T^* nazywamy sprzężoną do operacji T , a operację T — sprzężoną do operacji T^* .

Zgodnie z poprzednio przyjętym znakowaniem symbol $T(f)(x)$ ($T^*(g)(y)$) oznacza wartość funkcji $\hat{f} = T(f)$ (funkcji $\hat{g} = T^*(g)$) w punkcie $x \in X$ ($y \in Y$). Definicje (19) i (20) można więc zapisać krócej w postaci równości

$$T(f)(x) = \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y),$$

$$T^*(g)(y) = \int_X g(x) \tau(x, y) d\mu(x).$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że warunek (18) implikuje nierówność

$$\left| \int_X T(f) g d\mu \right| < \infty.$$

Ponieważ $g \in L^q(X, \mu)$ jest tu dowolną funkcją, więc z twierdzenia 5.2 (gdzie p trzeba zastąpić przez q i na odwrót) wynika, że $T(f) \in L^p(X, \mu)$ dla dowolnej funkcji $f \in L^{p'}(Y, \nu)$. T jest więc istotnie od-

wzorowaniem przestrzeni $L^{p'}(Y, \nu)$ w przestrzeni $L^p(X, \mu)$. W analogiczny sposób stwierdzamy, że T^* odwzorowuje przestrzeń $L^q(X, \mu)$ w przestrzeń $L^{q'}(Y, \nu)$.

Addytywność operacji T i T^* jest oczywista, wystarczy więc wykazać ich ciągłość. Właściwie wystarczy udowodnić jedynie ciągłość jednej z nich. Istotnie, ponieważ dla dowolnych funkcji $f \in L^{p'}(Y, \nu)$, $g \in L^q(X, \mu)$

$$\int_X T(f)g d\mu = \int_{X \times Y} g(x)\tau(x, y)f(y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_Y T^*(g)f d\nu,$$

więc (por. 5.3 i § 4, (7))

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|f\|_{p'} \leq 1} \|T(f)\|_p = \sup_{\|f\|_{p'} \leq 1} \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_X T(f)g d\mu \right| = \\ &= \sup_{\|g\|_q \leq 1} \sup_{\|f\|_{p'} \leq 1} \left| \int_Y T^*(g)f d\nu \right| = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \|T^*(g)\|_{q'} = \|T^*\|. \end{aligned}$$

Zatem, liniowość (tzn. skończoność normy) jednej z operacji T , T^* pociąga za sobą liniowość drugiej z nich i równość norm.

W dowodzie ciągłości rozpatrzmy kilka przypadków. W przypadku A), C), D), dowodzimy ciągłości T , zaś w przypadku B) — ciągłości T^* .

A) $1 \leq p, p' < \infty$.

Załóżmy najpierw, że miary μ i ν są półskończone. Przestrzeń X jest sumą ciągu wstępującego zbiorów mierzalnych $\{X_n\}$ o mierze skończonej, a przestrzeń Y jest sumą ciągu wstępującego $\{Y_n\}$ zbiorów mierzalnych o mierze skończonej. Oznaczmy

$$\tau_n(x, y) = \begin{cases} \tau(x, y), & \text{gdy } x \in X_n, y \in Y_n \text{ i } |\tau(x, y)| \leq n, \\ n \operatorname{sign} \tau(x, y), & \text{gdy } x \in X_n, y \in Y_n \text{ i } |\tau(x, y)| > n, \\ 0, & \text{gdy albo } x \notin X_n, \text{ albo } y \notin Y_n. \end{cases}$$

Niech T_n będzie operacją addytywną, odwzorowującą $L^{p'}(Y, \nu)$ w $L^p(X, \mu)$, zdefiniowaną wzorem

$$(21) \quad T_n(f)(x) = \int_Y \tau_n(x, y)f(y) d\nu(y).$$

Wykażemy, że

$$(22) \quad \|T_n(f)\|_p \leq n \mu(X_n)^{1/p} \nu(Y_n)^{1/q'} \|f\|_{p'}.$$

Niech dla ustalonego $x \in X$, $\tau_{n,x}$ oznacza funkcję $\tau_{n,x}(y) = \tau_n(x, y)$. Mamy

$$\|\tau_{n,x}\|_{q'} \leq n \nu(Y_n)^{1/q'} \quad \text{dla } x \in X_n \quad \text{oraz} \quad \|\tau_{n,x}\|_{q'} = 0 \quad \text{dla } x \in X - X_n.$$

Stąd, stosując nierówność Höldera, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|T_n(f)\|_p &= \left(\int_X \left| \int_Y \tau_{n,x}(y)f(y) d\nu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_X (\|f\|_{p'} \cdot \|\tau_{n,x}\|_{q'})^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_X (\|f\|_{p'} n \nu(Y_n)^{1/q'})^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \|f\|_{p'} n \nu(Y_n)^{1/q'} \mu(X_n)^{1/p}. \end{aligned}$$

Z (22) wynika, że operacje T_n są liniowe. Dla dowolnej funkcji $g \in L^q(X, \mu)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X T_n(f)g d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} g(x)\tau_n(x, y)f(y) d\mu(x) d\nu(y) = \\ &= \int_{X \times Y} g(x)\tau(x, y)f(y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_Y T(f)g d\mu, \end{aligned}$$

gdyż $\tau_n \rightarrow \tau$ oraz $|g\tau_n f| \leq |g\tau f| \in L(X \times Y, \mu \times \nu)$ (por. rozdział VII, 3.6). Stąd oraz z twierdzenia 5.9 wynika, że T jest operacją liniową¹⁾.

Obecnie uwalniamy się od założenia, że μ i ν są miarami półskończonymi. Aby udowodnić ciągłość operacji T , wystarczy wykazać, że jeśli $f_n \rightarrow f$ w $L^{p'}(Y, \nu)$, to także $f_n \rightarrow f$ w $L^p(X, \mu)$. Zbiory

$$X_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [x: \hat{f}_n(x) \neq 0] + [x: \hat{f}(x) \neq 0] \subset X$$

oraz

$$Y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [y: \hat{f}_n(y) \neq 0] + [y: \hat{f}(y) \neq 0] \subset Y$$

mają miary półskończone (por. rozdział VII, 2.18). Funkcje $\hat{f}|_{X_0}$, $\hat{f}_n|_{X_0}$ dane są za pomocą całki (19), gdzie Y należy zastąpić przez Y_0 . Zastępując więc X przez X_0 , a Y przez Y_0 wnioskujemy z dotychczas udowodnionej części twierdzenia, że

$$\hat{f}_n|_{X_0} \rightarrow \hat{f}|_{X_0} \quad \text{w } L^p(X_0, \mu).$$

Ponieważ $\hat{f}(x) = \hat{f}_n(x) = 0$ dla $x \in X - X_0$, więc także $f_n \rightarrow f$ w $L^p(X, \mu)$.

B) $1 < p, p' \leq \infty$.

W tym przypadku $1 \leq q, q' < \infty$. W ten sam sposób, jak w przypadku A) dowodzi się, że operacja T^* jest liniowa (wystarczy w tym celu w dowodzie A) zastąpić wszędzie T przez T^* , $L^p(X, \mu)$ przez $L^{q'}(Y, \nu)$, $L^{p'}(Y, \nu)$ przez $L^q(X, \mu)$ itp.).

¹⁾ Oszacowanie (22) jest prawdziwe również w przypadku, gdy $1 \leq p, p' \leq \infty$. Zatem dla miar μ, ν półskończonych dowód twierdzenia 5.10 kończy się w tym miejscu.

C) $p = \infty$, $p' = 1$.

Oznaczmy

$$\tau_n(x, y) = \begin{cases} \tau(x, y), & \text{gdy } |\tau(x, y)| \leq n, \\ n \operatorname{sign} \tau(x, y), & \text{gdy } |\tau(x, y)| > n, \end{cases}$$

i zdefiniujmy operację T_n wzorem (21). Ponieważ

$$\|T_n(f)\|_\infty = \sup_{x \in X} \left| \int_Y \tau_n(x, y) f(y) dv(y) \right| \leq n \|f\|_1,$$

operacje T_n są liniowe. Ponieważ dla dowolnych funkcji $f \in L^1(Y, \nu)$, $g \in L^p(X, \mu)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X T_n(f) g d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} g(x) \tau_n(x, y) f(y) d\mu(x) dv(y) = \\ &= \int_{X \times Y} g(x) \tau(x, y) f(y) d\mu(x) dv(y) = \int_X T(f) g d\mu, \end{aligned}$$

więc (por. 5.9) operacja T jest liniowa.

D) $p = 1$, $p' = \infty$.

Przyjmując we wzorze (18) jako f i g funkcje stałe, równe jedności, stwierdzamy, że $\int_{X \times Y} |\tau(x, y)| d\mu(x) dv(y) < \infty$. Stąd dla $f \in L^\infty(Y, \nu)$

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_1 &= \int_X \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) dv(y) \right| d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_X \left(\int_Y |\tau(x, y)| \cdot |f(y)| dv(y) \right) d\mu(x) \leq \|f\|_\infty \cdot \int_{X \times Y} |\tau(x, y)| d\mu(x) dv(y), \end{aligned}$$

co dowodzi, że T jest operacją liniową, i kończy dowód 5.10.

W pewnych szczególnych przypadkach możemy podać proste wzory na normy operacji całkowych T i T^* oraz podać konieczne i dostateczne warunki na to, by funkcja τ spełniała założenie (18). Na przykład

5.11. Niech miary μ i ν spełniają warunek (s). Na to, by funkcja $\tau(x, y)$, określona na $X \times Y$ i mierzalna $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, spełniała warunek

$$(23) \quad \int_{X \times Y} |g(x) \tau(x, y) f(y)| d\mu(x) dv(y) < \infty$$

dla dowolnych funkcji $f \in L^\infty(Y, \nu)$, $g \in L(X, \mu)$, potrzeba i wystarczy, by

$$(24) \quad \sup_{x \in X} \int_Y |\tau(x, y)| dv(y) < \infty.$$

Liczba (24) jest wówczas normą operacji T , zdefiniowanej wzorem (19), odwzorowującej $L^\infty(Y, \nu)$ w $L^\infty(X, \mu)$, oraz normą operacji sprzężonej T^* , zdefiniowanej wzorem (20), odwzorowującej $L(X, \mu)$ w $L(Y, \nu)$ ¹⁾.

¹⁾ Podany w tekście dowód zakomunikował mi C. Ryll-Nardzewski.

Zamiast $\tau(x, y)$ będziemy także pisać $\tau_n(y)$.

Jeśli spełniona jest nierówność (24), to dla $f \in L^\infty(Y, \nu)$ i $g \in L(X, \mu)$

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} |g(x) \tau(x, y) f(y)| d\mu(x) dv(y) &= \\ &= \int_X (|g(x)| \int_Y |\tau(x, y) f(y)| dv(y)) d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_X (|g(x)| \int_Y |\tau(x, y)| dv(y) \cdot \|f\|_\infty) d\mu(x) \leq \\ &\leq \|g\|_1 \cdot \sup_{x \in X} \int_Y |\tau(x, y)| dv(y) \cdot \|f\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Zatem warunek (24) implikuje warunek (23).

Załóżmy obecnie, że spełniony jest warunek (23). Wykażemy, że liczba (24) jest normą operacji liniowej T — stąd wynika już bezpośrednio jej skończoność.

Każdy ze zbiorów

$$C_a = \{x, y: \tau(x, y) < a\},$$

gdzie $a \in \mathcal{W}$ (tzn. a jest liczbą wymierną), należy do ciała $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Istnieje więc (por. rozdział VIII, 1.5) co najwyżej przeliczalna klasa zbiorów $M_a \subset \mathfrak{M}$ i $N_a \subset \mathfrak{N}$ takie, że C_a należy do najmniejszego przeliczalnie addytywnego ciała podzbiorów przestrzeni $X \times Y$, zawierającego wszystkie zbiory $A \times Y$ i $X \times B$, gdzie $A \in M_a$ i $B \in N_a$. Niech $\mathfrak{N}_0$ i $\mathfrak{N}_1$ oznaczają najmniejsze ciało i najmniejsze przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów przestrzeni Y , zawierające klasę $\sum_{a \in \mathcal{W}} N_a$. Ciało $\mathfrak{N}_0$ zawiera co najwyżej

przeliczalną ilość zbiorów (por. rozdział I, 7.7 (ii)). Ponieważ $C_a \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}_1$ dla $a \in \mathcal{W}$, funkcja τ jest mierzalna $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}_1$. Zatem (por. rozdział VIII, 1.4) dla dowolnego ustalonego $x \in X$ funkcja $\tau_n(y)$ jednej zmiennej y jest mierzalna $\mathfrak{N}_1$.

Niech Ω oznacza co najwyżej przeliczalny zbiór funkcji f , określonych na Y , postaci

$$f = \chi_{B_1} - \chi_{B_2},$$

gdzie $B_1, B_2 \in \mathfrak{N}_0$. Oczywiście

$$(25) \quad \|f\|_\infty = 1 \text{ lub } 0 \quad \text{dla} \quad f \in \Omega.$$

Wykażemy, że dla dowolnej funkcji $g \in L(Y, \nu)$ mierzalnej $\mathfrak{N}_1$

$$(26) \quad \|g\|_1 = \int_Y |g| dv = \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y fg dv \right|.$$

Funkcja zbioru $\lambda(B) = \int_B g d\nu$, określona dla $B \in \mathfrak{N}_1$, jest bezwzględnie ciągła względem miary $\kappa(B) = \int_B |g| d\nu$, określonej również tylko dla $B \in \mathfrak{N}_1$. Funkcja λ jest więc ciągła na przestrzeni metrycznej $\mathfrak{N}_1(\kappa)$ (por. rozdział VI, § 9 i twierdzenie 10.4) zbiorów mierzalnych $\mathfrak{N}_1$ z metryką wyznaczoną przez miarę κ . Ponieważ $\mathfrak{N}_0$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $\mathfrak{N}_1(\kappa)$ (por. rozdział VI, 9.4), więc

$$\int_Y g^\circ d\nu = \sup_{B \in \mathfrak{N}_1} \lambda(B) = \sup_{B_1 \in \mathfrak{N}_0} \lambda(B_1) = \sup_{B_1 \in \mathfrak{N}_0} \int_Y g \chi_{B_1} d\nu,$$

gdyż kres górny funkcji ciągłej na jakimś zbiorze równa się kresowi górnemu na dowolnym zbiorze gęstym (por. rozdział III, § 7, ćwiczenie 1).

Analogicznie

$$\int_Y g_\circ d\nu = \sup_{B \in \mathfrak{N}_1} -\lambda(B) = \sup_{B_2 \in \mathfrak{N}_0} -\lambda(B_2) = \sup_{B_2 \in \mathfrak{N}_0} -\int_Y g \chi_{B_2} d\nu.$$

W rezultacie

$$\int_Y |g| d\nu = \int_Y g^\circ d\nu + \int_Y g_\circ d\nu = \sup_{B_1, B_2 \in \mathfrak{N}_0} \int_Y g(\chi_{B_1} - \chi_{B_2}) d\nu = \sup_{f \in \Omega} \int_Y g f d\nu.$$

Równość (26) jest więc udowodniona. W szczególności

$$(27) \quad \int_Y |\tau_x| d\nu = \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right|$$

dla każdego $x \in X$ takiego, że $\tau_x \in L(Y, \nu)$.

Zbiór $A_0 = [x: \tau_x \in L(Y, \nu)]$ jest miary μ zero. Istotnie, podstawiając we wzorze (19) za f funkcję stałą, równą jedności, stwierdzamy, że funkcja $T(f)$ jest ograniczona poza zbiorem miary zero, a więc τ_x jest funkcją całkowalną na Y dla prawie wszystkich $x \in X$.

Dla dowolnej funkcji $f \in \Omega$ niech A_f oznacza zbiór miary zero taki, że

$$\sup_{x \in X} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \sup_{x \in X - A_f} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right|.$$

Zbiór $A = A_0 + \sum_{f \in \Omega} A_f$ ma miarę μ zero. Dla $x \in X_0 = X - A$ funkcja $\tau_x(y)$ jest całkowalna na Y . Ponadto dla każdej funkcji $f \in \Omega$

$$\sup_{x \in X} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \sup_{x \in X_0} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right|.$$

Stąd oraz z (27) i (25) wynika, że

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| &\leq \sup_{x \in X_0} \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \\ &= \sup_{x \in X_0} \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \\ &= \sup_{f \in \Omega} \sup_{x \in X_0} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \\ &= \sup_{f \in \Omega} \sup_{x \in X} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| = \\ &= \sup_{f \in \Omega} \|T(f)\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|T(f)\|_\infty = \|T\|. \end{aligned}$$

W rezultacie

$$\sup_{x \in X} \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| \leq \|T\|.$$

Nierówność odwrotna jest również prawdziwa, gdyż z definicji (19) bezpośrednio wynika, że dla każdego $f \in L^\infty(Y, \nu)$

$$\|T(f)\|_\infty \leq \sup_{x \in X} \sup_{f \in \Omega} \left| \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \right| \cdot \|f\|_\infty.$$

Twierdzenie 5.11 jest więc prawdziwe.

Zauważmy, że twierdzenia 5.10 i 5.11 pozostają prawdziwe, jeśli (w przypadku miar μ, ν zupełnych) zamiast miary $\mu \times_\nu$ rozważać miarę zupełną $\mu \times_\nu$, a zamiast mierzalności $\mathfrak{M} \times_\nu \mathfrak{N}$ funkcji τ zakładać mierzalność $\mathfrak{M} \times_\nu \mathfrak{N}$ (por. rozdział VIII, § 2). Wynika to z faktu, że funkcja τ jest wtedy równoważna pewnej funkcji mierzalnej $\mathfrak{M} \times_\nu \mathfrak{N}$, a przejście od funkcji τ do funkcji równoważnej nie zmienia operacji T i T^* .

Zdefiniowane powyżej pojęcie operacji sprzężonej T^* do danej operacji całkowej T jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia operacji sprzężonej do dowolnej operacji liniowej T , odwzorowującej pewną przestrzeń unormowaną E w przestrzeń unormowaną E_1 (por. twierdzenie 5.4). Mianowicie, dla dowolnego funkcyjonału liniowego $\varphi \in E_1^*$ wzór

$$(28) \quad \psi(x) = \varphi(T(x)) \quad \text{dla} \quad x \in E$$

definiuje funkcyjonał liniowy ψ na przestrzeni E , tzn. pewien element przestrzeni E^* . Przekształcenie T^* , przyporządkowujące każdemu funkcyjonałowi $\varphi \in E_1^*$ funkcyjonał $\psi = T^*(\varphi)$, zdefiniowany wzorem (28), jest

operacją liniową, odwzorowującą E_1^* w E^* , nazywaną *operacją sprzężoną* do T . Można udowodnić¹⁾, że zawsze

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli przestrzeń $\{X\}$ jest sumą na ogół nieprzeliczalnej rodziny $\{X_\alpha\}$ zbiorów mierzalnych rozłącznych, o mierze półskończonej dodatniej, i jeżeli dla każdego zbioru mierzalnego A albo A , albo $X-A$ zawiera się w sumie przeliczalnej mnogości zbiorów X_α , to miara μ spełnia warunek (s).

2. Niech $F(f) = \int_0^1 xf(x)dx$ dla $f \in L$. Nie istnieje funkcja $f_0 \in L$ o normie $\|f_0\| \leq 1$ taka, że $|F(f_0)| = \|F\|$.

3. Niech E będzie dowolną przestrzenią Banacha, której elementami są funkcje mierzalne, określone w X , i która spełnia następujący warunek:

(a) jeżeli każda funkcja $f \in E$ jest całkowalna na zbiorze $A \subset X$, to $\int_A f d\mu$ jest funkcjonałem liniowym na E .

Wykazać, że jeżeli funkcja mierzalna g ma własność

$$\left| \int_X fg d\mu \right| < \infty \quad \text{dla każdej funkcji } f \in E,$$

to $F(f) = \int_X fg d\mu$ jest funkcjonałem liniowym na E .

4. Pierwsza część twierdzenia 5.6 może być uogólniona na przypadek nieprzeliczalnych zbiorów funkcji w następujący sposób:

Jeżeli $A \subset L^p(X, \mu)$ i dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ ($1/p + 1/q = 1$, $1 \leq q < \infty$) jest

$$\sup_{g \in A} \left| \int_X fg d\mu \right| < \infty,$$

to także

$$\sup_{g \in A} \|g\|_q < \infty.$$

5. W sformułowaniu pierwszej części twierdzenia 5.6 wystarczy zakładać, że $\sup_n \left| \int_X f g_n d\mu \right| < \infty$ dla funkcji f należących do pewnego podzbioru drugiej kategorii przestrzeni $L^p(X, \mu)$.

6. Twierdzenie 5.7 można uogólnić w następujący sposób: Niech ν będzie skończoną przeliczalnie addytywną funkcją zbioru, określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów przestrzeni X . Jeżeli $\sup_n \left| \int_A g_n d\nu \right| < \infty$ dla każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$, to $\sup_n \int_X |g_n| d\nu^* < \infty$.

7. Bez założenia, że miara μ ma własność (s), prawdziwe jest następujące uzupełnienie twierdzenia 5.1:

Jeśli g jest funkcją mierzalną i liczba

$$\|g\|_* = \sup_A \sup_{x \in A} |g(x)|,$$

¹⁾ Por np. Banach [5], str. 124.

gdzie A przebiega wszystkie zbiory mierzalne miary półskończonej (lub — co na jedno wychodzi — miary skończonej), jest skończona, to

$$(*) \quad F(f) = \int_X fg d\mu \quad \text{dla } f \in L(X, \mu)$$

jest funkcjonałem liniowym oraz $\|F\| = \|g\|_*$.

Skończoność liczby $\|g\|_*$ jest również warunkiem koniecznym na to, by $|F(f)| < \infty$ dla każdej funkcji $f \in L(X, \mu)$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie sugeruje, by zamiast przestrzeni $L^\infty(X, \mu)$ zdefiniowanej w § 2 rozważać przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych g , dla których $\|g\|_* < \infty$. Jako normę w tej przestrzeni należy oczywiście przyjąć $\|g\|_*$. Po takiej modyfikacji pojęć w twierdzeniu 5.1 odpada konieczność osobnego omawiania przypadku $p = 1$. Jednakże w twierdzeniu 5.3 nadal nie można zastąpić nierówności $1 < p < \infty$ nierównością $1 \leq p < \infty$, gdyż w przypadku gdy miara μ nie jest półskończona, nie każdy funkcjonal liniowy na przestrzeni $L(X, \mu)$ ma postać (*). Wynika to z faktu, że można podać przykłady miar ν i μ , $\nu \leq \mu$, określonych na tym samym przeliczalnie addytywnym ciele zbiorów i mających własność (s), dla których twierdzenie Radona-Nikodyma nie jest prawdziwe, tzn. że nie istnieje funkcja mierzalna h taka, że $\nu(A) = \int_A h d\mu$ (por. odsyłacz na str. 303, rozdz. VII). Funkcjonał

$$F(f) = \int_X f d\nu \quad \text{dla } f \in L(X, \mu)$$

jest liniowy, nie daje się jednak przedstawić w postaci (*).

8. Jeżeli $f_0 \in L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$), to istnieje taki funkcjonal liniowy F na $L^p(X, \mu)$, że

$$F(f_0) = \|f_0\|_p \quad \text{i} \quad \|F\| = 1.$$

Uwaga. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem następującego ogólnego twierdzenia z analizy funkcyjnej: jeżeli u_0 jest elementem przestrzeni unormowanej E , to istnieje taki funkcjonal $F \in E^*$, że $F(u_0) = \|u_0\|$ i $\|F\| = 1$.

9. Niech μ, ν i τ będą miarami, określonymi odpowiednio w przestrzeniach X, Y i Z , spełniającymi warunek (s). Niech $1/p + 1/q = 1$ ($1 \leq p, q \leq \infty$) i niech $\tau \in L^p(X \times Y, \mu \times_\sigma \nu)$.

Udowodnić, że:

(a) Wzór

$$T(f)(x) = \int_Y \tau(x, y) f(y) d\nu(y) \quad (f \in L^q(Y, \nu))$$

definiuje operację liniową T , odwzorowującą $L^q(Y, \nu)$ w $L^p(X, \mu)$, przy tym

$$\|T\| \leq \|\tau\|_p.$$

(B) Jeżeli $1 \leq p < \infty$, to istnieje ciąg $\{T_n\}$ operacji liniowych, skończenie wymiarowych, taki, że $\|T_n - T\| \rightarrow 0$; operacja T jest więc pełnociągła (por. § 4, ćwiczenie 10).

¹⁾ Por. np. Banach [5], str. 70.

(γ) Jeśli $1 \leq p < \infty$, to dla dowolnej operacji liniowej T_1 , odwzorowującej $L^p(X, \mu)$ w $L^p(Z, \kappa)$, superpozycja

$$T_2(f) = T_1(T(f)) \quad (f \in L^q(Y, \nu))$$

jest operacją całkową. Dokładniej: istnieje funkcja $\tau_0 \in L^p(Z \times Y, \kappa \times \nu)$ taka, że

$$T_2(f)(z) = \int_Y \tau_0(z, y) f(y) d\nu(y) \quad \text{dla } f \in L^q(Y, \nu) \text{ i } z \in Z.$$

(Wsk.: Liniowość operacji T wynika z 5.10. Oszacowanie normy $\|T\|$ otrzymuje się z twierdzenia 5.5 stosując nierówność Höldera w przestrzeni $X \times Y$. Załóżmy, że $p < \infty$. Na podstawie § 2, ćwiczenie 19, istnieje ciąg funkcji

$$\tau_n(x, y) = \sum_{j=1}^{m_n} g_j(x) h_j(y)$$

taki, że $g_j \in L^p(X, \mu)$, $h_j \in L^p(Y, \nu)$ oraz $\|\tau_n - \tau\|_p \rightarrow 0$. Ciąg operacji liniowych

$$T_n(f)(x) = \int_Y \tau_n(x, y) f(y) d\nu(y)$$

spełnia warunki (β) twierdzenia. Niech $\check{g}_j = T_1(g_j)$ i niech

$$\tau_{0,n}(z, y) = \sum_{j=1}^{m_n} \check{g}_j(z) h_j(y).$$

Przy każdym ustalonym y funkcja $\tau_{0,n}(z, y)$ zmiennej z jest obrazem funkcji $\tau_n(x, y)$ zmiennej x danym przez operację T_1 . Zatem

$$\left(\int_Z |\tau_{0,n}(z, y) - \tau_{0,n'}(z, y)|^p d\kappa(z) \right)^{1/p} \leq \|T_1\| \left(\int_X |\tau_n(x, y) - \tau_{n'}(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi p i całkując względem y otrzymujemy

$$\|\tau_{0,n} - \tau_{0,n'}\|_p \leq \|T_1\| \cdot \|\tau_n - \tau_{n'}\|_p.$$

Ciąg $\{\tau_{0,n}\}$ jest więc zbieżny w $L^p(Z \times Y, \kappa \times \nu)$ do pewnej funkcji τ_0 , która spełnia warunki (γ) twierdzenia.)

10. Każda operacja liniowa $\{\beta_n\} = T(\{a_n\})$, odwzorowująca przestrzeń $L^{p'}$ ($1 \leq p' < \infty$) w przestrzeń L^p ($1 \leq p < \infty$), jest postaci

$$\beta_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} a_m \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie $\{a_{n,m}\}$ jest ciągiem podwójnym liczb rzeczywistych takim, że wyrażenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_n a_{n,m} a_m$$

ma wartość skończoną dla dowolnych ciągów $\{a_n\} \in l^{p'}$ i $\{\gamma_n\} \in l^q$ ($1/p + 1/q = 1$).

11. Niech x_0 będzie ustalonym elementem przestrzeni unormowanej E . Przekształcenie $\mathcal{F}$, przyporządkowujące każdemu funkcyonalowi $F \in E^*$ liczbę $\mathcal{F}(F) = F(x_0)$ jest funkcyonalem liniowym na E^* . Mówimy, że przestrzeń E jest *refleksywna*, jeżeli każdy funkcyonal liniowy $\mathcal{F}$ na przestrzeni E^* jest tej postaci.

Sprawdzić, że przestrzenie $L^p(X, \mu)$ ($1 < p < \infty$) są refleksywne.

Uwaga. Można udowodnić, że przestrzenie L , l , C , c , L^∞ , m nie są refleksywne.

§ 6. Funkcjonały liniowe w przestrzeni funkcji ciągłych. W paragrafie niniejszym $\|f\|$ oznacza normę funkcji $f \in C$, zdefiniowaną w § 3 B, a $\|v\|$ — normę przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru $v \in \mathcal{W}$, zdefiniowaną w § 3 D).

6.1 (Twierdzenie Riesz¹⁾). Dla dowolnej przeliczalnie addytywnej, skończonej funkcji zbioru $v \in \mathcal{W}$, określonej na przeliczalnie addytywnym ciecie $\mathcal{B}(Z)$ podzbiorów borelowskich przedziału $Z = 0; 1$, wzór

$$(1) \quad F(f) = \int_0^1 f d\nu \quad \text{dla } f \in C$$

definiuje funkcyonal liniowy w przestrzeni C funkcji ciągłych na przedziale $0; 1$, przy tym

$$(2) \quad \|F\| = \|v\| = v^*(Z).$$

Na odwrót, każdy funkcyonal liniowy F , określony na przestrzeni C ma postać (1), gdzie v jest przeliczalnie addytywną skończoną funkcją zbioru, określoną na $\mathcal{B}(Z)$.

Inaczej mówiąc:

Dla dowolnej funkcji φ o wahanii skończonym, określonej na Z , wzór

$$(1') \quad F(f) = \int_0^1 f d\varphi \quad \text{dla } f \in C$$

definiuje funkcyonal liniowy na przestrzeni C . Jeśli dla każdego $x \in Z^+ = 0; 1$ liczba $\varphi(x)$ zawiera się między liczbami $\varphi(x-)$ i $\varphi(x+)$, to

$$(2') \quad \|F\| = \Delta_\varphi^*(0, 1).$$

Na odwrót, każdy funkcyonal liniowy F , określony w przestrzeni C , jest postaci (1'), gdzie φ jest funkcją o wahanii skończonym; można przy tym zakładać, że $\varphi \in V_0$.

Równoważność obu sformułowań wynika z następującej uwagi: Jeżeli F jest funkcyonalem postaci (1), to przyjmując jako φ dystry-

¹⁾ Riesz [1].

buantę funkcji ν stwierdzamy, że F jest postaci (1'), przy tym $\|\nu\| = \Delta_\varphi^*(Z) = \|\varphi\|_\nu$ (por. rozdział XI, 2.5). Na odwrót, jeśli funkcyjonał F jest postaci (1'), to przyjmując za ν funkcję $\mu_{\varphi^+} - \mu_{\varphi^-}$ zredukowaną do $\mathfrak{B}(Z)$ (gdzie φ^+ i φ^- są wahaniami górnym i dolnym funkcji φ) stwierdzamy, że funkcyjonał F jest postaci (1). Jeśli przy tym dla każdego $x \in Z$ liczba $\varphi(x)$ zawiera się między $\varphi(x-)$ i $\varphi(x+)$, to $\|\nu\| = \varphi^*(Z)$ (por. rozdział XI, § 4, ćwiczenie 3).

W rezultacie wystarczy udowodnić, że każdy funkcyjonał postaci (1) jest liniowy i spełnia równość (2) oraz że na odwrót: każdy funkcyjonał liniowy na C jest postaci (1').

Funkcyjonał addytywny F , zdefiniowany wzorem (1), spełnia nierówność

$$|F(f)| \leq \|\nu\| \cdot \|f\|$$

(por. rozdział VII, § 10, wzór (3) oraz rozdział XI, 5.2), jest więc liniowy oraz

$$\|F\| \leq \|\nu\|.$$

Z rozkładu Hahna (rozdział VI, 10.1) wynika istnienie zbioru $A \in \mathfrak{B}(Z)$ takiego, że dla $C \in \mathfrak{B}(Z)$

$$\nu(C) \geq 0, \quad \text{jeśli} \quad C \subset A,$$

$$\nu(C) \leq 0, \quad \text{jeśli} \quad C \subset Z - A,$$

tzn.

$$\nu^*(C) = \nu(C) \quad \text{dla} \quad C \subset A,$$

$$\nu^*(C) = -\nu(C) \quad \text{dla} \quad C \subset Z - A.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Niech $\mathfrak{R}_0$ oznacza najmniejsze ciało podzbiorów przedziału Z , zawierające wszystkie przedziały prawostronnie domknięte $x; y$, gdzie $0 < x < y \leq 1$. Ponieważ $\mathfrak{B}(Z)$ jest najmniejszym przeliczalnie addytywnym ciałem, zawierającym $\mathfrak{R}_0$, z twierdzenia 9.4, rozdział VI (gdzie $\mathfrak{M}$ trzeba zastąpić przez $\mathfrak{B}(Z)$, a μ — przez ν^*), wynika istnienie zbioru $D \in \mathfrak{R}_0$ takiego, że

$$\nu^*(D - A) < \varepsilon \quad \text{i} \quad \nu^*(A - D) < \varepsilon.$$

Ponieważ zbiory D i $Z - D$ są sumami ciągów wstępujących figur elementarnych, więc (por. rozdział VI, 3.6, gdzie jako miarę należy przyjąć funkcję ν^*) wynika stąd, że istnieją figury elementarne $R_1 \subset D$, $R_2 \subset Z - D$ takie, że

$$\nu^*(D - R_1) < \varepsilon \quad \text{i} \quad \nu^*((Z - D) - R_2) < \varepsilon.$$

Oznaczmy

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \in R_1, \\ -1, & \text{gdy} \quad x \in R_2, \end{cases}$$

i rozszerzmy funkcję $f_0(x)$ na cały przedział Z w dowolny sposób z zachowaniem ciągłości i warunku $|f_0(x)| \leq 1$. Mamy

$$\begin{aligned} F(f_0) &= \int_{A-R_1} f_0 d\nu + \int_{A-R_1} f_0 d\nu + \int_{(Z-A)-R_2} f_0 d\nu + \int_{(Z-A)-R_2} f_0 d\nu = \\ &= \nu^*(AR_1) + \int_{A-R_1} f_0 d\nu + \nu^*((Z-A)R_2) + \int_{(Z-A)-R_2} f_0 d\nu. \end{aligned}$$

Ponieważ $|f_0(x)| \leq 1$ oraz

$$A - R_1 \subset (A - D) + (D - R_1) \quad \text{i} \quad (Z - A) - R_2 \subset (D - A) + ((Z - D) - R_2),$$

więc

$$\left| \int_{A-R_1} f_0 d\nu \right| \leq \nu^*(A - R_1) < 2\varepsilon, \quad \left| \int_{(Z-A)-R_2} f_0 d\nu \right| \leq \nu^*((Z - A) - R_2) < 2\varepsilon.$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} F(f_0) &\geq \nu^*(AR_1) - 2\varepsilon + \nu^*((Z - A)R_2) - 2\varepsilon = \\ &= \nu^*(Z) - \nu^*(A - R_1) - \nu^*((Z - A) - R_2) - 4\varepsilon > \nu^*(Z) - 8\varepsilon = \|\nu\| - 8\varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ $\|f_0\| = 1$, wnioskujemy stąd, że $\|F\| \geq \|\nu\| - 8\varepsilon$, co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ kończy dowód równości (2).

Żałóżmy obecnie, że F jest jakimś funkcyjonałem liniowym, określonym na C . Niech n będzie dowolną, ale chwilowo ustaloną, liczbą naturalną i niech

$$g_j(x) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \quad (0 \leq x \leq 1, j = 0, 1, \dots, n).$$

Ponieważ $g_j \geq 0$ i $g_0 + g_1 + \dots + g_n = 1$, więc

$$\left\| \sum_{j=0}^n \varepsilon_j g_j \right\| \leq 1$$

dla dowolnego ciągu liczb $\varepsilon_j = \pm 1, 0$ ($j = 0, 1, \dots, n$). Przyjmując $\varepsilon_j = \text{sign } F(g_j)$, otrzymujemy

$$(3) \quad \sum_{j=0}^n |F(g_j)| = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j F(g_j) = F\left(\sum_{j=0}^n \varepsilon_j g_j\right) \leq \|F\| \cdot \left\| \sum_{j=0}^n \varepsilon_j g_j \right\| \leq \|F\|.$$

Oznaczmy

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gd}y \quad x = 0, \\ F(g_0), & \text{gd}y \quad 0 < x < 1/n, \\ \sum_{j=0}^m F(g_j), & \text{gd}y \quad m/n \leq x < (m+1)/n \quad (m=1, 2, \dots, n-1), \\ \sum_{j=1}^n F(g_j), & \text{gd}y \quad x = 1. \end{cases}$$

Z (3) wynika, że

$$(4) \quad A_{\varphi_n}^*(Z) \leq \|F\|.$$

Dla dowolnej funkcji $f \in C$ zachodzi równość

$$\int_0^1 f d\varphi_n = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) F(g_j) = F(f_n),$$

gdzie $f_n = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) g_j$ jest n -tym wielomianem Bernsteina funkcji f (por. rozdział IV, § 6). Jeśli $n \rightarrow \infty$, to $f_n \rightarrow f$ w przestrzeni C . Zatem $F(f_n) \rightarrow F(f)$, tzn.

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\varphi_n.$$

Z (4) wynika (por. rozdział IX, twierdzenie 5.8 Helly'ego), że z ciągu $\{\varphi_n\}$ można wyjąć podciąg zbieżny $\varphi_{m_n} \rightarrow \varphi \in V$. W rezultacie (por. rozdział XI, twierdzenie 8.3 Helly'ego)

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\varphi_{m_n} = \int f d\varphi \quad \text{dla} \quad f \in C,$$

co kończy dowód twierdzenia 6.1.

Z twierdzenia 6.1 wynika natychmiast twierdzenie

6.2. *Przestrzeń C^* wszystkich funkcjonalów liniowych na C jest równoważna przestrzeni W i przestrzeni V_0 .*

Jako szczególny przypadek twierdzenia 6.1 otrzymujemy

6.3. *Dla dowolnej funkcji $g \in L$ funkcjonal*

$$(5) \quad F(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f \in C)$$

jest liniowy na przestrzeni C oraz

$$(6) \quad \|F\| = \int_0^1 |g(x)|dx.$$

Istotnie, $F(f) = \int_0^1 f d\varphi$, gdzie $\varphi(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$ (por. rozdział XI, 5.3).

Ponieważ funkcja φ jest ciągła, więc na mocy (2')

$$\|F\| = A_{\varphi}^*(0, 1) = \int_0^1 |g(x)|dx$$

(por. rozdział XI, 5.8).

Jako zastosowanie twierdzenia 6.3 udowodnimy obecnie następujące 6.4 (Twierdzenie Lercha)¹⁾. *Jeśli $g \in L$ i*

$$(7) \quad \int_0^1 x^n g(x)dx = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

to $g(x) = 0$ prawie wszędzie w przedziale $0; 1$.

Istotnie, funkcjonal F , zdefiniowany wzorem (5), znika na zbiorze liniowo gęstym, złożonym z funkcji $1, x, x^2, \dots$ (por. twierdzenie 6.1 Weierstrassa, rozdział IV), a więc $F(f) = 0$ dla każdej funkcji $f \in C$ (por. 4.2). W rezultacie

$$\int_0^1 |g(x)|dx = \|F\| = 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Liczby $a_n = \int_0^1 x^n g(x)dx$ (gdzie $g \in L$) nazywają się *momentami funkcji g* . Z twierdzenia 6.4 wynika, że ciąg $\{a_n\}$ wszystkich momentów wyznacza funkcję g jednoznacznie.

Założenie (7) w twierdzeniu Lercha można znacznie osłabić — wystarczy np. zakładać, że równość (7) zachodzi dla pewnego ciągu różnych liczb naturalnych, takiego że szereg odwrotności tych liczb jest rozbieżny. Znałe są również uogólnienia tego twierdzenia na przypadek niecałkowitych potęg funkcji x ²⁾.

Niech Ω i $\mathcal{A}$ będą zbiorami funkcji mierzalnych, określonych na pewnej przestrzeni X z miarą μ . Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ jest *pełny* wzglę-

¹⁾ Lerch [1].

²⁾ Müntz [1]. Por. także Kaczmarz i Steinhaus [2], str. 90. Inne twierdzenia o momentach udowodnił Mikusiński [4] oraz Mikusiński i Ryll-Nardzewski [1]. Por. także Boas [1].

dem zbioru (lub: w zbiorze) Ω , jeśli dla dowolnych funkcji $f \in \Omega$ i $g \in \mathcal{A}$ funkcja fg jest całkowalna na X oraz warunek

$$(8) \quad \int_X fg d\mu = 0 \quad \text{dla każdej funkcji } g \in \mathcal{A}$$

implikuje, że $f = 0$ prawie wszędzie μ .

Z twierdzenia Lercha wynika, że (por. twierdzenie 2.11, wzór (17))

6.5. *Zbiór wszystkich funkcji x^n ($0 \leq x \leq 1$, $n = 0, 1, \dots$) jest pełny w przestrzeni L^p ($1 \leq p \leq \infty$) oraz w przestrzeni C .*

Z twierdzenia 6.3 oraz z twierdzenia 4.7 Banacha-Steinhaus'a, gdzie

$$T_n(f) = \int_0^1 f(x) g_n(x) dx, \text{ wynika natychmiast, że}$$

6.6. *Jeśli $g_n \in L$ ($n = 1, 2, \dots$) i jeśli*

$$\sup_n \left| \int_0^1 f(x) g_n(x) dx \right| < \infty \quad \text{dla każdej funkcji } f \in C,$$

to

$$\sup_n \int_0^1 |g_n(x)| dx < \infty.$$

Wszystkie wyżej udowodnione twierdzenia pozostają prawdziwe, gdy zamiast przestrzeni C rozważać przestrzeń $C(Z)$, gdzie $Z \subset \mathcal{R}$ jest dowolnym przedziałem domkniętym ograniczonym. Oczywiście $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}_0$ trzeba wtedy zastąpić przez $\mathcal{W}(\mathcal{B}(Z))$ i $\mathcal{V}_0(Z)$.

Twierdzenie 6.1 (w pierwszym sformułowaniu) jest również prawdziwe, jeśli C zastąpić przez $C(X)$, gdzie X jest przestrzenią metryczną zwartą, a $\mathcal{W}$ zastąpić przez $\mathcal{W}(\mathcal{B}(X))$. Dowód pierwszej części jest w przypadku ogólnym taki sam, jak w przypadku przestrzeni C . Dowód drugiej części trzeba przeprowadzić inną metodą¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Każdy funkcjonal liniowy w przestrzeni $C_0(\mathcal{R})$ funkcji $f \in C(\mathcal{R})$ (z tą samą normą jak w $C(\mathcal{R})$) takich, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, jest postaci

$$F(f) = \int_{\mathcal{R}} f d\nu,$$

gdzie $\nu \in \mathcal{W}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$. Normą tego funkcjonu jest liczba $\|\nu\|$.

Przestrzeń $C_0(\mathcal{R})^*$ jest więc równoważna przestrzeni $\mathcal{W}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$.

2. Ogólna postać funkcjonu liniowego F w przestrzeni c wszystkich ciągów zbieżnych jest:

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad (u = \{\alpha_n\} \in c),$$

¹⁾ Kakutani [1]. Por. także Radon [1] i Hewitt [1].

gdzie $\{\beta_n\} \in l$ i $\beta \in \mathcal{R}$. Normą tego funkcjonu jest liczba $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| + |\beta|$. Ogólna postać funkcjonu liniowego w przestrzeni c_0 ciągów zbieżnych do zera jest:

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \quad (u = \{\alpha_n\} \in c_0),$$

gdzie $\{\beta_n\} \in l$. Normą tego funkcjonu jest liczba $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$. Zatem przestrzenie c^* i c_0^* są równoważne przestrzeni l .

3. Ogólna postać funkcjonu liniowego F w przestrzeni $C_k(Q)$ funkcji o ciągłej k -tej pochodnej, określonych w przedziale domkniętym $Q = [a, b] \subset \mathcal{R}$, jest

$$F(f) = a_1 f(a) + a_2 f'(a) + \dots + a_k f^{(k-1)}(a) + \int_a^b f^{(k)} d\varphi,$$

gdzie φ jest funkcją o wahanu skończonym w Q .

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 6, § 3.)

4. Niech $\mathfrak{M}$ będzie przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni X . Jeśli f jest funkcją ograniczoną mierzalną $\mathfrak{M}$, to

$$F(v) = \int_X f d\nu \quad \text{dla } v \in \mathcal{W}(\mathfrak{M})$$

jest funkcjonalem liniowym na $\mathcal{W}(\mathfrak{M})$ o normie $\|F\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

5. Jeżeli f jest ograniczoną funkcją Baire'a, określoną w przedziale ograniczonym lub nieograniczonym $Z \subset \mathcal{R}$, to

$$F(\varphi) = \int_Z f d\varphi$$

jest funkcjonalem liniowym na $\mathcal{V}(Z)$ oraz na $\mathcal{V}_0(Z)$. Przy obydwu interpretacjach

$$\|F\| = \sup_{x \in Z} |f(x)|.$$

6. Niech $A \subset \mathcal{W}$. Jeżeli dla każdej funkcji $f \in C$

$$\sup_{v \in A} \left| \int_0^1 f d\nu \right| < \infty,$$

to

$$\sup_{v \in A} \|v\| < \infty.$$

7. Jeżeli φ jest funkcją o wahanu skończonym i $\int_0^1 x^n d\varphi = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

to $[x: \varphi(x) \neq \varphi(0)]$ jest co najwyżej przeliczalnym podzbiorem przedziału otwartego $0; 1$.

8. Niech μ będzie dowolną miarą skończoną, określoną na ciele podzbiorów borelowskich przedziału $0; 1$. Jeżeli $f \in C$ i $\int_0^1 x^n f(x) d\mu(x) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to $f(x) = 0$ prawie wszędzie μ . Jeśli ponadto $\mu(P) > 0$ dla każdego niepustego przedziału $P \subset 0; 1$, to $f(x) = 0$.

9. Niech $F_n(f) = \int_0^1 f d\varphi_n$ i $F(f) = \int_0^1 f d\varphi$ dla $f \in C$ ($\varphi, \varphi_n \in V_0$, $n = 1, 2, \dots$). Na to, aby $F_n(f) \rightarrow F(f)$ dla każdego $f \in C$, potrzeba i wystarcza, aby $\sup_n \|\varphi_n\|_{V_0} < \infty$, $\varphi_n(1) \rightarrow \varphi(1)$ oraz

$$\int_0^c \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_0^c \varphi(x) dx \quad \text{dla każdej liczby } c \in (0; 1).$$

(Wsk.: Konieczność dwu ostatnich warunków otrzymujemy przyjmując $f(x) = 1$ lub $f(x) = \max(c-x, 0)$. Ponieważ funkcje tej postaci tworzą zbiór liniowo gęsty w C , dostateczność wynika bezpośrednio z twierdzenia 4.6.)

10. Niech $\tau_x(y)$ będzie funkcją, określoną dla $0 \leq x, y \leq 1$ taką, że $\tau_x \in V_0$ dla każdego $x \in (0; 1)$. Jeżeli $\sup_x \|\tau_x\|_{V_0} < \infty$ i wyrażenia

$$\tau_x(1), \quad \int_0^c \tau_x(y) dy \quad (c \in (0; 1))$$

są funkcjami ciągłymi w przedziale $0 \leq x \leq 1$, to wzór

$$T(f) = g, \quad \text{gdzie} \quad g(x) = \int_0^1 f(y) d\tau_x(y),$$

definiuje operację liniową T , odwzorowującą C w C .

Na odwrót, każda operacja liniowa, odwzorowująca C w C , jest tej postaci¹⁾.

(Wsk.: Ciągłość funkcji g wynika z ćwiczenia 9. Liniowość przekształcenia T prowadzi się przez proste oszacowanie normy. Na odwrót, jeśli T jest dowolną operacją liniową, odwzorowującą C w C , to wartość $T(f)(x)$ funkcji $T(f)$ w ustalonym punkcie x jest funkcjonalem liniowym na przestrzeni C , istnieje więc funkcja $\tau_x \in V_0$ taka, że

$$T(f)(x) = \int_0^1 f(y) d\tau_x(y) \quad \text{dla każdej funkcji } f \in C.)$$

Uwaga. Można udowodnić, że jeśli przekształcenie, przyporządkowujące liczbie $x \in (0; 1)$ element τ_x przestrzeni metrycznej V_0 , jest ciągłe, to operacja T jest pełnociągła. Na odwrót, każda operacja liniowa, pełnociągła, odwzorowująca C w C , jest tej postaci. Innym warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by operacja liniowa T , przekształcająca C w C , była pełnociągła, jest, by była postaci

$$T(f)(x) = \int_0^1 \tau(x, y) f(y) d\varphi(y),$$

gdzie $\varphi \in V_0$ jest funkcją niemalejącą, $\int_0^1 |\tau(x, y)| d\varphi(y) < \infty$ dla każdej wartości x oraz $\int_0^1 |\tau(x, y - \tau(x_0, y))| d\varphi(y) \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow x_0$ ²⁾.

11. Normą operacji T , zdefiniowanej w ćwiczeniu 10, jest liczba

$$\sup_x \|\tau_x\|_{V_0}.$$

(Wsk.: W równości

$$T = \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_x \left| \int_0^1 f(y) d\tau_x(y) \right|$$

przetawić kolejność kresów górnych.)

12. Niech $\tau(x, y)$ będzie funkcją rzeczywistą ciągłą, określoną w kwadracie $0 \leq x, y \leq 1$. Normą operacji liniowej T , odwzorowującej C w C , zdefiniowanej wzorem

$$T(f)(x) = \int_0^1 \tau(x, y) f(y) dy \quad (f \in C)$$

jest liczba

$$\sup_x \int_0^1 |\tau(x, y)| dy.$$

§7. Operacje dwuliniowe. Niech E_0, E_1, E_2 będą przestrzeniami liniowymi. Operacja T odwzorowująca produkt kartezjański $E_1 \times E_2$ w E_0 jest *rozdzielna*, jeśli

$$(1) \quad T(u_1 + u_2, v) = T(u_1, v) + T(u_2, v)$$

oraz

$$(2) \quad T(u, v_1 + v_2) = T(u, v_1) + T(u, v_2)$$

dla dowolnych $u, u_1, u_2 \in E_1$, $v, v_1, v_2 \in E_2$.

Z (1) i (2) wynika (przyjmując $u_1 = u_2 = 0$ lub $v_1 = v_2 = 0$), że

$$(3) \quad T(u, 0) = 0, \quad T(0, v) = 0.$$

Załóżmy, że E_0, E_1, E_2 są przestrzeniami unormowanymi. Operacja T , odwzorowująca $E_1 \times E_2$ w E_0 , jest *dwuliniowa*, jeśli jest *rozdzielna* i *ciągła*.

Jeśli T jest operacją dwuliniową, to przy ustalonym $v_0 \in E_2$ operacja $T'(u) = T(u, v_0)$ jest liniowa. Podobnie przy dowolnym ustalonym $u_0 \in E_1$ operacja $T''(v) = T(u_0, v)$ jest też liniowa. Stąd wynika, że (por. twierdzenie 4.1)

$$(4) \quad T(au, v) = aT(u, v) = T(u, av) \quad \text{dla} \quad a \in \mathcal{R},$$

tzn. operacja dwuliniowa jest jednorodna ze względu na każdą zmienną.

Zgodnie z umową z § 4, w przypadku gdy $E_0 = \mathcal{R}$, zamiast „operacja rozdzielna” lub „dwuliniowa” mówimy *funkcjonał rozdzielny* lub *dwuliniowy*.

¹⁾ Radon [2]. Por. także Riesz i Nagy [1], str. 217-218.

²⁾ Radon [2]. Por. także Riesz i Nagy [1], str. 218-219.

7.1. *Na to, by operacja rozdzielna T była dwuliniowa, potrzeba i wystarczy, by istniała stała $M < \infty$ taka, że*

$$(5) \quad \|T(u, v)\| \leq M \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{dla dowolnych } u \in E_1, v \in E_2.$$

Założmy, że warunek (5) jest spełniony. Ciągłość operacji T wynika z następującego oszacowania

$$\begin{aligned} \|T(u, v) - T(u_0, v_0)\| &\leq \|T(u, v) - T(u, v_0)\| + \|T(u, v_0) - T(u_0, v_0)\| = \\ &= \|T(u, v - v_0)\| + \|T(u - u_0, v_0)\| \leq M \|u\| \cdot \|v - v_0\| + M \|u - u_0\| \cdot \|v_0\|. \end{aligned}$$

Na odwrót, założmy, że T jest operacją dwuliniową. Równości (4) są więc spełnione. Wykażemy, że liczba

$$M = \sup_{\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1} \|T(u, v)\|$$

jest skończona. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją więc ciągi $u_n \in E_1$, $v_n \in E_2$ takie, że $\|u_n\| \leq 1$ i $\|v_n\| \leq 1$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz

$$0 < a_n = \|T(u_n, v_n)\| \rightarrow \infty.$$

Ponieważ $\|u_n\|/\sqrt{a_n} \leq 1/\sqrt{a_n}$ i $\|v_n\|/\sqrt{a_n} \leq 1/\sqrt{a_n}$, więc $u_n/\sqrt{a_n} \rightarrow 0$ i $v_n/\sqrt{a_n} \rightarrow 0$. Z drugiej strony (por. wzory (3) i (4)),

$$\left\| T\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} u_n, \frac{1}{\sqrt{a_n}} v_n\right) - T(0, 0) \right\| = \left\| T\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} u_n, \frac{1}{\sqrt{a_n}} v_n\right) \right\| = \frac{1}{a_n} \|T(u_n, v_n)\| = 1,$$

wbrew założeniu ciągłości operacji T .

Jeżeli $u \neq 0 \neq v$, to $\|u\|/\|u\| = 1 = \|v\|/\|v\|$, zatem $T(u/\|u\|, v/\|v\|) \leq M$, skąd wynika (por. wzór (4)), że

$$\|T(u, v)\| \leq M \|u\| \cdot \|v\|.$$

Nierówność ta jest także spełniona, gdy $u = 0$ lub $v = 0$ (por. wzór (3)). Zatem warunek (5) jest spełniony.

Kres dolny liczb M spełniających warunek (5) nazywamy *normą* operacji dwuliniowej T i oznaczamy symbolem $\|T\|$. Zatem

7.2. *Dla dowolnej operacji dwuliniowej T*

$$(6) \quad |T(u, v)| \leq \|T\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|,$$

przy tym

$$(7) \quad \|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1} \|T(u, v)\|.$$

Na przykład, jeśli $E_0 = E_1 = E_2 = C$, to operacja

$$(8) \quad T(f, g) = fg,$$

przyporządkowująca funkcjom f, g ich iloczyn, jest dwuliniowa, przy tym $\|T\| = 1$.

Z nierówności Höldera wynika, że operacja (8) jest również dwuliniowa dla $E_0 = L(X, \mu)$, $E_1 = L^p(X, \mu)$, $E_2 = L^q(X, \mu)$ ($1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$). Z nierówności Höldera wynika również (przy tych samych założeniach o p i q), że

$$T(f, g) = \int_X fg d\mu \quad (f \in L^p(X, \mu), g \in L^q(X, \mu))$$

jest funkcjonałem dwuliniowym. Z twierdzenia 5.1 wynika, że w obu przykładach $\|T\| = 1$.

Ogólniej, jeśli E jest przestrzenią unormowaną, to dla $u \in E$ i $F \in E^*$ wzór

$$T(u, F) = F(u)$$

definiuje funkcjonał dwuliniowy, określony na $E \times E^*$, o normie 1.

Zauważyliśmy poprzednio, że jeśli T jest operacją dwuliniową (określoną na $E_1 \times E_2$ o wartościach w E_0), to dla ustalonych $u_0 \in E_1$, $v_0 \in E_2$ operacje

$$(9) \quad T'_{v_0}(u) = T(u, v_0), \quad T''_{u_0}(v) = T(u_0, v)$$

są liniowe. Przy pewnych dodatkowych założeniach uwaga ta daje się odwrócić. Mianowicie

7.3. *Jeśli jedna z unormowanych przestrzeni E_1, E_2 jest przestrzenią Banacha (tzn. jest zupełna) i T jest operacją, odwzorowującą $E_1 \times E_2$ w unormowaną przestrzeń E_0 , taka, że dla dowolnych ustalonych $u_0 \in E_1$ i $v_0 \in E_2$ operacje (9) są liniowe, to T jest operacją dwuliniową.*

Rozdzielność operacji T wynika natychmiast z addytywności operacji (9).

Założmy, że np. E_2 jest przestrzenią Banacha. Jeśli $u_n \in E_1$ i $\|u_n\| \leq 1$ dla $n = 1, 2, \dots$, to

$$\|T''_{u_n}(v)\| = \|T(u_n, v)\| = \|T'_v(u_n)\| \leq \|T'_v\| \cdot \|u_n\| \leq \|T'_v\|,$$

a więc $\sup_n \|T''_{u_n}(v)\| < \infty$ dla każdego $v \in E_2$. Z twierdzenia 4.7 Banacha-Steinhausa wynika, że ciąg norm $\|T''_{u_n}\|$ jest ograniczony dla dowolnego ciągu $\{u_n\}$ elementów przestrzeni E_1 o normie ≤ 1 . Wnioskujemy stąd, że istnieje liczba $M < \infty$ taka, że

$$\|T''_u\| \leq M \quad \text{dla każdego } u \in E_1, \|u\| \leq 1.$$

Jeśli $u \neq 0$, to element $u_0 = u/\|u\|$ ma normę 1, a więc

$$\begin{aligned} \|T(u, v)\| &= \|u\| \cdot \left\| T\left(\frac{1}{\|u\|} u, v\right) \right\| = \|u\| \cdot \|T(u_0, v)\| = \|u\| \cdot \|T''_{u_0}(v)\| \leq \\ &\leq \|u\| \cdot \|T''_{u_0}\| \cdot \|v\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Nierówność

$$\|T(u, v)\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

jest również spełniona, gdy $u = 0$. Stąd oraz z twierdzenia 7.1 wynika, że T jest operacją liniową.

ĆWICZENIA. 1. Niech $1/p = 1/p' + 1/p''$ ($1 \leq p, p', p'' \leq \infty$). Poczyn

$$T(f, g) = fg \quad (f \in L^p(X, \mu), g \in L^{p''}(X, \mu))$$

jest operacją dwuliniową o normie 1, odwzorowującą produkt $L^p(X, \mu) \times L^{p''}(X, \mu)$ w przestrzeń $L^p(X, \mu)$ (por. § 2, ćwiczenie 8).

2. Przyjmijmy znakowanie wprowadzone w twierdzeniu 5.10. Jeśli funkcja $\tau(x, y)$ spełnia warunek (18), § 5, to wzór

$$(*) \quad F(f, g) = \int_{X \times Y} g(x) \tau(x, y) f(y) d\mu(x) dv(y) \quad \text{dla} \quad f \in L^p(Y, \nu), g \in L^q(X, \mu)$$

definiuje funkcjonal dwuliniowy na produkcie $L^p(Y, \nu) \times L^q(X, \mu)$. Normą tego funkcjonalu jest norma operacji T zdefiniowanej wzorem (19), § 5.

3. Niech E oznacza zbiór wszystkich funkcji $\tau(x, y)$ spełniających warunek (18), § 5 ($1 < p = p' < \infty$). Jako normę funkcji $\tau \in E$ przyjmijmy normę funkcjonalu (*), wyznaczonego przez funkcję τ . Jeżeli $\kappa(x, y) = \int_Z \kappa_1(x, z) \kappa_2(z, y) d\lambda(z)$, gdzie λ jest miarą na przestrzeni Z , oraz

$$\int_X \left(\int_X |\kappa_1(x, z)|^p dx \right)^{u/p} dz < \infty, \quad \int_Y \left(\int_Z |\kappa_2(z, y)|^q dy \right)^{v/q} dz < \infty$$

dla pewnych u, v ($1/u + 1/v = 1$, $1 < u, v < \infty$), to wzór

$$F(\tau) = \int \tau(x, y) \kappa(y, x) d\mu(x) dv(y)$$

definiuje funkcjonal liniowy na $E^{(1)}$.

4. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem operacji dwuliniowych, określonych na produkcie $E_1 \times E_2$ przestrzeni Banacha, o wartościach w przestrzeni unormowanej E . Jeżeli

$$\sup \|T_n(u, v)\| < \infty \quad \text{dla każdego} \quad u \in E_1 \text{ i } v \in E_2,$$

to $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

§ 8. Splot funkcji. Aż do końca dowodu twierdzenia 8.5 wszystkie funkcje, rozważane w tym paragrafie, są określone na prostej $\mathcal{R}$ i mieralne względem miary Lebesgue'a l_1 . Całkowanie odbywa się również względem miary l_1 .

¹⁾ Leżański [1].

Szczególnie ważnym przykładem operacji dwuliniowej jest tzw. splot funkcji. Splotem dwu funkcji f, g nazywamy funkcję, oznaczoną symbolem $f * g$, określoną wzorem

$$(1) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R}.$$

Mówimy, że splot $f * g$ istnieje, jeśli całka po prawej stronie wzoru (1) istnieje i jest skończona dla prawie wszystkich $x \in \mathcal{R}$. Oczywiście splot $f * g$ istnieje jedynie wtedy, gdy funkcje f i g spełniają pewne dodatkowe warunki, zapewniające skończoność całki po prawej stronie (1) dla prawie wszystkich $x \in \mathcal{R}$. Ustalenie kryteriów istnienia splotu i zbadanie jego własności jest tematem niniejszego paragrafu.

Zauważmy, że dla dowolnych funkcji mierzalnych f, g funkcja $f(x-t)g(t)$ dwu zmiennych x, t jest mierzalna płasko (tzn. względem miary l_2). Jeżeli splot $f * g$ istnieje, to jest także funkcją mierzalną. Dowód tych uwag przeprowadza się, rozważając kolejno przypadki, gdy f i g są funkcjami charakterystycznymi przedziałów, figur elementarnych, zbiorów domkniętych ograniczonych, zbiorów F_σ , zbiorów miary zero i wreszcie dowolnych zbiorów mierzalnych, następnie – gdy f i g są funkcjami prostymi, funkcjami mierzalnymi nieujemnymi i wreszcie – przez rozkład funkcji f i g na część nieujemną i niedodatnią – dowolnymi funkcjami mierzalnymi.

8.1. (i) Splot $f * g$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje splot $|f| * |g|$, przy czym $|f * g| \leq |f| * |g|$. Jeśli istnieje splot $f * g$ i $|f_1| \leq |f|$ oraz $|g_1| \leq |g|$, to istnieje również splot $f_1 * g_1$.

(ii) Operacja tworzenia splotu jest jednorodna, rozdzielna, przemienna i łączna, tzn.

$$(2) \quad (af) * g = f * (ag) = a(f * g) \quad \text{dla} \quad a \in \mathcal{R},$$

$$(3) \quad (f_1 \pm f_2) * g = f_1 * g \pm f_2 * g, \quad f * (g_1 \pm g_2) = f * g_1 \pm f * g_2,$$

$$(4) \quad f * g = g * f,$$

$$(5) \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Dokładniej:

Jeśli istnieją sploty po prawej stronie równości (3), to istnieją również sploty po lewej stronie i zachodzi równość (3). Jeśli istnieje splot $f * g$, to istnieje też splot $g * f$ i zachodzi równość (4). Jeśli istnieje jeden ze splotów $|f| * (|g| * |h|)$, $(|f| * |g|) * |h|$, to istnieje również drugi i sploty, występujące po obu stronach (5), oraz zachodzi równość (5).

Z (4) wynika, że

$$(6) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Wzór (6) może być przyjęty jako druga równoważna definicja splotu $f * g$.

Ze względu na łączność (5) zamiast $(f * g) * h$ i $f * (g * h)$ można pisać po prostu $f * g * h$.

Jedynie równości (4) i (5) wymagają dowodu.

Zastępując we wzorze (1) zmienną całkowania t przez $x-t$ otrzymujemy równość (6). Na mocy definicji (1) prawa strona równości (6) równa się $g * f(x)$. Równość (4) jest więc prawdziwa.

Równość (5) udowodnimy najpierw w przypadku, gdy funkcje f, g, h są nieujemne, aby uniknąć komplikacji związanych z istnieniem całek. Mamy

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) (g * h)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-y) h(y) dy \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t-y) h(y) dy \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t-y) h(y) dt \right) dy = \\ (7) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t-y) dt \right) h(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y-z) g(z) dz \right) h(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x-y) h(y) dy = (f * g) * h(x) \end{aligned}$$

stosując twierdzenie Fubiniego oraz podstawienie $z = t - y$ w jednej z wewnętrznych całek.

Jeśli funkcje f, g, h mają znaki dowolne i istnieje na przykład splot $|f| * (|g| * |h|)$, to z równości (7) dla funkcji $|f|, |g|, |h|$ wynika, że dla każdego x z pominięciem zbioru miary zero

$$\int_{\mathcal{R} \times \mathcal{R}} |f(x-t)g(t-y)h(y)| dy dt < \infty.$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że również w tym przypadku można wykonać wszystkie przekształcenia (7) dla funkcji f, g, h .

8.2. Jeśli $f, g \in L(\mathcal{R})$, to splot $f * g$ istnieje, $f * g \in L(\mathcal{R})$ oraz

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Jeśli $f \geq 0$ i $g \geq 0$, to $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Pierwszą część twierdzenia 8.2 można wysłowić w sposób następujący:

Splot funkcji całkowalnych na prostej $\mathcal{R}$ jest operacją dwuliniową (o normie 1), odwzorowującą $L(\mathcal{R}) \times L(\mathcal{R})$ w $L(\mathcal{R})$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $f \geq 0$ i $g \geq 0$. Z twierdzenia Fubiniego wynika, że

$$\begin{aligned} (8) \quad \|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dx \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) dx) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1, \end{aligned}$$

stosując podstawienie $y = x - t$.

W przypadku ogólnym, zastępując w (8) f i g przez $|f|$ i $|g|$, otrzymujemy

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Ponieważ $|f * g| \leq |f| * |g|$, więc $\|f * g\|_1 \leq \|f * |g|\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$, co kończy dowód twierdzenia 8.2.

Twierdzenie 8.2 jest szczególnym przypadkiem następującego ogólniejszego twierdzenia.

8.3 (Twierdzenie Younga). Jeśli $f \in L^p(\mathcal{R})$, $g \in L^q(\mathcal{R})$ i $1/r = 1/p + 1/q - 1 > 0$ ($1 \leq p, q < \infty$), to splot $f * g$ istnieje, $f * g \in L^r(\mathcal{R})$ oraz

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Splot jest więc operacją dwuliniową odwzorowującą $L^p(\mathcal{R}) \times L^q(\mathcal{R})$ w przestrzeń $L^r(\mathcal{R})$.

Dla ustalonego $x \in \mathcal{R}$ oznaczmy symbolem h_x funkcję $h_x(t) = f(x-t)$. Mamy

$$|h_x| \cdot |g| = (|h_x|^{p/r} \cdot |g|^{q/r}) |h_x|^{1-p/r} \cdot |g|^{1-q/r}.$$

Z nierówności 2.3 Höldera, gdzie funkcje f, g, h trzeba zastąpić odpowiednio przez funkcje $|h_x|^{p/r}, |g|^{q/r}, |h_x|^{1-p/r}, |g|^{1-q/r}$, a p, q, r przez liczby $r, \frac{1}{1/p-1/r}, \frac{1}{1/q-1/r}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |h_x| \cdot |g| \leq \| |h_x|^{p/r} \cdot |g|^{q/r} \|_r \cdot \| |h_x|^{1-p/r} \cdot |g|^{1-q/r} \|_{\frac{1}{1/p-1/r}} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|^p |g(t)|^q dt \right)^{1/r} \cdot (\|h_x\|_p)^{1-p/r} \cdot (\|g\|_q)^{1-q/r}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\|h_x\|_p = \|f\|_p$, więc stąd oraz z drugiej części twierdzenia 8.2 (gdzie f i g trzeba zastąpić przez funkcje $|f|^p, |g|^q \in L(\mathcal{R})$) wynika, że

$$\begin{aligned} \| |f| * |g| \|_r &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x-t)|^p \cdot |g(t)|^q dt) dx \right)^{1/r} \cdot (\|f\|_p)^{1-p/r} \cdot (\|g\|_q)^{1-q/r} = \\ &= (\| |f|^p * |g|^q \|_1)^{1/r} \cdot (\|f\|_p)^{1-p/r} \cdot (\|g\|_q)^{1-q/r} = \\ &= (\| |f|^p \|_1 \cdot \| |g|^q \|_1)^{1/r} \cdot (\|f\|_p)^{1-p/r} \cdot (\|g\|_q)^{1-q/r} = \\ &= (\|f\|_p)^{p/r} \cdot (\|g\|_q)^{q/r} \cdot (\|f\|_p)^{1-p/r} \cdot (\|g\|_q)^{1-q/r} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \end{aligned}$$

W konsekwencji $|f| * |g| \in L^r(\mathcal{R})$. Ponieważ $|f * g| \leq |f| * |g|$, więc $f * g \in L^r(\mathcal{R})$ i $\|f * g\|_r \leq \| |f| * |g| \|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, c. b. d. o.

Twierdzenie 8.3 jest również prawdziwe w przypadku, gdy $1/r = 0$, tzn. $r = \infty$ i $1/p + 1/q = 1$. W tym przypadku twierdzenie 8.3 można udowodnić w mocniejszej postaci.

8.4. Jeżeli $1/p + 1/q = 1$ ($1 \leq p, q \leq \infty$) i $f \in L^p(\mathcal{R})$, $g \in L^q(\mathcal{R})$, to spłot $f * g$ istnieje, jest funkcją ograniczoną i jednostajnie ciągłą na całej prostej $\mathcal{R}$ oraz

$$\|f * g\|_{\infty} = \|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Zatem w tym przypadku spłot jest operacją dwuliniową, odwzorowującą $L^p(\mathcal{R}) \times L^q(\mathcal{R})$ w $C(\mathcal{R})$.

Dowód twierdzenia 8.4 poprzedzimy dowodem lematu 8.5 i następującą definicją.

Dla dowolnej funkcji $f \in L^p(\mathcal{R})$ i dowolnego $\xi \in \mathcal{R}$ oznaczmy

$$\omega_f^{(p)}(\xi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\xi) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|f_{\xi} - f\|_p,$$

gdzie f_{ξ} oznacza funkcję powstałą z funkcji f przez przesunięcie o ξ , tzn.

$$f_{\xi}(x) = f(x + \xi).$$

Funkcję $\omega_f^{(p)}$ nazywamy p -tym modułem całkowym ciągłości funkcji f (w przypadku $p = 1$ — wprost całkowym modułem ciągłości funkcji f).

8.5. Jeżeli $f \in L^p(\mathcal{R})$ ($1 \leq p < \infty$), to $\omega_f^{(p)}(\xi) \rightarrow 0$, gdy $\xi \rightarrow 0$.

Twierdzenie 8.5 jest prawdziwe, gdy f jest funkcją charakterystyczną przedziału. W konsekwencji jest także prawdziwe, gdy f jest dowolną funkcją schodkową.

Niech $f \in L^p(\mathcal{R})$ będzie dowolną funkcją i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Na mocy twierdzenia 2.10 (i) istnieje funkcja schodkowa $g \in L^p(\mathcal{R})$ taka, że

$$\|f - g\|_p < \varepsilon/3.$$

Tym samym dla dowolnego $\xi \in \mathcal{R}$

$$\|f_{\xi} - g_{\xi}\|_p = \|f - g\|_p < \varepsilon/3.$$

Dla funkcji schodkowej g istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\omega_g^{(p)}(\xi) = \|g_{\xi} - g\|_p < \varepsilon/3 \quad \text{dla} \quad |\xi| < \delta.$$

W rezultacie, dla $|\xi| < \delta$

$$\omega_f^{(p)}(\xi) = \|f_{\xi} - f\|_p \leq \|f_{\xi} - g_{\xi}\|_p + \|g_{\xi} - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia 8.5.

Przechodząc do dowodu twierdzenia 8.4 założmy, że $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$. Z nierówności (2.1) Höldera wynika istnienie i skończoność całki

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

dla każdego x oraz nierówność

$$|f * g(x)| \leq \|h_x\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

gdzie, jak poprzednio, $h_x(t) = f(x-t)$. Następnie, stosując ponownie nierówność Höldera, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} |f * g(x + \xi) - f * g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h_{x+\xi}(t) - h_x(t)| \cdot |g(t)| dt \leq \|h_{x+\xi} - h_x\|_p \cdot \|g\|_q = \\ &= \|f_{\xi} - f\|_p \cdot \|g\|_q = \omega_f^{(p)}(\xi) \|g\|_q, \end{aligned}$$

co dowodzi (por. 8.5) jednostajnej ciągłości funkcji $f * g$.

W dowodach wszystkich powyższych twierdzeń (pomijając badanie ciągłości spłotu) korzystaliśmy jedynie z następujących trzech specjalnych własności zbioru $\mathcal{R}$, po którym całkowaliśmy, i miary Lebesgue'a l_1 , względem której całkowaliśmy:

1) zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ jest grupą abelową ze względu na dodawanie,

2) dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset \mathcal{R}$ funkcja $\chi_A(x-t)$ dwu zmiennych x, t jest mierzalna płasko (tzn. względem miary produktowej $l_2 = l_1 \times l_1$),

3) przesunięcie dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset \mathcal{R}$ o liczbę y nie zmienia miary zbioru, tzn. $|A| = |[x: x-y \in A]|$.

Własność 1) interweniowała już w samej definicji spłotu. Własność 2) implikuje mierzalność płaską funkcji $f(x-t)$ dwu zmiennych, gdzie f jest funkcją mierzalną jednej zmiennej rzeczywistej, umożliwia więc posługiwanie się twierdzeniem Fubiniego. Z własności 3) korzystaliśmy przy równościach typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

i przy dokonywanych przez nas zamianach zmiennych.

Definicję spłotu można więc uogólnić z zachowaniem jego podstawowych własności, zastępując zbiór $\mathcal{R}$ przez jakąś grupę X , a miarę Lebesgue'a i ciało zbiorów mierzalnych — przez pewną miarę i przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów przestrzeni X , spełniające warunki analogiczne do 2) i 3). Dokładniej:

Niech X będzie grupą, tzn. zbiorem elementów, w którym określone zostało działanie dodawania $x+y$ ($x, y \in X$) spełniające następujące aksjomaty

$$(g_1) \quad (x+y)+z = x+(y+z),$$

(g_2) istnieje element $0 \in X$ taki, że $x+0 = 0+x = x$ dla każdego $x \in X$,

(g_3) dla każdego $x \in X$ istnieje element, oznaczany przez $-x$, taki, że $x+(-x) = (-x)+x = 0$.

Zamiast $x+(-y)$ piszemy $x-y$.

Jeśli $A \subset X$ i $y \in X$, to A_y niech oznacza zbiór

$$A_y = [x: x-y \in A].$$

Niech μ będzie miarą określoną na przeliczalnie addytywnym ciełe $\mathfrak{M}$ podzbiorów przestrzeni X taką, że

(h_1) jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $y \in X$, to $A_y \in \mathfrak{M}$ i $\mu(A) = \mu(A_y)$,

(h_2) jeżeli $A \in \mathfrak{M}$, to funkcja $\chi_A(x-t)$ punktu $\{x, t\} \in X \times X$ jest mierzalna względem miary produktowej $\mu \times \mu$.

Miarę μ o powyższych własnościach nazywamy *miarą prawostronnie niezmienniczą*¹⁾. Splotem dwu funkcji f, g (względem prawostronnie niezmienniczej miary μ), określonych na X i mierzalnych $\mathfrak{M}$, nazywamy wówczas funkcję $f * g$ zdefiniowaną wzorem

$$f * g(x) = \int_X f(x-t) g(t) d\mu(t).$$

Przy powyższej definicji spłotu twierdzenie 8.1 pozostaje prawdziwe z wyjątkiem równości (4) i w konsekwencji równości (6). Przy systematycznej modyfikacji pojęć ($L^p(\mathcal{R})$ trzeba zastąpić przez $L^p(X, \mu)$ itp.) twierdzenie 8.2 pozostaje również prawdziwe. Twierdzenie 8.3 pozostaje prawdziwe w przypadku gdy $p = 1$. Oszacowanie, podane w twierdzeniu 8.4, trzeba zastąpić nierównością

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{dla} \quad f \in L^p(X, \mu), g \in L^q(X, \mu) \quad (1/p + 1/q = 1),$$

gdzie $\check{f}$ oznacza funkcję $\check{f}(x) = f(-x)$.

Jak zauważyliśmy powyżej, w przypadku dowolnej grupy X , splot nie jest na ogół przemienny. Splot jest operacją przemienną, jeżeli założymy, że grupa X jest abelowa, tzn. spełnia warunek (g_4): $x+y = y+x$. Twierdzenie 8.3 jest wówczas prawdziwe w pełnym brzmieniu.

Jeśli grupa X jest abelowa, to zamiast „miara prawostronnie niezmiennicza“ mówimy wprost *miara niezmiennicza*. W przypadku grupy abelowej pozostają prawdziwe twierdzenia 8.1, 8.2 i 8.3 w pełnym brzmieniu oraz nierówność podana w twierdzeniu 8.4.

W dalszym ciągu, oprócz przypadku $X = \mathcal{R}$, będziemy jeszcze rozpatrywali przypadek, gdy X jest grupą abelową liczb zespolonych o module 1 (rozdział XIV).

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć splot następujących par funkcji: $e^{-ax^2}, e^{-bx^2}; e^{-x^2}, e^x; e^{-x}, e^{-x}$.

2. Jeżeli zbiory mierzalne $A, B \subset \mathcal{R}$ mają miary l_1 dodatnie, to zbiór $C = [x+y: (x \in A) \cdot (y \in B)]$ zawiera odcinek (twierdzenie Steinhausa²⁾).

(Wsk.: Można założyć, że zbiory A i B są ograniczone. Splot $f = \chi_A * \chi_B$ funkcji charakterystycznych jest funkcją ciągłą i $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx > 0$. Jeśli $f(x) \neq 0$, to $x \in C$.)

¹⁾ Jeśli X jest grupą topologiczną lokalnie zwartą (tzn. X jest równocześnie grupą i przestrzenią metryczną, działania grupowe są ciągłe i każdy element $x \in X$ posiada otoczenie zwarte w X), to istnieje miara prawostronnie niezmiennicza μ taka, że $0 < \mu(G) < \infty$ dla każdego niepustego zbioru otwartego G zawartego w X . Miara μ o tych własnościach jest wyznaczona przez X jednoznacznie z dokładnością do stałego czynnika. Zamiast „miara prawostronnie niezmiennicza“ mówi się także „miara Haara“. Por. Haar [2], Halmos [1], Pontrjagin [1], Weil [1].

²⁾ Steinhaus [3].

3. Jeżeli zbiór mierzalny $A \subset \mathcal{R}$ ma miarę l_A dodatnią, to liczba 0 jest punktem wewnętrznym zbioru $[x-y: (x \in A) \cdot (y \in A)]$ (twierdzenie Steinhausa¹⁾).

4. Jeżeli zbiór $A \subset \mathcal{R}$ ma miarę l_A dodatnią i k jest liczbą naturalną, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdej liczby $d < \delta$ ($d > 0$) istnieje zbiór $A_d \subset A$ miary dodatniej o własności:

jeśli $x \in A_d$, to punkty $x, x+d, x+2d, \dots, x+kd$ należą do A .

(Wsk.: Można zakładać, że A jest zbiorem ograniczonym. Funkcja

$$f(d) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) \cdot \chi_A(x+d) \cdot \chi_A(x+2d) \cdot \dots \cdot \chi_A(x+kd) dx$$

jest ciągła i $f(0) > 0$. Dla d tak małych, że $f(d) > 0$, wystarczy przyjąć $A_d =$ zbiór punktów, dla których funkcja podcałkowa jest dodatnia.)

5. Jeżeli $f \in L^p(\mathcal{R})$, to p -ty moduł całkowity ciągłości funkcji f spełnia nierówności

$$\omega_f^{(p)}(-\xi) = \omega_f^{(p)}(\xi), \quad \omega_f^{(p)}(\xi_1 + \xi_2) \leq \omega_f^{(p)}(\xi_1) + \omega_f^{(p)}(\xi_2),$$

$$0 \leq \omega_f^{(p)}(\xi) \leq 2 \|f\|_p.$$

Jeżeli $1 \leq p < \infty$, to $\omega_f^{(p)}(\xi)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych $f \in L^p(\mathcal{R})$ i $\xi \in \mathcal{R}$. Zatem $\omega_f^{(p)}(\xi) \rightarrow 0$ dla $\xi \rightarrow 0$ jednostajnie na każdym podzbiore zwartym przestrzeni $\mathcal{R}$ (por. rozdział IV, § 11).

W przypadku $p = \infty$ funkcja $\omega_f^{(\infty)}(\xi)$ jednej zmiennej ξ jest ciągła (ciągła w punkcie $\xi = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją jednostajnie ciągłą. Moduł ciągłości funkcji f (por. rozdział III, § 4, str. 123) wyraża się wówczas wzorem

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0 \leq \xi \leq \delta} \omega_f^{(\infty)}(\xi).$$

6. Jeżeli $\omega_f^{(p)}(\xi)/\xi \rightarrow 0$ dla $\xi \rightarrow 0$ ($1 \leq p \leq \infty$), to funkcja $f \in L^p(\mathcal{R})$ jest równoważna funkcji stałej.

(Wsk.: Skorzystać z § 5, ćwiczenie 8 oraz z rozdziału III, § 4, ćwiczenie 2.)

7. Niech $g \in L(\mathcal{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ i niech $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\varepsilon x)$ dla $\varepsilon \neq 0$. Dla dowolnej funkcji $f \in L^p(\mathcal{R})$ ($1 \leq p < \infty$).

$$\|f * g_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

(Wsk.: Zauważyć, że norma po lewej stronie wynosi

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-ct) - f(x)) g(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p}$$

i zastosować uogólnienie nierówności Minkowskiego z § 2, ćwiczenie 2.)

8. Niech $f \in L^p(\mathcal{R})$ ($1 \leq p < \infty$) i dla $\varepsilon \neq 0$ niech

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) dt.$$

¹⁾ Steinhaus [3].

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, to $f_\varepsilon \rightarrow f$ prawie wszędzie i według normy $\| \cdot \|_p$.

9. Niech A będzie podzbiorem ograniczonym przestrzeni $L^p(\mathcal{R})$ i niech $f \in L^p(\mathcal{R})$ ($1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$). Funkcje $f * g$, gdzie $g \in A$, są jednakowo ciągłe.

10. Jeżeli funkcja $f \in L^p(\mathcal{R})$ jest prawie wszędzie różniczkowalna, $f' \in L^p(\mathcal{R})$, oraz dla $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(*) \quad \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \rightarrow f'(x) \quad \text{według normy} \quad \| \cdot \|_p,$$

to funkcja $f * g$, gdzie $g \in L^q(\mathcal{R})$ ($1/p + 1/q = 1$), ma ciągłą pochodną i

$$(f * g)' = f' * g.$$

Założenie (*) jest na pewno spełnione, gdy funkcja f jest równa zeru poza pewnym przedziałem ograniczonym i ma ciągłą pochodną.

11. Niech $f \in L^p(\mathcal{R})$ ($1 \leq p < \infty$), niech

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{\frac{1}{c^2-1}}, & \text{gdy } |x| < 1 \quad (c = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{c^2-1}} dx), \\ 0, & \text{gdy } |x| \geq 1, \end{cases}$$

i niech $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\varepsilon x)$. Funkcje $f * g_\varepsilon$ są nieskończenie wiele razy różniczkowalne oraz $f * g_\varepsilon \rightarrow f$ według normy $\| \cdot \|_p$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczeń 7 i 10.)

12. Miarą niezmienniczą na grupie $\mathcal{C}$ liczb całkowitych jest

$$l_0(A) = \text{ilość elementów zbioru } A \subset \mathcal{C}.$$

Splotem dwu funkcji na $\mathcal{C}$, tzn. dwu ciągów obustronnych

$$\{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad \{\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots\}$$

względem tej miary jest ciąg obustronny

$$\{\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots\},$$

gdzie

$$c_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m} b_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} \quad \text{dla} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Splot $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi definiujące c_n są zbieżne bezwzględnie dla wszystkich $n \in \mathcal{C}$.

13. Funkcja

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{x} dx \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{B}(0; \infty)$$

jest miarą niezmienniczą w grupie moltiplicatywnej liczb rzeczywistych nieujemnych.

§ 9. Pierścienie funkcyjne. Pierścieniem liniowym nazywamy zbiór E elementów, w którym określone są trzy działania: dodawanie $u + v \in E$ dwu elementów $u, v \in E$, mnożenie $au \in E$ elementu $u \in E$ przez liczbę $a \in \mathcal{R}$ (por. § 1) oraz mnożenie $u \cdot v \in E$ dwu elementów $u, v \in E$ (tzn.

funkcja przyporządkowująca każdej parze u, v elementów zbioru E pewien element zbioru E , oznaczany symbolem $u \cdot v$ i nazywany *iloczynem* elementów u, v , spełniające warunki (w_1) - (w_7) z § 1 oraz następujące warunki

$$\begin{aligned} (w_8) \quad & (u_1 \cdot u_2) \cdot u_3 = u_1 \cdot (u_2 \cdot u_3) \text{ (łączność mnożenia),} \\ (w_9) \quad & u \cdot (u_1 + u_2) = u \cdot u_1 + u \cdot u_2 \text{ (rozdzielność mnożenia względem} \\ (w_{10}) \quad & (u_1 + u_2) \cdot u = u_1 \cdot u + u_2 \cdot u \text{ dodawania),} \\ (w_{11}) \quad & (au_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot (au_2) = a(u_1 \cdot u_2) \text{ (łączność mnożenia przez liczbę} \\ & \text{z mnożeniem elementów),} \end{aligned}$$

gdzie $u, u_1, u_2, u_3 \in E$ i $a \in \mathcal{R}$.

Podstawiając w (w_{11}) $a = -1$ otrzymujemy w szczególności

$$(-u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot (-u_2) = -u_1 \cdot u_2.$$

Stąd oraz z (w_9) i (w_{10}) wynika, że wzory (w_9) i (w_{10}) pozostają prawdziwe, jeżeli zastąpić sumę przez różnicę elementów.

Jeżeli dla dowolnych $u_1, u_2 \in E$

$$(w_{12}) \quad u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1,$$

to pierścień liniowy E nazywamy *przemienny*.

Ze względu na działania $u + v, au$ pierścień liniowy jest przestrzenią liniową. Ze względu na działania $u + v, u \cdot v$ pierścień liniowy jest pierścieniem algebraicznym (por. rozdział I, § 7, ćwiczenie 11).

Pierścieniem typu B (albo *pierścieniem Banacha* lub *algebrą Banacha*)¹⁾ nazywamy pierścień liniowy E , w którym określona jest norma, spełniająca warunki (n_1) - (n_3) , § 1, oraz warunek

$$(n_4) \quad \|u_1 \cdot u_2\| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|,$$

przy której pierścień E , rozpatrywany jako przestrzeń liniowa, jest przestrzenią Banacha.

Z warunków (n_4) , (w_9) , (w_{10}) wynika, że mnożenie $u \cdot v$ elementów pierścienia Banacha jest operacją dwuliniową, odwzorowującą $E \times E$ w E , jest więc ciągłą funkcją dwu zmiennych u, v , tzn.

9.1. Jeżeli $u_n \rightarrow u$ i $v_n \rightarrow v$, to $u_n \cdot v_n \rightarrow u \cdot v$.

Podamy obecnie kilka przykładów pierścieni liniowych i pierścieni Banacha.

A) Przestrzeń $C(X)$ (w szczególności przestrzenie C, c, c_0), $M(X)$ (w szczególności m) i $L^\infty(X, \mu)$ są przemiennymi pierścieniami Banacha przy zwykłej definicji mnożenia funkcji:

$$f \cdot g = fg.$$

¹⁾ Teorię pierścieni typu B zbudował Gelfand [1]. Wcześniej Mazur [3] podał pewne podstawowe twierdzenia o izomorfizmie z ciałami liczbowymi. Czytelnika, interesującego się bliżej teorią pierścieni typu B, odsyłamy do podstawowej pracy Gelfanda [1] lub do monografii Hille [1].

B) Z twierdzeń 8.1 i 8.2 wynika, że przestrzeń $L(\mathcal{R})$ jest pierścieniem, jeżeli iloczyn funkcji f, g definiować jako splot

$$f \cdot g = f * g.$$

C) Przestrzeń $L(0; \infty)$ funkcji całkowalnych (względem miary Lebesgue'a l_1) na półprostej dodatniej jest równoważna podprzestrzeni przestrzeni $L(\mathcal{R})$, złożonej z funkcji równych zeru na półprostej ujemnej. Równoważność ustala przekształcenie, przyporządkowujące każdej funkcji $f \in L(0; \infty)$ jej trywialne rozszerzenie na całą prostą $\mathcal{R}$, zdefiniowane wzorem: $f(x) = 0$ dla $x < 0$. Możemy więc po prostu uważać, że $L(0; \infty)$ jest podzbiorem liniowym przestrzeni $L(\mathcal{R})$, identyfikując każdą funkcję $f \in L(0; \infty)$ z jej trywialnym rozszerzeniem na całą prostą.

Przestrzeń $L(0; \infty)$ jest pierścieniem Banacha (dokładniej: podpierścieniem pierścienia $L(\mathcal{R})$), jeśli jako iloczyn $f \cdot g$ dwu funkcji $f, g \in L(0; \infty)$ przyjmujemy ich splot. Wynika to z faktu, że jeśli $f(x) = 0 = g(x)$ dla $x < 0$, to funkcja

$$(1) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

jest także równa zeru dla $x < 0$. Ponieważ $f(x-t) = 0$ dla $t > x$, definicja splotu $f * g$ dwu funkcji $f, g \in L(0; \infty)$ może więc być podana za pomocą równości

$$(2) \quad f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \quad \text{dla } x \geq 0.$$

D) W teorii operatorów podstawową rolę odgrywa pewien pierścień liniowy (bez normy), będący naturalnym rozszerzeniem pierścienia $L(0; \infty)$.

Niech L^+ oznacza zbiór funkcji mierzalnych¹⁾ (względem miary Lebesgue'a l_1), określonych na półprostej dodatniej, całkowalnych na każdym przedziale $0; c$, gdzie $0 < c < \infty$. L^+ jest pierścieniem liniowym przy zwykłej definicji dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę, przyjmując jako iloczyn $f \cdot g$ dwu funkcji $f, g \in L^+$ ich splot $f * g$, zdefiniowany wzorem (2)²⁾. Definicja (2), jak zauważyliśmy poprzednio, jest szczególnym przypadkiem definicji (1), jeżeli rozszerzymy funkcję f, g na całą prostą $\mathcal{R}$, przyjmując $f(x) = g(x) = 0$ dla $x < 0$. Dowód twier-

¹⁾ Funkcje równoważne utożsamiamy.

²⁾ Badaniu elementarnych własności splotu (2), jak ciągłość, różniczkowalność itp., poświęcona jest praca: Mikusiński i Ryll-Nardzewski [3].

dzenia, że spłot $f * g$ dwu funkcji $f, g \in L^+$ również należy do L^+ jest podobny do dowodu twierdzenia 8.2.

Podobnie zbiór C^+ wszystkich funkcji ciągłych na półprostej $0; \infty$ jest pierścieniem przy tej samej definicji działań, jak w pierścieniu L^+ (ciągłość spłotu $f * g$ dwu funkcji $f, g \in C^+$ wynika bezpośrednio z wzoru (2)). C^+ jest więc podpierścieniem pierścienia L^+ .

Podstawowym twierdzeniem teorii pierścienia L^+ jest twierdzenie Titchmarsha¹⁾ orzekające, że spłot $f * g$ dwu funkcji $f, g \in L^+$ jest równy zero prawie wszędzie, wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z funkcji f, g jest prawie wszędzie równa zero, tzn.

$$(3) \quad f * g = 0, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f = 0 \text{ lub } g = 0.$$

W języku algebry własność tę można by wysłowić w następujący sposób: pierścień algebraiczny L^+ nie posiada dzielników zera²⁾. W algebrze dowodzi się, że każdy przemienność pierścień nie posiadający dzielników zera, można rozszerzyć do ciała algebraicznego³⁾, tzn. zbioru, w którym wykonalne są cztery działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie elementów (z wyjątkiem dzielenia przez element zerowy). Zatem pierścień L^+ można rozszerzyć do ciała algebraicznego $\mathcal{M}$, zwanego *ciałem operatorów Mikusińskiego*⁴⁾. Elementami ciała $\mathcal{M}$ są formalne ułamki (które trzeba odróżniać od zwykłego dzielenia funkcji f/g)

$$u = \frac{f}{g},$$

gdzie $f, g \in L^+$ ($g \neq 0$), przy zwykłej definicji równości i działań:

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f_1 * g = f * g_1,$$

$$\frac{f}{g} \pm \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * g_1 \pm f_1 * g}{g * g_1}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{f}{g} * \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * f_1}{g * g_1},$$

$$\frac{\frac{f}{g}}{\frac{f_1}{g_1}} = \frac{f * g_1}{f_1 * g},$$

¹⁾ Titchmarsh [1], str. 324 i [2]. Por. także Crum [1], Dufresnoy [1], Mikusiński [1], Mikusiński i Ryll-Nardzewski [2].

²⁾ Element $u \neq 0$ pierścienia algebraicznego jest *dzielnikiem zera*, jeżeli istnieje element $v \neq 0$ taki, że $uv = 0$. Na przykład w pierścieniu C każda funkcja niezerowa, równa zero w pewnym przedziale jest dzielnikiem zera.

³⁾ Czytelnik, nie znający cytowanych tu pojęć i twierdzeń algebraicznych, może pominąć dalszy ciąg ustępu D), którego treść nie interweniuje w dalszym ciągu książki.

⁴⁾ Mikusiński [2] i [3].

przy tym ułamek $\frac{f * g}{g}$ (gdzie $g \neq 0$) utożsamiamy z elementem $f \in L^+$. Sensowność powyższych definicji jest zapewniona przez twierdzenie (3).

Element $e = \frac{g}{g}$, gdzie $g \neq 0$ jest dowolnym elementem L^+ , jest jednością tego ciała, tzn. $e * u = u$ dla dowolnego $u \in \mathcal{M}$.

Własności ciała operatorów Mikusińskiego wiążą się z zagadnieniem (omawianym przez nas w rozdziale X, § 9) takiego uogólnienia pojęcia funkcji i pojęcia pochodnej, by różniczkowanie było stale wykonalne. Mianowicie niech ι oznacza funkcję określoną w przedziale $0; \infty$ stale równą jedności. Dla dowolnej funkcji $f \in L^+$

$$\iota * f(x) = f * \iota(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

tzn. $\iota * f$ jest całką nieoznaczoną funkcji f , znikającą w punkcie 0. Mnożenie przez ι w pierścieniu $\mathcal{M}$ odpowiada więc operacji całkowania. Element $d = \frac{e}{\iota}$ ma następującą własność

$$(4) \quad d * u = v \equiv (\iota * v = u),$$

wynikającą bezpośrednio z definicji dzielenia.

Jeśli więc $u = f$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą, określoną w przedziale $0; \infty$, znikającą w punkcie 0, to pochodna $v = f'$ spełnia prawą stronę równoważności (4). Zatem w rozważanym przypadku

$$d * f = f'.$$

Mnożenie przez element d (stale wykonalne w $\mathcal{M}$) jest więc namiastką operacji różniczkowania.

E) Przestrzeń liniowa $V_0(\mathcal{R})$ wszystkich funkcji lewostronnie ciągłych o wahanu ograniczonym, określonych na prostej $\mathcal{R}$, dążących do zera, gdy $x \rightarrow -\infty$, jest również pierścieniem Banacha, jeżeli jako iloczyn dwu funkcji $\varphi, \psi \in V_0(\mathcal{R})$ przyjąć funkcję $\varphi * \psi$ zdefiniowaną wzorem

$$(5) \quad \varphi * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) d\psi(t) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R},$$

gdzie całka jest interpretowana w sensie Lebesgue'a-Stieltjesa.

Istotnie, całka (5) istnieje i jest skończona dla każdego $x \in X$, gdyż funkcja podcałkowa jest ograniczona, a całkowanie odbywa się względem funkcji o wahanu ograniczonym (tzn. względem dwu miar skończonych).

Lewostronna ciągłość funkcji $\varphi \cdot \psi$ wynika bezpośrednio z lewostronnej ciągłości funkcji φ oraz z twierdzenia 8.1 (c), rozdział XI, gdyż z założeń $x_n \rightarrow x$, $x_n < x$ wynika, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \cdot \psi(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_n - t) d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n - t) d\psi(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t) d\psi(t) = \varphi \cdot \psi(x). \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Niech x_1 i x_2 będą takimi liczbami, że $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$ dla $x \leq x_1$ oraz $|\Delta_{\varphi}^*(-\infty; x_2)| \leq \varepsilon$.

Dla $x < x_1 + x_2$ zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} (6) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) d\psi(t) \right| &\leq \int_{-\infty}^{x_2} |\varphi(x-t)| d\psi^*(t) + \int_{x_2}^{\infty} |\varphi(x-t)| d\psi^*(t) \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{R}} |\varphi(x)| \cdot \varepsilon + \varepsilon \Delta_{\varphi}^*(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ostatnia część oszacowania (6) wynika z uwagi, że dla $x < x_1 + x_2$ i dla $t \geq x_2$ jest $x - t < x_1$. Z (6) wynika bezpośrednio, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi \cdot \psi(x) = 0$.

Dla dowolnego przedziału $P = a; b \subset \mathcal{R}$ i dla dowolnego ciągu punktów

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = b$$

zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r |\varphi \cdot \psi(x_j) - \varphi \cdot \psi(x_{j-1})| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^r |\varphi(x_j - t) - \varphi(x_{j-1} - t)| d\psi^*(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\varphi}^*(\mathcal{R}) d\psi^*(t) = \\ &= \Delta_{\varphi}^*(\mathcal{R}) \cdot \Delta_{\psi}^*(\mathcal{R}) = \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \end{aligned}$$

(por. definicję normy w przestrzeni $V_0(\mathcal{R})$ w § 3 E). Zatem $\Delta_{\varphi \cdot \psi}^*(P) \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ dla dowolnego przedziału domkniętego $P \subset \mathcal{R}$, co dowodzi, że $\varphi \cdot \psi \in V_0(\mathcal{R})$ oraz $\|\varphi \cdot \psi\| = \Delta_{\varphi \cdot \psi}^*(\mathcal{R}) \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$.

Aby wykazać, że $V_0(\mathcal{R})$ jest istotnie pierścieniem, wystarczy udowodnić, że spełniony jest aksjomat (w_8) łączności — spełnianie warunków

(w_9))-(w₁₁) jest oczywiste. Stosując twierdzenie 10.2, rozdział XI, oraz podstawienie $z = t - y$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_3)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-t) d_t \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t-y) d_y \varphi_3(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-t) d_t \varphi_2(t-y) \right) d_y \varphi_3(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-y-z) d_z \varphi_2(z) \right) d_y \varphi_3(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 \cdot \varphi_2(x-y) d_y \varphi_3(y) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_3(x), \end{aligned}$$

tnz. $\varphi_1 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_3) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_3$ dla dowolnych funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V_0(\mathcal{R})$. Pierścień $V_0(\mathcal{R})$ jest przemienny, gdyż

$$\varphi \cdot \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) d_y \psi(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) d\varphi(y) = \psi \cdot \varphi(x)$$

przez podstawienie $t = x - y$ oraz całkowanie przez części. Całkowanie przez części jest na pewno możliwe dla $x \in A$, gdzie A oznacza zbiór tych $x \in \mathcal{R}$, dla których funkcje $\psi(x-y)$, $\varphi(y)$ jednej zmiennej y nie mają

wspólnych punktów nieciągłości, gdyż całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) d_y \psi(x-y)$ można wtedy interpretować jako niewłaściwą całkę Riemanna-Stieltjesa — por. rozdział XI, twierdzenie 7.1 oraz rozdział XI, § 7, ćwiczenie 1¹⁾). Ponieważ zbiór $X - A$ jest co najwyżej przeliczalny, zbiór A jest gęsty na prostej $\mathcal{R}$. Wykorzystując lewostronną ciągłość funkcji $\varphi \cdot \psi$ i $\psi \cdot \varphi$ wnioskujemy stąd, że równość $\varphi \cdot \psi(x) = \psi \cdot \varphi(x)$ zachodzi nie tylko dla $x \in A$, lecz również dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$.

F) Uogólniając definicję produktu dwu miar, przez produkt $v_1 \times_{\sigma} v_2$ przeliczalnie addytywnych skończonych funkcji zbioru $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{B})$, określonych na ciele $\mathcal{B}$ borelowskich podzbiorów prostej $\mathcal{R}$, rozumiemy będziemy skończoną, przeliczalnie addytywną funkcję zbioru

$$v_1 \times_{\sigma} v_2 = (v_1^+ - v_1^-) \times_{\sigma} (v_2^+ - v_2^-) = v_1^+ \times_{\sigma} v_2^+ - v_1^+ \times_{\sigma} v_2^- - v_1^- \times_{\sigma} v_2^+ + v_1^- \times_{\sigma} v_2^-$$

¹⁾ Z rozdziału XI, § 7, ćwiczenie 6, wynika, że całkowanie przez części jest wykonalne dla każdego x .

określoną na ciele $\mathfrak{B}_2$ borelowskich podzbiorów płaszczyzny $\mathcal{R}^2$. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{B}$ oznaczmy symbolem A^* zbiór punktów płaszczyzny $\mathcal{R}^2$

$$A^* = [\{\xi_1, \xi_2\}: \xi_1 + \xi_2 \in A] \in \mathfrak{B}_2.$$

Splotem dwu funkcji $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{B})$ nazywać będziemy przeliczalnie addytywną funkcję zbioru, oznaczaną symbolem $v_1 * v_2$, zdefiniowaną wzorem

$$(7) \quad v_1 * v_2(A) = v_1 \times_{\sigma} v_2(A^*) \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Oczywiście $v_1 * v_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{B})$.

Przestrzeń Banacha $\mathcal{W}(\mathfrak{B})$ jest przemennym pierścieniem Banacha, jeżeli przez iloczyn funkcji $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{B})$ będziemy rozumieli ich splot $v_1 * v_2$. Pierścień ten jest równoważny¹⁾ pierścieniowi $V_0(\mathcal{R})$ dystrybuant funkcji należących do $\mathcal{W}(\mathfrak{B})$. Mianowicie odwzorowanie T , przyporządkowujące każdej funkcji $v \in \mathcal{W}(\mathfrak{B})$ jej dystrybuantę $\varphi \in V_0(\mathcal{R})$, spełnia warunek

$$(8) \quad T(v_1 * v_2) = T(v_1) \cdot T(v_2),$$

zachowuje więc normę (por. str. 26) i wszystkie działania. Równość (8) wynika z następującego twierdzenia

9.2. Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2 \in V_0(\mathcal{R})$ są dystrybuantami funkcji $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{B})$, to $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ jest dystrybuantą funkcji $v_1 * v_2$, tzn. $\varphi_1 \cdot \varphi_2(x) = v_1 \times_{\sigma} v_2(B_x)$ dla $x \in \mathcal{R}$, gdzie $B_x = [\{\xi_1, \xi_2\}: \xi_1 + \xi_2 < x] = (-\infty; x)^* \in \mathfrak{B}_2$.

Istotnie,

$$\begin{aligned} v_1 \times_{\sigma} v_2(B_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{B_x}(\xi_1, \xi_2) d\varphi_1(\xi_1) \right) d\varphi_2(\xi_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x - \xi_2) d\varphi_2(\xi_2) = \varphi_1 \cdot \varphi_2(x), \end{aligned}$$

gdyż przy ustalonym ξ_2 i x

$$\chi_{B_x}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \xi_1 < x - \xi_2, \\ 0 & \text{dla} \quad \xi_1 \geq x - \xi_2, \end{cases}$$

zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{B_x}(\xi_1, \xi_2) d\varphi_1(\xi_1) = \varphi(x - \xi_2) - \varphi(-\infty) = \varphi(x - \xi_2).$$

¹⁾ Analogicznie jak w przypadku przestrzeni Banacha, dwa pierścienie Banacha są równoważne, jeśli istnieje jednoznaczne odwzorowanie jednego z nich na pozostały, zachowujące wszystkie działania i normę.

Jak zauważyliśmy w § 3 D, przestrzeń Banacha $L(\mathcal{R})$ jest równoważna podprzestrzeni $\mathcal{W}_0(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{W}(\mathfrak{B})$, złożonej z funkcji bezwzględnie ciągłych względem miary Lebesgue'a l_1 . Równoważność ustala mianowicie odwzorowanie T , przyporządkowujące każdej funkcji $f \in L(\mathcal{R})$ funkcję $v = T(f) \in \mathcal{W}_0(\mathfrak{B})$ zdefiniowaną wzorem

$$v(A) = \int_A f(x) dx \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Odwzorowanie T zachowuje również splot, tzn.

$$(9) \quad T(f * g) = T(f) * T(g).$$

Podpierścień $\mathcal{W}_0(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{W}(\mathfrak{B})$ jest więc równoważny pierścieniowi $L(\mathcal{R})$. Definicję (7) splotu skończonych przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru można więc uważać za uogólnienie definicji splotu funkcji całkowalnych. Równość (9) wynika natychmiast z twierdzenia 9.2 i z następującego twierdzenia

9.3. Jeżeli

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi, \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R},$$

gdzie $f, g \in L(\mathcal{R})$, to $\varphi, \psi \in V_0(\mathcal{R})$ oraz

$$\varphi \cdot \psi(x) = \int_0^x f * g(\xi) d\xi.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \varphi \cdot \psi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) g(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-t} f(\xi) d\xi \right) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x f(\xi-t) d\xi \right) g(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi-t) g(t) dt \right) d\xi = \int_{-\infty}^x f * g(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

stosując podstawienie $\xi-t$ zamiast ξ oraz twierdzenie Fubiniego.

Zauważmy jeszcze, że

9.4. Jeżeli $v_1, v_2 \geq 0$, to $v_1 * v_2 \geq 0$, tzn. splot miar jest miarą.

ĆWICZENIA. 1. Przestrzeń $l(\mathcal{C})$ wszystkich ciągów dwustronnych $u = \{a_n\}$ takich, że

$$\|u\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

jest przemiennym pierścieniem Banacha, jeśli jako mnożenie przyjąć splot, zdefiniowany w § 8, ćwiczeniu 12.

Uwaga. Ogólniej, jeśli μ jest miarą prawostronnie niezmienniczą w grupie G , to przestrzeń $L(G, \mu)$ jest pierścieniem Banacha, gdy jako iloczyn przyjąć splot. Pierścień ten jest przemienny, gdy grupa G jest abelowa.

2. Przestrzeń l szeregów bezwzględnie zbieżnych¹⁾ jest pierścieniem Banacha, jeżeli jako mnożenie przyjąć zwykłe mnożenie Cauchy'ego szeregów nieskończonych:

$$\{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} * \{\beta_n\}, \quad \text{gdy} \quad \gamma_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \dots$$

Pierścień l jest równoważny podpierścieniowi pierścienia $l(C)$, złożonemu z obustronnych ciągów $\{\alpha_n\}$ takich, że $\alpha_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$

Uwaga. Mnożenie Cauchy'ego szeregów może więc być interpretowane jako szczególnie przypadek splotu.

3. Przestrzeń s wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych, skończonych $u = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ jest pierścieniem liniowym przy takiej samej definicji mnożenia, jak w ćwiczeniu 2.

Pierścień s (a więc także jego podpierścień l) nie posiada dzielników zera, tzn. z równości $u * v = 0$ ($u, v \in s$) wynika, że albo $u = 0$, albo $v = 0$.

(Wsk.: Udowodnić przez indukcję, że jeśli $\{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} * \{\beta_n\}$ i $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$, to istnieją liczby całkowite nieujemne i, j takie, że $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{j-1} = 0$, $i + j = n + 1$.)

Uwaga. Jak wykazemy później (por. rozdział XIV, § 8, ćwiczenie 3), pierścień $l(C)$ posiada dzielniki zera. Podobnie pierścień $L(\mathcal{R})$ (por. rozdział XV, § 5, ćwiczenie 1) posiada dzielniki zera.

4. Element e pierścienia liniowego E nazywa się *jednością*, jeżeli $eu = ue = u$ dla każdego $u \in E$.

Wykazać, że pierścienie $l(C)$, l , s posiadają jedność, natomiast pierścienie $L(\mathcal{R})$, $L(0; \infty)$, L^+ nie posiadają jedności.

Jednością pierścienia $\mathcal{W}(\mathcal{B})$ jest miara μ_0 zdefiniowana wzorem

$$\mu_0(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 \in B, \\ 0, & \text{gdy } 0 \notin B, \end{cases} \quad \text{dla } B \in \mathcal{B}.$$

Jednością pierścienia $V_0(\mathcal{R})$ jest funkcja

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

5. Niech $w_n \in \mathcal{R}$ dla $n = 1, 2, \dots$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Funkcje skoków (por. rozdział IX, § 5, ćwiczenie 9)

$$\varphi(x) = \sum_{w_n < x} a_n, \quad \psi(x) = \sum_{w_n < x} b_n$$

należą do $V_0(\mathcal{R})$ oraz

$$\varphi * \psi(x) = \sum_{w_n + v_m < x} a_n b_m.$$

¹⁾ Wyrazy szeregów wygodniej tu jest numerować liczbami całkowitymi nieujemnymi 0, 1, 2, ...

6. Jeżeli jedna z dwu przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{B})$ jest bezwzględnie ciągła (względem miary $l_1|\mathcal{B}$), to splot $v_1 * v_2$ jest także bezwzględnie ciągły.

7. Jeżeli $\varphi, \psi \in V_0(\mathcal{R})$ i $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ dla $x \leq 0$, to

$$(*) \quad \varphi * \psi(x) = \int_0^x \varphi(x-t) \psi(t) dt \quad \text{dla } x \geq 0$$

oraz $\varphi * \psi(x) = 0$ dla $x \leq 0$. Zatem funkcje $\varphi \in V_0(\mathcal{R})$, znikające dla $x \leq 0$, tworzą podpierścień pierścienia $V_0(\mathcal{R})$.

8. Zbiór V_0^+ lewostronnie ciągłych funkcji φ o wahanu skończonym, określonych na półprostej $\overline{0; \infty}$ i przyjmujących wartość zero w punkcie 0, jest pierścieniem liniowym (nieunormowanym), jeżeli jako definicję iloczynu przyjąć wzór (*). Pierścień rozważany w ćwiczeniu 7 oraz pierścień L^+ mogą być interpretowane jako podpierścień pierścienia V_0^+ .

Jednością pierścienia V_0^+ jest funkcja

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(x) = 1 \quad \text{dla } x > 0.$$

9. Niech $F(z)$ i $G(z)$ będą transformatami Laplace'a funkcji $f, g \in L^+$; zakładamy, że transformaty te są określone w pewnej wspólnej półpłaszczyźnie (por. rozdział XI, § 12, ćwiczenie). Wykazać, że transformatą Laplace'a funkcji $f * g$ jest iloczyn $F(z)G(z)$ (tzn. że transformacja Laplace'a przeprowadza zawsze splot funkcji na zwykły iloczyn). Udowodnić analogiczne twierdzenie dla transformat Laplace'a-Stieltjesa.

10. Niech $f, g \in C^+$. Jeżeli funkcja f (funkcja g) ma ciągłą pochodną, to splot $f * g$ ma także ciągłą pochodną oraz $(f * g)' = f' * g$ ($(f * g)' = f * g'$). Jeżeli jedna z funkcji f, g jest nieskończenie wiele razy różniczkalna, to splot $f * g$ jest także nieskończenie wiele razy różniczkalny.

Uwaga. Splot $f * g$ funkcji $f, g \in C^+$ może być funkcją nieróżniczkalną w każdym punkcie¹⁾.

§ 10. Szeregi nieskończone. Uogólnimy definicję szeregów nieskończonych liczb rzeczywistych. *Szeregiem nieskończonym*

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots$$

elementów przestrzeni Banacha E nazywamy ciąg sum częściowych

$$(2) \quad v_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Jeżeli ciąg sum częściowych jest zbieżny w E do pewnego elementu $v \in E$, to mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny w E* oraz że v jest *sumą szeregu* (1) w przestrzeni E , i piszemy

$$(3) \quad v = u_1 + u_2 + \dots \quad \text{w } E.$$

¹⁾ Jarník [1].

Zamiast (1) piszemy także $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, a zamiast (3): $v = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ w E .

10.1 (Warunek Cauchy'ego). *Na to, by szereg (1) elementów przestrzeni Banacha był zbieżny, potrzeba i wystarcza, by dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba naturalna n_0 , że dla dowolnych $n > m \geq n_0$ jest*

$$(4) \quad \|u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n\| < \varepsilon.$$

Istotnie, warunek (4) orzeka, że ciąg $\{v_n\}$ sum częściowych (2) spełnia warunek Cauchy'ego (por. rozdział II, § 6).

Podobnie jak w przypadku szeregów liczbowych, warunek Cauchy'ego dla szeregu (1) może być sformułowany w następującej postaci: dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje naturalna liczba n_0 taka, że

$$(5) \quad \|u_{n_0+1} + \dots + u_n\| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Z twierdzenia 10.1 wynika bezpośrednio, że

10.2. *Jeżeli szereg (1) jest zbieżny w E , to $u_n \rightarrow 0$ w E .*

Mówimy, że szereg (1) jest *bezw warunkowo zbieżny* w E , jeżeli jest on zbieżny w E przy dowolnym uporządkowaniu jego wyrazów, tzn. jeżeli dla dowolnej funkcji jednojednoznacznej τ , odwzorowującej zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$ na siebie, szereg

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_{\tau(n)}$$

jest zbieżny.

10.3. *Na to, by szereg (1) elementów przestrzeni Banacha był bezw warunkowo zbieżny, potrzeba i wystarcza, by dla dowolnego ciągu rosnącego $\{m_n\}$ liczb naturalnych szereg*

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_{m_n}$$

*był zbieżny*¹⁾.

Założmy, że szereg (7) nie jest zbieżny, tzn. nie spełnia warunku (5) Cauchy'ego. Istnieje więc liczba $\varepsilon > 0$ i ciąg rosnący $\{r_n\}$ liczb naturalnych taki, że

$$(8) \quad \|u_{r_{n+1}} + u_{r_{n+2}} + \dots + u_{r_{n+1}}\| \geq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Niech $\{j_n\}$ oznacza ciąg liczb naturalnych utworzony ze wszystkich liczb naturalnych, które nie występują w ciągu $\{m_n\}$ (każda liczba nie występująca w $\{m_n\}$ występuje w $\{j_n\}$ dokładnie jeden raz). Szereg

$$u_{m_1} + u_{m_2} + \dots + u_{m_{r_1}} + u_{j_1} + u_{m_{r_1+2}} + u_{m_{r_1+3}} + \dots + u_{m_{j_2}} + \dots$$

¹⁾ Orlicz [5].

powstały przez kolejne wypisywanie na przemian skończonych sum postaci (8) i wyrazów ciągu $\{u_{j_n}\}$, różni się od szeregu (1) jedynie uporządkowaniem wyrazów, nie jest jednak zbieżny, gdyż na mocy (8) nie spełnia warunku Cauchy'ego.

Założmy teraz, że — na odwrót — szereg (6) nie jest zbieżny, tzn. nie spełnia warunku (4) Cauchy'ego. Istnieje więc liczba $\varepsilon > 0$ oraz dwa ciągi $\{r_n\}$ i $\{s_n\}$ liczb naturalnych takie, że

$$(9) \quad \|u_{r(n)} + u_{r(n+1)} + \dots + u_{r(s_n)}\| \geq \varepsilon \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$r_n < s_n < r_{n+1} < s_{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(10) \quad \tau(j) < \tau(j') \quad \text{dla} \quad r_n \leq j \leq s_n \text{ i } r_{n+1} \leq j' \leq s_{n+1}.$$

Szereg otrzymany przez dodanie wszystkich wyrazów $u_{\tau(m)}$, gdzie $r_n \leq m \leq s_n$ dla pewnej liczby $n = 1, 2, \dots$ w kolejności ich numerów, jest szeregiem typu (7). Z (9) i (10) wynika, że szereg ten nie spełnia warunku Cauchy'ego (nie jest więc zbieżny), gdyż sumy po lewej stronie (9) są również sumami kolejnych wyrazów w tym szeregu.

10.4. *Suma szeregu bezw warunkowo zbieżnego nie zależy od uporządkowania jego wyrazów*¹⁾.

Założmy, że szereg (1) oraz szereg

$$(11) \quad u'_1 + u'_2 + \dots$$

różnią się jedynie porządkiem wyrazów. Aby udowodnić równość ich sum, wystarczy zdefiniować trzeci szereg

$$(12) \quad u''_1 + u''_2 + \dots,$$

różniący się od tamtych jedynie porządkiem wyrazów, i ciąg rosnący $\{m_n\}$ liczb naturalnych taki, że m_{2n-1} -te sumy częściowe szeregów (1) i (12) są równe i m_{2n} -te sumy częściowe szeregów (11) i (12) są równe. Istotnie, wtedy szeregi (1) i (12) mają tę samą sumę, bo ich ciągi sum częściowych mają wspólny podciąg. Na tej samej zasadzie szeregi (11) i (12) mają tę samą sumę, a więc także szeregi (1) i (11) mają tę samą sumę.

Szereg (12) i ciąg $\{m_n\}$ definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

Niech $u'_1 = u_1$ i $m_1 = 1$. Niech $m_2 > 1$ będzie taką liczbą naturalną, że w ciągu $u'_1, \dots, u'_{m_2}$ występuje wyraz u'_1 . Niech $u'_2, \dots, u'_{m_2}$ będą wyrazami ciągu $u'_1, \dots, u'_{m_2}$ z pominięciem jednego równego u'_1 .

Przypuścimy, że określiliśmy już liczbę m_{2n-2} i wyrazy

$$(13) \quad u'_1, \dots, u'_{m_{2n-2}}.$$

¹⁾ Orlicz [3].

Niech m_{2n-1} będzie liczbą naturalną $> m_{2n-2}$ taką, że ciąg

$$(14) \quad u_1, \dots, u_{m_{2n-1}}$$

zawiera wszystkie wyrazy występujące w (13). Niech

$$u'_{m_{2n-2}+1}, \dots, u'_{m_{2n-1}}$$

będzie ciągiem utworzonym z wyrazów (14) nie wypisanych w ciągu (13).

Następnie niech m_{2n} będzie taką liczbą naturalną $> m_{2n-1}$, że ciąg

$$(15) \quad u'_1, \dots, u'_{m_{2n}}$$

zawiera wszystkie wyrazy ciągu

$$(16) \quad u''_1, \dots, u''_{m_{2n-1}}.$$

Niech

$$u''_{m_{2n-1}+1}, \dots, u''_{m_{2n}}$$

będzie ciągiem utworzonym z wyrazów ciągu (15) nie wypisanych w ciągu (16).

Mówimy, że szereg (4) jest *bezwzględnie zbieżny* w przestrzeni Banacha E , jeżeli

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty.$$

10.5. W przestrzeni Banacha każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dokładniej:

Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny.

Istotnie, z (17) i z nierówności

$$\|u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n\| \leq \|u_{m+1}\| + \|u_{m+2}\| + \dots + \|u_n\|$$

wynika, że szereg (1) spełnia warunek 10.1 Cauchy'ego, jest więc zbieżny. W podobny sposób, wykorzystując bezwarunkową zbieżność szeregu liczbowego (17), dowodzi się zbieżności szeregu (6).

W przeciwieństwie do przypadku szeregów liczbowych, twierdzenie odwrotne do drugiej części twierdzenia 10.5 nie jest prawdziwe: istnieją szeregi zbieżne bezwarunkowo, lecz nie bezwzględnie. Na przykład w przestrzeni ℓ^2 wszystkich ciągów $u = \{a_n\}$ o zbieżnym szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$

szereg (1), gdzie

$$u_1 = \{1/1, 0, 0, 0, 0, \dots\},$$

$$u_2 = \{0, 1/2, 0, 0, 0, \dots\},$$

$$u_3 = \{0, 0, 1/3, 0, 0, \dots\},$$

$$\dots$$

nie jest zbieżny bezwzględnie (bo $\|u_n\| = 1/n$), ale jest zbieżny bezwarunkowo, bo każdy szereg (7) spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny.

Można udowodnić¹⁾, że w każdej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha istnieją szeregi bezwarunkowo zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne.

Szeregi zbieżne, lecz nie bezwarunkowo zbieżne, istnieją, jak wiadomo, już w przypadku $E = \mathcal{R}$.

10.6. Niech F będzie funkcjonalem liniowym na przestrzeni E . Jeżeli szereg (1) jest zbieżny, to

$$(18) \quad F\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(u_n).$$

Jeżeli szereg (1) jest zbieżny bezwarunkowo (w szczególności jeśli jest zbieżny bezwzględnie), to szereg liczbowy po prawej stronie równości (18) jest zbieżny bezwzględnie²⁾.

Istotnie (por. (2)),

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) &= F(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_1) + F(u_2) + \dots + F(u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} F(u_n). \end{aligned}$$

Jeżeli szereg (4) jest bezwarunkowo zbieżny, to zastępując w (18) szereg (1) przez dowolny szereg postaci (6) stwierdzamy, że szereg liczbowy po prawej stronie (18) jest zbieżny przy dowolnym uporządkowaniu składników, tzn. jest bezwzględnie zbieżny.

ĆWICZENIA. 1. Na to, by szereg

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

funkcji rzeczywistych, ograniczonych, określonych na pewnym zbiorze X , był zbieżny jednostajnie przy dowolnym uporządkowaniu jego wyrazów (tzn. by był zbieżny bezwarunkowo w przestrzeni $\mathcal{M}(X)$), potrzeba i wystarcza, by szereg

$$(**) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$$

był zbieżny jednostajnie (tzn. zbieżny w $\mathcal{M}(X)$)³⁾.

(Wsk.: Dostateczność wynika z twierdzeń 10.1 i 10.3. Dla dowodu konieczności wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy szereg (**) jest zbieżny, lecz niejednostajnie. Istnieje więc $\varepsilon > 0$, ciąg punktów $x_n \in X$ i ciagi liczb naturalnych $r_n < s_n < r_{n+1}$ takie,

¹⁾ Dvoretzky i Rogers [1].

²⁾ Przy pewnych dodatkowych założeniach o przestrzeni E prawdziwe jest odwrócenie drugiej części twierdzenia. Por. Orlicz [3].

³⁾ Sierpiński [1] i [2].

że $\sum_{m=r_n}^{s_n} |f(x_n)| \geq \varepsilon$. Oznaczając przez N_n odpowiednio wybrany jeden ze zbiorów liczb naturalnych $[m: (r_n \leq m \leq s_n) \cdot (f_m(x_n) \geq 0)]$ lub $[m: (r_n \leq m \leq s_n) \cdot (f_m(x_n) < 0)]$ mamy $|\sum_{m \in N_n} f_m(x_n)| \geq \varepsilon/2$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_m(x_n)$, gdzie $\{m_n\}$ jest ciągiem rosnącym utworzonym ze wszystkich liczb zbioru $N_1 + N_2 + \dots$, nie spełnia warunku Cauchy'ego w $M(X)$, zatem na mocy 10.3 szereg (*) nie jest bezwarunkowo zbieżny.)

2. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)(-x)^k$$

jest zbieżny w przestrzeni C , lecz nie jest zbieżny bezwarunkowo w C .

(Wsk.: Szereg otrzymany przez wypisanie dwu wyrazów dodatnich, potem jednego ujemnego, znów dwu dodatnich, jednego ujemnego itd. w kolejności występowania tych wyrazów, nie jest jednostajnie zbieżny.)

3. Niech

$$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\},$$

$$e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\},$$

$$\dots \dots \dots$$

Następujące warunki są równoważne:

(a) $\{a_n\} \in l^p$ ($1 \leq p < \infty$),

(b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ jest zbieżny w l^p ,

(c) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ jest zbieżny bezwarunkowo w l^p .

W przypadku (b) sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ jest element $\{a_n\} \in l^p$.

4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w przestrzeni Banacha E , wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $\{\eta_n\}$ o wyrazach równych 1 lub -1 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n u_n$ jest zbieżny w E .

5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w przestrzeni Banacha E , wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna m , że

$$\|u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_k}\| < \varepsilon$$

dla dowolnego ciągu skończonego liczb naturalnych $\{n_j\}$ o własności

$$m \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k.$$

6. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w przestrzeni Banacha E , to istnieje liczba $\alpha < \infty$ taka, że

$$\left\| \sum_{j=1}^n \eta_j u_j \right\| < \alpha$$

dla każdego ciągu $\{\eta_j\}$ o wyrazach równych 1 lub -1 i dla dowolnej liczby naturalnej n .

§ 11. Przestrzenie liniowe zespolone. Przestrzemią liniową zespoloną $\tilde{E}$ nazywamy zbiór elementów, w którym określone są dwa działania: dodawanie $u+v$ elementów $u, v \in \tilde{E}$ oraz mnożenie au elementu $u \in \tilde{E}$ przez dowolną liczbę $a \in \tilde{\mathcal{R}}$ z zachowaniem warunków $(w_1)-(w_7)$. $\tilde{\mathcal{R}}$ oznacza zawsze zbiór liczb zespolonych.

W odróżnieniu od wyżej zdefiniowanych przestrzeni liniowych zespolonych, przestrzenie liniowe zdefiniowane w § 1 nazywać będziemy także *przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi*. Różnica między przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi a zespolonymi polega więc jedynie na tym, że w przypadku przestrzeni rzeczywistych zakładamy jedynie, że symbol au ma sens dla $a \in \mathcal{R}$, a w przypadku przestrzeni zespolonych — również dla liczb $a \in \tilde{\mathcal{R}}$. Przestrzenie liniowe zespolone są więc szczególnym przypadkiem rzeczywistych. Z tej przyczyny różne pojęcia wprowadzone dla przestrzeni rzeczywistych przenoszą się automatycznie na przypadek przestrzeni zespolonych. W niektórych przypadkach potrzebne są pewne drobne modyfikacje.

Tak na przykład *przestrzemią zespoloną unormowaną* nazywać będziemy przestrzeń liniową zespoloną $\tilde{E}$, w której została określona norma (będąca zawsze funkcją rzeczywistą), spełniająca warunki $(n_1)-(n_3)$, gdzie a jest dowolną liczbą zespoloną. Jeżeli $\tilde{E}$ jest przestrzemią metryczną zupełną przy tej normie, to mówimy, że $\tilde{E}$ jest *zespoloną przestrzemią Banacha*.

W przypadku przestrzeni rzeczywistych operacją liniową nazywaliśmy odwzorowanie addytywne i ciągłe. Ciągłość i addytywność implikowała od razu jednorodność operacji liniowej T , tzn. własność

$$(1) \quad T(au) = aT(u)$$

dla $a \in \mathcal{R}$. W przypadku przestrzeni zespolonych ciągłe i addytywne odwzorowanie T nie musi spełniać warunku (1) dla $a \in \tilde{\mathcal{R}}$. Definicję operacji liniowej należy więc zmodyfikować w następujący sposób: Operacją T odwzorowującą *przestrzeń unormowaną zespoloną $\tilde{E}$ w przestrzeń unormowaną zespoloną $\tilde{E}_1$* jest *zespolona liniowa*, jeżeli jest addytywna, ciągła i *jednorodna* w dziedzinie zespolonej, tzn. spełnia warunek (1) dla dowolnej liczby zespolonej a . Jeżeli $E_1 = \tilde{\mathcal{R}}$, to zamiast „operacja liniowa zespolona” mówimy „funkcjonał liniowy zespolony”. Definicja normy operacji (funkcjonału) liniowej zespolonej pozostaje bez zmiany.

Podobnie w definicji kombinacji liniowej i $\text{lin}(A)$ (por. § 1), założenie, że współczynniki są liczbami rzeczywistymi, trzeba zastąpić przez założenie, że są one liczbami zespolonymi.

W definicji pełności zbioru $\mathcal{A}$ funkcji zespolonych względem zbioru Ω funkcji zespolonych (por. § 6, str. 59) należy całkę $\int_X fg d\mu$ zastąpić całką $\int_X \bar{f}g d\mu$. Przypominamy, że $\bar{a}$ oznacza liczbę sprzężoną do liczby $a \in \mathbb{R}$.

Po tych modyfikacjach wszystkie twierdzenia z poprzednich paragrafów pozostają prawdziwe.

Przykładami przestrzeni zespolonych Banacha są przestrzenie podane w § 2 i § 3, gdzie termin „funkcja rzeczywista” należy systematycznie zastąpić przez „funkcja zespolona”. Przestrzenie te oznaczać będziemy tymi samymi symbolami jak w § 2 i w § 3, dodając u góry znaczek „~” dla zaznaczenia, że chodzi o przypadek zespolony. Tak np. $\tilde{L}^2(X, \mu)$ oznaczać będzie zbiór funkcji mierzalnych zespolonych (tzn. takich, których część rzeczywista i urojona są funkcjami rzeczywistymi mierzalnymi) o kwadracie całkowalnym, tzn. spełniających warunek

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu} < \infty.$$

$\tilde{C}$ oznaczać będzie zbiór wszystkich funkcji zespolonych, ciągłych, określonych na odcinku $0; 1$ itp.

Nierówności Höldera, Minkowskiego i wszelkie inne twierdzenia o tych przestrzeniach pozostają nadal prawdziwe w przypadku zespolonym. Dokładne sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi.

ĆWICZENIA. 1. Zbiór funkcji holomorficznych, ograniczonych, określonych w pewnym obszarze $G \subset \mathbb{R}^2$, jest zespoloną przestrzenią Banacha przy normie

$$\|f\| = \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

2. Jeżeli T jest operacją addytywną, ciągłą, odwzorowującą zespoloną przestrzeń unormowaną E w zespoloną przestrzeń unormowaną E_1 oraz

$$T(iu) = iT(u) \quad \text{dla} \quad u \in E,$$

to T jest zespoloną operacją liniową.

§ 12. Uogólnienia. Pojęcie przestrzeni unormowanej, w szczególności pojęcie przestrzeni Banacha, nie obejmuje wszystkich interesujących liniowych przestrzeni funkcyjnych, występujących w różnych badaniach matematycznych. Przykładem liniowej przestrzeni funkcyjnej, w której nie można w naturalny sposób określić normy, jest przestrzeń S wszystkich funkcji mierzalnych (względem miary Lebesgue’a l_1), prawie wszędzie skończonych, określonych na odcinku $0; 1$ (por. ćwiczenie 2).

Konieczne jest więc pewne uogólnienie pojęcia przestrzeni unormowanej. Przestrzeń unormowaną rozważaliśmy równocześnie jako przestrzeń liniową i przestrzeń topologiczną z metryką wyznaczoną przez

normę. Badania własności o charakterze topologicznym (zbieżność ciągu operacji, funkcjonałów itp.) odgrywały istotną rolę w naszych rozważaniach. Podstawą rozważań topologicznych było twierdzenie 1.1 orzekające, że działania algebraiczne są zharmonizowane z topologią przestrzeni, tzn. że dodawanie i mnożenie przez liczbę są funkcjami ciągłymi obu zmiennych.

Narzuca się więc następujące uogólnienie: *przestrzenią liniową topologiczną* będziemy nazywać przestrzeń liniową, która jest równocześnie przestrzenią topologiczną (np. przestrzenią spełniającą aksjomaty Kuratowskiego lub przestrzenią L^* Fréchéta), przy tym działania $u + v$ oraz au są funkcjami ciągłymi obu zmiennych. W dalszym ciągu specjalnie będzie nas interesować jedynie przypadek, gdy przestrzeń jest przestrzenią L^* Fréchéta, tzn. będziemy badać przestrzenie liniowe E , w których zostało zdefiniowane pojęcie zbieżności

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{w } E$$

z zachowaniem warunków (I_0) – (I_3) , rozdział II, § 2, oraz następujących warunków ciągłości

$$(c_1) \quad \text{jeżeli } u_n \rightarrow u \text{ i } v_n \rightarrow v, \text{ to } u_n + v_n \rightarrow u + v,$$

$$(c_2) \quad \text{jeżeli } u_n \rightarrow u \text{ i } a_n \rightarrow a, \text{ to } a_n u_n \rightarrow au.$$

Wprowadzona zbieżność może być metryzowalna: mówimy wtedy, że przestrzeń E jest *liniową metryzowalną* (lub: metryczną, jeżeli ustalimy jedną z wielu możliwych równoważnych metryk). W szczególności zbieżność może być czasem metryzowalna przez wprowadzenie normy $\|\cdot\|$, spełniającej warunki (n_1) – (n_3) , § 1. Otrzymujemy wtedy, jako szczególny przypadek, znane nam pojęcie przestrzeni unormowanej. Wprowadzona zbieżność może jednak być niemetryzowalna.

Dokładne omówienie pojęcia przestrzeni liniowej topologicznej wykracza poza ramy tej książki. Poprzestaniemy jedynie na rozważeniu kilku przykładów.

A) **Przestrzeń $S(X, \mu)$ funkcji mierzalnych, prawie wszędzie skończonych, określonych na pewnej przestrzeni X z miarą skończoną μ** (w przypadku $X = 0; 1$, $\mu = l_1$ przestrzeń tę oznaczamy wprost literą S). Funkcje równoważne identyfikujemy z sobą. Jako zbieżność w przestrzeni $S(X, \mu)$ przyjmujemy zawsze zbieżność według miary μ .

Przestrzeń $S(X, \mu)$ jest metryzowalna, na przykład przy pomocy metryki

$$(1) \quad \varrho(f, g) = \int_X \min(1, |f(x) - g(x)|) d\mu(x).$$

Istotnie, jeżeli $f_n \rightarrow f$ według miary, to $\min(1, |f_n - f|) \rightarrow 0$ według miary. W rezultacie (por. rozdział VII, twierdzenie 3.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \min(1, |f_n - f|) = \int_X 0 = 0,$$

ponieważ funkcje podcałkowe są ograniczone przez funkcję całkowalną $g(x) = 1$ dla $x \in X$. Na odwrót, jeżeli $\varrho(f_n, f) \rightarrow 0$ i $0 < \eta < 1$, to oznaczając $A_n = [x: |f_n(x) - f(x)| \geq \eta]$ mamy

$$\varrho(f_n, f) \geq \int_{A_n} \min(1, |f_n - f|) \geq \int_{A_n} \eta = \eta \mu(A_n),$$

skąd wynika, że $\mu(A_n) \rightarrow 0$. Wobec dowolności liczby η wnioskujemy stąd, że $f_n \rightarrow f$ według miary.

W analogiczny sposób można wykazać, że ciąg $f_n \in S(X, \mu)$ spełnia warunek Cauchy'ego przy metryce (1) (gdzie $\mu(X) < \infty$), wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego według miary μ . Stąd oraz z twierdzenia Riesz'a (7.5, rozdział VI) wynika, że przestrzeń $S(X, \mu)$ jest zupełna.

B) Słaba zbieżność. Niech Ω będzie liniowym zbiorem funkcji mierzalnych, określonych na pewnej przestrzeni X z miarą μ (funkcje równoważne utożsamiamy z sobą). Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem funkcji mierzalnych, określonych na X , pełnym ze względu na zbiór Ω (por. § 6, wzór (8)). Mówimy, że ciąg funkcji $f_n \in \Omega$ jest $\mathcal{A}$ -słabo zbieżny (lub: słabo zbieżny ze względu na zbiór $\mathcal{A}$) do funkcji $f \in \Omega$, jeżeli

$$\int_X f_n g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu \quad \text{dla każdej funkcji } g \in \mathcal{A}.$$

Pełność zbioru $\mathcal{A}$ zapewnia nam sensowność powyższej definicji (każdy ciąg posiada co najwyżej jedną granicę).

Jeśli jako zbieżność przyjmiemy wyżej zdefiniowaną $\mathcal{A}$ -zbieżność, to przestrzeń Ω jest przestrzenią liniową topologiczną, na ogół niemetryzowalną.

W zastosowaniach najczęstszy jest przypadek, gdy Ω jest przestrzenią unormowaną a wyrażenia

$$(2) \quad F(f) = \int_X f g d\mu \quad \text{dla } f \in \Omega \quad (g \in \mathcal{A})$$

są funkcjami liniowymi na przestrzeni Ω . $\mathcal{A}$ -słabą zbieżność można wówczas zdefiniować w następujący sposób: $f_n \rightarrow f$ $\mathcal{A}$ -słabo, jeżeli $F(f_n) \rightarrow F(f)$ dla każdego funkcjonału liniowego F postaci (2). Uwaga powyższa pozwala przenieść definicję słabej zbieżności na przypadek dowolnych przestrzeni unormowanych.

Mianowicie, niech E będzie przestrzenią unormowaną, a $\mathcal{F} \subset E^*$ — pewnym zbiorem funkcjonałów liniowych na E takim, że

$$(3) \quad \text{jeżeli } F(u) = 0 \text{ dla każdego } F \in \mathcal{F}, \text{ to } u = 0.$$

Mówimy, że ciąg $u_n \in E$ jest $\mathcal{F}$ -słabo zbieżny do $u \in E$, jeżeli $F(u_n) \rightarrow F(u)$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Warunek (3) gwarantuje nam, że każdy ciąg zbieżny $\mathcal{F}$ -słabo posiada co najwyżej jedną granicę. Istotnie, jeżeli $F(u_n) \rightarrow F(u)$ i $F(u_n) \rightarrow F(v)$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$, to $0 = F(u_n) - F(u_n) \rightarrow 0 = F(u) - F(v) = F(u - v)$, co daje $u - v = 0$, czyli $u = v$.

W przypadku gdy $\mathcal{F} = E^*$, tzn. $\mathcal{F}$ jest zbiorem wszystkich funkcjonałów liniowych, mówimy wprost „słabo zbieżny” zamiast „ E^* -słabo zbieżny”. Dla odróżnienia od słabej zbieżności zbieżność według normy w przestrzeni E nazywa się często *mocną zbieżnością*. Oczywiście, jeśli $u_n \rightarrow u$ mocno, to także $u_n \rightarrow u$ $\mathcal{F}$ -słabo dla dowolnego zbioru funkcjonałów $\mathcal{F}$. Twierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe. Przestrzeń E przy $\mathcal{F}$ -słabej (lub: słabej) zbieżności nie jest na ogół metryzowalna. Norma $\|u\|$ nie jest na ogół ciągłą funkcją przy zbieżności $\mathcal{F}$ -słabej. Można udowodnić, że jeżeli $u_n \rightarrow u$ słabo, to

$$(4) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|.$$

Dla przykładu rozpatrzmy bliżej przypadek przestrzeni C . Ciąg $\{f_n\}$ funkcji ciągłych jest słabo zbieżny w przestrzeni C do funkcji f , jeżeli (por. twierdzenie 6.1)

$$\int_0^1 f_n dg \rightarrow \int_0^1 f dg \quad \text{dla każdej funkcji } g \in V_0 \text{ o wahaniu skończonym.}$$

12.1. Na to, by ciąg $f_n \in C$ był słabo zbieżny do funkcji $f \in C$ w przestrzeni C , potrzeba i wystarcza, aby $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$ oraz by ciąg $\{f_n\}$ był wspólnie ograniczony (tzn. $\sup_n \|f_n\|_C < \infty$).

Dostateczność obu warunków wynika natychmiast z twierdzenia 8.1 (c), rozdział XI.

Załóżmy, że $f_n \rightarrow f$ słabo. Jeżeli $0 \leq x_0 < 1$, to przyjmując

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq x_0, \\ 1 & \text{dla } x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

stwierdzamy, że $f_n(x_0) = \int_0^1 f_n dg \rightarrow \int_0^1 f dg = f(x_0)$. Podobnie przyjmując $g(0) = 0$ i $g(x) = 1$ dla $0 < x \leq 1$ stwierdzamy, że $f_n(0) \rightarrow f(0)$.

Wykazaliśmy więc, że $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$. Aby udowodnić, że $\sup \|f_n\|_C < \infty$, wystarczy zauważyć, że dla dowolnej ustalonej funkcji

$f \in C$ wyrażenie

$$F(g) = \int_0^1 f dg \quad \text{dla} \quad g \in V_0$$

jest funkcjonalem liniowym na V_0 o normie $\|F\| = \|f\|_C$, i zastosować twierdzenie 4.7 Banacha-Steinhausa do ciągu funkcyjonałów liniowych $F_n(g) = \int_0^1 f_n dg$ ($g \in V_0$).

Końcowy warunek, podany w twierdzeniu 12.1, jest szczególnym przypadkiem następującej ogólnej uwagi: jeżeli $u_n \rightarrow u$ słabo w przestrzeni unormowanej E , to $\sup_n \|u_n\| < \infty$ ¹⁾.

C) Przestrzeń $C_\infty(P)$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, określonych na przedziale domkniętym $P \subset \mathcal{R}$. Mówimy, że ciąg $\varphi_n \in C_\infty(P)$ jest zbieżny do funkcji $\varphi \in C_\infty(P)$ w przestrzeni $C_\infty(P)$, jeżeli $\varphi_n^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ jednostajnie na P dla $m = 0, 1, 2, \dots$, gdzie jak zwykle $\varphi^{(m)}$ oznacza m -tą pochodną funkcji φ . Przestrzeń $C_\infty(P)$ jest metryzowalna, mianowicie jako metrykę możemy przyjąć tu funkcję

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \min(1, \|\varphi^{(m)} - \psi^{(m)}\|_C)$$

(por. rozdział II, twierdzenia 11.1 i 11.2). Przy tej metryce przestrzeń $C_\infty(P)$ jest zupełna. Przeprowadzenie dokładnych dowodów tych uwag pozostawiamy czytelnikowi.

D) Przestrzeń E_Q funkcji φ nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, określonych na przedziale otwartym (ograniczonym lub nieograniczonym) $Q \subset \mathcal{R}$, równych zeru poza pewnym przedziałem domkniętym $P \subset Q$. Mówimy, że ciąg φ_n jest zbieżny do funkcji φ w przestrzeni E_Q , jeżeli

(5) istnieje przedział domknięty $P \subset Q$ taki, że $\varphi_n(x) = 0 = \varphi(x)$ dla $x \in Q - P$,

(6) $\varphi_n^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ jednostajnie na Q dla $m = 0, 1, 2, \dots$

Oczywiście, w (6) wystarczy zakładać jedynie jednostajną zbieżność na P .

Przestrzeń E_Q nie jest metryzowalna. Przestrzeń ta odgrywa podstawową rolę w teorii dystrybucji — por. § 13.

¹⁾ Bliższe informacje o słabej zbieżności znajdzie czytelnik w książkach Banacha [5], [6].

E) Przestrzenie dystrybucji $D(Q)$ i $D'(Q)$ ze zbieżnością zdefiniowaną w rozdziale X, § 10. Przestrzenie te nie są metryzowalne. Definicja zbieżności ciągu dystrybucji została podana w § 10, rozdział X, bez bliższego uzasadnienia, dlaczego przyjmujemy taką a nie inną definicję. Wykażemy obecnie, że przyjęta definicja jest w pewnym sensie bardzo naturalna.

Rozpatrzmy najpierw przypadek przestrzeni dystrybucji $D(Q)$. Każda naturalna definicja zbieżności ciągu dystrybucji powinna spełniać następujące dwa warunki:

(a) operacja

$$T(f) = \{0, f\} \in D(Q) \quad \text{dla} \quad f \in C'(Q)$$

zanurzenia przestrzeni $C'(Q)$ w przestrzeń $D(Q)$ powinna być liniowa (addytywność jej jest oczywista, operacja T powinna więc być ciągła, tzn. zbieżność $f_n \rightarrow f$ w $C'(Q)$ powinna implikować zbieżność $\{0, f_n\} \rightarrow \{0, f\}$ w $D(Q)$);

(b) operacja różniczkowania, przyporządkowująca każdej dystrybucji $\theta \in D(Q)$ dystrybucję $\theta' \in D(Q)$, powinna być liniowa (tzn. — wobec oczywistej addytywności tej operacji — zbieżność $\theta_n \rightarrow \theta$ w $D(Q)$ powinna pociągać zbieżność $\theta'_n \rightarrow \theta'$ w $D(Q)$).

Warunek (a) wiążący zbieżność jednostajną ze zbieżnością w sensie teorii dystrybucji, jest naturalny. We wszelkich bowiem znanych przypadkach przestrzeni liniowych topologicznych E , E_1 (przy naturalnych definicjach zbieżności), jeśli $E \subset E_1$ i $u_n \rightarrow u$ w E , to także $u_n \rightarrow u$ w E_1 (por. np. twierdzenie 2.12).

W rozdziale X zwróciliśmy uwagę na jedną wadę zwykłego pojęcia różniczkowalności funkcji — jego niewykonalność. Drugą wadą klasycznego pojęcia pochodnej jest nieciągłość: jeżeli ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f w jednej ze znanych przestrzeni unormowanych (np. $L^p(Q)$, $C(Q)$), to z reguły ciąg pochodnych $\{f'_n\}$ nie jest zbieżny w tej przestrzeni do f' , nawet przy założeniu, że pochodne f'_n, f' należą do tej przestrzeni. Warunek (b) ma na celu usunięcie tej wady, będącej poważną przeszkodą w rachunkach.

Jak stwierdziliśmy w rozdziale X, § 10, podana tam definicja zbieżności spełnia warunki (a) i (b). Na odwrót, jeżeli jakkolwiek definicja (D) zbieżności w $D(Q)$ spełnia warunki (a) i (b), to każdy ciąg zbieżny w sensie definicji z rozdziału X, § 10, jest również zbieżny w sensie definicji (D). Istotnie, z (a) wynika, że jeśli $f_n \rightarrow f$ niemal jednostajnie, to

$$\{0, f_n\} \rightarrow \{0, f\}.$$

Stąd oraz z (b) wynika, że

$$\{1, f_n\} = \{0, f_n\}' \rightarrow \{0, f\}' = \{1, f\}.$$

Stosując ponownie (b) stwierdzamy, że

$$\{2, f_n\} \rightarrow \{2, f\}$$

i ogólnie, że

$$\{p, f_n\} \rightarrow \{p, f\}.$$

Naturalność definicji zbieżności w $D(Q)$ polega więc na tym, że wprowadza ona jedynie tyle ciągów zbieżnych dystrybucji, ile wymagają tego warunki (a) i (b).

Ponieważ zbieżność $\theta_n \rightarrow \theta$ w przestrzeni $D'(Q)$ dystrybucji na przedziale (ograniczonym lub nieograniczonym) $Q \subset \mathcal{R}$ jest niczym innym jak zbieżnością dystrybucji zredukowanych

$$\theta_n|_P \rightarrow \theta|_P \quad \text{w } D(P)$$

na każdym przedziale domkniętym $P \subset Q$, więc definicję tę należy uznać również za naturalną (por. analogię ze zbieżnością jednostajną i niemal jednostajną).

Widzimy więc, że „poprawienie” definicji pochodnej tak, by różniczkowanie było operacją liniową zawsze wykonalną, wymaga nie tylko uogólnienia pojęcia funkcji, lecz również przejścia do niemetryzowalnych przestrzeni liniowych.

ĆWICZENIA. 1. Inną metryką w przestrzeni $S(X, \mu)$ ($\mu(X) < \infty$) jest

$$\varrho(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Przestrzeń $S(X, \mu)$ przy tej metryce jest zupełna.

2. Jedynym zbiorem wypukłym otwartym w przestrzeni S jest cała przestrzeń S . (Wsk.: Możemy założyć, że $A = [g: \varrho(g, 0) < \varepsilon] \subset W$. Dla dowolnej funkcji $f \in S$ niech $f_{n,j}(x) = nf(x)$ dla $(j-1)/n \leq x < j/n$ i $f_{n,j}(x) = 0$ dla pozostałych x . Mamy $f = \frac{1}{n}f_{n,1} + \frac{1}{n}f_{n,2} + \dots + \frac{1}{n}f_{n,n}$. Ponieważ $\varrho(f_{n,j}, 0) \leq \frac{1}{n}$, więc dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n jest $f_{n,j} \in A$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Zatem $f \in W$).

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że przestrzeń S nie może być zmetryzowana przy pomocy normy jednorodnej. Istotnie, w każdej przestrzeni unormowanej istnieją zbiory wypukłe otwarte, różne od całej przestrzeni (np. kula $\{x: \|x\| < 1\}$).

3. Przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych, prawie wszędzie skończonych, określonych na prostej $\mathcal{R}$ (funkcje równoważne utożsamiamy) nie jest przestrzenią liniową topologiczną, jeżeli za zbieżność przyjąć zbieżność według miary l_1 .

(Wsk.: Ciąg $\{x/n\}$ nie jest zbieżny według miary do 0, co dowodzi, że mnożenie przez liczbę nie jest ciągłą operacją.)

4. Niech $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$, i niech $\mathcal{R}$ będzie taką klasą zbiorów mierzalnych, że zbiór funkcji charakterystycznych χ_A ($A \in \mathcal{R}$) jest liniowo gęsty w przestrzeni $L^q(X, \mu)$. Na to, by $f_n \rightarrow f_0$ słabo w przestrzeni $L^p(X, \mu)$, potrzeba i wystarcza, by $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ oraz $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f_0 d\mu$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{R}$.

(Wsk.: Funkcjonały liniowe $F_n(g) = \int_X f_n g d\mu$ ($g \in L^q(X, \mu)$) mają normy $\|F_n\| = \|f_n\|_p$ (por. 5.1 lub 5.2). Konieczność wynika z twierdzenia 4.7 Banacha-Steinhaus'a, wystarczalność — z twierdzenia 4.6. W dowodzie można zakładać, że miara μ jest półskończona, zastępując ewentualnie zbiór X przez sumę zbiorów $\{x: f_n(x) \neq 0\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)).

Uwaga: W podobny sposób dowodzi się w analizie funkcjonalnej następującego ogólnego twierdzenia: na to, by $u_n \rightarrow u$ słabo w przestrzeni Banacha E , potrzeba i wystarcza, by $\sup_n \|u_n\| < \infty$ i by $F(u_n) \rightarrow F(u)$ dla funkcyjonałów F , tworzących zbiór liniowo gęsty w przestrzeni E^* . Dowód opiera się na następującym lemacie: jeżeli $u_0 \in E$, to wzór $T(F) = F(u_0)$ definiuje funkcyjonał liniowy T na przestrzeni E^* o normie $\|T\| = \|u_0\|$ (por. § 5, ćwiczenie 8).

5. Jeżeli w sformułowaniu twierdzenia podanego w ćwiczeniu 4 słabą zbieżność zastąpić przez słabą zbieżność ze względu na zbiór funkcji całkowalnych na X , to twierdzenie będzie prawdziwe również w przypadku $p = \infty$ przy założeniu, że miara μ spełnia warunek (s) z § 5.

6. Na to, by ciąg $u_n = \{a_{n,m}\} \in l^p$ ($1 < p < \infty$) był zbieżny słabo do $u = \{a_m\} \in l^p$ w przestrzeni l^p , potrzeba i wystarcza, by $\sup_n \|u_n\| < \infty$ oraz by $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_m$ dla $m = 1, 2, \dots$

7. Jeżeli ciąg $u_n \in l$ jest zbieżny słabo do $u \in l$ ze względu na zbiór wszystkich ciągów o wyrazach 0 i 1, to jest zbieżny mocno do u w przestrzeni l .

Zatem na to, by $u_n \rightarrow u$ słabo w l , potrzeba i wystarcza, by $u_n \rightarrow u$ mocno (tzn. według normy) w l .

(Wsk.: Twierdzenie to jest innym sformułowaniem twierdzenia, podanego w rozdziale VI, § 10, ćwiczenie 6.)

8. Na to, by ciąg funkcji $\{f_n\}$ był zbieżny słabo do funkcji f w przestrzeni $L^p(Z)$, gdzie $Z \subset \mathcal{R}$ jest przedziałem ograniczonym lub nieograniczonym i $1 < p < \infty$, potrzeba i wystarcza, by $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ oraz by $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ dla dowolnych liczb $a, b \in Z$.

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 4 oraz z twierdzenia 2.10 (i).)

9. Jeśli $f_n \rightarrow f$ słabo na zbiór wszystkich funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych, to $f_n \rightarrow f$ słabo w $L(X, \mu)$.

(Wsk.: Por. ćwiczenie 4 oraz rozdział VI, twierdzenie 10.8, gdzie $v_n(A) = \int_A f_n d\mu$).

10. Niech μ będzie miarą skończoną, określoną na przeliczalnie addytywnym ciełe $\mathcal{M}$ podzbiorów przestrzeni X i niech $\mathcal{R}$ będzie podzbiorem gęstym przestrzeni zbiorów mierzalnych $\mathcal{M}(\mu)$ (por. rozdział VI, § 9). Na to, by $f_n \rightarrow f$ słabo w $L(X, \mu)$ potrzeba i wystarcza, by $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$, $\int_B f_n d\mu \rightarrow \int_B f d\mu$ dla $B \in \mathcal{R}$ oraz by funkcje zbioru

$$v_n(A) = \int_A f_n d\mu \quad \text{dla } A \in \mathcal{M}$$

były jednakowo ciągłe (por. rozdział VI, twierdzenie 10.6 (ii)).

(Wsk.: Dostateczność wynika z ćwiczenia 4, gdyż $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$ dla $A \in \mathcal{M}$ na podstawie oszacowania

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \left| \int_B f_n d\mu - \int_B f d\mu \right| + \left| \int_C f_n d\mu \right| + \left| \int_C f d\mu \right| + \left| \int_D f_n d\mu \right| + \left| \int_D f d\mu \right|,$$

gdzie $B \in \mathcal{R}$, a $C = A - B$ i $D = B - A$ są zbiorami o bardzo małej mierze. Konieczność jednakowej ciągłości wynika z rozdziału VI, twierdzenia 10.6.)

11. Na to, by $f_n \rightarrow f$ słabo w przestrzeni $L(a; b)$ (gdzie $a, b \in \mathcal{R}$), potrzeba i wystarczy, by

$$(\alpha) \quad \sup_n \|f_n\|_1 < \infty,$$

$$(\beta) \quad \int_a^t f_n(x) dx \rightarrow \int_a^t f(x) dx \quad \text{dla } t \in \overline{a; b},$$

(γ) dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba $\delta > 0$, niezależna od n , że $|\int_A f_n(x) dx| < \varepsilon$ dla $|A| < \delta$, $A \subset a; b$.

(Wsk.: Wystarczy w ćwiczeniu 10 przyjąć $\mathcal{R}$ = najmniejsze ciało podzbiorów przedziału $a; b$, zawierające wszystkie podprzedziały.)

12. Ciąg funkcji $\sin nx$ jest zbieżny słabo do zera w $L^p(a; b)$ ($a, b \in \mathcal{R}$, $1 \leq p < \infty$), lecz nie jest zbieżny do zera według normy.

13. Ciąg $\varphi_n \in V_0$ jest C -słabo zbieżny do funkcji $\varphi \in V_0$ (tzn. $\int_0^1 f d\varphi_n \rightarrow \int_0^1 f d\varphi$ dla każdej funkcji $f \in C$), wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\alpha) \quad \sup_n \|\varphi_n\|_V < \infty,$$

(β) $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ dla $x \in \overline{0; 1}$ z wyjątkiem pewnego co najwyżej przeliczalnego zbioru zawartego w $0; 1$.

(Wsk.: Dostateczność wynika z rozdziału XI, § 8, ćwiczenie 3. Konieczność warunku (α) wynika z twierdzenia Banacha-Steinhaus'a, a konieczność (β) można udowodnić np. *ad absurdum*, opierając się na twierdzeniu 5.8 z rozdziału IX.)

Uwaga. Inne scharakteryzowanie C -słabej zbieżności w V_0 zostało podane w § 6, ćwiczenie 9.

14. Zbiór miar jednopunktowych (tzn. miar μ , spełniających warunek $\mu(A) = \mu(A \cdot [x_0])$, gdzie x_0 jest odpowiednio dobranym punktem) jest C -słabo liniowo gęsty w przestrzeni $\mathcal{W}$, tzn. dla dowolnej przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru $\nu \in \mathcal{W}$ istnieje taki ciąg $\{\nu_n\}$ kombinacji liniowych miar jednopunktowych, że $\int_0^1 f d\nu_n \rightarrow \int_0^1 f d\nu$ dla każdej funkcji $f \in C$.

Podobnie zbiór $\mathcal{W}_0$ (por. str. 25) jest C -słabo gęsty w $\mathcal{W}$.

15. Niech $C_\infty(Q)$ oznacza przestrzeń liniową nieskończenie wiele razy różniczkowalnych funkcji, określonych na przedziale otwartym $Q \subset \mathcal{R}$ ograniczonym lub nieograniczonym. Mówimy, że ciąg $\varphi_n \in C_\infty(Q)$ jest zbieżny do funkcji $\varphi \in C_\infty(Q)$ w przestrzeni $C_\infty(Q)$, jeżeli $\varphi_n^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ niemal jednostajnie dla $m = 0, 1, 2, \dots$. Udowodnić, że przestrzeń liniowa topologiczna $C_\infty(Q)$ jest metryzowalna.

16. Niech E będzie przestrzenią liniową, a $\|u\|_m$ — ciągiem *pseudonorm*, tzn. funkcjonalów nieujemnych, określonych na E , spełniających warunki (n_2) , (n_4) z § 1 i przyjmujących wartość zero dla elementu zerowego przestrzeni E . Zakładamy, że z warunku

$$\|u\|_m = 0 \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, \dots$$

wynika, że $u = 0$.

Wykazać, że przy metryce

$$\rho(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \min(1, \|u - v\|_m)$$

E jest przestrzenią topologiczną liniową. Ciąg $\{u_n\}$ jest zbieżny do u w E , wtedy i tylko wtedy, gdy $\|u_n - u\|_m \rightarrow 0$ dla $m = 1, 2, \dots$. Dla każdego otoczenia G elementu zerowego $0 \in E$ istnieje zbiór wypukły otwarty W taki, że $0 \in W \subset G$.

Uwaga. Przestrzenie liniowe topologiczne, w których pojęcie zbieżności można zmetryzować w powyżej opisanym sposób przy pomocy ciągu pseudonorm, noszą nazwę *przestrzeni B_0^** , a w przypadku gdy są zupełne — *przestrzeni B_0* ¹⁾. Przestrzenie $C_\infty(P)$, $C'(Q)$, $C_\infty(Q)$ są przestrzeniami B_0 . Z ćwiczenia 2 wynika, że S nie jest przestrzenią B_0 .

§ 13. Dystrybucje Sobolewa-Schwarta. Niech $Q \subset \mathcal{R}$ będzie przedziałem otwartym (ograniczonym lub nieograniczonym) i niech E_Q oznacza przestrzeń liniową topologiczną, zdefiniowaną w § 12 D. *Dystrybucjami Sobolewa-Schwarta*²⁾ na przedziale Q nazywać będziemy funkcjonały liniowe ϑ określone na przestrzeni E_Q , tzn. odwzorowania ϑ przestrzeni E_Q w $\mathcal{R}$ takie, że

$$(1) \quad \vartheta(\varphi_1 + \varphi_2) = \vartheta(\varphi_1) + \vartheta(\varphi_2),$$

$$(2) \quad \text{jeżeli } \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ w } E_Q, \text{ to } \vartheta(\varphi_n) \rightarrow \vartheta(\varphi).$$

Podobnie jak w § 4 sprawdzamy natychmiast, że założenia (1) i (2) implikują jednorodność funkcjonału ϑ , tzn.

$$(3) \quad \vartheta(a\varphi) = a\vartheta(\varphi) \quad \text{dla } a \in \mathcal{R}.$$

Niech D'_0 oznacza zbiór wszystkich dystrybucji ϑ . Z łatwością sprawdzamy, że D'_0 jest przestrzenią liniową przy zwykłej definicji dodawania i mnożenia funkcjonałów przez liczbę.

Niech $\theta \in D'(Q)$ będzie dystrybucją, zdefiniowaną w rozdziale X, § 10. Dystrybucja $\theta \in D'(Q)$ wyznacza jednoznacznie pewną dystrybucję Sobolewa-Schwarta $\vartheta_\theta \in D'_0$ zdefiniowaną w następujący sposób:

Niech $\varphi \in E_Q$. Z definicji przestrzeni E_Q wynika, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \in Q - P$, gdzie $P \subset Q$ jest pewnym przedziałem domkniętym. Niech

$$(4) \quad \theta|P = \{m, f\},$$

gdzie $f \in C(P)$, a m jest liczbą całkowitą nieujemną. Liczba

$$(5) \quad (-1)^m \int_P f(x) \varphi^{(m)}(x) dx$$

nie zależy od wyboru przedziału P ani od przedstawienia dystrybucji $\theta|P$ w postaci (4). Istotnie, jeżeli

$$\theta|P = \{m, f\} = \{k, g\}, \quad \text{gdzie} \quad m \geq k,$$

¹⁾ Twórcami teorii przestrzeni B_0 , posiadających wiele własności przestrzeni Banacha, są Mazur i Orlicz. Wykład teorii przestrzeni B_0 zawarty jest w pracach: Mazur i Orlicz [1], [2].

²⁾ Soboleff [1], Schwartz [1], [2].

to $f^{(m-k)} = g + w$, gdzie w jest wielomianem stopnia mniejszego od k . Przez $(m-k)$ -krotne całkowanie przez części otrzymujemy

$$(-1)^m \int_P f(x) \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^k \int_P f^{(m-k)}(x) \varphi^{(k)}(x) dx,$$

gdyż funkcja φ i wszystkie jej pochodne są równe zeru na końcach przedziału P . Całkując k -krotnie przez części stwierdzamy, że

$$\int_P w(x) \varphi^{(k)}(x) dx = 0,$$

skąd wynika, że

$$(-1)^m \int_P f(x) \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^k \int_P (g(x) + w(x)) \varphi^{(k)}(x) dx = (-1)^k \int_P g(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$$

Liczba (5) nie zależy więc od przedstawienia dystrybucji $\theta|P$ w postaci (4).

Niech $P' \subset P$ będzie przedziałem domkniętym takim, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \in Q - P'$. Mamy $\theta|P' = \{m, f|P'\}$, skąd wynika, że wartość całki (5) nie zmienia się przy przejściu od przedziału P do podprzedziału P' . Niech $P_1 \subset Q$ będzie dowolnym przedziałem takim, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \in Q - P_1$. Podstawiając $P' = PP_1$ stwierdzamy, że wartość całki (1) nie zmienia się, jeżeli P zastąpić przez P' . Powtarzając to rozumowanie, stwierdzamy, że wartość całki (5) nie zmienia się, gdy P' zastąpić przez P_1 . Stąd wynika, że wartość całki (5) nie zależy od wyboru pomocniczego przedziału P .

Zatem wzór

$$(6) \quad \vartheta_0(\varphi) = (-1)^m \int_Q f(x) \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^m \int_P f(x) \varphi^{(m)}(x) dx,$$

gdzie $\varphi \in E_Q$, $\varphi(x) = 0$ dla $x \in Q - P$ i $\theta|P = \{m, f\}$, definiuje jednoznacznie pewien funkcjonal rzeczywisty na E_Q . Z łatwością sprawdzamy, że ten funkcjonal jest addytywny. Istotnie, dobierając w równości (6) przedział P i liczbę m wspólnie dla dwu danych funkcji $\varphi_1, \varphi_2 \in E_Q$, co zawsze jest możliwe, stwierdzamy od razu, że zachodzi równość (1). Funkcjonał ϑ_0 jest ciągi w przestrzeni E_Q . Jeśli bowiem $\varphi_n \rightarrow \varphi$ w przestrzeni E_Q , to $\varphi_n^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ jednostajnie w Q dla $m = 0, 1, \dots$ oraz $\varphi_n(x) = 0 = \varphi(x)$ dla $x \in Q - P$, gdzie $P \subset Q$ jest pewnym przedziałem domkniętym. Z definicji (6) mamy

$$\vartheta_0(\varphi_n) = (-1)^m \int_P f(x) \varphi_n^{(m)}(x) dx, \quad \vartheta_0(\varphi) = (-1)^m \int_P f(x) \varphi^{(m)}(x) dx,$$

skąd wobec jednostajnej zbieżności $\varphi_n^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ otrzymujemy

$$\vartheta_0(\varphi_n) \rightarrow \vartheta_0(\varphi).$$

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnej dystrybucji $\theta \in D'(Q)$ funkcjonał ϑ_0 , zdefiniowany równością (6), jest dystrybucją Sobolewa-Schwartz:

$$\vartheta_0 \in D'_Q.$$

Można sprawdzić bez trudności, że przyporządkowanie dystrybucjom $\theta \in D'(Q)$ dystrybucji Sobolewa-Schwartz $\vartheta_0 \in D'_Q$ jest jednojednoznaczne i zachowuje działania algebraiczne. Można udowodnić, że na odwrót, dla każdej dystrybucji Sobolewa-Schwartz $\vartheta \in D'_Q$ istnieje dystrybucja $\theta \in D'(Q)$ taka, że $\vartheta = \vartheta_0$. Z tej przyczyny można utożsamiać dystrybucję $\theta \in D'(Q)$ z dystrybucją Sobolewa-Schwartz $\vartheta_0 \in D'_Q$, a przestrzeń $D'(Q)$ z przestrzenią D'_Q . W rezultacie zamiast „dystrybucja Sobolewa-Schwartz” będziemy mówić wprost „dystrybucja”.

Niech f będzie funkcją, określoną na Q , całkowalną na każdym przedziale domkniętym $P \subset Q$, tzn. funkcją posiadającą nieoznaczoną całkę Lebesgue'a g . W rozdziale X, § 10, funkcję f identyfikowaliśmy z dystrybucją $\theta = \{\theta_1, \theta_0, \theta_{-1}, \dots\} \in D'(Q)$, gdzie $\theta_n = \{1, g|P_n\}$, a $\{P_n\}$ jest ciągiem wstępującym przedziałów domkniętych o sumie równej Q . Biorąc jako P w definicji (6) jeden z przedziałów P_n stwierdzamy, że dla $\varphi \in E_Q$

$$\vartheta_0(\varphi) = - \int_Q g(x) \varphi'(x) dx = \int_Q g'(x) \varphi(x) dx = \int_Q f(x) \varphi(x) dx$$

przez scałkowanie przez części (por. rozdział X, twierdzenie 6.2), gdyż $g' = f$. Zatem w teorii dystrybucji Sobolewa-Schwartz dowolną funkcję f , określoną na Q i całkowalną na każdym przedziale domkniętym $P \subset Q$, należy utożsamiać z dystrybucją $\vartheta \in D'_Q$ zdefiniowaną wzorem

$$(7) \quad \vartheta(\varphi) = \int_Q f(x) \varphi(x) dx.$$

Sprawdzimy obecnie, jaką postać posiada operacja różniczkowania dystrybucji, wyrażona w terminologii przestrzeni D'_Q . Niech $\theta \in D'(Q)$, $\varphi \in E_Q$, niech $P \subset Q$ będzie przedziałem domkniętym takim, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \in Q - P$ i niech $\theta|P = \{m, f\}$. Zatem $\theta'|P = \{m+1, f\}$, a więc z definicji (6)

$$\vartheta_{\theta'}(\varphi) = (-1)^{m+1} \int_Q f(x) \varphi^{(m+1)}(x) dx = -(-1)^m \int_Q f(x) (\varphi'(x))^{(m)} dx = -\vartheta_0(\varphi').$$

Zgodnie z § 10, rozdział X, dystrybucję $\vartheta_{\theta'}$ będziemy nazywać *pochodną* dystrybucji $\vartheta = \vartheta_0$ i oznaczać symbolem ϑ' . Zatem

$$(8) \quad \vartheta'(\varphi) = -\vartheta(\varphi') \quad \text{dla} \quad \varphi \in E_Q.$$

Dowodzi się, że ciąg dystrybucji $\theta_n \in D'(Q)$ jest zbieżny w przestrzeni $D'(Q)$ do dystrybucji $\theta \in D'(Q)$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(9) \quad \vartheta_{\theta_n}(\varphi) \rightarrow \vartheta_0(\varphi) \quad \text{dla każdej funkcji } \varphi \in E_Q.$$

Wzór (9) można przyjąć po prostu za definicję zbieżności ciągu dystrybucji Sobolewa-Schwartza: mówimy, że ciąg dystrybucji $\vartheta_n \in D'_Q$ jest zbieżny w przestrzeni D'_Q do dystrybucji $\vartheta \in D'_Q$, jeżeli

$$(10) \quad \vartheta_n(\varphi) \rightarrow \vartheta(\varphi) \quad \text{dla każdej funkcji } \varphi \in E_Q.$$

Można dalej wykazać, że granica dowolnego ciągu dystrybucji Schwartza, zbieżnego w każdym punkcie $\varphi \in E_Q$, jest dystrybucją Schwartza.

Dowody cytowanych powyżej twierdzeń wymagają głębszych twierdzeń z analizy funkcjonalnej, z tej przyczyny muszą być tu pominięte.

Pierwotna definicja dystrybucji, podana przez Sobolewa, pokrywa się z definicją dystrybucji ϑ , wprowadzoną w niniejszym paragrafie. Zbieżność ciągu dystrybucji definiuje się wtedy za pomocą (10), a operację różniczkowania — za pomocą (8).

Zastanowimy się jeszcze, co należałoby rozumieć przez pochodną funkcji ψ o wahanii ograniczonym w myśl definicji (8). Funkcję ψ utożsamiliśmy (por. (7)) z dystrybucją

$$\vartheta(\varphi) = \int_Q \psi(x) \varphi(x) dx \quad \text{dla } \varphi \in E_Q.$$

Z wzoru (8)

$$(11) \quad \vartheta'(\varphi) = -\vartheta(\varphi') = -\int_Q \psi(x) \varphi'(x) dx = \int_Q \varphi d\psi = \int_Q \varphi d\mu_\psi$$

przez scałkowanie przez części, gdzie $\mu_\psi = \mu_\psi^+ - \mu_\psi^-$ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru wyznaczoną przez funkcję ψ . Równość (11) sugeruje, by pochodną w sensie teorii dystrybucji (odróżnić od zwykłej pochodnej!) funkcji ψ o wahanii ograniczonym utożsamiać z przeliczalnie addytywną funkcją zbioru μ_ψ .

ĆWICZENIA. 1. Niech δ oznacza dystrybucję, będącą drugą pochodną (w sensie teorii dystrybucji) funkcji $\max(0, x)$. Wykazać, że

$$\vartheta_\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad \text{dla } \varphi \in E_{\mathcal{R}}.$$

Uwaga. Dystrybucję $\delta \in D'(\mathcal{R})$ nazywamy *delta Diraca*. Dystrybucją tą posługiwali się fizycy jeszcze przed utworzeniem ogólnej teorii dystrybucji, nazywając ją (niesłusznie!) „funkcją” *delta Diraca*. Przez „funkcję” *delta Diraca* rozumieli fizycy taką „funkcję”, która jest równa zeru wszędzie z wyjątkiem $x = 0$ i której całka w granicach od $-\infty$ do ∞ równa się jedności. Istotnie, gdyby dystrybucja δ była funkcją, to (podstawiając w (7) $\varphi = 1$) całka jej byłaby równa 1. Ponadto z definicji wynika, że dystrybucja δ zredukowana do półprostej $-\infty; 0$ lub $0; \infty$ jest funkcją tożsamościowo równą zeru. Jednakże δ nie jest funkcją, a funkcja o własnościach wymienionych w definicji „funkcji” *delta Diraca* w ogóle nie istnieje. Dystrybucję δ należy zidentyfikować z miarą μ_δ zdefiniowaną w § 9, ćwiczenie 4.

2. Sprawdzić, że

$$\vartheta_{\delta^{(m)}}(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) \quad \text{dla } \varphi \in E_{\mathcal{R}}.$$

3. Jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m-1} a_j x^j & \text{dla } x \leq 0, \\ \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

to m -ta pochodna (w sensie teorii dystrybucji) funkcji f wyraża się wzorem

$$f^{(m)} = \sum_{j=1}^{m-1} j! (b_j - a_j) \delta^{(m-1-j)}.$$

(Wsk.: Obliczyć najpierw m -tą pochodną dystrybucyjną funkcji

$$h(x) = \begin{cases} x^j & \text{dla } x \leq 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

4. Niech $\theta \in D(\mathcal{R})$. Na to, by dystrybucje $\theta|_{P_1}$ i $\theta|_{P_2}$, gdzie P_1 jest przedziałem $-\infty; 0$, a P_2 — przedziałem $0; \infty$, były funkcjami równymi tożsamościowo zeru, potrzeba i wystarcza, aby dystrybucja θ była skończoną kombinacją liniową dystrybucji δ i jej pochodnych.

(Wsk.: W dowodzie konieczności przedstawić dystrybucję jako m -tą pochodną pewnej funkcji ciągłej i zastosować ćwiczenie 3.)