

Links in (86) steht ein Polynom in ε , dessen Koeffizienten von n abhängen. Also muß bei wachsendem n jeder Koeffizient einzeln gegen Null streben. In der Tat hat (86) die Gestalt

$$f_1(n)\varepsilon + f_2(n)\varepsilon^2 + f_3(n)\varepsilon^3 \rightarrow 0.$$

Setzt man hier $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, so folgt

$$f_1(n) + \frac{1}{2}f_2(n) + \frac{1}{4}f_3(n) = g_1(n) \rightarrow 0,$$

$$f_1(n) + \frac{1}{3}f_2(n) + \frac{1}{9}f_3(n) = g_2(n) \rightarrow 0,$$

$$f_1(n) + \frac{1}{4}f_2(n) + \frac{1}{16}f_3(n) = g_3(n) \rightarrow 0.$$

Drückt man auf Grund dieser Gleichungen f_1, f_2, f_3 durch g_1, g_2, g_3 aus, so überzeugt man sich, daß

$$f_1(n) \rightarrow 0, \quad f_2(n) \rightarrow 0, \quad f_3(n) \rightarrow 0.$$

Aus (86) folgt jetzt

$$A_k(n)n^{-k/2} \rightarrow \frac{2D_k}{k}, \quad A_k(n)n^{-k/2} \rightarrow \frac{2D_k}{k} \cdot \frac{2k-2}{k-2}.$$

Da diese beiden Beziehungen nicht gleichzeitig bestehen können, so ist (82) falsch, also (81) richtig.

Aus (80) folgt, daß die Abschätzung (79) für $k > 5$ endgültig ist und für $k = 5$ höchstens um $\log^2 x$ verbessert werden kann.

X KAPITEL

ENTWICKLUNG DER FUNKTION $P_k(t)$ IN EINE REIHE NACH BESSELSCHEN FUNKTIONEN

§ 1. Hilfssätze über Besselsche Funktionen

In diesem Kapitel ist $k \geq 2$, $h = [(k+1)/2]$.

Die Potenz z^y ($z \neq 0$) ist nach wie vor durch (4.2.49) bestimmt, d. h. es wird

$$(1) \quad z^y = \exp(y \log z), \quad \text{wo} \quad -\pi < \operatorname{Im}(\log z) \leq \pi$$

angenommen. Nach dieser Definition ist

$$(2) \quad (z_1 z_2)^y = z_1^y z_2^y \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} z_1 > 0, \operatorname{Re} z_2 \geq 0, z_2 \neq 0.$$

Unsere Aufgabe wird darin bestehen, die Funktion $P_k(t)$, oder genauer gesagt, die Funktion

$$(3) \quad \frac{1}{2} \{P_k(t+0) + P_k(t-0)\}$$

(mit der wir es schon im IV Kapitel zu tun hatten), in eine Reihe nach Besselschen Funktionen zu entwickeln. Diese Reihe konvergiert nur für $k = 2$; für $k > 2$ divergiert sie, ist aber nach einem der Rieszschen Verfahren summierbar. Wir setzen beim Leser keine Kenntnisse aus der Theorie Besselscher Funktionen oder summierbarer Reihen voraus. Das Nötige wird in den §§ 1 und 2 gebracht.

Es sei $N \geq 1$. Die Funktion $J_N(t)$, die Besselsche Funktion erster Art, der Ordnung N , werde durch die Reihe

$$(4) \quad J_N(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{N+2m}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert in jedem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ absolut und gleichmäßig. Man kann sie beliebig oft gliedweise differenzieren.

HILFSSATZ 1.

$$(5) \quad J'_{N+1}(t) = J_N(t) - \frac{N+1}{t} J_{N+1}(t).$$

Beweis. Nach (4) ist

$$\begin{aligned}
 J'_{N+1}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+2)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2} \right)^{N+2m+1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+1)} \cdot \frac{N+2m+1}{2(N+m+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{N+2m}, \\
 J'_{N+1}(t) - J_N(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+1)} \left(\frac{N+2m+1}{2(N+m+1)} - 1 \right) \left(\frac{t}{2} \right)^{N+2m} \\
 &= -\frac{N+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+1)(N+m+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{N+2m+1} \frac{2}{t} \\
 &= -\frac{N+1}{t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+2)} \left(\frac{t}{2} \right)^{N+2m+1} \\
 &= -\frac{N+1}{t} J_{N+1}(t).
 \end{aligned}$$

HILFSSATZ 2.

$$(6) \quad \frac{d^r}{dt^r} \{ t^{(N+r)/2} J_{N+r}(2t^{1/2}) \} = t^{N/2} J_N(2t^{1/2}).$$

Beweis. Nach dem vorigen Hilfssatz ist

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \{ t^{(N+1)/2} J_{N+1}(2t^{1/2}) \} \\
 &= \frac{N+1}{2} t^{(N-1)/2} J_{N+1}(2t^{1/2}) + t^{N/2} J'_{N+1}(2t^{1/2}) \\
 &= \frac{N+1}{2} t^{(N-1)/2} J_{N+1}(2t^{1/2}) + t^{N/2} \left\{ J_N(2t^{1/2}) - \frac{N+1}{2t^{1/2}} J_{N+1}(2t^{1/2}) \right\} \\
 &= t^{N/2} J_N(2t^{1/2}),
 \end{aligned}$$

womit Gleichung (6) für $r=1$ bewiesen ist.

Der Übergang von r zu $r+1$ wird so ausgeführt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \{ t^{(N+r+1)/2} J_{N+r+1}(2t^{1/2}) \} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^r}{dt^r} \{ t^{(N+1)+r/2} J_{N+1+r}(2t^{1/2}) \} \right) = \frac{d}{dt} \{ t^{(N+1)/2} J_{N+1}(2t^{1/2}) \} = t^{N/2} J_N(2t^{1/2}).
 \end{aligned}$$

HILFSSATZ 3.

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \exp \left(Dw - \frac{R}{w} \right) w^{-N-1} dw = \left(\frac{D}{R} \right)^{N/2} J_N \{ 2(DR)^{1/2} \}.$$

Beweis. Es sei $w = 1 + yi$. Die Reihe

$$\exp \left(Dw - \frac{R}{w} \right) w^{-N-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{Dw}}{w^{N+1}} (-1)^m \frac{R^m}{m! w^m}$$

kann gliedweise integriert werden, da für $|y| \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{e^{Dw}}{w^{N+1}} (-1)^m \frac{R^m}{m! w^m} \right| = \frac{\exp(D+R/|w|)}{|w|^{N+1}} \sim \frac{e^D}{|y|^{N+1}}$$

ist. Bezeichnet man daher die linke Seite von (7) abgekürzt mit S , so folgt

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{R^m}{m!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{Dw}}{w^{N+m+1}} dw.$$

Hier wollen wir das Integral nach Formel (9.1.21) berechnen, indem dort $y = D$, $k = 2N + 2m$ gesetzt wird. Das geht ohne weiteres, wenn $2N + 2m$ eine ganze Zahl ≥ 4 ist, da (9.1.21) aus (1.4.32), (1.4.33), (1) folgt und in § 1.4 die Annahme $k \geq 4$ gemacht wurde. Unser Beweis von (1.4.33) gilt aber für jede positive Zahl $k = s$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m R^m D^{N+m}}{m! \Gamma(N+m+1)} = \left(\frac{D}{R} \right)^{N/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(N+m+1)} (DR)^{(N+2m)/2} \\
 &= \left(\frac{D}{R} \right)^{N/2} J_N \{ 2(DR)^{1/2} \},
 \end{aligned}$$

nach Definition (4) der Besselschen Funktionen.

HILFSSATZ 4.

$$(8) \quad \int_0^1 (1-y^2)^{N-1/2} \cos ty \, dy = \pi^{1/2} 2^{N-1} \Gamma(N + \frac{1}{2}) t^{-N} J_N(t).$$

Beweis. Wird die linke Seite von (8) mit S bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (1-y^2)^{N-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} y^{2m}}{(2m)!} dy \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} \int_0^1 (1-y^2)^{N-1/2} y^{2m} dy.
 \end{aligned}$$

Hier hat man

$$\int_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^{N-1/2} y^{m-1/2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(N+m+1)}.$$

Weiter ist

$$\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(2m)!} = \frac{\pi^{1/2}}{2^{2m} \cdot m!}.$$

In der Tat ist diese Gleichung für $m=0$ erfüllt, und beim Übergang von m zu $m+1$ werden beide Seiten mit

$$\frac{m+\frac{1}{2}}{(2m+1)(2m+2)} = \frac{1}{2^2(m+1)}$$

multipliziert.

Wegen (4) ist damit die Behauptung (8) des Hilfssatzes bewiesen.

HILFSSATZ 5.

$$(9) \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right) t^{-N} J_N(t) = \operatorname{Re} \{F_N(t)\},$$

wobei

$$(10) \quad F_N(t) = \exp\left\{t - \frac{\pi N}{2} - \frac{\pi}{4}i\right\} \int_0^\infty e^{-ty} y^{N-1/2} \left(1 + \frac{yi}{2}\right)^{N-1/2} dy.$$

Beweis. Nach (8) ist

$$(11) \quad \pi^{1/2} \Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{t}\right)^N J_N(t) = \int_{-1}^1 f(z) dz,$$

mit

$$(12) \quad f(z) = (1-z^2)^{N-1/2} e^{tzi}.$$

Wir setzen $z = X + Yi$. Nach dem Cauchyschen Satze ist

$$\int_{K(\varepsilon, M)} f(z) dz = 0,$$

wobei $K(\varepsilon, M)$ den geschlossenen Integrationsweg bezeichnet, der aus den folgenden sechs Stücken besteht: 1) der Strecke $-1+\varepsilon \leq X \leq 1-\varepsilon$, $Y=0$; 2) dem Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt $z=1$, von $1-\varepsilon$ bis $1+\varepsilon i$; 3) der Strecke $X=1$, $1+\varepsilon \leq Y \leq M$; 4) der Strecke $1 \geq X \geq -1$, $Y=M$; 5) der Strecke $X=-1$, $M \geq Y \geq 1+\varepsilon$; 6) dem Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt $z=-1$, von $-1+\varepsilon i$ bis $-1+\varepsilon$.

Für $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ streben die Integrale über 2), 4) und 6) gegen Null.

Daher ist

$$(13) \quad \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^{-1+\infty i} f(z) dz - \int_1^{1+\infty i} f(z) dz.$$

Auf Grund von (12), (1) und (2) ist im ersten Integral auf der rechten Seite von (13)

$$\begin{aligned} f(z) dz &= (1+z)^{N-1/2} 2^{N-1/2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{N-1/2} e^{tzi} dz \\ &= e\left(\frac{N}{4} - \frac{1}{8}\right) Y^{N-1/2} 2^{N-1/2} \left(1 - \frac{Yi}{2}\right)^{N-1/2} e^{-ti} e^{-tYi} dY. \end{aligned}$$

Im zweiten Integral hat man

$$\begin{aligned} f(z) dz &= (1-z)^{N-1/2} 2^{N-1/2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{N-1/2} e^{tzi} dz \\ &= e\left(-\frac{N}{4} + \frac{1}{8}\right) Y^{N-1/2} 2^{N-1/2} \left(1 + \frac{Yi}{2}\right)^{N-1/2} e^{ti} e^{-tYi} dY. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(z) dz &= e\left(\frac{N}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{-ti} 2^{N-1/2} \int_0^\infty e^{-ty} y^{N-1/2} \left(1 - \frac{yi}{2}\right)^{N-1/2} dy + \\ &+ e\left(-\frac{N}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{ti} 2^{N-1/2} \int_0^\infty e^{-ty} y^{N-1/2} \left(1 + \frac{yi}{2}\right)^{N-1/2} dy. \end{aligned}$$

Wegen (1) sind die beiden Summanden rechts zueinander konjugiert. Daher ist nach (10)

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = 2^{N+1/2} \operatorname{Re} \{F_N(t)\}.$$

Zusammen mit (11) ergibt dies die Behauptung (9) des Hilfssatzes.

HILFSSATZ 6. Es sei $l = [N - \frac{1}{2}]$, $N \leq 2k$. Dann ist

$$(14) \quad J_N(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(N+m+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(N-m+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\cos\{t + \pi(m-N)/2 - \pi/4\}}{(2t)^m} + Bt^{-l-3/2}.$$

Beweis. Für $0 \leq w < 1$, $0 \leq c \leq l$ ist

$$(15) \quad (1+w)^{N-1/2} = \sum_{m=0}^c \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(N-m+\frac{1}{2})} w^m + \\ + \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{c! \Gamma(N-c-\frac{1}{2})} w^{c+1} \int_0^1 (1-X)^c (1+wX)^{N-c-3/2} dX,$$

wobei das zweite Glied rechts für $c = l = N - \frac{1}{2}$ wegfällt (die Gleichung geht dann in die übliche Formel für die Potenz eines Binoms über). Für $c = 0$ ist (15) offenbar erfüllt, und der Übergang von c zu $c+1$ wird einfach so ausgeführt, daß man rechts einmal partiell integriert. Benutzt man die Definition (1) der Potenz, so kann man (15) durch analytische Fortsetzung auf alle w übertragen, die nicht auf der negativen reellen Achse liegen. Insbesondere gilt dann (15) für $w = yi/2$ ($y > 0$), $c = l$. Somit ist

$$(16) \quad S = S_1 + S_2,$$

wobei

$$(17) \quad S = \int_0^\infty e^{-ty} y^{N-1/2} \left(1 + \frac{yi}{2}\right)^{N-1/2} dy,$$

$$(18) \quad S_1 = \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(N-m+\frac{1}{2})} \left(\frac{i}{2}\right)^m \int_0^\infty e^{-ty} y^{N+m-1/2} dy,$$

(19)

$$S_2 = \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{l! \Gamma(N-l-\frac{1}{2})} \left(\frac{i}{2}\right)^{l+1} \int_0^\infty e^{-ty} y^{N+l+1/2} dy \int_0^1 (1+X)^l \left(1 + \frac{yXi}{2}\right)^{N-l-3/2} dX.$$

In (18) ist

$$\int_0^\infty e^{-ty} y^{N+m-1/2} dy = \frac{\Gamma(N+m+\frac{1}{2})}{t^{N+m+1/2}}.$$

Daher ergibt sich

$$(20) \quad S_1 = \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2}) \Gamma(N+m+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(N-m+\frac{1}{2})} \left(\frac{i}{2}\right)^m \frac{1}{t^{N+m+1/2}}.$$

Weiter ist in (19), wegen $N-l-\frac{3}{2} \leq 0$,

$$\left| \left(1 + \frac{yXi}{2}\right)^{N-l-3/2} \right| \leq 1, \quad \left| \int_0^1 \right| \leq 1,$$

folglich

$$(21) \quad \left| \int_0^\infty e^{-ty} y^{N+l+1/2} dy \right| = \frac{\Gamma(N+l+\frac{3}{2})}{t^{N+l+3/2}}, \\ S_2 = B t^{-N-l-3/2}.$$

Da überdies

$$\operatorname{Re} \left(\exp \left\{ \left(t - \frac{\pi N}{2} - \frac{\pi}{4} \right) i \right\} i^m \right) = \cos \left\{ t + \frac{\pi}{2} (m-N) - \frac{\pi}{4} \right\}$$

ist, so folgt aus (10), (17), (16), (20) und (21)

$$\operatorname{Re} \{ F_N(t) \} = \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2}) \Gamma(N+m+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(N-m+\frac{1}{2}) 2^m} \cdot \frac{\cos \left\{ t + \frac{\pi}{2} (m-N) - \frac{\pi}{4} \right\}}{t^{N+m+1/2}} + \\ + B t^{-N-l-3/2}.$$

Zusammen mit (9) ergibt dies die Behauptung (14) des Hilfssatzes.

§ 2. Summierbare Reihen

In diesem Paragraphen ist $\sigma \geq 0$.

Eine Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=1}^\infty w_n$$

heißt σ -summierbar zur Summe S , wenn

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma} \sum_{n \leq x} w_n (x-n)^\sigma = S$$

ist. S heißt dann die σ -Summe der Reihe (1).

Sind die w_n Funktionen einer Veränderlichen X und strebt die linke Seite von (2) gleichmäßig gegen einen Grenzwert, wenn X einem Intervall $X_1 \leq X \leq X_2$ angehört, so spricht man von gleichmäßiger σ -Summierbarkeit zur Summe S .

Die Reihe (1) heißt σ -summierbar (gleichmäßig σ -summierbar), wenn der Grenzwert (2) vorhanden ist (gleichmäßig vorhanden ist).

Danach ist 0-Summierbarkeit mit Konvergenz, gleichmäßige 0-Summierbarkeit mit gleichmäßiger Konvergenz in einem Intervall gleichbedeutend.

Konvergiert die Reihe (1) gegen S , so drückt man dies gewöhnlich so aus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = S.$$

Diese Bezeichnung wird auch beibehalten, wenn die Reihe links σ -summierbar ist; die Gleichung besagt dann, daß S die σ -Summe der linken Seite ist.

Wir sagen, daß eine in einem Intervall $X_1 < X < X_2$ definierte Funktion $F(X)$ im Punkte X' den Mittelwert annimmt, wenn

$$(3) \quad F(X') = \frac{1}{2} \{F(X'+0) + F(X'-0)\}$$

ist. (Diese Bedingung ist in jedem Stetigkeitspunkt erfüllt.) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ ist im Punkte X' zum Mittelwert σ -summierbar, wenn ihre σ -Summe $F(X)$ der Bedingung (3) genügt.

Man kann dem Kriterium (2) für die σ -Summierbarkeit der Reihe (1) noch eine andere Form geben. Zu diesem Zweck setze man

$$(4) \quad \sum_{n \leq y} w_n = W(y).$$

Dann ist

$$(5) \quad \sum_{n \leq t} w_n (t-n)^{\sigma} = \sigma \int_0^t W(y) (t-y)^{\sigma-1} dy \quad (\sigma > 0).$$

In der Tat ist die rechte Seite von (5) gleich

$$\sigma \int_0^t \sum_{n \leq y} w_n (t-y)^{\sigma-1} dy = \sigma \sum_{n \leq t} w_n \int_n^t (t-y)^{\sigma-1} dy,$$

also gleich der linken.

Ist $f(t)$ für $t > 0$ definiert, in jedem Intervall $0 < t \leq t_1$ beschränkt und über das Intervall im Riemannschen Sinne integrierbar, so werde gesetzt:

$$(6) \quad f(t; \sigma) = \begin{cases} f(t) & \text{für } \sigma = 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t f(y) (t-y)^{\sigma-1} dy & \text{für } \sigma > 0. \end{cases}$$

Die Funktion $f(t)$ heißt σ -limitierbar zum Grenzwert S , wenn

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(\sigma+1) x^{-\sigma} f(x; \sigma) = S$$

ist. Hängt die Funktion $f(t)$ noch von einem Parameter X ab und ist der Grenzwert (7) gleichmäßig in einem Intervall $X_1 \leq X \leq X_2$ vorhan-

den, so spricht man von *gleichmäßiger σ -Limitierbarkeit*. Kommt es nicht auf den Wert von S an, so spricht man einfach von σ -Limitierbarkeit (gleichmäßiger σ -Limitierbarkeit). σ -Limitierbarkeit im Punkte X' zum Mittelwert bedeutet, daß der σ -Grenzwert $S(X)$ im Punkte X' den Mittelwert annimmt.

Aus (4)-(6) folgt (mag σ gleich Null oder positiv sein)

$$(8) \quad \sum_{n \leq t} w_n (t-n)^{\sigma} = \Gamma(\sigma+1) W(t; \sigma).$$

Wegen (2), (7) und (8) kann man das Kriterium für die σ -Summierbarkeit der Reihe (1) so ausdrücken:

Die Reihe (1) heißt σ -summierbar (gleichmäßig σ -summierbar) zur Summe S , wenn die Funktion (4) σ -limitierbar (gleichmäßig σ -limitierbar) zur Grenze S ist.

In diesem Paragraphen sollen alle Eigenschaften der summierbaren Reihen, der limitierbaren Funktionen und der Funktionen (6) entwickelt werden, die in § 4 zur Anwendung kommen.

HILFSSATZ 1.

$$(9) \quad P_k(t; h) = \frac{1}{h!} \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m) (t-m)^h - \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(h + \frac{k}{2} + 1\right)} t^{h+k/2}.$$

Beweis. Nach (6) und der Definition von $P_k(t)$ ist

$$\begin{aligned} P_k(t; h) &= \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^t P_k(y) (t-y)^{h-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^t \left\{ \sum_{0 \leq m \leq y} r_k(m) - \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} y^{k/2} \right\} (t-y)^{h-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(h)} \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m) \int_m^t (t-y)^{h-1} dy - \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(h) \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \int_0^t y^{k/2} (t-y)^{h-1} dy \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich (9), wegen

$$\int_m^t = \frac{1}{h} (t-m)^h, \quad \int_0^t = \frac{\Gamma(h) \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(h + \frac{k}{2} + 1\right)} t^{h+k/2}.$$

HILFSSATZ 2. Für $\sigma \geq 0$, $\tau \geq 0$ ist

$$(10) \quad f(t; \sigma + \tau) = g(t; \tau), \quad \text{wo} \quad g(t) = f(t; \sigma).$$

Beweis. Für $\sigma = 0$ oder $\tau = 0$ ist die Behauptung nach (6) klar. Für $\sigma > 0$, $\tau > 0$ ist

$$\begin{aligned} g(t; \tau) &= \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^t g(y)(t-y)^{\tau-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)} \int_0^t (t-y)^{\tau-1} dy \int_0^y f(z)(y-z)^{\sigma-1} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)} \int_0^t f(z) dz \int_z^t (y-z)^{\sigma-1} (t-y)^{\tau-1} dy. \end{aligned}$$

Führt man statt y eine neue Integrationsveränderliche X durch

$$y-z = (t-z)X$$

ein, so folgt

$$\int_z^t (t-z)^{\sigma+\tau-1} \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)} X^{\sigma-1} (1-X)^{\tau-1} dX = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)}{\Gamma(\sigma+\tau)} (t-z)^{\sigma+\tau-1}.$$

Somit ist

$$g(t; \tau) = \frac{1}{\Gamma(\sigma+\tau)} \int_0^t f(z)(t-z)^{\sigma+\tau-1} dz = f(t; \sigma+\tau).$$

HILFSSATZ 3. Es ist

$$(11) \quad f(t; r) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{r-1}} f(t_r) dt_r.$$

Für $r = 1$ ist dabei $t_0 = t$ zu setzen.

Insbesondere ist

$$(12) \quad f(t; r) = \int_0^t f(y; r-1) dy.$$

Beweis. Für $r = 1$ ist Gleichung (11) nach (6) erfüllt. Der Übergang von r zu $r+1$ wird mit Hilfe von (10) wie folgt ausgeführt: Es ist nach (10) mit $\sigma = r$, $\tau = 1$ und (11) mit g statt f

$$(13) \quad f(t; r+1) = g(t; r) = \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{r-1}} g(t_r) dt_r,$$

wo

$$(14) \quad g(t_r) = f(t_r; 1) = \int_0^{t_r} f(t_{r+1}) dt_{r+1}.$$

Setzt man (14) in (13) ein, so bekommt man (11) mit $r+1$ statt r . Für $r = 1$ ist (12) nach (6) erfüllt. Für $r > 1$ ist nach (11)

$$\int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{r-1}} f(t_r) dt_r = f(t_1; r-1).$$

Setzt man dies in (11) ein, so ergibt sich (12).

HILFSSATZ 4. Es ist

$$(15) \quad \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(t+mR; r) = \int_t^{t+R} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+R} dt_2 \dots \int_{t_{r-1}}^{t_{r-1}+R} f(t_r) dt_r.$$

Für $r = 1$ ist dabei $t_0 = t$ zu setzen.

Beweis. Für $r = 1$ ist die rechte Seite von (15) wegen (12) und (6) gleich

$$\int_t^{t+R} f(y) dy = f(t+R; 1) - f(t; 1),$$

also gleich der linken Seite. Der Übergang von r zu $r+1$ wird folgendermaßen ausgeführt. Man setze

$$I = \int_t^{t+R} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+R} dt_2 \dots \int_{t_r}^{t_r+R} f(t_{r+1}) dt_{r+1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+R} dt_1 \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(t_1+mR; r) \\ &= \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} \int_t^{t+R} f(t_1+mR; r) dt_1. \end{aligned}$$

Hierin ist nach (12)

$$\int_t^{t+R} f(y; r) dy = \int_{t+mR}^{t+(m+1)R} f(y; r) dy = f\{t+(m+1)R; r+1\} - f\{t+mR; r+1\}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} \{f\{t+(m+1)R; r+1\} - f\{t+mR; r+1\}\} \\
 &= \sum_{m=1}^{r+1} (-1)^{r-(m-1)} \binom{r}{m-1} f\{t+mR; r+1\} + \\
 &\quad + \sum_{m=0}^r (-1)^{r-(m-1)} \binom{r}{m} f\{t+mR; r+1\} \\
 &= \sum_{m=0}^{r+1} (-1)^{r+1-m} \binom{r+1}{m} f\{t+mR; r+1\},
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 5. Es sei

$$(16) \quad 0 < X \leq Y \leq h, \quad z = x^{(Y-X)/h},$$

$$(17) \quad f(t) = B(t+1)^X, \quad f(t; h) = B(t+1)^Y.$$

Dann ist für $a = 0, \dots, h$

$$(18) \quad f(x; a) = Bz^a x^X.$$

Beweis. Für $a = 0$ und $a = h$ ist die Abschätzung (18) nach Voraussetzung erfüllt. Es sei also $0 < a < h$.

1) Es sei $Y-X \geq h$. Dann ist $x \leq z$, also nach (11)

$$f(x; a) = Bx^{a-1} \int_0^x |f(y)| dy = Bx^{a+X} = Bz^a x^X.$$

2) Es sei $Y-X < h$. Wir nehmen an, daß

$$(19) \quad f(x; a-1) = Bz^{a-1} x^X$$

ist, und wollen daraus die Richtigkeit von (18) herleiten. Wir setzen $h-a = j$. Nach (10) ist dann

$$f(t; h) = g(t; j), \quad \text{wo} \quad g(t) = f(t; a).$$

Wird also

$$(20) \quad S = \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \binom{j}{m} f(x+mz; h)$$

gesetzt, so ist nach (15)

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \binom{j}{m} g(x+mz; j) \\
 &= \int_x^{x+z} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+z} dt_2 \dots \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+z} g(t_j) dt_j \\
 &= \int_x^{x+z} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+z} dt_2 \dots \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+z} f(t_j; a) dt_j.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Wegen $Y-X < h$ ist $z \leq x$. Also ist in (20) nach (16) und (17)

$$f(x+mz; h) = B(x+mx)^Y = Bx^Y = Bz^h x^X.$$

Somit ist

$$(22) \quad S = Bz^h x^X.$$

In (21) hat man

$$t_j \leq t_{j-1} + z \leq \dots \leq t_1 + (j-1)z \leq x + jz,$$

$$t_j \geq t_{j-1} \geq \dots \geq t_1 \geq x,$$

also

$$x \leq t_j \leq x + jz.$$

In (21) ist demnach, auf Grund von (12), (19) und (16),

$$\begin{aligned}
 f(t_j; a) - f(x; a) &= \int_x^{t_j} f(t; a-1) dt = B \int_x^{x+jz} |f(t; a-1)| dt \\
 &= B \int_x^{x+jz} x^{(Y-X)/h \cdot (a-1) + X} dt = Bz \cdot z^{a-1} x^X, \\
 f(t_j; a) &= f(x; a) + Bz^a x^X.
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_x^{x+z} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+z} dt_2 \dots \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+z} dt_j = z^j.$$

Wegen (21) ist demnach

$$S = \{f(x; a) + Bz^a x^X\} z^j = z^j f(x; a) + Bz^h x^X.$$

In Verbindung mit (22), ergibt dies

$$z^j f(x; a) = Bz^h x^X.$$

Wegen $h-j = a$ ist damit die Abschätzung (18) bewiesen. Da die Abschätzung (19) nach Voraussetzung für $a = 1$ erfüllt ist, so ist der Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 6. Die Funktion $f(t)$ sei σ -limitierbar (gleichmäßig σ -limitierbar) zum Grenzwert S . Dann ist sie für jedes $\tau > \sigma$ auch τ -limitierbar (gleichmäßig τ -limitierbar) zu demselben Grenzwert.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist

$$f(t; \tau) = g(t; \tau - \sigma), \quad \text{wo} \quad g(t) = f(t; \sigma).$$

Hierbei ist nach Voraussetzung für $t \rightarrow \infty$ (gleichmäßig)

$$f(t; \sigma) = \frac{S}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + o(t^\sigma).$$

Wegen (6) ist daher (gleichmäßig)

$$\begin{aligned} f(t; \tau) &= \frac{1}{\Gamma(\tau - \sigma)} \int_{\sigma}^t g(y) (t-y)^{\tau-\sigma-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\tau - \sigma)} \int_0^t f(y; \sigma) (t-y)^{\tau-\sigma-1} dy \\ &= \frac{S}{\Gamma(\sigma+1) \Gamma(\tau - \sigma)} \int_0^t y^\sigma (t-y)^{\tau-\sigma-1} dy + o \int_0^t y^\sigma (t-y)^{\tau-\sigma-1} dy. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\int_0^t y^\sigma (t-y)^{\tau-\sigma-1} dy = \frac{\Gamma(\sigma+1) \Gamma(\tau - \sigma)}{\Gamma(\tau+1)} t^\tau.$$

Also hat man (gleichmäßig)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\tau+1) t^{-\tau} f(t; \tau) = S,$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 7. Eine Reihe sei σ -summierbar (gleichmäßig σ -summierbar) zu der Summe S . Dann ist sie für jedes $\tau > \sigma$ auch τ -summierbar (gleichmäßig τ -summierbar) zu derselben Summe.

Insbesondere ist eine konvergente (gleichmäßig konvergente) Reihe für jedes $\tau > 0$ auch τ -summierbar (gleichmäßig τ -summierbar), zur gleichen Summe.

Beweis. Ist die Reihe (1) σ -summierbar (gleichmäßig) zu der Summe S , so ist die Funktion (4) σ -limitierbar (gleichmäßig) zur Grenze S . Nach Hilfssatz 6 ist $W(y)$ auch τ -limitierbar (gleichmäßig) zu derselben Grenze. Also ist die Reihe (1) τ -summierbar (gleichmäßig) zur Summe S .

HILFSSATZ 8. Die Funktionen $P_n(y)$; $n = 1, 2, \dots$ seien Polynome höchstens l -ten Grades in y . Die Reihe

$$(23) \quad P(y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y)$$

konvergiere in einem Intervall

$$(24) \quad Y \leq y \leq Y_1 \quad (Y < Y_1).$$

Dann ist $P(y)$ ein Polynom höchstens l -ten Grades.

Beweis. Für $l = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $l = r$ und die Behauptung für $r-1$ bewiesen. Dann ist

$$P_n(y) = \sum_{m=0}^r w_{mn} y^m,$$

und im Intervall (24)

$$(25) \quad P(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^r w_{mn} y^m.$$

Es sei y irgendeine Zahl des Intervalls (24), und y_0 werde so gewählt, daß $y_0 \neq 0$ und daß die Zahlen $y, y+y_0, \dots, y+ry_0$ alle dem Intervall (24) angehören. Es bezeichne ferner $\Delta_r f(y)$ die r -te Differenz von $f(y)$ in bezug auf y_0 ($\Delta_1 f(y) = f(y+y_0) - f(y)$). Dann ist nach (23)

$$\Delta_r P(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_r P_n(y), \quad \text{wo} \quad \Delta_r P_n(y) = r! w_{rn} y_0^r.$$

Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_{rn} = z_r,$$

und aus (25) folgt im Intervall (24)

$$P(y) - z_r y^r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{r-1} w_{mn} y^m.$$

Nach der Induktionsannahme ist die rechte Seite ein Polynom höchstens $(r-1)$ -ten Grades in y , und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 9. Die Funktionen $f_n(y)$; $n = 1, 2, \dots$ mögen im Intervall (24) stetige r -te Ableitungen $f_n^{(r)}(y)$ besitzen. In diesem Intervall sei die Reihe

$$(26) \quad F(y) = \sum_{n=1}^r f_n(y)$$

konvergent und die Reihe

$$(27) \quad G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(r)}(y)$$

gleichmäßig konvergent.

Dann ist im Intervall (24)

$$(28) \quad G(y) = F^{(r)}(y).$$

Beweis. Man setze

$$\int_Y^y G(z) dz = G_1(y), \quad \int_Y^y f_n^{(r)}(z) dz = f_{n1}(y).$$

Dann sind die Funktionen

$$f_{n1}(y) = f_n^{(r-1)}(y) - f_n^{(r-1)}(Y)$$

im Intervall (24) stetig, und dort gleichmäßig

$$(29) \quad G_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n1}(y).$$

Mit der Reihe (29) kann man ebenso wie mit der Reihe (27) verfahren. Man bekommt dann, gleichmäßig im Intervall (24),

$$G_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n2}(y),$$

wobei

$$G_2(y) = \int_Y^y G_1(z) dz,$$

$$f_{n2}(y) = \int_Y^y f_{n1}(z) dz = f_n^{(r-2)}(y) - f_n^{(r-2)}(Y) - (y-Y)f_n^{(r-1)}(Y).$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so bekommt man im Intervall (24)

$$G_r(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nr}(y);$$

$$f_{nr}(y) = f_n(y) + P_n(y),$$

wobei $P_n(y)$ ein Polynom höchstens $(r-1)$ -ten Grades ist. Wegen (26) ist daher im Intervall (24)

$$(30) \quad G_r(y) = F(y) + P(y),$$

wobei $P(y)$ nach Hilfssatz 8 ein Polynom höchstens $(r-1)$ -ten Grades ist. Andererseits hat man, nach Definition der Funktionen $G_1(y), \dots, G_r(y)$,

$$G'_1(y) = G(y), \quad \dots, \quad G'_r(y) = G_{r-1}(y),$$

also

$$G_r^{(r)}(y) = G(y).$$

Man bekommt daher (28), wenn man (30) r -mal differenziert.

HILFSSATZ 10. Die Funktionen $f_n(y)$; $n = 1, 2, \dots$ mögen im Intervall (24) stetige r -te Ableitungen haben. In diesem Intervall sei die Reihe (26) σ -summierbar und die Reihe (27) gleichmäßig σ -summierbar.

Dann gilt im Intervall (24) die Beziehung (28).

Beweis. Man setze

$$F_R(y) = \sum_{n \leq R} f_n(y)(R-n)^{\sigma}, \quad G_R(y) = \sum_{n \leq R} f_n^{(r)}(y)(R-n)^{\sigma}.$$

Dann ist

$$(31) \quad G_R(y) = F_R^{(r)}(y).$$

Nach Voraussetzung und der Definition (2) der σ -Summierbarkeit ist im Intervall (24)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\sigma} F_R(y) = F(y)$$

und, gleichmäßig in diesem Intervall,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\sigma} G_R(y) = G(y).$$

Es ist daher

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_{n+1}(y)}{(n+1)^{\sigma}} - \frac{F_n(y)}{n^{\sigma}} \right),$$

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{G_{n+1}(y)}{(n+1)^{\sigma}} - \frac{G_n(y)}{n^{\sigma}} \right),$$

wobei die erste Reihe im Intervall (24) konvergiert, die zweite gleichmäßig konvergiert. Wegen (31) sind also die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 erfüllt, wenn man $f_n(y)$ durch

$$\frac{F_{n+1}(y)}{(n+1)^{\sigma}} - \frac{F_n(y)}{n^{\sigma}}$$

ersetzt.

HILFSSATZ 11. Es bezeichne T ein Intervall der Gestalt $t_1 \leq t \leq t_2$.

1) Die Reihen

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}(t); \quad m = 0, \dots, r$$

seien im Intervall T σ -summierbar. Die Funktionen

$$(33) \quad \varphi_m(t); \quad m = 0, \dots, r$$

seien in T definiert. Es werde

$$(34) \quad F_n(t) = \sum_{m=0}^r \varphi_m(t) f_{nm}(t)$$

gesetzt. Dann ist die Reihe

$$(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

im Intervall T σ -summierbar.

2) Sind die Reihen (32) im Intervall T gleichmäßig σ -summierbar und die Funktionen (33) dort beschränkt, so ist auch die Reihe (35) in diesem Intervall gleichmäßig σ -summierbar.

3) Sind die Reihen (32) im Punkte t' zum Mittelwert σ -summierbar und die Funktionen (33) im Punkte t' stetig, so ist auch die Reihe (35) im Punkte t' zum Mittelwert σ -summierbar.

4) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n0}(t)$ sei im Punkte t' nicht σ -summierbar und es sei $\varphi_0(t') \neq 0$. Die übrigen Reihen (32) seien im Punkte t' σ -summierbar. Dann ist die Reihe (35) im Punkte t' nicht σ -summierbar.

Beweis. 1) Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}(t) = f_m(t),$$

wobei rechts die σ -Summe der linken Seite steht. Dann ist nach der Definition (2) der σ -Summierbarkeit

$$(36) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma} \sum_{n \leq x} f_{nm}(t)(x-n)^{\sigma} = f_m(t),$$

also nach (34)

$$(37) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma} \sum_{n \leq x} F_n(t)(x-n)^{\sigma} = \sum_{m=0}^r \varphi_m(t) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma} \sum_{n \leq x} f_{nm}(t)(x-n)^{\sigma} = \sum_{m=0}^r \varphi_m(t) f_m(t) = F(t).$$

Die Reihe (35) ist daher σ -summierbar zur Summe $F(t)$.

2) Sind die Grenzwerte (36) gleichmäßig in T vorhanden und die Funktionen (33) dort beschränkt, so ist auch der Grenzwert (37) gleichmäßig in T vorhanden.

3) Sind die Reihen (32) im Punkte t' zum Mittelwert σ -summierbar, so nehmen die Funktionen $f_m(t)$ im Punkte t' den Mittelwert an. Wegen der Stetigkeit der Funktionen (33) im Punkte t' nimmt auch die Funktion $F(t)$ im Punkte t' den Mittelwert an, d. h. die Reihe (35) ist im Punkte t' zum Mittelwert σ -summierbar.

4) Es ist

$$\varphi_0(t) f_{n0}(t) = \sum_{m=0}^r \varphi_m^*(t) f_{nm}^*(t),$$

wobei

$$\varphi_m^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0, \\ \varphi_m(t) & \text{für } m > 0; \end{cases} \quad f_{nm}^*(t) = \begin{cases} F_n(t) & \text{für } m = 0, \\ -f_{nm}(t) & \text{für } m > 0. \end{cases}$$

Ist daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t')$ σ -summierbar, so zeigt man, wie beim Beweise der ersten Behauptung, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(t') f_{n0}(t')$$

σ -summierbar ist. Wegen $\varphi_0(t') \neq 0$ müßte dann nach (2) auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n0}(t')$ σ -summierbar sein, gegen die Voraussetzung.

§ 3. Landausche Formeln

HILFSSATZ 1. Für $l = [k/2]$ ist

$$(1) \quad \frac{1}{l!} \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m)(t-m)^l = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(l+k/2+1)} t^{l+k/2} + \\ + \pi^{-l} t^{l/2+k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-l/2-k/4} J_{l+k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\},$$

wobei die Reihe rechts in jedem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Es sei $z = X + Yi$, $X > 0$. Ferner sei $\vartheta(z)$ die Funktion (1.4.4). Dann gilt (1.4.4'). Setzt man daher

$$(2) \quad \vartheta^k(z) - 1 = \Theta(z),$$

so ist

$$(3) \quad \Theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e^{-\pi n z}.$$

Die linke Seite von (1) werde zur Abkürzung mit S bezeichnet, d. h. es werde

$$(4) \quad S = \frac{1}{l!} \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m) (t-m)^l$$

gesetzt.

Nach (3) ist

$$(5) \quad \begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-1} \Theta(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-1} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e^{-\pi n z} dz. \end{aligned}$$

Hier kann gliedweise integriert werden, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r_k(n) e^{-\pi n z}| = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e^{-\pi n} = B,$$

$$|e^{\pi i z} z^{-l-1}| = e^{\pi t} (1+Y^2)^{-(l+1)/2},$$

und das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+Y^2)^{-(l+1)/2} dY$$

konvergiert. Daher ist

$$(6) \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi(t-n)z} z^{-l-1} dz.$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir die Formel

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yz} z^{-l-1} dz = \begin{cases} \frac{y^l}{l!} & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (7) ergibt sich aus (9.1.21). Um die zweite nachzuprüfen, wende man den Cauchyschen Satz auf den geschlossenen Integrationsweg an, der aus der Strecke $X = 1$, $-R \leq Y \leq R$ und dem auf dieser Strecke als Durchmesser nach rechts beschriebenen Halbkreis besteht. Über diesen Weg ist das Integral gleich Null. Andererseits strebt für $R \rightarrow \infty$ das Integral über den Halbkreis gegen Null. Daher ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1-Ri}^{1+Ri} = 0,$$

was zu beweisen war.

Aus (6), (7) und (4) folgt

$$(8) \quad I = \frac{\pi^l}{l!} \sum_{n \leq t} r_k(n) (t-n)^l = \pi^l S - \frac{\pi^l}{l!} t^l.$$

Weiter ist nach Hilfssatz 1.4.1, wo $y = 0$ zu nehmen ist, und (1.4.4), (1.1), (1.2) (siehe auch (4.2.1)-(4.2.2)) und (2)

$$\vartheta(z) = z^{-1/2} \vartheta\left(\frac{1}{z}\right), \quad \psi^k(z) = z^{-k/2} \vartheta^k\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\Theta(z) = -1 + z^{-k/2} \left\{ 1 + \Theta\left(\frac{1}{z}\right) \right\} = -1 + z^{-k/2} + z^{-k/2} \Theta\left(\frac{1}{z}\right).$$

Setzt man dies in (5) ein, so folgt wegen (8), (1.2) und (9.1.21)

$$(9) \quad \begin{aligned} \pi^l S &= \frac{\pi^l}{l!} t^l + \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-1} dz + \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-k/2-1} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-k/2-1} \Theta\left(\frac{1}{z}\right) dz \right\} \\ &= \frac{\pi^{l+k/2}}{\Gamma(l+k/2+1)} t^{l+k/2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi i z} z^{-l-k/2-1} \Theta\left(\frac{1}{z}\right) dz. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt nachweisen, daß die Reihe

$$(10) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^s}$$

für $s > k/2$ konvergiert. In der Tat ist nach Hilfssatz 1.3.3 und der Definition von $A_k(t)$

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^M \frac{r_k(m)}{m^s} &= \sum_{m=0}^M A_k(m) \left(\frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s} \right) + \frac{A_k(M)}{(M+1)^s} \\ &= s \sum_{m=0}^M A_k(m) \int_m^{m+1} \frac{dy}{y^{s+1}} + \frac{A_k(M)}{(M+1)^s} \\ &= s \int_0^{M+1} \frac{A_k(y)}{y^{s+1}} dy + \frac{A_k(M)}{(M+1)^s}. \end{aligned}$$

Weiter ist nach Satz 2.1.1 (der auch für $k = 2$ und $k = 3$ gilt)

$$(12) \quad A_k(x) = Bx^{k/2}.$$

Hiernach strebt das Integral (11) bei festem $s > k/2$ gegen einen Grenzwert, sobald M unbeschränkt wächst, während das zweite Glied in (11) dabei gegen Null rückt. Daher konvergiert die Reihe (10) für $s > k/2$. Da aber $l > k/2$, so ist $l/2 + k/4 > k/2$, d. h. es konvergiert die Reihe

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-l/2-k/4}.$$

Es war $\operatorname{Re}(z) > 0$, also auch $\operatorname{Re}(1/z) > 0$. Aus (3) ergibt sich daher

$$\theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \exp\left(-\frac{\pi n}{z}\right),$$

folglich

$$(14) \quad e^{\pi t z} z^{-l-k/2-1} \theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e^{\pi t z} z^{-l-k/2-1} \exp\left(-\frac{\pi n}{z}\right).$$

Wir zeigen jetzt, daß man die Reihe rechts gliedweise von $1-\infty i$ bis $1+\infty i$ integrieren kann. Wegen $|e^{\pi t z}| = e^{\pi t}$ reicht es hin, die Konvergenz der Reihe

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \int_{-\infty}^{\infty} |z|^{-l-k/2-1} \exp\left(-\pi n \operatorname{Re} \frac{1}{z}\right) dY \\ = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \int_{-\infty}^{\infty} (1+Y^2)^{-l/2-k/4-1/2} \exp\left(-\frac{\pi n}{1+Y^2}\right) dY$$

nachzuweisen. Hier ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 2 \int_0^{\infty} \leq 2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n}{1+Y^2}\right) dY + 2 \int_1^{\infty} Y^{-l-k/2-1} \exp\left(-\frac{\pi n}{Y^2+Y^2}\right) dY \\ = 2 \exp\left(-\frac{\pi n}{2}\right) + 2n^{-l/2-k/4} \int_{n^{-1/2}}^{\infty} y^{-l-k/2-1} \exp\left(-\frac{\pi}{2y^2}\right) dy \\ = Bn^{-l/2-k/4}.$$

Die Konvergenz der Reihe (15) folgt daher aus der Konvergenz der Reihe (13).

Integriert man die Reihe (14) gliedweise von $1-\infty i$ bis $1+\infty i$, so folgt, auf Grund von (1.7),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{\pi t z} z^{-l-k/2-1} \theta\left(\frac{1}{z}\right) dz \\ = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \exp\left\{\pi\left(tz - \frac{n}{z}\right)\right\} z^{-l-k/2-1} dz \\ (16) \quad = i^{l/2+k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-l/2-k/4} J_{l+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Aus (4), (9) und (16) folgt (1). Die absolute und gleichmäßige Konvergenz der n -Reihe in jedem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ ergibt sich aus der Konvergenz der Reihe (13) und der für $n \geq t_1^{-1}$ nach Hilfssatz 1.6 gültigen Abschätzung

$$J_{l+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\} = B(n t_1)^{-1/4} = B.$$

HILFSSATZ 2.

$$(17) \quad \frac{1}{h!} \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m) (t-m)^h = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(h + \frac{k}{2} + 1\right)} t^{h+k/2} + \\ + \pi^{-h} t^{h/2+k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4} J_{h+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\},$$

wobei die n -Reihe in jedem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Für ungerades k läuft Hilfssatz 2 auf Hilfssatz 1 hinaus, da

$$l = \left[\frac{k}{2}\right] + 1 = \frac{k+1}{2} = h.$$

Es sei also k gerade. Dann ist

$$(18) \quad l = \frac{k}{2} + 1 = h+1,$$

und daher nach Hilfssatz 1.2, mit $r = 1$, $N = l+k/2-1$,

$$\frac{d}{dt} (t^{l/2+k/4} J_{l+k/2}(2t^{1/2})) = t^{(l-1)/2+k/4} J_{l-1+k/2}(2t^{1/2}) = t^{h/2+k/4} J_{h+k/2}(2t^{1/2}),$$

folglich

$$(19) \quad \frac{d}{dt} (t^{l/2+k/4} J_{l+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\}) = \pi n^{1/2} t^{h/2+k/4} J_{h+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Auf Grund von (18) und (19), ergibt sich (17) aus (1), wenn man beide Seiten einmal nach t differenziert, und zwar rechts gliedweise. Die Zulässigkeit dieses Verfahrens folgt aus der auf die n -Reihe bezugnehmenden Behauptung des Hilfssatzes. Diese Reihe konvergiert tatsächlich in jedem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ absolut und gleichmäßig, da für $n \geq t_1^{-1}$ nach Hilfssatz 1.6

$$J_{h+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\} = B(nt_1)^{-1/4}$$

ist, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/2-1/4}$$

konvergiert, weil die Reihe (10) für $s > k/2$ konvergiert.

§ 4. Entwicklung der Funktion $P_k(t)$ in eine Reihe nach Besselschen Funktionen

In diesem Paragraphen wenden wir die folgenden Bezeichnungen an:

T ist ein Intervall der Gestalt $t_1 \leq t \leq t_2$.

t^* ist eine natürliche Zahl $t = n$, wofür $r_k(n) \neq 0$ ist.

T_0 ist ein Intervall der Gestalt $t_1 \leq t \leq t_2$, dem keine Zahl t^* angehört.

O ohne Indizes bezeichnet unterschiedslos Zahlen, die ihrem absoluten Betrage nach unterhalb von Schranken liegen, die nur von k , t_1 und t_2 abhängen dürfen.

Das o -Zeichen bezieht sich auf $Y \rightarrow \infty$ und gilt gleichmäßig in einem Intervall T_0 oder in einem Intervall T .

F, G, J sind Funktionen von t , die für alle $t > 0$ definiert sind und außerdem folgenden Bedingungen genügen:

Die F sind für alle t stetig.

Die G sind für alle $t \neq t^*$ stetig, für $t = t^*$ gleich dem Mittelwert.

Die J sind von Null verschieden und gleich C in einem Intervall T .

Wie üblich setzen wir ferner

$$(1) \quad \text{sign } y = \begin{cases} 1 & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y = 0, \\ -1 & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Aus Hilfssatz 1.2.6 geht hervor, daß sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten darstellen läßt, also auch als Summe von mehr als vier Quadraten. Daher ist $r_k(n) > 0$ für $k \geq 4$. Ist also $k \geq 4$,

so ist jede natürliche Zahl ein t^* , und T_0 bedeutet dann jedes abgeschlossene Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$, dem keine ganze Zahl angehört.

Das Hauptziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 1. Es ist

$$(2) \quad \frac{1}{2}\{P_k(t+0) + P_k(t-0)\} = t^{k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\},$$

wobei die Reihe rechts das folgende Verhalten zeigt:

1) Für $k = 2$ ist sie konvergent, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 .

2) Für $k > 2$, $\sigma > (k-3)/2$ ist sie σ -summierbar, und zwar bei festem σ gleichmäßig in einem Intervall T_0 .

3) Für $k > 2$, $0 \leq \sigma \leq (k-3)/2$ ist sie bei keinem t σ -summierbar.

Im Falle 2) ist die Gleichung (2) nach § 2 so zu verstehen, daß links die σ -Summe der rechten Seite steht.

Es sei t nicht ganz. Wir wollen die Gleichung (3.17) h -mal nach t differenzieren, und zwar die Reihe rechts gliedweise. Links ergibt sich dann

$$(3) \quad \sum_{0 \leq m \leq t} r_k(m) = A_k(t).$$

Um die Differentiationen rechts auszuführen, wende man die Formel (1.6) mit $r = h$, $N = k/2$ an. Man hat dann

$$\frac{d^h}{dt^h} (t^{h/2+k/4} J_{h+k/2}(2t^{1/2})) = t^{k/4} J_{k/2}(2t^{1/2}).$$

Ist die Funktion $f(t)$ h -mal differenzierbar, so gilt

$$\frac{d^h}{dt^h} f(st) = s^h f^{(h)}(st).$$

Wendet man dies mit

$$f(t) = t^{h/2+k/4} J_{h+k/2}(2t^{1/2}), \quad s = \pi^2 n$$

an, so folgt

$$\frac{d^h}{dt^h} (\pi^{h+k/2} n^{h/2+k/4} t^{h/2+k/4} J_{h+k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\}) = (\pi^2 n)^h (\pi^2 nt)^{k/4} J_{k/2}\{2\pi(nt)^{1/2}\},$$

d. h.

$$\frac{\partial^h}{\partial t^h} \left(t^{h/2+k/4} J_{h+k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\} \right) = \pi^h n^{h/2} t^{k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Somit ergibt die h -malige gliedweise Differentiation der rechten Seite von (3.17)

$$\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} t^{k/2} + t^{k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Setzt man dies dem Ausdruck (3) gleich, so ergibt sich formal

$$(4) \quad P_k(t) = t^{k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

(4) ist die Identität (2) für nichtganzes t . Auf Grund der Hilfssätze 2.7 und 2.10, wird daher Satz 1 bewiesen sein, wenn wir folgenden Satz 2 beweisen:

SATZ 2. Die in (2) auftretende Reihe ist:

- 1) Für $k=2$ konvergent, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 .
- 2) Für $k=2$, $t=t^*$ zum Mittelwert konvergent.
- 3) Für $k>2$, $\sigma > (k-3)/2$ σ -summierbar, und zwar bei festem σ gleichmäßig in einem Intervall T_0 .
- 4) Für $k>2$, $\sigma > (k-3)/2$, $t=t^*$ zum Mittelwert σ -summierbar.
- 5) Für $k>2$, $0 \leq \sigma \leq (k-3)/2$ bei keinem t σ -summierbar.

Der Beweis von Satz 2 erfolgt in mehreren Einzelschritten (Hilfssätzen).

HILFSSATZ 1. Es ist

$$(5) \quad J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\} = \pi^{-1}(nt)^{-1/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi\} + \\ + (nt)^{-1/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2}\} \{X_1(nt)^{-1/2} + \dots + X_{h-1}(nt)^{-(h-1)/2}\} + \\ + (nt)^{-1/4} \sin \{2\pi(nt)^{1/2}\} \{Y_1(nt)^{-1/2} + \dots + Y_{h-1}(nt)^{-(h-1)/2}\} + \varrho_k(n, t).$$

Hierbei hängen die Zahlen $X_1, \dots, X_{h-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}$ nur von ihrem Index und von k ab. $\varrho_k(n, t)$ ist bei festem n eine stetige Funktion von t und

$$(6) \quad \varrho_k(n, t) = B(nt)^{-h/2-1/4}.$$

(Für $k=2$ ist $h=1$; das zweite und dritte Glied rechts in (5) fallen dann weg.)

Beweis. Aus Hilfssatz 1.6 mit $N=k/2$, $l=h-1$ und $2\pi(nt)^{1/2}$ statt t folgt

$$J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\} = \left(\frac{2}{\pi \cdot 2\pi(nt)^{1/2}} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{h-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+m+\frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\frac{k}{2}-m+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \frac{\cos \left\{ 2\pi(nt)^{1/2} + \frac{\pi}{2} \left(m - \frac{k}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right\}}{(2 \cdot 2\pi(nt)^{1/2})^m} + B(nt)^{-h/2-1/4}.$$

Sondert man hier das Glied $m=0$ aus, so ergeben sich (5) und (6). Die linke Seite von (5) ist nach (1.4) eine stetige Funktion von t . Die ersten drei Glieder rechts sind ebenfalls stetige Funktionen von t . Somit ist auch die Funktion $\varrho_k(n, t)$ in t stetig.

HILFSSATZ 2. Die Reihe

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4} \varrho_k(n, t)$$

konvergiert in jedem Intervall T absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von t .

Beweis. Wegen

$$(8) \quad \frac{h}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{k+1}{4}$$

ist nach (6)

$$n^{-k/4} \varrho_k(n, t) = B n^{-k/2-1/4} t_1^{-(k+1)/4}.$$

Andererseits konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/2-1/4},$$

weil die Reihe (3.10) für $s > k/2$ konvergiert. Da jedes Glied der Reihe (7) eine stetige Funktion von t ist, so ist auch die Summe in t stetig.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(9) \quad -\frac{1}{4}(k+2h+1)\pi = w.$$

HILFSSATZ 3. Für $y \geq 1$ ist

$$(10) \quad P_k(y; h) = \pi^{-h-1} y^{h/2+k/4-1/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4} \cos \{2\pi(ny)^{1/2} + w\} + \\ + B y^{h/2+k/4-3/4},$$

$$(11) \quad P_k(y; h) = B y^{h/2+k/4-1/4}.$$

Beweis. Nach den Hilfssätzen 2.1 und 3.2 ist

$$(12) \quad P_k(t; h) = \pi^{-h/2+k/4} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4} J_{h+k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\},$$

wobei die Reihe rechts auf jeder Strecke T absolut und gleichmäßig konvergiert. Nach (1.14) ist für $N \leq 2k$, $t \geq 1$

$$J_N(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{\pi N}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + Bt^{-3/2}.$$

Wegen (9) ist also

$$(13) \quad J_{h+k/2} \{2\pi(ny)^{1/2}\} = \pi^{-1} \cos \{2\pi(ny)^{1/2} + w\} (ny)^{-1/4} + B(ny)^{-3/4}.$$

Die Reihen

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-3/4}$$

konvergieren wegen (8), da die Reihe (3.10) für $s > k/2$ konvergiert. Daher ergeben sich (10) und (11) aus (12) und (13).

Wir führen jetzt die Funktion

$$(15) \quad g_0(t) = t^{-k/4-1/4} \cos \{2\pi t^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi\}$$

ein.

HILFSSATZ 4. Das Integral

$$(16) \quad \int_1^{\infty} P_k(y; h) g_0^{(h+1)}(ty) dy$$

konvergiert für jedes t , und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , gegen eine stetige Funktion, zum Mittelwert für $t = t^*$.

Beweis. Es sei $y \geq 1$, t gehöre einem Intervall T an. Wir differenzieren die Funktion (15) $(h+1)$ -mal und ersetzen dann t durch ty . Es ergibt sich, wenn θ_k eine geeignete, nur von k abhängige Zahl ist,

$$(17) \quad \ell_0^{(h+1)}(ty) = \theta_k (ty)^{-k/4-(h+1)/2-1/4} \cos \{2\pi(ty)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+2h+3)\pi\} + Cy^{-k/4-(h+1)/2-3/4}.$$

Da die erste Reihe (14) konvergiert, so ist nach (10), (17) und (9) der Integrand von (16) gleich

$$(18) \quad \pi^{-h-1} \theta_k t^{-h/2-k/4-3/4} y^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4} \cos \{2\pi(ny)^{1/2} + w\} \times \\ \times \cos \left\{2\pi(ty)^{1/2} + w - \frac{\pi}{2}\right\} + Cy^{-3/2}.$$

Es sei $Y > 1$. Nach (2.9) und (15) ist der Integrand von (16) im Rechteck

$$(19) \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad 1 \leq y \leq Y$$

stetig. Das Hauptglied in (18) ist, da die erste Reihe (14) konvergiert, auch im Rechteck (19) stetig. Also hat die Funktion C in (18) dieselbe Eigenschaft. Das Integral

$$\int_1^{\infty} Cy^{-3/2} dy$$

konvergiert daher in T absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von t . Es genügt mithin, die Behauptungen des Hilfssatzes für das Integral

$$(20) \quad \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4} \cos \{2\pi(ny)^{1/2} + w\} \sin \{2\pi(ty)^{1/2} + w\} \frac{dy}{y},$$

statt für das Integral (16) zu beweisen.

Die Summe in (20) konvergiert absolut und gleichmäßig im Intervall $1 \leq y \leq Y$, da die erste Reihe (14) konvergiert. Also ist

$$(21) \quad \int_1^Y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-h/2-k/4-1/4} \int_1^Y \cos \{2\pi(ny)^{1/2} + w\} \sin \{2\pi(ty)^{1/2} + w\} \frac{dy}{y}.$$

Hier ist wegen (1)

$$\begin{aligned} & \int_1^Y \cos \{ \} \sin \{ \} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^Y \sin (2\pi(t^{1/2} + n^{1/2})y^{1/2} + 2w) \frac{dy}{y} + \frac{1}{2} \int_1^Y \sin (2\pi(t^{1/2} - n^{1/2})y^{1/2}) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t^{1/2}+n^{1/2})^2}^{(t^{1/2}+n^{1/2})^2 Y} \sin (2\pi X^{1/2} + 2w) \frac{dX}{X} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(t-n) \int_{(t^{1/2}-n^{1/2})^2}^{(t^{1/2}-n^{1/2})^2 Y} \sin (2\pi X^{1/2}) \frac{dX}{X} \\ (22) \quad &= \int_{(t^{1/2}+n^{1/2})^2}^{(t^{1/2}+n^{1/2})^2 Y^{1/2}} \sin (2\pi X + 2w) \frac{dX}{X} + \operatorname{sign}(t-n) \int_{(t^{1/2}-n^{1/2})^2}^{(t^{1/2}-n^{1/2})^2 Y^{1/2}} \sin (2\pi X) \frac{dX}{X}. \end{aligned}$$

Die Integrale

$$\int_1^{\infty} \sin(2\pi X + 2w) \frac{dX}{X} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \sin(2\pi X) \frac{dX}{X}$$

konvergieren. Daher zeigt (22), daß die Integrale rechts in (21) gleichmäßig für $n > 0$, $t > 0$, $Y > 1$ beschränkt sind. Also konvergiert die Summe rechts in (21) absolut und gleichmäßig für $t > 0$, $Y > 1$.

In der Reihe (21) können diejenigen Glieder weggelassen werden, für die $r_k(n) = 0$ ist. Es genügt daher zu zeigen, daß der Ausdruck (22) bei festem $n = t^*$, wenn $Y \rightarrow \infty$,

1) in einem Intervall T_0 gleichmäßig gegen eine stetige Funktion strebt;

2) für $t = t^*$ gegen den Mittelwert strebt.

Beide Eigenschaften sind für das erste Integral (22) klar, da dieses gleichmäßig für alle $t > 0$, $n > 0$ konvergiert.

Gehört t einem Intervall T_0 an, so ist

$$|t - n| = |t - t^*| \geq t_3,$$

wo t_3 die kleinste Entfernung eines der Punkte t_1, t_2 von t^* bezeichnet. Daher ist

$$|t^{1/2} - n^{1/2}| = \frac{|t - n|}{t^{1/2} + n^{1/2}} \geq t_4,$$

wo t_4 nur von t_1, t_2 und t^* abhängt. Mithin hat das zweite Integral (22) auch die Eigenschaft 1).

Für $t = n = t^*$ ist das zweite Glied in (22) gleich Null. Der Mittelwert an dieser Stelle ist auch gleich Null, wegen

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi X}{X} dX - \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi X}{X} dX \right\} = 0.$$

Also erfüllt der zweite Summand in (22) auch die Bedingung 2).

HILFSSATZ 5. Ist $f'(y)$ für $y \geq 1$ stetig, so ist für $Y \geq 1$

$$(23) \quad \sum_{n \leq Y} r_k(n) f(n) = P_k(Y) f(Y) - \int_1^Y P_k(y) f'(y) dy + \int_1^Y V'_k(y) f(y) dy + \{V_k(1) - 1\} f(1).$$

Beweis. Es sei

$$S = \int_1^Y \{A_k(y) - 1\} f'(y) dy.$$

Dann ist einerseits

$$S = \int_1^Y A_k(y) f'(y) dy - \int_1^Y f'(y) dy = \int_1^Y A_k(y) f'(y) dy + f(1) - f(Y),$$

andererseits

$$S = \int_1^Y f'(y) \sum_{n \leq y} r_k(n) dy = \sum_{n \leq Y} r_k(n) \int_n^Y f'(y) dy = \sum_{n \leq Y} r_k(n) \{f(Y) - f(n)\} = f(Y) \{A_k(Y) - 1\} - \sum_{n \leq Y} r_k(n) f(n).$$

Somit ist

$$\sum_{n \leq Y} r_k(n) f(n) = A_k(Y) f(Y) - \int_1^Y A_k(y) f'(y) dy - f(1) = P_k(Y) f(Y) + V_k(Y) f(Y) - \int_1^Y P_k(y) f'(y) dy - \int_1^Y V_k(y) f'(y) dy - f(1).$$

Hierin hat man

$$\int_1^Y V_k(y) f'(y) dy = \{V_k(y) f(y)\}_1^Y - \int_1^Y V'_k(y) f(y) dy.$$

Wird dies eingetragen, so ergibt sich die Behauptung (23) des Hilfssatzes.

HILFSSATZ 6. Die Reihe

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) n^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi (nt)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\}$$

konvergiert für jedes t , und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t = t^*$.

Beweis. Zunächst ist

$$V_2(t) = \pi t, \quad V'_2(t) = \pi.$$

Ferner ist nach (15) für $k = 2$, $y > 0$

$$(25) \quad f(y) = g_0(ty) = (ty)^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\}$$

und nach Satz 2.1.1, der auch für $k = 2$ gilt,

$$P_2(x) = Bx^{1/2}.$$

Wir wenden jetzt Hilfssatz 5 mit der Funktion (25) und $k = 2$ an. Dann ist zunächst

$$(26) \quad t^{-3/4} \sum_{n \leq Y} r_2(n) n^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi (nt)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\} \\ = P_2(Y) f(Y) - \int_1^Y P_2(y) f'(y) dy + \int_1^Y V_2'(y) f(y) dy + \{V_2(1) - 1\} f(1).$$

Hierin ist, wenn t in einem Intervall T liegt,

$$P_2(Y) f(Y) = OY^{-1/4}.$$

Das Integral

$$\int_1^Y V_2'(y) f(y) dy = \pi t^{-3/4} \int_1^Y \cos \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\} y^{-3/4} dy \\ = 2\pi t^{-3/4} \int_1^{Y^{1/2}} \cos \left\{ 2\pi t^{1/2} y - \frac{3\pi}{4} \right\} y^{-1/2} dy$$

konvergiert für $Y \rightarrow \infty$, und zwar gleichmäßig in T , gegen eine stetige Funktion von t . Nach (2.12) und (2.6) ist

$$\int_0^t P_2(y) dy = P_2(t; 1).$$

Also ergibt partielle Summation

$$(27) \quad \int_1^Y P_2(y) f'(y) dy = P_2(Y; 1) f'(Y) - P_2(1; 1) f'(1) - \int_1^Y P_2(y; 1) f''(y) dy.$$

Nach (11), mit $k = 2$, $h = 1$, und (25) ist in T

$$P_2(Y; 1) f'(Y) = OY^{3/4-5/4} = OY^{-1/2}.$$

Das zweite Glied rechts in (27) ist von Y unabhängig und eine stetige Funktion von t . Dasselbe gilt vom vierten Glied rechts in (26). Das Integral rechts in (27) konvergiert, nach Hilfssatz 4 und (25), bei wachsendem Y , und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t = t^*$.

Aus dem Bisherigen folgt, daß die rechte Seite von (26) die im Hilfssatz genannten Eigenschaften hat, d. h. bei unbeschränkt wachsendem Y für jedes t gegen einen Grenzwert strebt, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für t^* . Daher besitzt auch die linke Seite diese beiden Eigenschaften. Da der Faktor $t^{-3/4}$ nicht stört, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Von jetzt ab sei $k \geq 3$, also $h \geq 2$. Wir führen die Funktionen

$$(28) \quad g_j(t) = t^{-k/4-1/4-j/2} \frac{\cos}{\sin} (2\pi t^{1/2}) \quad (j = 1, \dots, h-1)$$

ein.

HILFSSATZ 7. Es sei $0 \leq m \leq h-1$, $0 \leq l \leq h+1$, $m+l > 0$, $Y \geq 0$,

$$(29) \quad I_l = \int_1^{Y+1} P_k(y; h) g_m^{(h+1-l)}(ty) dy.$$

Dann strebt das Integral I_0 bei wachsendem Y , gleichmäßig in einem Intervall T , gegen eine stetige Funktion $f_m(t)$. Weiter ist dort

$$(30) \quad I_l = O(Y+1)^{l/2} \quad \text{für} \quad l > 0.$$

Beweis. In einem Intervall T ist nach (11), (15) und (28) der Integrand von (29) gleich

$$Oy^{h/2+k/4-1/4-k/4-1/4-m/2-(h+1-l)/2} = Oy^{l/2-m/2-1}.$$

Im Falle $l = 0$ ist $m > 0$, also das Integral $\int_1^\infty$ gleichmäßig in T gegen eine stetige Funktion konvergent. Im Falle $l > 0$ ist (30) erfüllt.

HILFSSATZ 8. Es sei

$$(31) \quad N = N_k = \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{für } k = 3, \\ \frac{9}{8} & \text{für } k = 4, \\ \frac{k-1}{2} & \text{für } k \geq 5. \end{cases}$$

Dann ist

$$(32) \quad P_k(x) = Bx^N.$$

Beweis. Die Formeln (2.4.1) und (2.4.9), wo $z = x^{1/2}$, sind für $k \geq 4$ bewiesen worden; der Beweis gilt aber auch für $k = 2$. Man hat daher

$$A_3(x) = \sum_{-x < m < x} A_2(x-m^2) + B = \sum_{-x < m < x} P_2(x-m^2) + \pi \sum_{-x < m < x} (x-m^2) + B$$

$$= \sum_{-x < m < x} P_2(x-m^2) + \frac{4\pi}{3} x^{3/2} + Bx^{1/2},$$

$$P_3(x) = \sum_{-x < m < x} P_2(x-m^2) + Bx^{1/2}.$$

Von hier aus ergibt sich die erste Zeile von (31), wenn man die Abschätzung

$$P_2(x) = Bx^{1/3} \log x = Bx^{3/8}$$

(vgl. Winogradow [4], Aufgabe 6,a zu Kapitel III) benutzt.

Die gewünschten Abschätzungen für $P_k(x)$ und $P_k(x)$, $k \geq 5$ ergeben sich aus (2.2.4) und (2.1.1).

HILFSSATZ 9. Für $0 \leq l \leq h$ ist

$$(33) \quad P_k(x; h-l) = Bx^\theta,$$

wobei

$$(34) \quad \theta = \theta_k = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{5l}{16} & \text{für } k=3, \\ \frac{7}{4} - \frac{5l}{16} & \text{für } k=4, \\ \frac{k}{2} - \frac{l}{k+1} & \text{für ungerade } k \geq 5, \\ \frac{k}{2} - \frac{l}{2k} - \frac{1}{4} & \text{für gerade } k \geq 6. \end{cases}$$

Beweis. Wir wollen zeigen, daß die Bedingungen von Hilfssatz 2.5 für

$$(35) \quad f(t) = P_k(t), \quad X = N, \quad Y = \frac{h}{2} + \frac{k}{4} - \frac{1}{4}$$

erfüllt sind, wobei N nach (31) gegeben ist.

Die Ungleichung (2.16) lautet wegen (35)

$$0 < N \leq \frac{h}{2} + \frac{k}{4} - \frac{1}{4} \leq k.$$

Sie ist nach (31) erfüllt; denn je nachdem $k=3$, $k=4$, $k \geq 5$ ungerade, oder $k \geq 6$ gerade ist, lautet sie

$$0 < \frac{7}{8} \leq \frac{3}{2} \leq 3, \quad 0 < \frac{9}{8} \leq \frac{7}{4} \leq 4, \quad 0 < \frac{k-1}{2} \leq \frac{k}{2} \leq k,$$

$$0 < \frac{k-1}{2} \leq \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \leq k.$$

Die Bedingungen (2.17) sind für die in (35) angegebenen Werte von X und Y nach (32) und (11) erfüllt. Man kann also Hilfssatz 2.5 anwenden und bekommt für $0 \leq m \leq h$

$$P_k(x; m) = Bx^{X+m(Y-X)/h}.$$

Für $0 \leq l \leq h$ gilt somit die Abschätzung (33), wobei

$$(36) \quad \theta = X + \frac{h-l}{h} (Y-X) = Y - \frac{l}{h} (Y-X)$$

ist. Wir haben noch zu zeigen, daß dieses θ mit dem durch (34) definierten übereinstimmt. In der Tat folgt aus (35) und (31):

$$\text{Für } k=3 \text{ ist } h=2, X=\frac{7}{8}, Y=\frac{3}{8}.$$

$$\text{Für } k=4 \text{ ist } h=2, X=\frac{9}{8}, Y=\frac{7}{4}.$$

$$\text{Für ungerade } k \geq 5 \text{ ist } h=(k+1)/2, X=(k-1)/2, Y=k/2.$$

$$\text{Für gerade } k \geq 6 \text{ ist } h=k/2, X=(k-1)/2, Y=k/2 - \frac{1}{4}.$$

Setzt man diese Werte in (36) ein, so ergeben sich die in (34) angegebenen Werte von θ .

HILFSSATZ 10. Für $0 \leq m \leq h-1$, $0 \leq l \leq 2$ ist in einem Intervall T

$$(37) \quad P_k(x; h-l) g_m^{(2-l)}(tx) = Cx^{h-2-1/8}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 9, (15) und (28) ist in T die linke Seite von (37) gleich Cx^R , wobei

$$R = \theta - \frac{k+1}{4} - \frac{2-l}{2} = \theta + \frac{l}{2} - \frac{k+5}{4}.$$

Zusammen mit (34) ergibt dies:

Für $k=3$ und 4 ist

$$R = 3l/16 - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}, \quad h-2=0, \quad R-(h-2) \leq -\frac{1}{8}.$$

Für ungerade $k \geq 5$ ist

$$R = \frac{k-5}{4} + \frac{l(k-1)}{2(k+1)} \leq \frac{k-5}{4} + \frac{k-1}{k+1}, \quad h-2 = \frac{k-3}{2},$$

$$R-(h-2) \leq (k-1) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{4} \right) \leq 4 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) \leq -\frac{1}{8}.$$

Für gerade $k \geq 6$ ist

$$R = \frac{k}{4} + \frac{l(k-1)}{2k} - \frac{3}{2} \leq \frac{k}{4} + \frac{k-1}{k} - \frac{3}{2}, \quad h-2 = \frac{k}{2} - 2,$$

$$R-(h-2) \leq -\frac{k}{4} - \frac{1}{k} + \frac{3}{2} \leq -\frac{6}{4} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \leq -\frac{1}{8}.$$

In allen Fällen ist die Abschätzung (37) erfüllt.

HILFSSATZ 11. Es sei $0 \leq m \leq h-1$, $Y \geq 0$,

$$(38) \quad \Phi_m(Y) = P_k(Y+1) g_m \{ t(Y+1) \} - t \int_1^{Y+1} P_k(y) g'_m(ty) dy.$$

Dann ist

$$(39) \quad \Phi_m(Y; h-2) = \begin{cases} GY^{h-2} + o(Y^{h-2}) & \text{für } m=0, \text{ gleichmäßig in einem Intervall } T_0, \\ FY^{h-2} + o(Y^{h-2}) & \text{für } m>0, \text{ gleichmäßig in einem Intervall } T. \end{cases}$$

(Die Zeichen F, G, J sind zu Anfang des Paragraphen eingeführt worden.)

Beweis. Für $m=0$ sei ein Intervall T_0 vorgegeben, für $m>0$ ein Intervall T . Die o -Zeichen mögen für $m=0$ gleichmäßig in T_0 , für $m>0$ gleichmäßig in T gelten. Der Einfachheit wegen werden die Indizes m, k im folgenden weggelassen. Integriert man h -mal partiell in (38), so ergibt sich wegen (2.12)

$$\begin{aligned} \Phi(Y) &= P(Y+1)g\{t(Y+1)\} + FP(Y+1; 1)g'\{t(Y+1)\} + \\ &\quad + F \int_1^{Y+1} P(y; 1)g''(ty)dy + F \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$(40) \quad = \sum_{a=0}^h FP(Y+1; a)g^{(a)}\{t(Y+1)\} + \{F \int_1^{Y+1} P(y; h)g^{(h+1)}(ty)dy + F\}$$

$$(41) \quad = S(Y) + f(Y),$$

zur Abkürzung. Wegen (2.6) folgt hieraus

$$\Phi(Y; h-2) = S(Y; h-2) + f(Y; h-2).$$

Für $m=0$ ist nach (40), (41) und Hilfssatz 4

$$f(Y) = G + o(1).$$

Wegen (2.6) folgt hieraus

$$f(Y; h-2) = GY^{h-2} + o(Y^{h-2}).$$

Für $m>0$ ist nach Hilfssatz 7 mit $l=0$

$$f(Y) = F + o(1),$$

also

$$f(Y; h-2) = FY^{h-2} + o(Y^{h-2}).$$

Der Hilfssatz wird daher bewiesen sein, wenn wir noch zeigen, daß gleichmäßig in einem Intervall T

$$(42) \quad S(Y, h-2) = o(Y^{h-2})$$

ist. Die o -Glieder mögen jetzt gleichmäßig in T gelten.

Als Vorbereitung zum Nachweis von (42) soll jetzt gezeigt werden:

$$(43) \quad S(Y; l) = \sum_{a=l}^h FP(Y+1; a)g^{(a-l)}\{t(Y+1)\} + o(Y^l) \quad (0 \leq l \leq h-2).$$

Für $l=0$ ist (43) nach (2.6), (40) und (41) richtig. Es sei also $0 \leq l < h-2$ und (43) für l wahr. Dann folgt das Entsprechende für $l+1$ so: Nach (2.12) ist

$$(44) \quad S(Y; l+1) = \sum_{a=l}^h F \int_0^Y P(y+1; a)g^{(a-l)}\{t(y+1)\}dy + o(Y^{l+1}).$$

Hier ist für jedes $a < h$

$$\begin{aligned} \int_0^Y &= \int_1^{Y+1} P(y; a)g^{(a-l)}(ty)dy \\ &= P(Y+1; a+1)g^{(a-l)}\{t(Y+1)\} + F \int_1^{Y+1} P(y; a+1)g^{(a-l+1)}(ty)dy + F \\ &= \dots \\ &= \sum_{b=a+1}^h FP(Y+1; b)g^{(b-l-1)}\{t(Y+1)\} + F \int_1^{Y+1} P(y; h)g^{(h-l)}(ty)dy + F. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (44) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S(Y; l+1) &= \sum_{a=l}^{h-1} \sum_{b=a+1}^h FP(Y+1; b)g^{(b-l-1)}\{t(Y+1)\} + \\ &\quad + F \int_1^{Y+1} P(y; h)g^{(h-l)}(ty)dy + F + o(Y^{l+1}) \\ (45) \quad &= \sum_{a=l+1}^h FP(Y+1; a)g^{(a-l-1)}\{t(Y+1)\} + F \int_1^{Y+1} + F + o(Y^{l+1}). \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist I_{l+1} , in der Bezeichnung (29). Nach (30) ist daher

$$(46) \quad F \int_1^{Y+1} + F = C(Y+1)^{l/2+1/2} = o(Y^{l+1}).$$

Aus (45) und (46) folgt das Bestehen von (43) für $l+1$. Daher gilt (43) für jedes der dort angegebenen l . Setzt man insbesondere $l = h-2$, so folgt

$$S(Y; h-2) = \sum_{a=h-2}^h FP(Y+1; a)g^{(a+2-h)}\{t(Y+1)\} + o(Y^{h-2}).$$

Wendet man schließlich auf jedes der drei Glieder in der Summe Hilfssatz 10 mit $Y+1$ statt x an, so ergibt sich die zu beweisende Abschätzung (42).

Für das Folgende ist es bequem, eine einheitliche Schreibweise für die Funktionen (15) und (28) zu haben. Zu diesem Zwecke setze man

$$(47) \quad \theta = \begin{cases} \frac{1}{4}(k+1)\pi & \text{für } m = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < m \leq h-1. \\ \frac{1}{2}\pi & \text{für } 0 < m \leq h-1. \end{cases}$$

Dabei bezieht sich der Wert 0 auf den Fall, daß in (28) der $\cos$ steht, und der Wert $\pi/2$ bezieht sich auf den $\sin$.

Aus (15), (28) und (47) folgt

$$(48) \quad g_m(t) = t^{-k/4-1/4-m/2} \cos(2\pi t^{1/2} - \theta) \quad \text{für } 0 \leq m \leq h-1.$$

HILFSSATZ 12. Es sei $0 \leq m \leq h-1$, $Y \geq 0$,

$$(49) \quad \Psi_m(Y) = \int_1^{Y+1} y^{k/2-1} g_m(ty) dy.$$

Dann ist, gleichmäßig in einem Intervall T ,

$$(50) \quad \Psi_m(Y; h-2) = J(Y+1)^{k/4+h/2-7/4-m/2} \cos(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(h-1)\pi) + FY^{h-2} + o(Y^{h-2}),$$

also

$$(51) \quad \Psi_m(Y; h-2) = \begin{cases} J(Y+1)^{k/4+h/2-7/4} \cos(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \frac{1}{4}(k+2h-1)\pi) + FY^{h-2} + o(Y^{h-2}) & \text{für } m = 0, \\ FY^{h-2} + o(Y^{h-2}) & \text{für } m > 0. \end{cases}$$

Beweis. Die o -Zeichen mögen im folgenden gleichmäßig in einem Intervall T gelten. Zur Abkürzung werde

$$(52) \quad W = \frac{k}{4} - \frac{5}{4} - \frac{m}{2}$$

gesetzt. Nach (48) und (52) ist für $y > 0$

$$y^{k/2-1} g_m(ty) = t^{-k/4-1/4-m/2} y^W \cos\{2\pi(ty)^{1/2} - \theta\}.$$

Nach (49) ist also

$$(53) \quad \Psi_m(Y) = J \int_1^{Y+1} y^W \cos\{2\pi(ty)^{1/2} - \theta\} dy$$

$$(54) \quad = J \int_{2\pi t^{1/2}}^{2\pi \{(Y+1)\}^{1/2}} y^{2W+1} \cos(y - \theta) dy.$$

Nun soll durch Induktion gezeigt werden: Für $0 \leq l \leq h-2$ ist

$$(55) \quad \Psi_m(Y; l) = J(Y+1)^{W+l/2+1/2} \cos(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+1)\pi) + \sum_{0 \leq a \leq h-l-3} F(Y+1)^{W+l/2-a/2} \cos(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+a+2)\pi) + FY^l + o(Y^l).$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int y^{2W+1} \cos(y - \theta) dy &= y^{2W+1} \cos\left(y - \theta - \frac{\pi}{2}\right) + F \int y^{2W} \cos\left(y - \theta - \frac{\pi}{2}\right) dy \\ &= \dots \\ &= y^{2W+1} \cos\left(y - \theta - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{a=0}^{h-2} F y^{2W-a} \cos\left(y - \theta - \frac{1}{2}(a+2)\pi\right) + \\ &\quad + F \int y^{2W-h+1} \cos(y - \theta - \frac{1}{2}h\pi) dy. \end{aligned}$$

Hierin ist nach (52)

$$2W - h + 1 \leq \frac{k}{2} - \frac{3}{2} - h \leq -\frac{3}{2}.$$

Nach (54) ist somit

$$\begin{aligned} \Psi_m(Y) &= J(Y+1)^{W+1/2} \cos\left(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \sum_{a=0}^{h-2} F(Y+1)^{W-a/2} \cos(2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(a+2)\pi) + F + o(1). \end{aligned}$$

Das Glied $a = h-2$ kann in der Summe weggelassen werden; denn der Exponent von $Y+1$ ist wegen (52)

$$W - \frac{h-2}{2} = W + 1 - \frac{h}{2} \leq \frac{k}{4} - \frac{1}{4} - \frac{k}{4} < 0.$$

Damit ist nach (2.6) der Sonderfall $l = 0$ von (55) erledigt. Es sei jetzt $l < h-2$. Der Übergang von l zu $l+1$ wird dann wie folgt ausgeführt.

In (55) ersetzen wir Y durch y und integrieren über y von 0 bis Y . Dann ergibt sich wegen (2.12)

$$\begin{aligned}\Psi_m(Y; l+1) &= J \int_1^{Y+1} y^{W+l/2+1/2} \cos \{2\pi(ty)^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+1)\pi\} dy + \\ &+ \sum_{0 \leq a \leq h-l-3} F \int_1^{Y+1} y^{W+l/2-a/2} \cos \{2\pi(ty)^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+a+2)\pi\} dy + \\ &+ FY^{l+1} + o(Y^{l+1}).\end{aligned}$$

Jedes der Integrale hier werde wie das Integral (53) behandelt. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}& J \int_1^{Y+1} y^{W+l/2+1/2} \cos \{ \} dy \\ &= J(Y+1)^{W+l/2+1} \cos \{2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+2)\pi\} + \\ &+ \sum_{0 \leq a \leq h-l-4} F(Y+1)^{W+l/2+1/2-a/2} \cos \{2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+a+3)\pi\} + \\ &+ FY^{l+1} + o(Y^{l+1}), \\ & F \int_1^{Y+1} y^{W+l/2-a/2} \cos \{ \} dy \\ &= \sum_{0 \leq b \leq h-l-a-4} F(Y+1)^{W+l/2+1/2-a/2-b/2} \cos \{2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \\ &\quad - \frac{1}{2}(l+a+b+3)\pi\} + FY^{l+1} + o(Y^{l+1}).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\Psi_m(Y; l+1) &= J(Y+1)^{W+l/2+1} \cos \{2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+2)\pi\} + \\ &+ \sum_{0 \leq a \leq h-l-4} F(Y+1)^{W+l/2+1/2-a/2} \cos \{2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2}(l+a+3)\pi\} + \\ &+ FY^{l+1} + o(Y^{l+1}).\end{aligned}$$

Damit ist der Übergang von l zu $l+1$ vollzogen und die Formel (55) für $0 \leq l \leq h-2$ bewiesen. Setzt man insbesondere $l = h-2$, so fällt die Summe in (55) weg, und wegen (52) bekommt man (50). Schließlich folgt (51) aus (50) und (47), denn für $m > 0$ ist nach (8)

$$\frac{k}{4} + \frac{h}{2} - \frac{7}{4} - \frac{m}{2} \leq \frac{h}{2} + \frac{h}{2} - \frac{9}{4} < h-2.$$

HILFSSATZ 13. Für $Y > 1$ ist, gleichmäßig in einem Intervall T ,

$$(56) \quad \int_1^Y y^{k/2-7/4} (Y-y)^{-1/2} e \{ (ty)^{1/2} \} dy = t^{-1/4} e \{ (tY)^{1/2} - \frac{1}{8} \} Y^{k/2-3/2} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

Beweis. Es sei $Y > 1$; die o -Zeichen sollen gleichmäßig in einem Intervall T gelten. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned}& \int_1^{Y-Y^{2/3}} = \frac{1}{\pi i} t^{-1/2} \int_1^{Y-Y^{2/3}} y^{k/2-5/4} (Y-y)^{-1/2} d \cos \{2\pi(ty)^{1/2}\} + \\ &+ \frac{1}{\pi} t^{-1/2} \int_1^{Y-Y^{2/3}} y^{k/2-5/4} (Y-y)^{-1/2} d \sin \{2\pi(ty)^{1/2}\} \\ (57) \quad &= OY^{k/2-5/4-(2/3)(1/2)} = OY^{k/2-19/12} = o(Y^{k/2-3/2}).\end{aligned}$$

Für $y = Y-z$, $0 < z \leq Y^{2/3}$ ist

$$\begin{aligned}y^{k/2-7/4} &= Y^{k/2-7/4} \left(1 - \frac{z}{Y}\right)^{k/2-7/4} = Y^{k/2-7/4} (1 + BY^{-1/3}), \\ y^{1/2} &= Y^{1/2} \left(1 - \frac{z}{Y}\right)^{1/2} = Y^{1/2} - \frac{1}{2} z Y^{-1/2} + Bz^2 Y^{-3/2} \\ &= Y^{1/2} - \frac{1}{2} z Y^{-1/2} + BY^{-1/6},\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}e \{ (ty)^{1/2} \} &= e \{ (tY)^{1/2} \} e \left\{ -\frac{1}{2} t^{1/2} Y^{-1/2} z \right\} (1 + CY^{-1/6}), \\ y^{k/2-7/4} e \{ (ty)^{1/2} \} &= Y^{k/2-7/4} e \{ (tY)^{1/2} \} e \left\{ -\frac{1}{2} t^{1/2} Y^{-1/2} z \right\} + OY^{k/2-7/4-1/6}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}& \int_1^Y = Y^{k/2-7/4} e \{ (tY)^{1/2} \} \int_0^{Y^{2/3}} z^{-1/2} e \left\{ -\frac{1}{2} t^{1/2} Y^{-1/2} z \right\} dz + \\ &+ OY^{k/2-7/4-1/6} \int_0^{Y^{2/3}} z^{-1/2} dz.\end{aligned}$$

Hierin ist das Restglied

$$OY^{k/2-19/12} = o(Y^{k/2-3/2}).$$

Im Hauptglied ist

$$\begin{aligned}& \int_0^{Y^{2/3}} = \pi^{-1/2} t^{-1/4} Y^{1/4} \int_0^{\pi t^{1/2} Y^{1/6}} y^{-1/2} e^{-iy} dy \\ &= \pi^{-1/2} t^{-1/4} Y^{1/4} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-iy} dy + OY^{1/4-1/12} \\ &= \pi^{-1/2} t^{-1/4} Y^{1/4} \cdot \pi^{1/2} e \left(-\frac{1}{8} \right) + OY^{1/6} = e \left(-\frac{1}{8} \right) t^{-1/4} Y^{1/4} + OY^{1/6}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_{Y-Y^{3/2}}^Y = t^{-1/4} e \left\{ (tY)^{1/2} - \frac{1}{8} \right\} Y^{k/2-3/2} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

Zusammen mit (57) ergibt das die Behauptung (56) des Hilfssatzes.

HILFSSATZ 14. Für $Y > 1$ ist, gleichmäßig in einem Intervall T ,

$$(58) \quad \int_1^Y y^{k/2-7/4} (Y-y)^{-1/2} \cos \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} dy \\ = t^{-1/4} Y^{k/2-3/2} \cos \left\{ 2\pi (tY)^{1/2} - \theta - \frac{1}{4} (k-1) \pi \right\} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

Beweis. Auf der linken Seite von (58) ist

$$\cos \{ \} = \operatorname{Re} \left\{ e \left\{ (ty)^{1/2} \right\} e \left\{ -\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} \right\}.$$

Wegen (56) ist somit, gleichmäßig in T ,

$$\int_1^Y = \operatorname{Re} \left\{ e \left\{ -\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} \int_1^Y y^{k/2-7/4} (Y-y)^{-1/2} e \left\{ (ty)^{1/2} \right\} dy \right\} \\ = \operatorname{Re} \left\{ e \left\{ -\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} t^{-1/4} Y^{k/2-3/2} e \left\{ (tY)^{1/2} - \frac{1}{8} \right\} \right\} + o(Y^{k/2-3/2}) \\ = t^{-1/4} Y^{k/2-3/2} \cos \left\{ 2\pi (tY)^{1/2} - \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi - \frac{1}{4} \pi \right\} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

HILFSSATZ 15. Es sei $0 \leq m \leq h-1$, $Y \geq 0$. Dann ist, gleichmäßig in einem Intervall T ,

$$(59) \quad \Psi_0 \left(Y; \frac{k-3}{2} \right) = J(Y+1)^{k/2-3/2} \cos \left\{ 2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \frac{k\pi}{2} \right\} + \\ + FY^{k/2-3/2} + o(Y^{k/2-3/2}),$$

$$(60) \quad \Psi_m \left(Y; \frac{k-3}{2} \right) = FY^{k/2-3/2} + o(Y^{k/2-3/2}) \quad \text{für } m > 0,$$

$$(61) \quad \Psi_m \left(Y; \frac{k-3}{2} + \varepsilon \right) = FY^{k/2-3/2+\varepsilon} + o(Y^{k/2-3/2+\varepsilon}).$$

Beweis. Für ungerade k ist $h = (k+1)/2$. Daher folgen (59), (60) aus (51).

Für gerade k ist $h = k/2$. Aus (50) folgt dann

$$\Psi_m \left(Y; \frac{k}{2} - 2 \right) = J(Y+1)^{k/2-7/4-m/2} \cos \left\{ 2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} + \\ + FY^{k/2-2} + o(Y^{k/2-2}).$$

Wir wenden jetzt Hilfssatz 2.2 mit $f(t) = \Psi_m(t)$, $\sigma = k/2-2$, $\tau = \frac{1}{2}$ an und erhalten wegen (2.6)

$$\Psi_m \left(Y; \frac{k-3}{2} \right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^Y \Psi_m \left(y; \frac{k}{2} - 2 \right) (Y-y)^{-1/2} dy.$$

Daher ist

$$(62) \quad \Psi_m \left(Y; \frac{k-3}{2} \right) = J \int_1^{Y+1} y^{k/2-7/4-m/2} (Y+1-y)^{-1/2} \cos \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \pi \right\} dy + F \int_0^Y y^{k/2-2} (Y-y)^{-1/2} dy + o \left(\int_0^Y y^{k/2-2} (Y-y)^{-1/2} dy \right).$$

Hierin hat man

$$\int_0^Y = Y^{k/2-3/2} \int_0^1 z^{k/2-2} (1-z)^{-1/2} dz,$$

also

$$F \int_0^Y + o \left(\int_0^Y \right) = FY^{k/2-3/2} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

Für $m = 0$ ist in (62) nach (47) und (58)

$$\int_1^{Y+1} = t^{-1/4} (Y+1)^{k/2-3/2} \cos \left\{ 2\pi \{t(Y+1)\}^{1/2} - \frac{k\pi}{2} \right\} + o(Y^{k/2-3/2}).$$

Man bekommt also wiederum die Abschätzung (59). Für $m > 0$ ist

$$\int_1^{Y+1} = B \int_1^{Y+1} y^{k/2-9/4} (Y+1-y)^{-1/2} dy = BY^{k/2-7/4} = o(Y^{k/2-3/2}),$$

und es ergibt sich (60).

Es verbleibt noch der Nachweis von (61). Nach Hilfssatz 2.2 und (2.6) ist

$$(63) \quad \Psi_m \left(Y; \frac{k-3}{2} + \varepsilon \right) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^Y \Psi_m \left(y; \frac{k-3}{2} \right) (Y-y)^{\varepsilon-1} dy.$$

Für $m > 0$ erhalten wir bei festem ε nach (60)

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^Y = F \int_0^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} dy + o \left(\int_0^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} dy \right),$$

d. h. die rechte Seite von (61).

Um (61) auch für $m = 0$ zu beweisen, wollen wir das Integral

$$(64) \quad I(Y) = \int_1^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} \cos \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \frac{k\pi}{2} \right\} dy$$

abschätzen. Hier ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für $Y \geq 3$

$$\begin{aligned} \int_1^{Y-Y^{1/2}} &= \pi^{-1} t^{-1/2} \int_1^{Y-Y^{1/2}} y^{k/2-1} (Y-y)^{\varepsilon-1} d \sin \left\{ 2\pi (ty)^{1/2} - \frac{k\pi}{2} \right\} \\ &= O Y^{k/2-1+\varepsilon/2-1/2} = o(Y^{k/2-3/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{Y-Y^{1/2}}^Y &= B \int_{Y-Y^{1/2}}^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} dy = B Y^{k/2-3/2} \int_{Y-Y^{1/2}}^Y (Y-y)^{\varepsilon-1} dy \\ &= \frac{B}{\varepsilon} Y^{k/2-3/2+\varepsilon/2} = o(Y^{k/2-3/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Somit ist

$$(65) \quad I(Y) = o(Y^{k/2-3/2+\varepsilon}).$$

Aus (59), (63) und (64) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_0 \left(Y; \frac{k-3}{2} + \varepsilon \right) &= \frac{J}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^Y (y+1)^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} \cos \left\{ 2\pi \left\{ t(y+1) \right\}^{1/2} - \frac{k\pi}{2} \right\} dy + \\ &+ F \int_0^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} dy + o \left(\int_0^Y y^{k/2-3/2} (Y-y)^{\varepsilon-1} dy \right) \\ &= \frac{J}{\Gamma(\varepsilon)} I(Y+1) + F Y^{k/2-3/2+\varepsilon} + o(Y^{k/2-3/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

In Verbindung mit (65), liefert dies die Richtigkeit von (61) für $m = 0$.

HILFSSATZ 16. Es sei $k > 2$. Dann ist die Reihe

$$(66) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4-1/4} \cos \left\{ 2\pi (nt)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi \right\}$$

- 1) für kein t σ -summierbar, wenn $0 \leq \sigma \leq (k-3)/2$ ist;
 2) für jedes t σ -summierbar, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t = t^*$, wenn $\sigma > (k-3)/2$.
 Die Reihen

$$(67) \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4-1/4-j/2} \cos \{ 2\pi (nt)^{1/2} \} \right\} \quad (j = 1, \dots, h-1)$$

$$(68) \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4-1/4-j/2} \sin \{ 2\pi (nt)^{1/2} \} \right\}$$

sind für jedes t gegen stetige Funktionen von t σ -summierbar, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T , wenn $\sigma \geq (k-3)/2$ ist.

Beweis. Es sei $0 \leq m \leq h-1$, $y \geq 1$, $Y \geq 0$,

$$(69) \quad \begin{aligned} f(y) &= g_m(ty), \\ f_m(Y) &= \sum_{n \leq Y} r_k(n) g_m(tn), \\ V_k(1) - 1 &= Z_k. \end{aligned}$$

Ferner habe D_k den üblichen Wert (1.4.2), es sei also

$$V'_k(y) = D_k y^{k/2-1}.$$

Für $Y \geq 1$ ist dann nach Hilfssatz 5

$$(70) \quad \begin{aligned} f_m(Y) &= P_k(Y) g_m(tY) - t \int_1^Y P_k(y) g'_m(ty) dy + \\ &+ D_k \int_1^Y y^{k/2-1} g_m(ty) dy + Z_k g_m(t). \end{aligned}$$

Ferner ist nach (69)

$$(71) \quad f_m(Y) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq Y < 1.$$

Nach (69), (15) und (28) ist für $Y \geq 0$

$$(72) \quad f_0(Y) = t^{-k/4-1/4} \sum_{n \leq Y} r_k(n) n^{-k/4-1/4} \cos \{ 2\pi (tn)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi \},$$

$$(73) \quad f_m(Y) = t^{-k/4-1/4-m/2} \sum_{n \leq Y} r_k(n) n^{-k/4-1/4-m/2} \frac{\cos \{ 2\pi (tn)^{1/2} \}}{\sin \{ 2\pi (tn)^{1/2} \}} \quad (m > 0).$$

Aus (70), (71), (38) und (49) folgt

$$(74) \quad f_m(Y) = \begin{cases} \Phi_m(Y-1) + D_k \Psi_m(Y-1) + Z_k g_m(t) & \text{für } Y \geq 1, \\ 0 & \text{für } 0 \leq Y < 1. \end{cases}$$

Für $Y > 1$, $\sigma > 0$ ist daher wegen (2.6)

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(\sigma) f_m(Y; \sigma) \\
 &= \int_0^Y f_m(y) (Y-y)^{\sigma-1} dy = \int_1^Y f_m(y) (Y-y)^{\sigma-1} dy \\
 &= \int_1^Y \Phi_m(y-1) (Y-y)^{\sigma-1} dy + D_k \int_1^Y \Psi_m(y-1) (Y-y)^{\sigma-1} dy + \\
 & \quad + Z_k g_m(t) \int_1^Y (Y-y)^{\sigma-1} dy \\
 &= \int_0^{Y-1} \Phi_m(y) (Y-1-y)^{\sigma-1} dy + D_k \int_0^{Y-1} \Psi_m(y) (Y-1-y)^{\sigma-1} dy + \\
 & \quad + \frac{Z_k}{\sigma} g_m(t) (Y-1)^\sigma \\
 &= \Gamma(\sigma) \Phi_m(Y-1; \sigma) + \Gamma(\sigma) D_k \Psi_m(Y-1; \sigma) + \frac{Z_k}{\sigma} g_m(t) (Y-1)^\sigma.
 \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
 (75) \quad Y^{-\sigma} f_m(Y; \sigma) &= Y^{-\sigma} \Phi_m(Y-1; \sigma) + D_k Y^{-\sigma} \Psi_m(Y-1; \sigma) + \\
 & \quad + \frac{Z_k}{\Gamma(\sigma+1)} g_m(t) Y^{-\sigma} (Y-1)^{-\sigma} \quad (Y > 1).
 \end{aligned}$$

Für $\sigma = 0$ ist (75) wegen (2.6) und (74) auch richtig.

Wir unterscheiden jetzt die Fälle $m = 0$ und $m > 0$.

1) Es sei $m = 0$. Setzt man $\sigma = (k-3)/2$, so folgt aus (75)

$$\begin{aligned}
 (76) \quad Y^{3/2-k/2} f_0\left(Y; \frac{k-3}{2}\right) &= Y^{3/2-k/2} \Phi_0\left(Y-1; \frac{k-3}{2}\right) + \\
 & \quad + D_k Y^{3/2-k/2} \Psi_0\left(Y-1; \frac{k-3}{2}\right) + Z_k \Gamma^{-1}\left(\frac{k-1}{2}\right) g_0(t) \left(1 - \frac{1}{Y}\right)^{k/2-3/2}.
 \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 11 und der Definition (2.7) der Limitierbarkeit ist die Funktion $\Phi_0(Y)$ für jedes t , $(h-2)$ -limitierbar; wegen $h-2 \leq (k-3)/2$ ist sie nach Hilfssatz 2.6 auch $(k-3)/2$ -limitierbar. Läßt man also Y unbeschränkt wachsen, so hat das erste Glied rechts in (76) einen Grenzwert. Auch das dritte Glied strebt gegen einen Grenzwert. Das zweite Glied hat dagegen nach (59) keinen Grenzwert. Also hat auch die linke Seite von (76) keinen Grenzwert. Somit ist die Funktion $f_0(Y)$ für kein t

$(k-3)/2$ -limitierbar. Für $0 \leq \sigma < (k-3)/2$ ist sie daher nach Hilfssatz 2.6 auch nicht σ -limitierbar.

Es sei jetzt $\sigma > (k-3)/2$. Nach (39) ist dann die Funktion $\Phi_0(Y)$ für jedes t gegen eine Funktion G , $(h-2)$ -limitierbar, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 . Wegen

$$h-2 \leq \frac{k-3}{2} < \sigma$$

ist also $\Phi_0(Y)$ nach Hilfssatz 2.6 gegen eine Funktion G , σ -limitierbar, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 . Nach Definition der Funktion G folgt hieraus, daß $\Phi_0(Y)$ für $t = t^*$ zum Mittelwert σ -limitierbar ist. Bei wachsendem Y hat mithin das erste Glied rechts in (75) (für $m = 0$) einen Grenzwert, und zwar gleichmäßig in T_0 , wobei die Grenzfunktion in t^* den Mittelwert annimmt.

Ist $\sigma = (k-3)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, so strebt bei wachsendem Y das zweite Glied rechts in (75) nach Hilfssatz 15 gegen eine Funktion F , und zwar gleichmäßig in einem Intervall T . Hieraus folgt nach Hilfssatz 2.6 dasselbe für $\sigma \geq (k-3)/2 + \frac{1}{2}$, also für $\sigma > (k-3)/2$. Da die Funktion F für jedes t stetig ist, so nimmt sie für jedes t^* den Mittelwert an. Auch das dritte Glied rechts in (75) strebt gleichmäßig in T gegen eine stetige Funktion von t .

Zusammenfassend ergibt sich, daß die Funktion $f_0(Y)$:

I) für kein t σ -limitierbar ist, sobald $0 \leq \sigma \leq (k-3)/2$ ist;

II) für jedes t σ -limitierbar ist, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t = t^*$, sobald $\sigma > (k-3)/2$ ist.

Der Faktor $t^{-k/4-1/4}$ vor der Summe $\sum_{n \leq Y}$ in (72) hängt nicht von n und Y ab. Er ist in einem Intervall T stetig, und zwar ist dort

$$t_3 < t^{-k/4-1/4} < t_4,$$

wo t_3 und t_4 nur von t_1 , t_2 und k abhängen. Somit besitzt die Funktion $\sum_{n \leq Y}$ die beiden soeben genannten Eigenschaften I) und II). Das bedeutet aber nach dem Kriterium für σ -Summierbarkeit in § 2, daß die Reihe (66) die beiden im Hilfssatz genannten Eigenschaften 1) und 2) besitzt.

2) Es sei $m > 0$. Nach den Hilfssätzen 11, 15 und 2.6 sind dann die Funktionen $\Phi_m(Y)$ und $\Psi_m(Y)$ für jedes feste $\sigma \geq (k-3)/2$ gegen stetige Funktionen von t σ -limitierbar, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T . Daraus ergibt sich dann nach (75) dasselbe für die Funktionen $f_m(Y)$. Schließt man jetzt so, wie im Falle $m = 0$, indem man (73)

statt (72) benutzt, so folgt, daß die Reihen (67) und (68) die im Hilfssatz genannte Eigenschaft haben.

Der Beweis von Satz 2 ergibt sich aus den Hilfssätzen 1, 2, 6, 16, 2.7 und 2.11. Die Fälle $k=2$ und $k>2$ sollen getrennt behandelt werden.

1) Es sei $k=2$. Dann soll gezeigt werden, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) n^{-1/2} J_1 \{2\pi(nt)^{1/2}\}$$

konvergiert, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t=t^*$.

Nach Hilfssatz 1 ist

$$r_2(n) n^{-1/2} J_1 \{2\pi(nt)^{1/2}\} = \pi^{-1} t^{-1/4} r_2(n) n^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi(nt)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\} + r_2(n) n^{-1/2} \varrho_2(n, t).$$

Dabei ist nach Hilfssatz 6 die Reihe

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) n^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi(nt)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\}$$

für jedes t konvergent, und zwar gleichmäßig in einem Intervall T_0 , zum Mittelwert für $t=t^*$. Nach Hilfssatz 2 ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) n^{-1/2} \varrho_2(n, t)$$

in einem Intervall T absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von t konvergent.

Wir wenden jetzt Hilfssatz 2.11 an mit $T=T_0$, $t'=t^*$, $r=1$, $\sigma=0$,

$$f_{n0}(t) = r_2(n) n^{-3/4} \cos \left\{ 2\pi(nt)^{1/2} - \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$f_{n1}(t) = r_2(n) n^{-1/2} \varrho_2(n, t),$$

$$\varphi_0(t) = \pi^{-1} t^{-1/4}, \quad \varphi_1(t) = 1, \quad F_n(t) = r_2(n) n^{-1/2} J_1 \{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Dann ergeben sich die Behauptungen 1) und 2) von Satz 2.

2) Es sei $k>2$. Dann ist zu zeigen, daß die Reihe

$$(77) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\}$$

die Bedingungen 3)-5) von Satz 2 erfüllt. Hier ist nach Hilfssatz 1

$$(78) \quad r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\} = \pi^{-1} t^{-1/4} r_k(n) n^{-k/4-1/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi\} + \\ + X_1 t^{-3/4} r_k(n) n^{-k/4-3/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2}\} + \dots \\ + X_{h-1} t^{-h/2+1/4} r_k(n) n^{-k/4-h/2+1/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2}\} + \\ + Y_1 t^{-3/4} r_k(n) n^{-k/4-3/4} \sin \{2\pi(nt)^{1/2}\} + \dots \\ + Y_{h-1} t^{-h/2+1/4} r_k(n) n^{-k/4-h/2+1/4} \sin \{2\pi(nt)^{1/2}\} + \\ + r_k(n) n^{-k/4} \varrho_k(n, t).$$

Die dem ersten Gliede rechts in (78) entsprechende Reihe (66) genügt nach Hilfssatz 16 den Bedingungen 3)-5) von Satz 2. Die dem letzten Gliede in (78) entsprechende Reihe (7) konvergiert nach Hilfssatz 2 in jedem Intervall T absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von t . Sie ist also nach Hilfssatz 2.7 für jedes feste $\sigma>0$ in einem Intervall T gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von t σ -summierbar, erfüllt also die Bedingungen 3) und 4) des Satzes. Die den übrigen Gliedern rechts in (78) entsprechenden Reihen (67) und (68) erfüllen nach Hilfssatz 16 ebenfalls diese Bedingungen.

Jetzt wenden wir Hilfssatz 2.11 an, und zwar mit $T=T_0$, $t'=t^*$ in 3) und $t'=t$ in 4), $r=2(h-1)+1$,

$$f_{n0}(t) = r_k(n) n^{-k/4-1/4} \cos \{2\pi(nt)^{1/2} - \frac{1}{4}(k+1)\pi\},$$

$$f_{nm}(t) = r_k(n) n^{-k/4-1/4-m/2} \cos \{2\pi(nt)^{1/2}\} \quad (1 \leq m \leq h-1),$$

$$f_{nm}(t) = r_k(n) n^{-k/4-1/4-(m-h+1)/2} \sin \{2\pi(nt)^{1/2}\} \quad (h \leq m \leq 2(h-1)),$$

$$f_{nr}(t) = r_k(n) n^{-k/4} \varrho_k(n, t),$$

$$\varphi_0(t) = \pi^{-1} t^{-1/4}; \quad \varphi_m(t) = X_m t^{-1/4-m/2} \quad (1 \leq m \leq h-1),$$

$$\varphi_m(t) = Y_{m-h+1} t^{-1/4-(m-h+1)/2} \quad (h \leq m \leq 2(h-1)),$$

$$\varphi_r(t) = 1, \quad F_n(t) = r_k(n) n^{-k/4} J_{k/2} \{2\pi(nt)^{1/2}\}.$$

Dann ergeben sich die Behauptungen 3)-5) des Satzes für die Reihe (77).