P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY

KAZIMIERZ KURATOWSKI REDAKTOR
KAROL BORSUK, BRONISŁAW KNASTER, STANISŁAW MAZUR,
WACŁAW SIERPIŃSKI, HUGO STEINHAUS, WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI,
ANTONI ZYGMUND

TOM 33

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

02338
[33]

ARNOLD WALFISZ

GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN KUGELN

WARSZAWA 1957

02338

COPYRIGHT, 1957, by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (Poland) Krakowskie Przedmieście 79

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W WARSZAWIE
1816

Eo-1002/57
18 X.

VORWORT

Da über die Entstehung des Buches und die Beziehung des in ihm behandelten Problems zum allgemeineren Problem der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden in den Quellenangaben berichtet wird, bleibt, in dieser Einleitung, nur übrig, einiges über die *Benutzung* des Buches zu sagen.

Das Studium des Buches setzt nur Kenntnisse voraus, wie sie in den üblichen Anfängervorlesungen über Analysis, Algebra und Zahlentheorie an den Hochschulen gegeben werden. Auch sind die Rechnungen überall sehr eingehend durchgeführt. Es wird allerdings angenommen, daß der Leser schon Gelegenheit gehabt hat, einige zahlentheoretische Arbeiten zu lesen, damit er vor den langen Rechnungen nicht zurückschrecke. Eine gewisse Gewandheit in der Handhabung des Summenzeichens wird ebenfalls vorausgesetzt; man kann diese erlangen, indem man z. B. die Aufgaben in dem nützlichen kleinen Buch [4] von Winogradow durcharbeitet.

Ich habe mir jedenfalls einen möglichst breiten Leserkreis gewünscht und glaube, daß das Buch angehenden Zahlentheoretikern in dreifacher Hinsicht von Nutzen sein kann:

1) Es liefert Stoff zu selbstständiger Weiterarbeit (man bedenke, daß ein Drittel des Buches durch Untersuchungen des letzten Jahrzehnts veranlaßt worden ist).

2) Man lernt Methoden kennen, deren Anwendung nicht auf das Kugel-Ellipsoidproblem beschränkt worden ist; dies gilt ganz besonders von den in den §§ 2.5-2.8 entwickelten O-Methoden, in geringerem Masse von den Methoden der letzten drei Kapitel.

3) Dem Leser wird Gelegenheit geboten, seine technische Fertigkeit nach und nach zu steigern.

Ich möchte namentlich auf den letzten Punkt hinweisen. Man kann nicht nachdrücklich genug betonen, daß eine gute Beherrschung der technischen Mittel für jeden unerläßlich ist, der moderne zahlentheoretische Arbeiten verstehen will, geschweige denn selbst in diesem Gebiet zu arbeiten gedenkt. Eine solche Beherrschung des Technischen kann nur durch jahrelange geduldige Übung an sorgfältig ausgewähltem Stoff erreicht werden, und selbst dann wird man sich nicht zur Ruhe setzen können, um nicht wieder aus der Übung zu kommen. Hohe Begabung des Lernenden kann ein solches Studium wohl erleichtern und abkürzen, aber erspart wird es niemandem bleiben. Daher glaube ich, daß das Buch auch jenen jungen Zahlentheoretikern von Vorteil sein kann, die sich nicht besonders für Gitterpunkte interessieren und das Buch nur als Teil ihrer Allgemeinbildung durchnehmen möchten.

Im übrigen ist es keineswegs notwendig, das Buch von Anfang bis zum Ende systematisch durchzuarbeiten; man kann auf viele Arten eine Auswahl treffen. Ein Leser, der dies zu tun wünscht, wird zweckmäßig nicht mit dem ersten Kapitel beginnen, sondern es nur dann zu Rate ziehen, wenn an späterer Stelle darauf verwiesen wird. Die übrigen neun Kapitel sind im wesentlichen voneinander unabhängig. Nur an drei Stellen ist dies nicht der Fall, und zwar werden im VI Kapitel die Sätze 5.2.2, 5.3.2 benutzt; im VII Kapitel Satz 4.1.1 und Hilfssatz 4.1.1; im VIII Kapitel Hilfssatz 2.3.3. Sonst wird zwar an einigen Stellen auf andere Kapitel verwiesen, es handelt sich aber dabei um Formeln, deren Beweis (unter eventueller Hinzuziehung des ersten Kapitels) rasch geht. Und selbst in den genannten Fällen wird man das Studium jener Sätze und Hilfssätze bei Wunsch auf einen späteren Zeitpunkt verschieben können. Die Kapitel II-VII und X brauchen überdies nicht ganz durchgenommen zu werden; man kann auch da eine Auswahl treffen, ohne von dem Verfasser darüber beraten zu werden.

Der Schriftleitung der *Monografie Matematyczne* schulde ich für die Annahme des Buches verbindlichsten Dank. Möge die Beliebtheit, deren sich diese Sammlung von Monographieen erfreut, auch dem Ellipsoidproblem zugutekommen!

Mein Dank gilt auch der Wissenschaftlichen Druckerei in Wrocław, die den schwierigen Satz mit einem so hohen Grad von Sorgfalt und Präzision ausführte, daß mir beim Korrekturenlesen fast nichts mehr zu tun übrig blieb.

Der Verfasser

Tiflis, im April 1956

BEZEICHNUNGEN

Die Buchstaben a, b, c, h, l, m bezeichnen ganze Zahlen; d, j, n, q, r, H, M positive ganze Zahlen; α, β nichtnegative ganze Zahlen; k ganze Zahlen $\geqslant 4$ in Kapitel I-IX und ganze Zahlen $\geqslant 2$ in Kapitel X; u, v positive ungerade Zahlen; p ungerade Primzahlen; y, V, X, Y, σ, θ reelle Zahlen; s, t, D, N, R positive Zahlen; w, z, C, S, W, Z komplexe Zahlen. Ferner sei $x \geqslant 3$, $0 < \varepsilon < 1$.

Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes oder Strichen versehen. Für die Buchstaben, die als Funktionszeichen benutzt werden, gelten aber die obigen Abmachungen nicht; z. B. braucht die Funktion $r_q(m)$, die wir bald einführen werden, nicht für alle m und q eine positive ganze Zahl zu sein. Ferner wird der Buchstabe d auch zur Bezeichnung eines Differentials verwendet.

Der Buchstabe B *ohne Indizes* bezeichnet unterschiedslos Zahlen, die ihrem absoluten Betrage nach unterhalb von Schranken liegen, die nur von k abhängen dürfen. Wenn k nicht vorkommt, wie z. B. im VIII Kapitel, liegen die $|B|$ unterhalb von absoluten Konstanten. Dies Zeichen wird an Stelle des Bachmann-Landauschen Symbols $O(\ )$ benutzt, weil es in der Anwendung etwas bequemer ist.

$a|m$ bedeutet, daß a in m als Teiler aufgeht; $a \nmid m$, daß a nicht in m aufgeht; $a \| m$, daß $a|m$, $\left(\frac{m}{a}, a\right) = 1$ (diese Bezeichnung wird nur dann angewendet, wenn a eine Primzahlpotenz ist). Dagegen bedeutet w/z (meist in Exponenten) einen Bruch mit dem Zähler w und Nenner z.

$\left(\frac{a}{u}\right)$ ist das Jacobische Symbol für $(a, u) = 1, u > 1$; ist Null für $(a, u) > 1$; ist Eins für $u = 1$.

Weiter sei
$$\exp(z) = e^z, \quad e(z) = \exp(2\pi i z).$$

In der Summe $\sum\limits_{a \bmod q}$ durchläuft a ein vollständiges Restsystem mod q, in der Summe $\sum\limits_{a \bmod q}'$ ein reduziertes System. In allen übrigen Summen ist die untere Summationsgrenze, falls sie nicht ausdrücklich angegeben wird, gleich Eins. Leere Summen sind gleich Null zu setzen, leere Produkte gleich Eins.

Ist $f(\ldots)$ eine beliebige Funktion, so bedeutet

$$f^a(\ldots) = \{f(\ldots)\}^a.$$

Es ist $\mathrm{Min}(s, \infty) = s$ für jedes s. An einigen Stellen werden Kongruenzen der Gestalt

$$X \equiv Y \pmod{n}$$

aufgeschrieben; diese bedeuten, daß $X - Y = mn$ ist.

Wir verwenden das Landausche o-Zeichen:

$$z = o(s)$$

bedeutet, daß

$$\lim_{s=\infty} \frac{z}{s} = 0$$

ist. Weiter bedeutet

$$z = \Omega(s),$$

daß

$$\limsup_{s=\infty} \frac{|z|}{s} > 0.$$

Mit anderen Worten: $z = \Omega(s)$ ist die Verneinung von $z = o(s)$. Die Bezeichnung

$$y = \Omega_+(s)$$

bedeutet, daß

$$\limsup_{s=\infty} \frac{y}{s} > 0.$$

Die Bezeichnung

$$y = \Omega_-(s)$$

bedeutet, daß

$$\liminf_{s=\infty} \frac{y}{s} < 0.$$

Das Buch ist in Kapitel eingeteilt; jedes Kapitel in Paragraphen, die mit $1, 2, \ldots$ numeriert werden. In jedem Paragraphen werden die Formeln, Hilfssätze und Sätze mit $1, 2, \ldots$ numeriert. Die Formel (4) des § 3 von Kapitel I heißt (4), wenn sie in diesem Paragraphen zitiert wird; (3.4), wenn sie in einem anderen Paragraphen des I Kapitels genannt wird; (1.3.4), wenn auf sie nicht im ersten Kapitel Bezug genommen wird. Analog für die Sätze und Hilfssätze und für die Paragraphen selbst. So wird § 3 des I Kapitels mit § 3 oder § 1.3 bezeichnet, je nachdem es im ersten Kapitel oder anderswo geschieht.

Es ist

$$r_q(y) = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_q = -\infty \\ a_1^2 + \ldots + a_q^2 = y}}^{\infty} 1$$

die Anzahl der Darstellungen von y als Summe von q Quadraten ganzer Zahlen;

$$A_q(t) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant t} r_q(m) = 1 + \sum_{n \leqslant t} r_q(n)$$

die Anzahl der Gitterpunkte $(a_1, \ldots, a_q)$ in der q-dimensionalen Kugel

$$y_1^2 + \ldots + y_q^2 \leqslant t.$$

Ferner bezeichnet

$$V_q(t) = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma\left(\frac{q}{2} + 1\right)} t^{q/2}$$

das Volumen dieser Kugel (die Berechnung des Volumens wird in § 2.1 durchgeführt) und

$$P_q(t) = A_q(t) - V_q(t)$$

den Gitterrest.

Die auf einen Verfassernamen bezugnehmenden Zahlen in eckigen Klammern geben Nummern von Arbeiten an, die in dem Schriftenverzeichnis aufgeführt werden.

Das Buch ist dem Studium der Funktion $P_k(x)$ gewidmet. Um die Übersicht zu erleichtern, werden die auf $P_k(x)$ bezugnehmenden Behauptungen (die Hauptergebnisse des Buches) als Sätze formuliert, alle anderen Behauptungen als Hilfssätze.

Da in dem Buch sehr viele Funktionen auftreten, so wird hin und wieder an verschiedenen Stellen eine und dieselbe Bezeichnung für mehrere Funktionen benutzt. Die wichtigsten Bezeichnungen, die für das ganze Buch gelten, sind außer den oben genannten, die folgenden:

$S(h, q)$ — die Gaußsche Summe (1.1.1),
$C(h, q)$ — die Ramanujansche Summe (1.1.27),
$\sigma(t)$ — die Funktion (1.2.1),
$S(t)$ — die Funktion (1.2.23),
$\psi(y)$ — die Funktion (1.3.1),
D_r — die Zahl (1.4.2),
$L(s)$ — die Funktion (5.3.18),
P_k, ϱ_k — die Zahlen (6.1.2).

Dort, wo allgemein übliche Bezeichnungen vorliegen, wie z. B. für die Funktionen

$$[y], \quad \varphi(n), \quad \mu(n), \quad \Gamma(z), \quad \zeta(s), \quad J_N(t),$$

werden diese benutzt.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Abkürzungen

AA — Acta Arithmetica.
AL — Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio scientiarum mathematicarum.
AM — Acta Mathematica.
AMP — Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe.
ASN — Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie II.
BI — Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême.
CMF — Casopis pro pestovani matematiky a fysiky.
CR — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.
CRCM — Comptes-rendus du deuxième congrès des mathématiciens des pays slaves. Praha 1935.
EMW — Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Zweiter Band. Erster Teil. Zweite Hälfte. Leipzig 1904-1916.
GM — Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889.
GN — Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.
HA — Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.
JGW — C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Erster Band. Berlin 1881.
JJMS — Journal of the Mathematical Society of Japan.
JLMS — Journal of the London Mathematical Society.
JM — Journal für die reine und angewandte Mathematik.
JPEA — Jahresbericht der Pfeiffer'schen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena über das Schuljahr von Ostern 1885 bis Ostern 1886.
MA — Mathematische Annalen.
MGA — Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Zweiter Band. Leipzig 1911.
MM — The Messenger of Mathematics.
MMP — Monatshefte für Mathematik und Physik.
MC — Математический Сборник. Новая серия.
MZ — Mathematische Zeitschrift.
NA — Niew Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks.
PCPS — Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
PIAS — Proceedings of the Indian Academy of Sciences.
PJM — Pacific Journal of Mathematics.
PLMS — Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2.
PMF — Prace Matematyczno-Fizyczne.

PNAS — Proceedings of the National Academy of Sciences.
PR — Pascals Repertorium der höheren Mathematik. Zweite Auflage. Erster Band. Dritter Teilband. Leipzig 1929.
PRS — Proceedings of the Royal Society. Series A.
QJM — The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.
QJMO — Quarterly Journal of Mathematics. Oxford series.
RCP — Collected Papers of Srinivasa Ramanujan. Cambridge 1927.
RGW — Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Zweite Auflage. Leipzig 1892. (Photonachdruck, New York 1953.)
SBMG — Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft.
СГАН — Сообщения Академии Наук Грузинской ССР.
SPAW — Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften.
SWAW — Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse. Abt. IIa.
TAMS — Transactions of the American Mathematical Society.
TCPS — Transactions of the Cambridge Philosophical Society.
ТГПИ — Труды Грузинского Политехнического Института имени С. М. Кирова.
TMJ — The Tôhoku Mathematical Journal.
ТСМИ — Труды Математического Института имени В. А. Стеклова.
ТТМИ — Труды Тбилисского Математического Института имени А. М. Размадзе.
VCSN — Vestnik kralovske ceske spolecnosti nauk.

Bachmann P.
[1] *Die analytische Zahlentheorie*, Leipzig 1894.

Bessel-Hagen E.
[1] *Zahlentheorie*, PR, 1457-1578.

Burkhardt H.
[1] *Trigonometrische Reihen und Integrale*, EMW, 819-1354.

Carathéodory C.
[1] *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig 1918.

Carlitz L.
[1] *The reciprocity theorem for Dedekind sums*, PJM, 3(1953), 523-527.

Chandrasekharan K. and Minakshisundaram S.
[1] *Typical means*, Oxford 1952.

Chowla S.
[1] *The lattice points in a hypersphere*, PIAS **1**(1935), 562-566.

van der Corput J. G.
[1] *Over definiete kwadratische vormen*, NA **13**(1919), 125-140.
[2] *Zahlentheoretische Abschätzungen*, MA **84**(1921), 53-79.
[3] *Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme*, MZ **17**(1923), 250-259.

Dickson L. E.
[1] *Studies in the theory of numbers*, Chicago 1930.

Estermann T.

[1] *On the representations of a number as a sum of squares*, AA 2(1936), 47-79; PMF 45(1936), 93-125.

[2] *On the sign of the Gaussian sum*, JLMS 20(1945), 66-67.

Gauss C. F.

[1] *Arithmetische Untersuchungen*, GM, V-XII, 1-453. Übersetzung des lateinischen Buches: *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig 1801.

[2] *Summierung gewisser Reihen von besonderer Art*, GM, 463-495. Übersetzung der lateinischen Arbeit: *Summatio quarundam serierum singularium*.

[3] *Über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Klassen, in welche die binären Formen zweiten Grades zerfallen, und ihrer Determinante*, GM, 655-677. Übersetzung der lateinischen Arbeit: *De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem*.

Hardy G. H.

[1] *On the expression of a number as the sum of two squares*, QJM 46(1915), 263-283.

[2] *On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven*, PNAS 4(1918), 189-193.

[3] *On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five*, TAMS 21(1920), 255-284.

[4] *Note on Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$, and certain series of arithmetical functions*, PCPS 20(1921), 263-271.

[5] *Notes on the papers*, RCP, 335-348.

[6] *Ramanujan*, Cambridge 1940.

Hardy G. H. and Landau E.

[1] *The lattice points of a circle*, PRS 105(1924), 244-258.

Hardy G. H. and Littlewood J. E.

[1] *Contributions to the arithmetic theory of series*, PLMS 11(1913), 411-478.

Hardy G. H. and Ramanujan S.

[1] *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, PLMS 17(1918), 75-115; RCP, 276-309.

Hardy G. H. and Riesz M.

[1] *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge 1915.

Hardy G. H. and Wright E. M.

[1] *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1938.

Hobson E. W.

[1] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. Volume II. Second edition, Cambridge 1926.

Hölder O.

[1] *Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$*, PMF 43(1936), 13-23.

Hua L. K. (Bei № 1 Verfassername Хуа Л. К.)

[1] Аддитивная теория простых чисел, ТСМИ 22(1947), 1-179.

[2] *An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications*, QJMO 20(1949), 48-61.

Jacobi C. G. J.

[1] *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Königsberg 1829; JGW, 49-239.

Jarník V.

[1] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, MZ 27(1927), 154-160.

[2] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. (Zweite Mitteilung.) MZ 28(1928), 311-316.

[3] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, MA 100(1928), 699-721.

[4] *Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions*, BI 1928, 1-10.

[5] *O mrizovych bodech ve vicerozmernych koulich*, CMF 57(1928), 123-128.

[6] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Zweite Abhandlung, MA 101(1929), 136-146.

[7] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, MZ 30(1929), 768-786.

[8] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, TMJ 30(1929), 354-371.

[9] *Sur une fonction arithmétique*, VCSN 1930, 1-13.

[10] *Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions*, VCSN 1930, 1-11.

[11] *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*, MZ 33(1931), 62-84.

[12] *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*. Zweite Abhandlung, MZ 33(1931), 85-97.

[13] *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*, VCSN 1931, 1-17.

[14] *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*. Dritte Abhandlung, MZ 36(1933), 581-617.

[15] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes*, MZ 38(1934), 217-256.

[16] *Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres*, CRCM, 26-48.

[17] *Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre*, CMF 69(1940), 57-60.

[18] *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*, 5. Abhandlung, CMF 69(1940), 148-174.

[19] *Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $a_1(u_1^2+\ldots+u_{r_1}^2)+a_2(u_{r_1+1}^2+\ldots+u_r^2) \leqslant x$*; VCSN 1940, 1-63.

[20] *Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $a_1(u_1^2+\ldots+u_{r_1}^2)+a_2(u_{r_1+1}^2+\ldots+u_r^2) \leqslant x$*. Zweite Abhandlung, CMF 70(1940), 1-33.

[21] *Vety o stredni hodnote z teorie mrizovych bodu*. 6 pojednani. *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*. 6. Abhandlung, CMF 70(1941), 89-103.

Jarník V. und Walfisz A.

[1] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, MZ 32(1930), 152-160.

Kloosterman H. D.

[1] *Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden*, MZ 24(1925), 519-529.

Landau E.

[1] *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen*, GN 1912, 687-771.

[2] *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie*, SWAW 121(1912), 2195-2332.

[3] *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen*. (Zweite Abhandlung.), GN 1915, 209-243.

[4] *Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen.* (*Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid.*), SPAW 1915, 458-476.

[5] *Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen*, SWAW 124(1915), 445-468.

[6] *Über mehrfache gliedweise Differentiation unendlicher Reihen*, AMP 26(1917), 69-70.

[7] *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.* (Dritte Abhandlung.), GN 1917, 96-101.

[8] *Zum Waringschen Problem,* MZ 12(1922), 219-247.

[9] *Über die Gitterpunkte in einem Kreise.* (Vierte Mitteilung.), GN 1923, 58-65.

[10] *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.* (Vierte Abhandlung.), GN 1924, 137-150.

[11] *Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen,* MZ 20(1924), 105-125.

[12] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden,* MZ 21(1924), 126-132.

[13] *Über einige zahlentheoretische Funktionen,* GN 1924, 116-134.

[14] *Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern,* MZ 22(1925), 189-205.

[15] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.* Zweite Abhandlung, MZ 24(1925), 299-310.

[16] *Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie,* MMP 34(1925), 1-36.

[17] *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Erster Band. *Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie,* Leipzig 1927.

[18] *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Zweiter Band. *Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie,* Leipzig 1927.

[19] *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.* Zweite Auflage, Leipzig 1927.

Lipschitz R.

[1] *Über ein Integral der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial J}{\partial x}+J=0$, JM 56(1859), 189-196.

[2] *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen,* JM 105(1889), 127-156.

Lursmanaschwili A. P. (Лурсманашвили А. П.)

[1] *О числе целых точек в многомерных шарах,* ТТМИ 19(1953), 79-120.

[2] *О числе целых точек в многомерных шарах нечетной размерности,* СГАН 14(1953), 513-520.

[3] *О числе целых точек в многомерных шарах нечетной размерности,* ТГПИ № 30(1954), 55-66.

Meulenbeld B.

[1] *Een approximatieve functionaalbetrekking van de zetafunctie van Riemann,* Amsterdam 1936.

Minkowski H.

[1] *Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz,* JM 129(1905), 220-274, MGA, 53-100.

Müntz Ch. H.

[1] *Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Das Ellipsoidgitter in n Dimensionen,* SBMG 24(1925), 81-93.

[2] *Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide,* MZ 25(1926), 150-165.

Nasimow P. S. (Назимов П. С.)

[1] *О приложениях теории эллиптических функций к теории чисел,* Москва 1884.

Nielsen N.

[1] *Handbuch der Theorie der Gammafunktion,* Leipzig 1906.

Nörlund N. E.

[1] *Vorlesungen über Differenzenrechnung,* Berlin 1924.

Oppenheim A.

[1] *Some identities of the theory of numbers,* PLMS 26(1926), 295-350.

Petersson H.

[1] *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden,* HA 5(1926), 116-150.

Pfeiffer E.

[1] *Über die Periodicität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten,* JPEA, 1-21.

Pólya G. und Szegö G.

[1] *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Erster Band, Berlin 1925.

Ramanujan S.

[1] *On certain arithmetical functions,* TCPS 22(1916), 159-184. RCP, 136-162.

[2] *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers,* TCPS 22(1918), 259-276. RCP, 179-199.

Riemann B.

[1] *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (1847), RGW, 353-366.

Riesz M.

[1] *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques,* CR 152(1911), 1651-1654.

[2] *Sur un théorème de la moyenne et ses applications,* AL 1(1923), 114-126.

Sierpiński W.

[1] *Teoria liczb,* a) Warszawa 1914. b) Wydanie drugie, Warszawa 1925. c) Wydanie trzecie, Warszawa-Wrocław 1950.

Sonin N. J. (Сонин Н. Я)

[1] *Об одном определенном интеграле, содержащем числовую функцию* $[x]$, Варшава 1885.

Titchmarsh E. C.

[1] *The theory of functions,* Oxford 1932.

[2] *Introduction to the theory of Fourier integrals,* Oxford 1937.

Tsuji M.

[1] *On lattice points in an n-dimensional ellipsoid,* JJMS 5(1953), 295-306.

Winogradow I. M. (Bei N° 1 Verfassername Vinogradov I.; bei N° 4 Winogradow I. M.; bei N° [4a]-[4b] Vinogradov I. M.)

[1] *A new method of estimation of trigonometrical sums,* MC 1(1936), 175-188.

[2] *Новый метод в аналитической теории чисел,* ТСМИ 10 (1937), 1-122.

[3] *Избранные труды,* Москва 1952.

[4] *Elemente der Zahlentheorie,* Berlin und München 1956. Übersetzung des russischen Buches: *Основы теории чисел.* Издание шестое, Москва 1953.

Es gibt auch zwei englische Übersetzungen dieses Buches, nämlich:

[4a] *Elements of number theory,* New York 1954.

[4b] *An introduction to the theory of numbers,* London and New York 1955.

[4b] ist, wie [4], eine Übersetzung der sechsten Auflage; [4a] ist eine Übersetzung der gleichlautenden fünften Auflage (Москва 1949).

Walfisz A. (Bei №№ 21-30 Verfassername Вальфиш А.)

[1] *Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen*, Göttingen 1922.

[2] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, MZ **19**(1924), 300-307.

[3] *Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern*, MZ **22**(1925), 153-188.

[4] *Teilerprobleme*, MZ **26**(1927), 66-88.

[5] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Zweite Abhandlung, MZ **26**(1927), 106-124.

[6] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Dritte Abhandlung, MZ **27**(1927), 245-268.

[7] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, MZ **27**(1927), 469-480.

[8] *Über einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre*, PMF **36**(1928-1929), 107-135.

[9] *Teilerprobleme*. Zweite Abhandlung, MZ **34**(1931), 448-472.

[10] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Vierte Abhandlung, MZ **35**(1932), 212-229.

[11] *Teilerprobleme*. Dritte Abhandlung, JM **169**(1933), 111-130.

[12] *Über die Koeffizienten einiger Modulformen*, PMF **40**(1933), 149-155.

[13] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Fünfte Abhandlung, AA **1**(1936), 222-283; PMF **44**(1936), 187-248.

[14] *Teilerprobleme*. Vierte Abhandlung, ASN **5**(1936), 289-298.

[15] *Teilerprobleme*. Fünfte Abhandlung, AA **2**(1936), 80-133; PMF **45**(1936), 127-180.

[16] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Sechste Abhandlung, CMF **66**(1936), 1-19.

[17] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Siebente Abhandlung, ТТМИ **5**(1938), 1-67.

[18] *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Achte Abhandlung, ТТМИ **5**(1938), 181-196.

[19] *Zur additiven Zahlentheorie*. VI, ТТМИ **5**(1938), 197-254.

[20] *On lattice points in high-dimensional ellipsoids*. Ninth paper, ТТМИ **10**(1941), 111-160.

[21] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Десятая работа. ТТМИ **15** (1947), 275-296.

[22] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Одиннадцатая работа, ТТМИ **15**(1947), 297-322.

[23] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Двенадцатая работа, ТТМИ **16**(1948), 169-213.

[24] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Тринадцатая работа, ТТМИ **16**(1948), 215-230.

[25] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Четырнадцатая работа, ТТМИ **17**(1949), 245-258.

[26] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Пятнадцатая работа, ТТМИ **17**(1949), 259-279.

[27] *О функции Эйлера*, ТТМИ **19**(1953), 1-31.

[28] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Шестнадцатая работа, ТТМИ **20**(1954), 1-20.

[29] *О целых точках в многомерных эллипсоидах*. Семнадцатая работа, ТТМИ **21**(1955), 3-64.

[30] *Абсциссы сходимости некоторых рядов Дирихле*, ТТМИ **22**(1956) 33-75.

Watson G. N.

[1] *A treatise on the theory of Bessel functions*. Second edition, Cambridge 1944.

Weyl H.

[1] *Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen*, GN 1914, 234-244.

[2] *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, MA **77**(1916), 313-352.

[3] *Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$*, MZ **10**(1921), 88-101.

Wigert S.

[1] *Sur quelques fonctions arithmétiques*, AM **37**(1914), 113-140.

Wilton J. R.

[1] *The lattice points of an n-dimensional ellipsoid*, JLMS **2**(1927), 227-233.

[2] *A series of Bessel functions connected with the theory of lattice points*, PLMS **29**(1928), 168-188.

[3] *A series of Bessel functions connected with the lattice-points of an n-dimensional ellipsoid*, PRS **120**(1928), 358-369.

[4] *The lattice points of a circle: An historical account of the problem*, MM **48**(1928) 67-80.

INHALTSVERZEICHNIS

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Wydanie pierwsze. Nakład 1500+120 egz. Ark. wyd. 26,0. Ark. druk. 29,5. Papier druk. sat. kl. III 80 g, 70×100. Oddano do składu 2. I. 1957. Podp. do druku 19.VIII.1957. Druk ukończono we wrześniu 1957. Zamówienie 45/57

Wrocławska Drukarnia Naukowa

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W WARSZAWIE * 1816 *

SINNSTÖRENDE DRUCKFEHLER

Seite	Ist	Soll sein
6_1	im April 1956	im September 1957
10_2	$= q\{1+(-1)^{h_q/2}\}$	$= q\{1+(-1)^{hq/2}\}$
20^1	Zu dieser Konstanten	Zu diesem Koefficienten
29_4	Medianen	Medianten
30^2	Medianen	Medianten
68	Nummer (16) betrifft die letzte Zeile der Formel	
69	Nummer (18) betrifft die letzte Zeile der Formel	
81	Nummer (77) betrifft die zweite Zeile der Formel	
84^7	$\sum\limits_{\lvert a_r\rvert<H^r}$	$\sum\limits_{\lvert a_r\rvert<nH^r}$
99^5	$=\sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{c=0}^{a-1}\sum\limits_{l=0}^{q-1}$	$=\sum\limits_{m=0}^{n}=\sum\limits_{c=0}^{a-1}\sum\limits_{l=0}^{q-1}$
107	Nummer (37) betrifft die letzte Zeile der Formel	
110	Nummer (13) betrifft die beiden Zeilen der Formel	
132_4	$\sum\limits_{r=1}$	$\sum\limits_{r=1}^{j}$
141	Nummer (37) betrifft die letzte Zeile der Formel	
145	Nummer (52) betrifft die zweite Zeile der Formel	
149^8	die	jede
51	Nummer (15) betrifft die zweite Zeile der Formel	
154_3	das Zeichen = weglassen	
166_1	Bedingungen	Bedingungen (53)
168_6	$\leqslant \frac{1}{2} D_k$	$\leqslant -\frac{1}{2} D_k$
168_5	ungeradem	geradem
180	Nummer (8) betrifft die letzte Zeile der Formel	
180^{10}	$\sum\limits_{q=1}^{\infty}(4q)^{-1}$	$\sum\limits_{q=1}^{\infty}(4q)^{-k}$
182	Nummer (5) betrifft die letzte Zeile der Formel	
211_2	sie	sei
212^9	$2\leqslant a\leqslant v$	$2\leqslant \alpha\leqslant v$
214_3	$\frac{1}{8}\cdot 3^{1-k}$	$\frac{1}{2}\cdot 3^{1-k}$
223_2	$S(n)-S_5(M)$	$S_5(n)-S_5(M)$

Seite	Ist	Soll sein
254	Nummer (7) betrifft die zweite Zeile der Formel	
257_2	$\sin\frac{(2r+1-3n-4n(l-1)/2\pi u)}{4n}$	$\sin\frac{(2r+1-3n-4n(l-1)/2)\pi u}{4n}$
285_9	5Δ	$5^l\Delta$
305^9	$\sum_{b\leqslant xX}$	$\sum_{b\leqslant X}$
306^4	$\frac{\psi_2(X)}{2x}$	$\frac{\psi_2(X)}{2X}$
308	Nummer (32) betrifft die dritte Zeile der Formel	
315^9	$\sum_{m\leqslant hX}^{\infty}$	$\sum_{m\leqslant hX}$
325^4	$\sum_{\substack{n\leqslant u/r\\(u,n)=1}}^{\infty}$	$\sum_{\substack{n\leqslant u/r\\(u,n)=1}}$
332_7	$\sum_{\substack{m\leqslant hX\\n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-2}$	$\sum_{\substack{m\leqslant hX\\n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}$
356^8	$\sum_{\alpha,\beta=0}^{4}$	$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}$
357^4	$s^{-1/2}$	$s_2^{-1/2}$
357	Nummer (49) betrifft die letzte Zeile der Formel	
375^{13}	$y\in J_{h_q},\ y'\in J_{h'_{q'}}$	$y\in J_{hq},\ y'\in J_{h'q'}$
387_2	gänzung	Ergänzung
401^1	$N\to\infty$	$M\to\infty$
410^9	$\int_{\sigma}^{t}$	$\int_{0}^{t}$
410^{13}	$\int_{0}$	$\int_{0}^{1}$
416	Nummer (5) betrifft die erste Zeile der Formel	
437_7	$CY^{k/3-7/4-1/6}$	$CY^{k/2-7/4-1/6}$
442^{11}	$(Y-1)^{-\sigma}$	$(Y-1)^{\sigma}$
467_{10}	Winogradow I. M.	Winogradow I. M. (Виноградов И. М.)
468^3	Вальфиш А.	Вальфиш А. З.

BUW