IX KAPITEL

DAS INTEGRAL $\int\limits_0^x P_k^2(y)\,dy$

§ 1. Hilfssätze

In diesem Kapitel wird $k \geqslant 4$ angenommen. Es soll eine zu (8.1.1) analoge Abschätzung für das Integral

$$(1) \qquad M_k(s) = \int\limits_0^s P_k^2(y)\,dy$$

bewiesen werden. Die dabei benutzte Methode ist ziemlich kompliziert; sie macht von ähnlichen Hilfsmitteln Gebrauch, wie das zum Beweise von Satz 1.4.1 führende Verfahren. Im Falle $k = 4$ erhalten wir allerdings die Abschätzung

$$(2) \qquad M_4(x) = \tfrac{2}{3}\pi^2 x^3 + Bx^{5/2}\log x,$$

die etwas schwächer als (8.1.1) ist. Dafür werden wir nicht so lange Rechnungen durchzuführen haben und brauchen die Dimension der Kugel nicht auf den Fall $k = 4$ zu beschränken.

In diesem Kapitel bezeichnet der Buchstabe w (mit oder ohne Indizes und Striche) eine komplexe Zahl mit positivem Realteil, und es wird, wie schon in (4.2.1),

$$(3) \qquad w^y = \exp(y \log w), \qquad \text{wo} \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(\log w) < \frac{\pi}{2}$$

gesetzt, so daß (4.2.2) in Kraft bleibt. Die B-Schranken dürfen wieder von k abhängen.

Wir werden es mit Funktionen $f(w, w')$ von zwei komplexen Veränderlichen zu tun haben. Einem festen Wertepaare (w_0, w_0') entspricht ein Punkt im vierdimensionalen Raum, ebenso wie einer festen komplexen Zahl w_0 ein Punkt in der Ebene entspricht. Wir sagen, daß die Funktion $f(w, w')$ im Punkte (w_0, w_0') regulär ist, wenn die Funktion $f_1(w) = f(w, w_0')$ im Punkte $w = w_0$ regulär ist und die Funktion $f_2(w') = f(w_0, w')$ im

Punkte $w' = w_0'$ regulär ist. Ist eine gewisse Menge von Punkten (w_0, w_0') gegeben, so sagen wir, daß die Funktion $f(w, w')$ in dieser Menge regulär ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge regulär ist. Die Funktionen $f_1(w)$ und $f_2(w')$ sind Funktionen von nur *einen* komplexen Veränderlichen, man kann auf sie also z. B. den Cauchyschen Satz anwenden.

Wir bringen in diesem Paragraphen einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei $s_2 > s_1$, $t_2 > t_1$. Die Funktion $f(w, w')$ sei beschränkt und regulär im Bereich*

$$(4) \qquad s_1 \leqslant \operatorname{Re}(w) \leqslant s_2, \qquad t_1 \leqslant \operatorname{Re}(w') \leqslant t_2.$$

In diesem Bereich werde gesetzt

$$(5) \qquad F(w, w') = \frac{f(w, w')}{ww'(w+w')}.$$

Dann gelten die folgenden Gleichungen, wobei der Kürze wegen $F = F(w, w')$ gesetzt worden ist,

$$(6) \qquad \int\limits_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} dw \int\limits_{t_1-\infty i}^{t_1+\infty i} F\,dw' = \int\limits_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} dw \int\limits_{t_2-\infty i}^{t_2+\infty i} F\,dw'$$

$$(6) \qquad = \int\limits_{t_2-\infty i}^{t_2+\infty i} dw' \int\limits_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} F\,dw = \int\limits_{t_2-\infty i}^{t_2+\infty i} dw' \int\limits_{s_2-\infty i}^{s_2+\infty i} F\,dw$$

$$(6) \qquad = \int\limits_{s_2-\infty i}^{s_2+\infty i} dw \int\limits_{t_2-\infty i}^{t_2+\infty i} F\,dw' = \int\limits_{s_2-\infty i}^{s_2+\infty i} dw \int\limits_{t_1-\infty i}^{t_1+\infty i} F\,dw'.$$

Hierbei sind alle sechs Doppelintegrale absolut konvergent.

Beweis. Es sei $y = \operatorname{Im}(w)$, $y' = \operatorname{Im}(w')$. Dann gilt, wie jetzt gezeigt werden soll, im Bereich (4) die Ungleichung

$$(7) \qquad |F(w, w')| < \frac{R}{(1+|y|)(1+|y'|)(1+|y+y'|)},$$

wo R (wie auch R_1—R_4 weiter unten) nicht von w und w' abhängt. In der Tat ist zunächst nach (5) und den Bedingungen des Hilfssatzes

$$|F(w, w')| = \frac{|f(w, w')|}{|w||w'||w+w'|} \leqslant \frac{R_1}{|w||w'||w+w'|}.$$

Weiter ist nach (4)

$$|w| = |s+yi| \geqslant s \quad \text{und} \quad \geqslant |y|, \quad \text{also} \quad \geqslant \tfrac{1}{2}(s+|y|)$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\operatorname{Min}(1, s_1)(1+|y|),$$

d. h.

$$|w| \geqslant R_2(1+|y|),$$

und ebenso

$$|w'| \geqslant R_3(1+|y|), \qquad |w+w'| \geqslant R_4(1+|y+y'|),$$

womit die Ungleichung (7) nachgewiesen ist. Wegen (7) ist nach dem Cauchyschen Satze

$$\int\limits_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} F\,dw = \int\limits_{s_2-\infty i}^{s_2+\infty i} F\,dw, \qquad \int\limits_{t_1-\infty i}^{t_1+\infty i} F\,dw' = \int\limits_{t_2-\infty i}^{t_2+\infty i} F\,dw'. \tag{8}$$

Weiter ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\,dy'}{(1+|y|)(1+|y'|)(1+|y+y'|)} = B. \tag{9}$$

Hier ist nämlich

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} = B\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{dy\,dy'}{(1+y)(1+y')(1+|y-y'|)} = B\Big(\int\limits_{y\geqslant 0}\ \int\limits_{0\leqslant y'\leqslant y} + \int\limits_{y'\geqslant 0}\ \int\limits_{0\leqslant y\leqslant y'}\Big).$$

Die beiden letzten Doppelintegrale sind einander gleich. Daher ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} = B\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{1+y}\int\limits_0^{y}\frac{dy'}{(1+y')(1+y-y')}$$

$$= B\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{(1+y)(2+y)}\Big\{\int\limits_0^{y}\frac{dy'}{1+y'} + \int\limits_0^{y}\frac{dy'}{1+y-y'}\Big\}$$

$$= B\int\limits_0^{\infty}\frac{\log(1+y)}{(1+y)(2+y)}\,dy = B\int\limits_1^{\infty}\frac{\log y}{y^2}\,dy = B,$$

womit (9) nachgewiesen ist. Wegen (7) und (9) sind alle sechs Doppelintegrale in (6) absolut konvergent. Daher kann man die Integrationsfolge vertauschen (vgl. z. B. Titchmarsh [1], § 1.85) und bekommt dann wegen (8) die Gleichungen des Hilfssatzes.

Auch die Doppelintegrale, mit denen, wir es weiter zu tun haben, sind, als Folge von Hilfssatz 1, absolut konvergent.

Im folgenden werde gesetzt

$$\vartheta_k(w) = \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\,e^{-mw}, \tag{10}$$

$$F(w) = F_k(w) = \vartheta_k(w) - \pi^{k/2} w^{-k/2}. \tag{11}$$

Die Reihe (10) konvergiert absolut, wie uns aus dem Anfang des Beweises von Satz 1.4.1 bekannt ist.

HILFSSATZ 2.

$$M_k(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\ \int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} F(w)F(w')\frac{e^{x(w+w')}}{ww'(w+w')}\,dw\,dw' + B. \tag{12}$$

Beweis. Nach Definition der Funktion $P_k(s)$ und (2.1.6) ist

$$P_k(s) = \sum_{0\leqslant m\leqslant s} r_k(m) - \frac{2D_k}{k}s^{k/2}.$$

Zusammen mit (1) ergibt dies

$$M_k(x) = \int\limits_0^x \Big(\sum_{0\leqslant m\leqslant y} r_k(m) - \frac{2D_k}{k}y^{k/2}\Big)^2 dy$$

$$= \int\limits_0^x \Big(\sum_{0\leqslant m\leqslant y} r_k(m) - \frac{2D_k}{k}y^{k/2}\Big)\Big(\sum_{0\leqslant l\leqslant y} r_k(l) - \frac{2D_k}{k}y^{k/2}\Big) dy$$

$$= \int\limits_0^x \Big(\sum_{0\leqslant m,l\leqslant y} r_k(m)r_k(l) - \frac{4D_k}{k}\sum_{0\leqslant m\leqslant y} r_k(m)\,y^{k/2} + \frac{4D_k^2}{k^2}y^k\Big) dy$$

$$= \sum_{0\leqslant m,l\leqslant x} r_k(m)r_k(l)\int\limits_{\mathrm{Max}(m,l)}^{x} dy - \frac{4D_k}{k}\sum_{0\leqslant m\leqslant x} r_k(m)\int\limits_m^x y^{k/2}\,dy + \tag{13}$$

$$+\frac{4D_k^2}{k^2}\int\limits_0^x y^k\,dy.$$

Es sei

$$I = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\ \int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(w)F(w')\frac{e^{x(w+w')}-1}{ww'(w+w')}\,dw\,dw'. \tag{14}$$

Das Integral (14) konvergiert absolut, wie man feststellt, wenn man Hilfssatz 1 bei festem x auf die Funktion

$$F(w, w') = F(w)F(w')(e^{x(w+w')}-1)$$

anwendet, was nach (10) und (11) gestattet ist.

Drückt man im Integral (14) die Funktionen $F(w)$, $F(w')$ auf Grund von (11) durch die Reihe (10) und die entsprechende Reihe mit w' aus; ersetzt man ferner jedes Glied dieser Reihen durch den absoluten Betrag, so ergibt sich die Majorante

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} |F(w)||F(w')||e^{x(w+w')}-1|\left|\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')}\right|$$
$$\leqslant \{\vartheta_k(1)+\pi^{k/2}\}^2(e^{2x}+1)\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\left|\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')}\right|,$$

wobei das letzte Integral nach Hilfssatz 1 konvergiert. Daraus folgt, daß man in beliebiger Reihenfolge gliedweise integrieren kann. Auf diese Weise ergibt sich

$$I=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\left(\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\,e^{-mw}-\pi^{k/2}w^{-k/2}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{\infty} r_k(l)\,e^{-lw'}-\pi^{k/2}w'^{-k/2}\right)(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')}$$

$$(15)\qquad =-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,l=0}^{\infty} r_k(m)r_k(l)\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw-lw'}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')}+$$
$$+\frac{\pi^{k/2}}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{ww'^{k/2+1}(w+w')}+$$
$$+\frac{\pi^{k/2}}{4\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty} r_k(l)\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-lw'}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{w^{k/2+1}w'(w+w')}-$$
$$-\frac{\pi^{k}}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{w^{k/2+1}w'^{k/2+1}(w+w')}.$$

Das zweite Glied in (15) ist gleich dem dritten, wie man sieht, wenn man m, w, w' durch l, w', w ersetzt. Führt man daher die Bezeichnungen ein

$$(16)\qquad J_{m,l}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw-lw'}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')},$$

$$(17)\qquad J_{m}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{ww'^{k/2+1}(w+w')},$$

$$(18)\qquad J=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}(e^{x(w+w')}-1)\frac{dw\,dw'}{w^{k/2+1}w'^{k/2+1}(w+w')},$$

so wird

$$(19)\qquad I=\sum_{m,l=0}^{\infty} r_k(m)r_k(l)J_{m,l}-2\pi^{k/2}\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)J_m+\pi^kJ.$$

Zur Berechnung der Integrale (16)-(18) benutzen wir die wohlbekannten Formeln

$$(20)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yw}\frac{dw}{w}=\begin{cases}1 & \text{für}\quad y>0,\\ 0 & \text{für}\quad y<0;\end{cases}$$

$$(21)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yw}\frac{dw}{w^{k/2+1}}=\frac{y^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\qquad \text{für}\quad y>0.$$

(20) findet man bei Titchmarsh [1], § 3.126; (21) ergibt sich aus (1.4.32) und (1.4.33), unter Berücksichtigung von (3).

Aus (16) und (20) folgt, da man wegen der absoluten Konvergenz der mehrfachen Integrale in beliebiger Reihenfolge integrieren darf,

$$J_{m,l}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw-lw'}\left(\int_0^x e^{y(w+w')}dy\right)\frac{dw\,dw'}{ww'}$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^x dy\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{(y-m)w}\frac{dw}{w}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{(y-l)w'}\frac{dw'}{w'}$$

$$(22)\qquad =\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathrm{Max}(m,l)}^{x} dy & \text{für}\quad 0\leqslant m,\ l\leqslant x,\\ 0 & \text{für}\quad \mathrm{Max}\,(m,l)>x.\end{cases}$$

Analog ergibt sich aus (17), (18), (20) und (21)

$$J_m = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-mw}\left(\int_0^x e^{y(w+w')}dy\right)\frac{dw\,dw'}{ww'^{k/2+1}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^x dy\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{(y-m)w}\frac{dw}{w}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yw'}\frac{dw'}{w'^{k/2+1}}$$

$$(23)\qquad = \begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\displaystyle\int_m^x y^{k/2}dy & \text{für}\quad 0 \leqslant m \leqslant x,\\ 0 & \text{für}\quad m > x;\end{cases}$$

$$(24)\quad J = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^x dy\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yw}\frac{dw}{w^{k/2+1}}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{yw'}\frac{dw'}{w'^{k/2+1}} = \frac{1}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\int_0^x y^k dy.$$

Aus (13), (19), (22), (23), (24) und (2.1.6) oder (1.4.2) ergibt sich

$$M_k(x) = I.$$

Andererseits folgt aus (14), (11) und (10) durch Anwendung von Hilfssatz 1

$$I = I_1 + I_2,$$

wo

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(w)F(w')\frac{e^{x(w+w')}}{ww'(w+w')}\,dw\,dw'$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} F(w)F(w')\frac{e^{x(w+w')}}{ww'(w+w')}\,dw\,dw',$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(w)F(w')\frac{dw\,dw'}{ww'(w+w')} = B.$$

Damit ist die Behauptung (12) des Hilfssatzes bewiesen.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels machen wir wieder von der Abkürzung (8.1.7) Gebrauch, die wir dauernd im Auge zu behalten bitten, da auf sie nicht Bezug genommen wird.

Wir betrachten jetzt wieder die Fareybrüche (1.4.7), lassen aber die Bedingung $0 \leqslant h \leqslant q$ weg. Dann bekommen wir die Brüche

$$(25)\qquad \theta = h/q, \quad (h, q) = 1, \quad q \leqslant X.$$

Zu ihnen fügen wir die Medianten $(h+h')/(q+q')$ hinzu, wobei h/q und h'/q' zwei benachbarte Fareybrüche sind. Jeder Punkt (25) bestimmt dann auf der Geraden $-\infty < y < \infty$ ein gewisses Intervall I_{hq}, das von θ bis zu den beiden nächsten Medianten geht. Dies Intervall hat die Gestalt

$$(26)\quad \frac{h}{q} - \frac{s_1}{qX} \leqslant y \leqslant \frac{h}{q} + \frac{s_2}{qX}, \quad \text{wo}\quad \frac{1}{2} \leqslant s_1 \leqslant 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant s_2 \leqslant 1.$$

In der Tat ist, wenn $(h+h')/(q+q')$ der linke Endpunkt von I_{hq} ist,

$$\frac{h}{q} - \frac{h+h'}{q+q'} = \frac{hq'-h'q}{q(q+q')} = \frac{1}{q(q+q')} \leqslant \frac{1}{qX} \quad\text{und}\quad \geqslant \frac{1}{2qX}$$

(vgl. Winogradow [4], Aufgabe 4,a zu Kapitel I), und ebenso für den rechten Endpunkt.

Ist nun $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von reellen Zahlen, so verstehen wir unter $Y\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen Yy, wobei y die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft: In diesem Sinne setzen wir $J_{hq} = 2\pi I_{hq}$. Dann hat J_{hq} wegen (26) die Gestalt

$$(27)\quad 2\pi\left(\frac{h}{q} - \frac{s_1}{qX}\right) \leqslant y \leqslant 2\pi\left(\frac{h}{q} + \frac{s_2}{qX}\right), \quad \text{wo}\quad \frac{1}{2} \leqslant s_1,\ s_2 \leqslant 1.$$

Es sei

$$(28)\qquad N = \frac{2\pi}{[X]+1}.$$

Da

$$\frac{-1}{[X]}, \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{[X]}$$

drei benachbarte Brüche der Reihe (25) sind, so hat das Intervall J_{01} die Gestalt $-N \leqslant y \leqslant N$. Die Intervalle J_{hq} mit $h > 0$ bedecken die Halbgerade $y \geqslant N$. Die Intervalle J_{hq} mit $h < 0$ bedecken die Halbgerade $y \leqslant -N$. In (12) schreiben wir

$$(29)\quad w = \frac{1}{x} + yi, \quad w' = \frac{1}{x} + y'i, \quad F(w)F(w')\frac{e^{x(w+w')}}{ww'(w+w')} = G(w, w').$$

Dann ergibt sich

$$(30)\qquad 4\pi^2 M_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(w, w')\,dy\,dy' + B,$$

wo das Doppelintegral absolut konvergiert.

Aus (10), (11) und (29) ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Funktion $G(w, w')$, die später benutzt werden:

1) *Es ist* $G(w, w') = G(w', w)$, *d. h. die Funktion* $G(w, w')$ *ändert sich nicht, wenn man* y *mit* y' *vertauscht.*

2) *Die Funktion* $G(w, w')$ *geht in den konjugiert komplexen Wert über, wenn man* y, y' *durch* $-y, -y'$ *ersetzt, d. h.* w, w' *durch* $\overline{w}, \overline{w}'$.

Hierbei sieht man auch, daß *die Funktionen* $F(w)$, w^{-1} *und* e^{xw} *in den konjugiert komplexen Wert übergehen, wenn man* y *durch* $-y$ *ersetzt, d. h.* w *durch* $\overline{w}$.

Ist in der Folge von Zahlenpaaren h, q die Rede, so wird angenommen, daß sie den Bedingungen (25) genügen. Ebenso sollen die Zahlenpaare h', q' den Bedingungen (25) genügen, d. h. es sei $(h', q') = 1$, $q' \leqslant X$. Wir setzen

$$S_1 = \iint\limits_{\operatorname{Min}(|y|,|y'|)\leqslant N} G(w, w')\,dy\,dy', \tag{31}$$

$$M(h, q, h', q') = \int\limits_{J_{hq}} dy \int\limits_{J_{h'q'}} G(w, w')\,dy' + \int\limits_{J_{hq}} dy \int\limits_{-J_{h'q'}} G(w, w')\,dy' + \int\limits_{-J_{hq}} dy \int\limits_{J_{h'q'}} G(w, w')\,dy' + \int\limits_{-J_{hq}} dy \int\limits_{-J_{h'q'}} G(w, w')\,dy'; \tag{32}$$

$$S_2 = \sum_{h,q,h',q'} M(h, q, h', q'), \tag{33}$$

wo über alle h, q, h', q' mit

$$h > 0,\quad h' > 0,\quad (h, q) = 1,\quad (h', q') = 1,\quad q \leqslant X,\quad q' \leqslant X,\quad \frac{h}{q} \neq \frac{h'}{q'} \tag{34}$$

summiert wird;

$$f(h, q) = \int\limits_{J_{hq}} \int\limits_{J_{hq}} G(w, w')\,dy\,dy', \qquad g(h, q) = \int\limits_{J_{hq}} dy \int\limits_{-J_{hq}} G(w, w')\,dy', \tag{35}$$

$$S_3 = \sum_{\substack{h>0,\,q\leqslant X\\(h,q)=1}} f(h, q), \qquad S_4 = \sum_{\substack{h>0,\,q\leqslant X\\(h,q)=1}} g(h, q). \tag{36}$$

Die Reihen (33) und (36) konvergieren absolut, weil das Integral (30) absolut konvergiert.

Aus (30)-(35) und den angeführten Eigenschaften der Funktion $G(w, w')$ ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3.

$$4\pi^2 M_k(x) = S_1 + S_2 + 2\operatorname{Re}(S_3) + 2S_4 + B. \tag{37}$$

Wir bringen in diesem Paragraphen noch drei Hilfssätze.

Hilfssatz 4.

$$\vartheta_k(w) = \pi^{k/2} q^{-k} \left(w - 2\pi i \frac{h}{q}\right)^{-k/2} \times \sum_{b_1,\ldots,b_k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2(b_1^2+\ldots+b_k^2)}{q^2(w-2\pi i\,h/q)}\right) S(-h, b_1, q)\ldots S(-h, b_k, q). \tag{38}$$

Beweis. Man kann (38) analog wie (1.4.14), (1.4.15) beweisen; es ist aber einfacher, (38) aus diesen beiden Formeln herzuleiten.

(1.4.14), (1.4.15) sind für die w der Gestalt (1.4.9) bewiesen worden, d. h. es wurde $\operatorname{Re}(w) \leqslant \frac{1}{3}$ angenommen. Durch analytische Fortsetzung ergeben sich aber hieraus diese Formeln auch für $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{3}$. Die Summe (1.4.15) kann auch mit $T(w)$ bezeichnet werden. Dann gilt (1.4.14) für alle unsere w.

In (1.4.14), (1.4.15) wird θ durch (1.4.7) gegeben, während die $S(b_r)$ durch (1.4.13) bestimmt sind. Dort ist h der Einschränkung $0 \leqslant h \leqslant q$ unterworfen. Diese Einschränkung kann aber beseitigt werden. Zunächst hat nämlich die Funktion (1.4.4) die Periode $2i$, also die linke Seite von (1.4.14) in h die Periode q. Rechts hat die Gaußsche Summe $S(h, q)$ nach (1.1.1) in h die Periode q und dasselbe gilt wegen (1.4.13) und (1.1.25) für die Funktion (1.4.15).

Wir können also (1.4.14), (1.4.15) auf unsere jetzigen h, q anwenden und erhalten, indem wir w durch $w+2\theta i = w+2hi/q$ ersetzen und beachten, daß $S(h,0,q) = S(h,q)$ ist,

$$\vartheta^k(w) = q^{-k}\left(w + 2\frac{h}{q} i\right)^{-k/2} \times \sum_{b_1,\ldots,b_k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi(b_1^2+\ldots+b_k^2)}{q^2\{w+2(h/q)i\}}\right) S(h, b_1, q)\ldots S(h, b_k, q). \tag{39}$$

Zwischen der Funktion (10) und der Funktion (1.4.4) besteht, auf Grund von (1.4.4'), der Zusammenhang

$$\vartheta_k(w) = \vartheta^k\left(\frac{w}{\pi}\right).$$

Also folgt die Gleichung (38) aus (39), wenn man w durch w/π und h durch $-h$ ersetzt.

In der Folge wird angenommen, daß w, w' die Gestalt (29) haben. Mit t sollen unterschiedslos positive Zahlen bezeichnet werden, die nur von k abhängen dürfen. Wir erinnern ferner daran, daß die Zahlen h, q

den Bedingungen (25) zu genügen haben und die Zahlen h', q' entsprechenden Bedingungen. Werden diesen Zahlen noch gewisse andere Bedingungen auferlegt, so soll dies stets angegeben werden, z. B. die Bedingung $h > 0$ in Hilfssatz 6.

Hilfssatz 5. *Für* $|y| \leqslant 2N$ *ist*

$$\frac{F(w)}{w} = Bx^{k/4+1/2}. \tag{40}$$

Beweis. Der Beweis von (40) ist dem von (1.4.18) ähnlich. Setzt man

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{x}{1+x^2y^2} = Y,$$

so ist wegen (28)

$$Y \geqslant \frac{x}{1+4x^2N^2} \geqslant t, \qquad Y = \frac{1}{x|w|^2}.$$

Nach (1.1.25) ist ferner $S(0,b,1) = 1$. Wendet man also (38) mit $h = 0$, $q = 1$ an, so folgt nach (11)

$$F(w) = \vartheta_k(w) - \pi^{k/2} w^{-k/2} = B|w|^{-k/2} \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_k=-\infty \\ b_1^2+\ldots+b_k^2>0}}^{\infty} \exp\{-\pi^2 Y(b_1^2+\ldots+b_k^2)\}.$$

Schließt man jetzt weiter, wie beim Beweise der Abschätzung (1.4.18) (wo $q = 1$ anzunehmen ist), so ergibt sich

$$\frac{F(w)}{w} = B|w|^{-k/2-1}\exp(-\pi^2 Y) = Bx^{k/4+1/2}Y^{k/4+1/2}\exp(-\pi^2 Y) = Bx^{k/4+1/2}.$$

Hilfssatz 6. *Für* $h > 0$, $y \in J_{hq}$ *ist*

$$\frac{h}{q} < y < |w| < t\frac{h}{q}, \tag{41}$$

$$F(w) = Bx^{k/2}q^{-k/2}\left(1+x\left|y-2\pi\frac{h}{q}\right|\right)^{-k/2}, \tag{42}$$

$$|w|^{-k/2} \leqslant x^{k/4}, \tag{43}$$

$$\vartheta_k(w) - \pi^{k/2}\left(\frac{S(-h,q)}{q}\right)^k\left(w-2\pi i\frac{h}{q}\right)^{-k/2} = Bx^{k/4}, \tag{44}$$

$$x^{k/2}q^{-k/2}\left(1+x\left|y-2\pi\frac{h}{q}\right|\right)^{-k/2} \geqslant tx^{k/4}. \tag{45}$$

Beweis. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes seien erfüllt und es werde zur Abkürzung $2\pi h/q = s$ gesetzt. Nach (27) ist dann

$$|y-s| \leqslant 2\pi q^{-1}X^{-1},$$

also

$$1+x|y-s| \leqslant 1+tXq^{-1} \leqslant tXq^{-1},$$

woraus die Ungleichung (45) folgt. Weiter ist nach (27)

$$y \geqslant 2\pi\left(\frac{h}{q}-\frac{1}{qX}\right) \geqslant 2\pi\left(\frac{h}{q}-\frac{h}{q\,3^{1/2}}\right) > \frac{h}{q},$$

$$y \leqslant 2\pi\left(\frac{h}{q}+\frac{1}{qX}\right) \leqslant 2\pi\left(\frac{h}{q}+\frac{h}{q\,3^{1/2}}\right),$$

$$|w| \leqslant \frac{1}{x}+|y| \leqslant \frac{h}{q}+|y| < t\frac{h}{q},$$

womit die Ungleichungen (41) nachgewiesen sind. Aus (41) folgt

$$|w|^{-k/2} \leqslant q^{k/2} \leqslant x^{k/4},$$

also (43).

Der Beweis von (44) verläuft analog wie der von (40) oder von (1.4.18). Zunächst ist wegen (45)

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{q^2(w-si)} = \frac{x}{q^2(1+x^2(y-s)^2)} \geqslant \frac{x}{q^2(1+x|y-s|)^2} \geqslant t.$$

Bringt man also in (38) das Glied mit $b_1 = \ldots = b_k = 0$ nach links und beachtet, daß nach (1.1.25), (1.1.26) und (1.1.1)

$$S(-h,0,q) = S(-h,q), \qquad S(-h,b_1,q)\ldots S(-h,b_k,q) = Bq^{k/2}$$

ist, so folgt, daß die linke Seite von (44)

$$= Bq^{-k}|w-si|^{-k/2}q^{k/2}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_k=-\infty \\ b_1^2+\ldots+b_k^2>0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2x(b_1^2+\ldots+b_k^2)}{q^2(1+x|y-s|)^2}\right)$$

$$= Bq^{-k/2}\frac{x^{k/2}}{(1+x^2(y-s)^2)^{k/4}}\exp\left(-\frac{\pi^2x}{q^2(1+x|y-s|)^2}\right)$$

$$= Bx^{k/4}\left(\frac{x}{q^2(1+x|y-s|)^2}\right)^{k/4}\exp\left(-\frac{\pi^2x}{q^2(1+x|y-s|)^2}\right)$$

$$= Bx^{k/4},$$

wie es sich gehört. Schließlich folgt aus (11), (44), (1.1.2), (43) und (45)

$$\begin{aligned}F(w) &= Bq^{-k/2}|w-si|^{-k/2}+Bx^{k/4}+Bx^{k/4}\\ &= Bx^{k/2}q^{-k/2}\big(1+x^2(y-s)^2\big)^{-k/4}+Bx^{k/4}\\ &= Bx^{k/2}q^{-k/2}(1+x|y-s|)^{-k/2},\end{aligned}$$

womit auch (42) nachgewiesen ist.

Wir führen noch die folgenden einfachen Abschätzungen an, die daraus folgen, daß w und w' die Gestalt (29) haben:

$$\frac{1}{w+w'} = \frac{Bx}{1+x|y+y'|},\qquad e^{z(w+w')} = B \quad \text{für} \quad 0 \leqslant z \leqslant x. \tag{46}$$

§ 2. Hauptsätze

Wir bringen noch fünf Hilfssätze, in denen das Integral (1.31) und die Summen (1.33), (1.36) behandelt werden. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$g_k(x) = \begin{cases} x^{5/2}\log x & \text{für} \quad k=4,\\ x^3\log^2 x & \text{für} \quad k=5,\\ x^{k-2} & \text{für} \quad k>5.\end{cases} \tag{1}$$

Hilfssatz 1.

$$S_1 = Bg_k(x). \tag{2}$$

Beweis. Nach (1.31) ist

$$S_1 = B\iint\limits_{\mathrm{Min}(|y|,|y'|)\leqslant N} |G(w,w')|\,dy\,dy' = B(S_{11}+S_{12}+S_{13}+S_{14}+S_{15}),$$

wo

$$S_{11} = \int\limits_{-2N}^{2N}\int\limits_{-2N}^{2N},\qquad S_{12} = \int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{2N}^{\infty},\qquad S_{13} = \int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-\infty}^{-2N},$$

$$S_{14} = \int\limits_{2N}^{\infty}\int\limits_{-N}^{N},\qquad S_{15} = \int\limits_{-\infty}^{-2N}\int\limits_{-N}^{N}.$$

Nach den beiden Eigenschaften der Funktion $G(w,w')$, die im Anschluß an die Formel (1.30) genannt wurden, ist aber $S_{12} = S_{14} = S_{15} = S_{13}$. Es genügt daher zu zeigen, daß

$$S_{11} = \int\limits_{-2N}^{2N}\int\limits_{-2N}^{2N} |G(w,w')|\,dy\,dy' = Bg_k(x), \tag{3}$$

$$S_{12} = \int\limits_{-N}^{N} dy \int\limits_{2N}^{\infty} |G(w,w')|\,dy' = Bg_k(x). \tag{4}$$

Im Integral (3) ist nach (1.29), (1.40) und (1.46)

$$G(w,w') = Bx^{k/2+1}\cdot\frac{x}{1+x|y+y'|}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}S_{11} &= Bx^{k/2+1}\int\limits_{-2N}^{2N}\int\limits_{-2N}^{2N}\frac{x\,dy\,dy'}{1+x|y+y'|}\\ &= Bx^{k/2+1}\int\limits_0^{2N} dy\int\limits_0^{y}\frac{x\,dy'}{1+x(y-y')} = Bx^{k/2+1}\int\limits_0^{2N}\log(1+xy)\,dy.\end{aligned}$$

Wegen (1.28), (1) folgt daraus

$$S_{11} = Bx^{(k+1)/2}\log x = Bg_k(x),$$

womit die Abschätzung (3) bewiesen ist.

Im Integral (4) ist nach (1.29), (1.40) und (1.46), da hier $y' \geqslant 2|y|$ ist,

$$G(w,w') = Bx^{k/4+1/2}\frac{F(w')}{w'}\cdot\frac{x}{1+xy'} = Bx^{k/4+1/2}\frac{F(w')}{w'y'}.$$

Daher ist

$$S_{12} = Bx^{k/4+1/2}\int\limits_{-N}^{N} dy\int\limits_{2N}^{\infty}\left|\frac{F(w')}{w'}\right|\frac{dy'}{y'},$$

oder aber, indem man der einfacheren Schreibweise wegen y mit y' vertauscht,

$$S_{12} = Bx^{k/4+1/2}\int\limits_{-N}^{N} dy'\int\limits_{2N}^{\infty}\left|\frac{F(w)}{w}\right|\frac{dy}{y}.$$

Von hieraus ergibt sich wegen (1.25) weiter, da die Intervalle J_{hq} mit $h>0$ die Halbgerade $y \geqslant N$ bedecken,

$$S_{12} = Bx^{k/4+1/2}\int\limits_{-N}^{N} dy' \sum_{\substack{h>0,\,q\leqslant X\\ (h,q)=1}}\int\limits_{J_{hq}}\left|\frac{F(w)}{w}\right|\frac{dy}{y}. \tag{5}$$

Hier ist nach (1.41) und (1.42)

$$\int\limits_{J_{hq}} = Bx^{k/2}q^{-k/2}\left(\frac{q}{h}\right)^2 \int\limits_{J_{hq}} \left(1+x\left|y-2\pi\frac{h}{q}\right|\right)^{-k/2} dy$$

$$= Bx^{k/2-1}q^{2-k/2}h^{-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x|y|)^{-k/2}x\,dy$$

$$= Bx^{k/2-1}q^{2-k/2}h^{-2}\int\limits_0^{\infty}(1+y)^{-k/2}dy = Bx^{k/2-1}q^{2-k/2}h^{-2}.$$

Setzt man dies in (5) ein, so folgt

$$\sum\int\limits_{J_{hq}} = Bx^{k/2-1}\sum_{q\leqslant X} q^{2-k/2}\sum_{h=1}^{\infty}h^{-2} = Bx^{k/2-1}\sum_{q\leqslant X}q^{2-k/2}.$$

Somit ist, im Hinblick auf (1.28),

$$S_{12} = Bx^{3k/4-1/2}N\sum_{q\leqslant X}q^{2-k/2} = Bx^{3k/4-1}\sum_{q\leqslant X}q^{2-k/2}$$

$$= Bx^{5/2} \text{ für } k=4, \quad = Bx^3 \text{ für } k=5, \quad = Bx^{3k/4-1}\log x \text{ für } k>5.$$

Wegen (1) ist also die Abschätzung (4) richtig.

Hilfssatz 2.

$$S_3 = Bg_k(x). \tag{6}$$

Beweis. Wir haben die erste Summe (1.36) abzuschätzen, wobei $f(h,q)$ durch (1.35) gegeben ist. Gehören y und y' beide dem Intervall J_{hq} an, so ist nach (1.41)

$$y > hq^{-1}, \quad y' > hq^{-1}, \quad \text{also} \quad |w+w'| > hq^{-1}, \quad |w||w'||w+w'| > h^3q^{-3}.$$

Nach (1.29), (1.42) und (1.46) ist daher, wenn zur Abkürzung $2\pi h/q = s$ geschrieben wird,

$$S_3 = B\sum_{h>0,\,q\leqslant X}q^3h^{-3}\int\limits_{J_{hq}}\int\limits_{J_{hq}}x^kq^{-k}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s|)^{-k/2}dy\,dy'$$

$$= Bx^{k-2}\sum_{h>0,\;q\leqslant X}q^{3-k}h^{-3}\Big\{\int\limits_{J_{hq}}(1+x|y-s|)^{-k/2}x\,dy\Big\}^2$$

$$= Bx^{k-2}\sum_{q\leqslant X}q^{3-k}\sum_{h=1}^{\infty}h^{-3}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x|y|)^{-k/2}x\,dy\Big\}^2$$

$$= Bx^{k-2}\sum_{q\leqslant X}q^{3-k}\Big\{\int\limits_0^{\infty}(1+y)^{-k/2}dy\Big\}^2$$

$$= Bx^{k-2}\sum_{q\leqslant X}q^{3-k} = Bx^2\log x \quad \text{für} \quad k=4,$$

$$= Bx^{k-2} \quad \text{für } k>4.$$

Wegen (1) ist also die Abschätzung (6) bewiesen.

Hilfssatz 3.

$$S_2 = Bg_k(x). \tag{7}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde bei diesem Beweise $X \geqslant 8$ angenommen. Wir haben die Summe (1.33) abzuschätzen, in der das Summationsgebiet durch (1.34) und der Summand $M(h,q,h',q')$ durch (1.32) gegeben sind.

Ersetzt man y, y' im zweiten Integral (1.32) durch $y, -y'$, im dritten durch $-y, y'$, im vierten durch $-y, -y'$, so wird das Integrationsgebiet in allen vier Integralen dasselbe, nämlich $y\in J_{hq}$, $y'\in J_{h'q'}$. Aus der zweiten der im Anschluß an Formel (1.30) genannten Eigenschaften von $G(w,w')$ geht zugleich hervor, daß das erste Integral zum vierten konjugiert komplex ist, das zweite Integral zum dritten. Folglich ist

$$M(h,q,h',q') = B\int\limits_{J_{hq}}dy\int\limits_{J_{h'q'}}|G(w,w')|\,dy' + B\int\limits_{J_{hq}}dy\int\limits_{-J_{h'q'}}|G(w,w')|\,dy'. \tag{8}$$

Bei der Abschätzung dieser Integrale werden wir von den Abkürzungen

$$2\pi\frac{h}{q} = s, \qquad 2\pi\frac{h'}{q'} = s'$$

Gebrauch machen.

Für das erste Integral (8) ergibt sich aus (1.29), (1.41), (1.42) und (1.46)

$$\int\limits_{J_{hq}}\int\limits_{J_{h'q'}}|G(w,w')|\,dy\,dy' = B\frac{q}{h}\cdot\frac{q'}{h'}x^kq^{-k/2}q'^{-k/2}\times \tag{9}$$

$$\times\int\limits_{J_{hq}}\int\limits_{J_{h'q'}}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s'|)^{-k/2}(1+x|y+y'|)^{-1}x\,dy\,dy'.$$

Im zweiten Integral (8) ersetzen wir y' durch $-y'$, wodurch das Integrationsgebiet in dasjenige des ersten Integrals (8) übergeht. Dabei geht, wie aus (1.29) ersichtlich ist, die Zahl w' in den konjugiert komplexen Wert $\overline{w}'$ über. Nach der über $F(w)$ im Anschluß an Formel (1.30) gemachten Bemerkung geht dann $F(w')$ in den konjugiert komplexen Wert über.

Mit anderen Worten, wir dürfen bei der Abschätzung des zweiten Integrals die Formeln (1.29), (1.41) und (1.42) genau wie bei der Abschätzung des ersten Integrals anwenden, während in (1.46) die erste Abschätzung durch

$$\frac{1}{w+\overline{w}'} = \frac{Bx}{1+x|y-y'|}$$

zu ersetzen ist. Dann erhalten wir für das zweite Integral (8) wieder die rechte Seite der Abschätzung (9), wobei nur das Glied

$$(10)\qquad (1+x|y+y'|)^{-1} \quad \text{durch} \quad (1+x|y-y'|)^{-1}$$

zu ersetzen ist. Da aber nach (1.41) für $y \in J_{hq}$, $y' \in J_{h'q'}$, wegen $h>0$, $h'>0$, auch $y>0$, $y'>0$ ist, so ist $|y+y'| > |y-y'|$; demnach ist der zweite Ausdruck (10) größer als der erste. Für beide Integrale (8) ist also die Abschätzung (9) erfüllt, wenn rechts $|y+y'|$ durch $|y-y'|$ ersetzt wird, d. h. es ist

$$M(h,q,h',q') = Bx^k q^{1-k/2}(q')^{1-k/2}h^{-1}h'^{-1} \times$$
$$\times \int_{J_{hq}}\int_{J_{h'q'}} (1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s'|)^{-k/2}(1+x|y-y'|)^{-1}x\,dy\,dy'.$$

In Verbindung mit (1.33) und (1.34), ergibt dies

$$(11)\qquad S_2 = Bx^{k-2}\sum_{\substack{h>0,\ h'>0,\ q\leqslant X,\ q'\leqslant X\\ (h,q)=(h',q')=1,\ hq'\neq h'q}} (qq')^{1-k/2}(hh')^{-1}I(h,q,h',q'),$$

wo

$$(12)\qquad I(h,q,h',q')$$
$$= \int_{J_{hq}}\int_{J_{h'q'}} (1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s'|)^{-k/2}\left(\frac{1}{x}+|y-y'|\right)^{-1}x\,dy\,x\,dy'.$$

Das Integral (12) bleibt unverändert, wenn man h mit h' und zugleich q mit q' vertauscht. Daher kann in der Summe (11) noch gefordert werden, daß $q' \geqslant q$ ist, man kann also dort die beiden Ungleichungen $q \leqslant X$, $q' \leqslant X$ durch die eine Ungleichung $q \leqslant q' \leqslant X$ ersetzen. Auf diese Weise ergibt sich

$$(13)\qquad S_2 = BS_{21}+BS_{22},$$

wobei

$$(14)\qquad S_{21} = x^{k-2}\sum_{\substack{h>0,\ h'>0,\ q\leqslant q'\leqslant X,\ (h,q)=(h',q')=1\\ 0<|h/q-h'/q'|\leqslant 4/qX}} (qq')^{1-k/2}(hh')^{-1}I(h,q,h',q'),$$

$$(15)\qquad S_{22} = x^{k-2}\sum_{\substack{h>0,\ h'>0,\ q\leqslant q'\leqslant X,\ (h,q)=(h',q')=1\\ |h/q-h'/q'|>4/qX}} (qq')^{1-k/2}(hh')^{-1}I(h,q,h',q').$$

In jedem Gliede der Summe (14) ist

$$(16)\qquad \frac{1}{qq'} \leqslant \left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right| \leqslant \frac{4}{qX},$$

also

$$(17)\qquad \frac{X}{4} \leqslant q' \leqslant X.$$

Weiter folgt aus (16), daß in jedem Gliede der Summe (14)

$$(18)\qquad \frac{h'}{q'} \geqslant \frac{h}{2q}$$

ist. In der Tat ist wegen $X \geqslant 8$

$$\frac{h'}{q'} \geqslant \frac{h}{q}-\frac{4}{qX} \geqslant \frac{h}{q}\left(1-\frac{4}{X}\right) \geqslant \frac{h}{2q}.$$

Weiter folgt aus (16) und (17)

$$(19)\qquad |hq'-h'q| \leqslant 4; \qquad hq' \equiv a \pmod q, \qquad \text{wo} \qquad |a| \leqslant 4.$$

Bei gegebenen h, q gehört also q' höchstens neun Restklassen $\operatorname{mod} q$ an, nimmt daher im ganzen BXq^{-1} Werte an. Bei gegebenen h, q, q' nimmt h' wegen (19) nur B Werte an.

Bei der jetzt folgenden Abschätzung der Summe (14) sollen die Fälle $k \neq 5$ und $k = 5$ getrennt behandelt werden.

1) Es sei $k \neq 5$. Bei der Abschätzung des Integrals (12) nach obne werde dann der Faktor

$$\left(\frac{1}{x}+|y-y'|\right)^{-1}$$

durch x ersetzt. Es ergibt sich dann, indem wir eine schon mehrfach ausgeführte Rechnung wiederholen,

$$I(h,q,h',q') = Bx\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+x|y|)^{-k/2}x\,dy\right\}^2 = Bx.$$

Setzt man dies in (14) ein und beachtet (17), (18) sowie das im Anschluß an (19) Gesagte, so folgt

$$S_{21} = Bx^{k-1}\sum_{h,h',q,q'}\frac{q}{h}\cdot\frac{q'}{h'}q^{-k/2}q'^{-k/2}$$

$$= Bx^{k-1}\sum_{h,h',q,q'}\left(\frac{q}{h}\right)^2 q^{-k/2}X^{-k/2}$$

$$= Bx^{k-1}\sum_{h>0,\,q\leqslant X}\left(\frac{q}{h}\right)^2 q^{-k/2}X^{-k/2}Xq^{-1}$$

$$= Bx^{3k/4-1/2}\sum_{q\leqslant X}q^{1-k/2}$$

$$= Bx^{5/2}\log x \quad \text{für} \quad k=4 \quad \text{und} \quad Bx^{k-2} \quad \text{für} \quad k>5.$$

Wegen (1) ist also für $k \neq 5$

$$S_{21} = Bg_k(x). \tag{20}$$

2) Es sei $k=5$. Dann muß das Integral (12) etwas sorgfältiger als im vorigen Falle abgeschätzt werden. Hier ist

$$(1+x|y-s|)(1+x|y'-s'|)\left(\frac{1}{x}+|y-y'|\right)$$

$$= \frac{1}{x}(1+x|y-s|)(1+x|y'-s'|)(1+x|y-y'|)$$

$$\geqslant |s-y|+|y-y'|+|y'-s'| \geqslant |s-s'| = 2\pi\left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{qq'} \geqslant \frac{1}{qX},$$

also

$$I(h,q,h',q') = BqX\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+x|y|)^{-3/2}x\,dy\Big\}^2 = BqX.$$

Von hieraus ergibt sich weiter, durch eine analoge Überlegung wie im vorigen Falle,

$$S_{21} = Bx^{5-3/2}\sum_{h,h',q,q'}\frac{q}{h}\cdot\frac{q'}{h'}q^{1-5/2}q'^{-5/2}$$

$$= Bx^{7/2}\sum_{h,h',q,q'}\left(\frac{q}{h}\right)^2 q^{-3/2}X^{-5/2}$$

$$= Bx^{7/2}\sum_{h>0,\ q\leqslant X}\left(\frac{q}{h}\right)^2 q^{-3/2}X^{-5/2}Xq^{-1}$$

$$= Bx^{11/4}\sum_{q\leqslant X}q^{-1/2} = Bx^3,$$

so daß die Abschätzung (20) auch in diesem Fall gültig bleibt.

Wir wenden uns jetzt der Summe (15) zu, deren Abschätzung längere Rechnungen erfordert. Hier ist

$$|s-s'| = 2\pi\left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right| > \frac{8\pi}{qX} \geqslant 2\left(\frac{2\pi}{qX}+\frac{2\pi}{q'X}\right). \tag{21}$$

Für $y \in J_{hq}$, $y' \in J_{h'q'}$ ist ferner nach (1.27)

$$|y-s| \leqslant \frac{1}{qX}, \quad |y'-s'| \leqslant \frac{1}{q'X}.$$

Zusammen mit (21) ergibt dies

$$|y-y'| = |(s-s')+(y-s)+(s'-y')| \geqslant |s-s'|-|y-s|-|y'-s'|$$

$$\geqslant \left(1-\frac{1}{4\pi}\right)|s-s'| \geqslant \frac{1}{2}|s-s'|,$$

also

$$\frac{1}{x}+|y-y'| \geqslant |y-y'| \geqslant \left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right|.$$

Für das Integral (12) bekommt man hieraus

$$I(h,q,h',q') = B\left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right|^{-1}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+x|y|)^{-k/2}x\,dy\Big\}^2$$

$$= B\left|\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'}\right|^{-1} = B\frac{qq'}{|hq'-h'q|}.$$

Daher ergibt sich für die Summe (15), wenn jetzt die Bedingung

$$\frac{h}{q}-\frac{h'}{q'} > \frac{4}{qX}$$

durch die schwächere $hq' \neq h'q$ ersetzt wird,

$$S_{22} = Bx^{k-2} \sum_{\substack{h>0,\ h'>0,\ q\leq q'\leq X \\ (h,q)=(h',q')=1,\ hq'\neq h'q}} (qq')^{2-k/2}(hh')^{-1}|hq'-h'q|^{-1}$$

$$= Bx^{k-2} \sum_{\substack{h>0,\ q\leq X \\ (h,q)=1}} q^{2-k/2}h^{-1}U(h,q), \tag{22}$$

wo

$$U(h,q) = \sum_{\substack{h'>0,\ q\leq q'\leq X \\ hq'\neq h'q}} q'^{2-k/2}h'^{-1}|hq'-h'q|^{-1}. \tag{23}$$

Es werde jetzt

$$U(h,q) = U_1(h,q)+U_2(h,q) \tag{24}$$

gesetzt. Dabei enthalte U_1 diejenigen Glieder der Summe (23), in denen $hq' > h'q$, und U_2 enthalte die Glieder mit $hq' < h'q$.

In U_1 setzen wir

$$hq'-h'q = r+aq \qquad (r\leq q,\ a\geq 0),$$

so daß

$$h' = \frac{hq'-r-aq}{q} > 0, \qquad hq' \equiv r \pmod q.$$

Dann wird

$$U_1(h,q) = q \sum_{\substack{r\leq q,\ a\geq 0,\ q\leq q'\leq X \\ r+aq<hq',\ hq'\equiv r \pmod q}} q'^{2-k/2}\{(hq'-r-aq)(r+aq)\}^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{r\leq q,\ q\leq q'\leq X \\ hq'\equiv r \pmod q}} q'^{2-k/2}V_1, \tag{25}$$

wo

$$V_1 = V_1(h,q,r,q') = q \sum_{\substack{a\geq 0 \\ r+aq<hq'}} \{(hq'-r-aq)(r+aq)\}^{-1}. \tag{26}$$

In U_2 setzen wir

$$h'q-hq' = r+aq \qquad (r\leq q,\quad a\geq 0),$$

so daß

$$h' = \frac{hq'+r+aq}{q}, \qquad hq' \equiv -r \pmod q.$$

Dann wird

$$U_2(h,q) = q \sum_{\substack{r\leq q,\ a\geq 0,\ q\leq q'\leq X \\ hq'\equiv -r \pmod q}} q'^{2-k/2}\{(hq'+r+aq)(r+aq)\}^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{r\leq q,\ q\leq q'\leq X \\ hq'\equiv -r \pmod q}} q'^{2-k/2}V_2, \tag{27}$$

wo

$$V_2 = V_2(h,q,r,q') = q \sum_{a\geq 0} \{(hq'+r+aq)(r+aq)\}^{-1}. \tag{28}$$

Nach (26) und (28) ist

$$V_1 = B\frac{q}{hq'} \sum_{r+aq\leq hq'/2} \frac{1}{r+aq} + B\frac{q}{hq'} \sum_{hq'/2<r+aq<hq'} \frac{1}{hq'-r-aq}, \tag{29}$$

$$V_2 = B\frac{q}{hq'} \sum_{r+aq\leq hq'/2} \frac{1}{r+aq} + Bq \sum_{r+aq\geq hq'/2} \frac{1}{(r+aq)^2}, \tag{30}$$

wobei in den vier Summen über alle $a\geq 0$ summiert wird, die den angegebenen Bedingungen genügen. Hier ist wegen $q'\leq X$

$$\sum_{r+aq\leq hq'/2} \frac{1}{r+aq} = \frac{B}{r} + \frac{B}{q}\sum_{n\leq hq'/q}\frac{1}{n} = \frac{B}{r} + \frac{B}{q}\log 2hq'. \tag{31}$$

In der zweiten Summe (29) durchläuft $hq'-r-q$ wegen (25) nur positive Vielfache nq von q, die aber $< hq'$ sind. Daher ist

$$\sum_{hq'/2<r+aq<hq'} \frac{1}{hq'-r-aq} = \frac{B}{q}\sum_{n\leq hq'/q}\frac{1}{n} = \frac{B}{q}\log 2hq'. \tag{32}$$

Für die zweite Summe (30) ergibt sich wegen $r\leq q$, $q\leq q'$

$$\sum_{r+aq\geq hq'/2} \frac{1}{(r+aq)^2} \leq \left(\frac{2}{hq'}\right)^2 + \sum_{r+aq\geq hq'/2+q} \frac{1}{(r+aq)^2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{hq'}\right)^2 + \sum_{aq\geq hq'/2}\frac{1}{(aq)^2} = \left(\frac{2}{hq'}\right)^2 + \frac{1}{q^2}\sum_{a\geq hq'/2q}\frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{B}{h^2q'^2} + \frac{B}{q^2}\cdot\frac{q}{hq'} = \frac{B}{h^2q'^2} + \frac{B}{hqq'} = \frac{B}{hqq'},$$

folglich

$$\sum_{r+aq\geq hq'/2} \frac{1}{(r+aq)^2} = \frac{B}{hqq'}\log 2hq'. \tag{33}$$

Aus (29)-(33) folgt

$$V_j = B\frac{q}{hq'r} + \frac{B}{hq'}\log 2hq' \qquad (j = 1, 2).$$

Setzt man dies in (25) und (27) ein, so ergibt sich für $j = 1, 2$

$$U_j(h, q) = \frac{B}{h} \sum_{\substack{r\leqslant q,\ q\leqslant q'\leqslant X\\ hq'\equiv(-1)^{j-1}r \pmod q}} q'^{1-k/2}\left(\frac{q}{r} + \log 2hq'\right). \tag{34}$$

Bei gegebenem r durchläuft q' in (34) diejenigen Zahlen des Intervalls $q \leqslant q' \leqslant X$, die, wegen $(h, q) = 1$, einer festen Restklasse $\bmod q$ angehören. Verschiedenen Werten von r entsprechen dabei verschiedene Restklassen. Daher ist

$$U_j(h, q) = \frac{Bq}{h}\sum_{r\leqslant q}\frac{1}{r} \sum_{\substack{q\leqslant q'\leqslant X\\ hq'\equiv(-1)^{j-1}r \pmod q}} q'^{1-k/2} + \frac{B}{h}\sum_{q\leqslant q'\leqslant X} q'^{1-k/2}\log 2hq'.$$

In der ersten Summe nach q' durchläuft q' in jedem Intervall der Gestalt $nq \leqslant q' < (n+1)q$ höchstens eine Zahl, und diese Zahl ist $\geqslant nq$. Daher ist

$$\sum_{\substack{q\leqslant q'\leqslant X\\ hq'\equiv(-1)^{j-1}r \pmod q}} q'^{1-k/2} = B\sum_{nq\leqslant X}(nq)^{1-k/2} = Bq^{1-k/2}\sum_{n\leqslant X/q} n^{1-k/2}$$

$$= \begin{cases} Bq^{-1}\sum\limits_{n\leqslant X/q} n^{-1} & \text{für } k = 4,\\ Bq^{1-k/2} & \text{für } k > 4.\end{cases}$$

Ferner ist für $k = 4$

$$\sum_{q\leqslant q'\leqslant X} q'^{1-k/2}\log 2hq' = B\log hx \sum_{q\leqslant q'\leqslant X} q'^{-1}$$

und für $k > 4$, nach Hilfssatz 1.3.4 mit $b \to \infty$,

$$\sum_{q\leqslant q'\leqslant X} q'^{1-k/2}\log 2hq' = B\sum_{q'\geqslant q} q'^{1-k/2}\log 2hq' = Bq^{2-k/2}\log 2hq.$$

Somit ist für $k = 4$

$$U_j(h, q) = \frac{B}{h}\sum_{n\leqslant X/q}\frac{1}{n}\log 2q + \frac{B}{h}\sum_{q\leqslant n\leqslant X}\frac{1}{n}\log hx$$

und für $k > 4$

$$U_j(h, q) = \frac{B}{h} q^{2-k/2}\log 2q + \frac{B}{h} q^{2-k/2}\log 2hq.$$

Wegen (24) und $q \leqslant X$ ist daher

$$U(h, q) = \begin{cases} \dfrac{B}{h}\log hx\left(\sum\limits_{n\leqslant X/q}\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{q\leqslant n\leqslant X}\dfrac{1}{n}\right) & \text{für } k = 4,\\ \dfrac{B}{h} q^{2-k/2}\log 2hq & \text{für } k > 4.\end{cases}$$

Setzt man dies in (22) ein, so ergibt sich für $k = 4$

$$S_{22} = Bx^2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\log h + \log x}{h^2}\left(\sum_{q\leqslant X}\sum_{n\leqslant X/q}\frac{1}{n} + \sum_{q\leqslant X}\sum_{q\leqslant n\leqslant X}\frac{1}{n}\right)$$

$$= Bx^2\log x\left(\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{q\leqslant X/n} 1 + \sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{q\leqslant n} 1\right)$$

$$= Bx^2\log x\left(X\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\leqslant X} 1\right) = Bx^2 X\log x = Bx^{5/2}\log x,$$

für $k = 5$

$$S_{22} = Bx^3\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\log h + \log x}{h^2}\sum_{q\leqslant X}\frac{1}{q} = Bx^3\log^2 x$$

und für $k > 5$

$$S_{22} = Bx^{k-2}\left(\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\log 2h}{h^2}\sum_{q=1}^{\infty} q^{4-k} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}\sum_{q=1}^{\infty} q^{4-k}\log q\right) = Bx^{k-2}.$$

Wegen (1) ist daher für $k \geqslant 4$

$$S_{22} = Bg_k(x). \tag{35}$$

Die Behauptung (7) des Hilfssatzes folgt aus (13), (20) und (35).

Hilfssatz 4.

$$S_4 = \frac{D_k^2}{k-1}x^{k-1}\sum_{\substack{h>0,\ q\leqslant X\\ (h,q)=1}} |S(h, q)|^{2k} h^{-2} q^{2-2k} + Bg_k(x). \tag{36}$$

Beweis. Es sei $h>0$, $q \leqslant X$, $(h,q)=1$, $2\pi h/q = s$, $a=1$ oder $a=-1$. Ferner werde gesetzt

$$f_{1a}(w) = \frac{F(w)}{w} - \frac{S^k(ah,q)\,\pi^{k/2}}{wq^k(w+asi)^{k/2}}, \tag{37}$$

$$f_{2a}(w) = \frac{S^k(ah,q)\,\pi^{k/2}}{q^k(w+asi)^{k/2}}\left(\frac{1}{w}+\frac{a}{si}\right), \tag{38}$$

$$f_{3a}(w) = -\frac{a}{si}\cdot\frac{S^k(ah,q)\,\pi^{k/2}}{q^k(w+asi)^{k/2}}, \tag{39}$$

so daß

$$\frac{F(w)}{w} = f_{1a}(w)+f_{2a}(w)+f_{3a}(w). \tag{40}$$

Weiter werde gesetzt

$$V(h,q) = \int_{J_{hq}} dy \int_{-J_{hq}} f_{3,-1}(w) f_{31}(w')\,\frac{e^{x(w+w')}}{w+w'}\,dy', \tag{41}$$

$$W(h,q) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_{3,-1}(w) f_{31}(w')\,\frac{e^{x(w+w')}}{w+w'}\,dy'. \tag{42}$$

Später soll gezeigt werden, daß diese Integrale absolut konvergieren.

Für $y \in \pm J_{hq}$ ist nach (1.41)

$$\frac{1}{w}+\frac{a}{si} = \frac{a(w+asi)}{wsi} = B\frac{w+asi}{ws} = B\frac{q^2}{h^2}(w+asi). \tag{43}$$

Es soll jetzt gezeigt werden: Für $y \in -aJ_{hq}$ ist

$$f_{1a}(w) = Bx^{k/4}h^{-1}q, \tag{44}$$

$$f_{2a}(w) = Bx^{k/2-1}h^{-2}q^{2-k/2}(1+x|y+as|)^{1-k/2}, \tag{45}$$

$$|f_{1a}(w)|+|f_{2a}(w)|+|f_{3a}(w)| = Bx^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y+as|)^{-k/2}. \tag{46}$$

Es sei $y \in J_{hq}$. Dann ist nach (1.11), (1.41) und (1.43)

$$\frac{F(w)}{w} = \frac{\vartheta_k(w)}{w} + Bx^{k/4}h^{-1}q.$$

In Verbindung mit (1.44) und (1.41), ergibt dies

$$\frac{F(w)}{w} = \frac{S^k(-h,q)\,\pi^{k/2}}{wq^k(w-si)^{k/2}} + Bx^{k/4}h^{-1}q.$$

Wegen (37) ist also die Abschätzung (44) für $a=-1$ erfüllt.

Aus der Richtigkeit der Abschätzung (44) für $a=-1$ ergibt sich aber ihre Richtigkeit auch für $a=1$. Ersetzt man nämlich y durch $-y$, so daß $y \in -J_{hq}$, so gehen nach der Bemerkung in § 1, $F(w)$ und w in die konjugiert komplexen Werte $\overline{F(w)}$ und $\overline{w}$ über. Aus (1.1.1), (1.3) und (1.29) geht ferner hervor, daß

$$\frac{S^k(-h,q)}{w(w-si)^{k/2}}, \qquad \frac{S^k(h,q)}{\overline{w}(\overline{w}+si)^{k/2}}$$

konjugiert komplex sind. Nach (37) und dem bereits bewiesenen Spezialfall $a=-1$ von (44) ist demnach

$$f_{11}(\overline{w}) = \overline{f_{1,-1}(w)} = Bx^{k/4}h^{-1}q,$$

womit (44) auch für $a=1$, $y \in -J_{hq}$ nachgewiesen ist.

Weiter folgt aus (38), (1.1.2), (43) und (1.29) für $y \in -aJ_{hq}$

$$\begin{aligned} f_{2a}(w) &= Bq^{k/2-k}q^2h^{-2}(w+asi)^{1-k/2} \\ &= Bh^{-2}q^{2-k/2}\left(\frac{1}{x}+|y+as|\right)^{1-k/2} \\ &= Bx^{k/2-1}h^{-2}q^{2-k/2}(1+x|y+as|)^{1-k/2}, \end{aligned}$$

womit die Abschätzung (45) nachgewiesen ist. Ferner ist nach (44) und (1.45) für $y \in -aJ_{hq}$

$$f_{1a}(w) = Bx^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y+as|)^{-k/2}. \tag{47}$$

Andererseits ist nach (1.27) für diese y

$$x|y+as| \leqslant \frac{2\pi x}{qX} = \frac{2\pi X}{q},$$

also

$$xhq^{-1}(1+x|y+as|)^{-1} \geqslant txq^{-1}\left(\frac{X}{q}\right)^{-1} = tX \geqslant t.$$

Zusammen mit (45) ergibt dies

$$f_{2a}(w) = Bx^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y+as|)^{-k/2}. \tag{48}$$

Endlich folgt aus (39), (1.1.2), (1.41) und (1.29) für $y \in -aJ_{hq}$

$$\begin{aligned} f_{3a}(w) &= Bqh^{-1}q^{k/2-k}\left(\frac{1}{x}+|y+as|\right)^{-k/2} \\ &= Bx^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y+as|)^{-k/2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Aus (47)-(49) ergibt sich die Abschätzung (46). Aus (49) und (1.46) folgt, indem man eine schon mehrmals gemachte Rechnung wiederholt, daß das Integral (41) absolut konvergiert.

Nach (1.35), (1.29) und (41) ist

$$g(h,q)-V(h,q)=\int_{J_{hq}} dy \int_{-J_{hq}} \left\{\frac{F(w)}{w}\cdot\frac{F(w')}{w'}-f_{3,-1}(w)f_{31}(w')\right\}\frac{e^{x(w+w')}}{w+w'}\,dy'.$$

Hierin ist nach (40), (44), (45), (46), (49) und (1.46)

$$\frac{F(w)}{w}\cdot\frac{F(w')}{w'}-f_{3,-1}(w)f_{31}(w')$$

$$=\{f_{1,-1}(w)+f_{2,-1}(w)\}\{f_{11}(w')+f_{21}(w')+f_{31}(w')\}+f_{3,-1}(w)\{f_{11}(w')+f_{21}(w')\}$$

$$=B\left(x^{k/4}h^{-1}q+x^{k/2-1}h^{-2}q^{2-k/2}(1+x|y-s|)^{1-k/2}\right)x^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y'+s|)^{-k/2}+$$

$$+Bx^{k/2}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y-s|)^{-k/2}\times$$

$$\times\left(x^{k/4}h^{-1}q+x^{k/2-1}h^{-2}q^{2-k/2}(1+x|y'+s|)^{1-k/2}\right),$$

$$\frac{e^{x(w+w')}}{w+w'}=\frac{Bx}{1+x|y+y'|}.$$

Daher ist

(50) $$g(h,q)-V(h,q)=Bx^{k/2+1}h^{-2}q^{2-k/2}(I_1+I_2),$$

wobei

$$I_1=\int_{J_{hq}} dy \int_{-J_{hq}} (1+x|y'+s|)^{-k/2}(1+x|y+y'|)^{-1}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}+x^{k/2-1}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y-s|)^{1-k/2}\right\}dy',$$

$$I_2=\int_{J_{hq}} dy \int_{-J_{hq}} (1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y+y'|)^{-1}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}+x^{k/2-1}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y'+s|)^{1-k/2}\right\}dy'.$$

In I_1 ersetzen wir y' durch $-y'$ und vertauschen dann y mit y'; in I_2 ersetzen wir y' durch $-y'$. Dann folgt

$$I_1=I_2=\int_{J_{hq}}\int_{J_{hq}}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y-y'|)^{-1}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}+x^{k/2-1}h^{-1}q^{1-k/2}(1+x|y'-s|)^{1-k/2}\right\}dy\,dy'.$$

In Verbindung mit (1.27), ergibt dies

$$I_1+I_2=Bx^{-2}\int_{-2\pi/qX}^{2\pi/qX}\int_{-2\pi/qX}^{2\pi/qX}(1+x|y|)^{-k/2}(1+x|y-y'|)^{-1}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}+x^{k/2-1}q^{1-k/2}(1+x|y'|)^{1-k/2}\right\}x\,dy\,x\,dy'$$

$$=Bx^{-2}\int_{-2\pi X/q}^{2\pi X/q}\int_{-2\pi X/q}^{2\pi X/q}(1+|y|)^{-k/2}(1+|y-y'|)^{-1}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}+x^{k/2-1}q^{1-k/2}(1+|y'|)^{1-k/2}\right\}dy\,dy'$$

$$=Bx^{-2}\int_{-2\pi X/q}^{2\pi X/q}\int_{-2\pi X/q}^{2\pi X/q}(1+|y|)^{-k/2}\times$$

$$\times\left\{x^{k/4}(1+|y-y'|)^{-1}+x^{k/2-1}q^{1-k/2}(1+|y'|)^{1-k/2}\right\}dy\,dy'$$

$$=Bx^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+|y|)^{k/2}}\left\{x^{k/4}\int_{-4\pi X/q}^{4\pi X/q}\frac{dy'}{1+|y'|}+\right.$$

$$\left.+x^{k/2-1}q^{1-k/2}\int_{-2\pi X/q}^{2\pi X/q}(1+|y'|)^{1-k/2}dy'\right\}$$

$$=Bx^{-2}\left\{x^{k/4}\log x+x^{k/2-1}q^{1-k/2}\int_0^{2\pi X/q}(1+y')^{1-k/2}dy'\right\}.$$

Daher ist

$$I_1+I_2=\begin{cases}Bx^{-1}\log x & \text{für}\quad k=4,\\ Bx^{k/4-2}\log x+Bx^{k/2-3}q^{1-k/2} & \text{für}\quad k>4,\end{cases}$$

also wegen (50)

(51) $$g(h,q)-V(h,q)=\begin{cases}Bh^{-2}x^2\log x & \text{für}\quad k=4,\\ Bh^{-2}q^{2-k/2}x^{3k/4-1}\log x+Bh^{-2}q^{3-k}x^{k-2} & \text{für}\quad k>4.\end{cases}$$

Es soll jetzt der Fehler abgeschätzt werden, der entsteht, wenn das Integral (41) durch das Integral (42) ersetzt wird. Dabei wird sich zugleich die absolute Konvergenz des Integrals (42) ergeben. Zu dem Zwecke bezeichne L_{hq} die Menge aller Zahlen y, die nicht zu J_{hq} gehören, d. h. die gänzung von J_{hq} zur vollen y-Achse. Wird dann zur Abkürzung

(52) $$H(w,w')=f_{3,-1}(w)f_{31}(w')\frac{e^{x(w+w')}}{w+w'}$$

gesetzt, so ist nach (41) und (42)

$$(53)\qquad V(h,q)-W(h,q)=\int_{J_{hq}}dy\int_{-L_{hq}}H(w,w')\,dy'+\int_{L_{hq}}dy\int_{-J_{hq}}H(w,w')\,dy'+$$
$$+\int_{L_{hq}}dy\int_{-L_{hq}}H(w,w')\,dy'.$$

Nach (52), (39), (1.1.2), (1.29) und (1.46) ist

$$H(w,w')=B\frac{q}{h}q^{-k/2}\left(\frac{1}{x}+|y-s|\right)^{-k/2}\frac{q}{h}q^{-k/2}\left(\frac{1}{x}+|y'+s|\right)^{-k/2}\frac{x}{1+x|y+y'|}$$
$$=Bx^{k+1}h^{-2}q^{2-k}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'+s|)^{-k/2}(1+x|y+y'|)^{-1}.$$

Ersetzt man hier y' durch $-y'$, so bekommt man einen Ausdruck, der in y, y' symmetrisch ist. Zugleich läuft dann y' über L_{hq} oder J_{hq}. Auf diese Weise ergibt sich aus (53)

$$(54)\qquad V(h,q)-W(h,q)=Bx^{k-1}h^{-2}q^{2-k}(I_3+I_4),$$

wobei

$$(55)\qquad I_3=\int_{J_{hq}}x\,dy\int_{L_{hq}}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s|)^{-k/2}(1+x|y-y'|)^{-1}x\,dy',$$

$$(56)\qquad I_4=\int_{L_{hq}}\int_{L_{hq}}(1+x|y-s|)^{-k/2}(1+x|y'-s|)^{-k/2}(1+x|y-y'|)^{-1}x\,dy\,x\,dy'.$$

Nach (1.27) ist

$$(57)\qquad |y-s|\geqslant\frac{\pi}{qX},\quad x|y-s|\geqslant\frac{\pi X}{q}\quad\text{für}\quad y\in L_{hq}.$$

Somit ist, wenn man in (55) und (56) den Faktor

$$(1+x|y-y'|)^{-1}$$

durch 1 ersetzt,

$$I_3=B\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|)^{-k/2}dy\left\{\int_{\pi X/q}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\pi X/q}\right\}(1+|y'|)^{-k/2}dy'$$

$$(58)\qquad =B\int_0^{\infty}(1+y)^{-k/2}dy\int_{\pi X/q}^{\infty}(1+y')^{-k/2}dy'=B\int_{\pi X/q}^{\infty}y'^{-k/2}dy'=B\left(\frac{X}{q}\right)^{1-k/2},$$

$$(59)\qquad I_4=B\left\{\int_{\pi X/q}^{\infty}(1+y)^{-k/2}dy\right\}^2=B\left(\frac{X}{q}\right)^{2-k}.$$

Für $k=5$ soll die Abschätzung (58) noch etwas verbessert werden. In (55) ist wegen (57)

$$|y'-s|\geqslant\frac{\pi}{qX},\quad\text{also entweder}\quad|y-s|\geqslant\frac{\pi}{2qX},\quad\text{oder}\quad|y-y'|\geqslant\frac{\pi}{2qX}.$$

Jedenfalls ist also

$$(1+x|y-s|)(1+x|y-y'|)\geqslant\frac{\pi X}{2q}.$$

Das ergibt für $k=5$ die Abschätzung

$$I_3=B\frac{q}{X}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|)^{-3/2}dy\left\{\int_{\pi X/q}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\pi X/q}\right\}(1+|y'|)^{-5/2}dy'$$

$$(60)\qquad =B\frac{q}{X}\int_{\pi X/q}^{\infty}y'^{-5/2}dy'=B\left(\frac{X}{q}\right)^{-5/2}.$$

Aus (54) und (58)-(60) folgt wegen $q\leqslant X$

$$(61)\qquad V(h,q)-W(h,q)=\begin{cases}Bx^{11/4}h^{-2}q^{-1/2} & \text{für}\quad k=5,\\ Bx^{3k/4-1/2}h^{-2}q^{1-k/2} & \text{für}\quad k\neq 5.\end{cases}$$

Wir wenden uns jetzt dem Integral (42) zu. Nach (39) ist

$$(62)\qquad W(h,q)=\frac{1}{si}\cdot\frac{-1}{si}\cdot\frac{S^k(-h,q)\pi^{k/2}}{q^k}\cdot\frac{S^k(h,q)\pi^{k/2}}{q^k}(I_5+I_6),$$

wo

$$(63)\qquad I_5=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(w+w')}-1}{(w-si)^{k/2}(w'+si)^{k/2}(w+w')}\,dy\,dy',$$

$$(64)\qquad I_6=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy\,dy'}{(w-si)^{k/2}(w'+si)^{k/2}(w+w')}.$$

Aus (63) folgt wegen (1.29), wenn man y durch $y+s$ und y' durch $y'-s$ ersetzt,

$$I_5=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(w+w')}-1}{w^{k/2}w'^{k/2}(w+w')}\,dy\,dy'$$
$$=-\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\frac{e^{x(w+w')}-1}{w^{k/2}w'^{k/2}(w+w')}\,dw\,dw'$$
$$=-\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\frac{dw}{w^{k/2}}\int_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i}\frac{dw'}{w'^{k/2}}\int_0^x e^{Y(w+w')}dY.$$

Da dies dreifache Integral absolut konvergiert, so kann die Integrationsfolge vertauscht werden, und es ergibt sich

$$I_5 = -\int\limits_0^x dY \int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} e^{Yw} w^{-k/2} dw \int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} e^{Yw'} w'^{-k/2} dw'$$

$$= -\int\limits_0^x dY \Big\{ \int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} e^{Yw} w^{-k/2} dw \Big\}^2 .$$

Setzt man hier $Yw = z$, so wird wegen (1.4.32), (1.4.33) und (1.3)

$$\int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} e^{Yw} w^{-k/2} dw = Y^{k/2-1} \int\limits_{Y/x-\infty i}^{Y/x+\infty i} e^{z} z^{-k/2} dz = 2\pi i\, Y^{k/2-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right).$$

Somit ist

$$I_5 = 4\pi^2 \Gamma^{-2}\left(\frac{k}{2}\right) \int\limits_0^x Y^{k-2} dY = \frac{4\pi^2 x^{k-1}}{(k-1)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)},$$

d. h. nach (1.4.2)

$$I_5 = \frac{4\pi^{2-k}}{k-1} D_k^2 x^{k-1}. \tag{65}$$

Analog ergibt sich aus (64)

$$I_6 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\,dy'}{w^{k/2} w'^{k/2}(w+w')} = -\int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} \int\limits_{1/x-\infty i}^{1/x+\infty i} \frac{dw\,dw'}{w^{k/2} w'^{k/2}(w+w')}.$$

Verzichtet man jetzt auf die Forderung, daß w und w' die Gestalt (1.29) haben sollen und wendet Hilfssatz 1.1 an, so ergibt sich

$$I_6 = -\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{dw\,dw'}{w^{k/2} w'^{k/2}(w+w')} = B. \tag{66}$$

Nach (62), (65), (66), (1.1.1) und (1.1.2) ist

$$W(h, q) = \left(2\pi \frac{h}{q}\right)^{-2} |S(h, q)|^{2k} \pi^k q^{-2k} (I_5 + I_6)$$

$$= \frac{D_k^2}{k-1} h^{-2} |S(h, q)|^{2k} q^{2-2k} x^{k-1} + B h^{-2} q^{2-k}. \tag{67}$$

Nach (1.36) ist

$$S_4 = \sum_{\substack{h>0,\ q\leq X\\(h,q)=1}} W(h, q) + \sum_{\substack{h>0,\ q\leq X\\(h,q)=1}} \{g(h, q) - V(h, q)\} +$$

$$+ \sum_{\substack{h>0,\, q\leq X\\(h,q)=1}} \{V(h, q) - W(h, q)\}$$

$$= S_{41} + S_{42} + S_{43}, \tag{68}$$

zur Abkürzung. Dabei ist nach (67), (51), (61) und (1)

$$S_{41} - \frac{D_k^2}{k-1} x^{k-1} \sum_{\substack{h>0,\ q\leq X\\(h,q)=1}} |S(h, q)|^{2k} h^{-2} q^{2-2k}$$

$$= B \sum_{h=1}^{\infty} h^{-2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2-k} = B = B g_k(x); \tag{69}$$

$$S_{42} = \begin{cases} B x^2 \log(x) \sum\limits_{q\leq X} 1 = B x^{5/2} \log x & \text{für } k = 4, \\ B x^{11/4} \log(x) \sum\limits_{q\leq X} q^{-1/2} + B x^3 \sum\limits_{q=1}^{\infty} q^{-2} = B x^3 \log x & \text{für } k = 5, \\ B x^{3k/4-1} \log(x) \sum\limits_{q\leq X} q^{-1} + B x^{k-2} = B x^{k-2} & \text{für } k > 5, \end{cases}$$

also

$$S_{42} = B g_k(x); \tag{70}$$

$$S_{43} = \begin{cases} B x^{5/2} \sum\limits_{q\leq X} q^{-1} = B x^{5/2} \log x & \text{für } k = 4, \\ B x^{11/4} \sum\limits_{q\leq X} q^{-1/2} = B x^3 & \text{für } k = 5, \\ B x^{3k/4-1/2} = B x^{k-2} & \text{für } k > 5, \end{cases}$$

also

$$S_{43} = B g_k(x). \tag{71}$$

Die Behauptung (36) des Hilfssatzes folgt aus (68)-(71).

HILFSSATZ 5.

$$S_4 = \frac{\pi^2 D_k^2 (2^k + 8)\zeta(k-2)}{6(k-1)(2^k-1)\zeta(k)} x^{k-1} + B g_k(x). \tag{72}$$

Beweis. Es werde

$$Z_k = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{\infty} |S(h,q)|^{2k} h^{-2} q^{2-2k} \tag{73}$$

gesetzt. Wegen (1.1.2) ist

$$\sum_{q>X} \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{\infty} |S(h,q)|^{2k} h^{-2} q^{2-2k} = B\sum_{h=1}^{\infty} h^{-2} \sum_{q>X} q^{2-k} = BX^{3-k} = Bx^{3/2-k/2}.$$

Ersetzt man daher in der Summe (36) die Bedingung $q \leqslant X$ durch $q > 0$, so ist wegen (1) der Fehler

$$Bx^{k-1+3/2-k/2} = Bx^{(k+1)/2} = Bg_k(x).$$

Nach (73) ist somit

$$S_4 = \frac{D_k^2}{k-1} Z_k x^{k-1} + Bg_k(x). \tag{74}$$

Wir haben jetzt die Reihe (73) zu summieren. Aus (73) und (1.1.2) ergibt sich zunächst

$$Z_k = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1\\(h,u)=1}}^{\infty} |S(h,u)|^{2k} h^{-2} u^{2-2k} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1\\(h,2q)=1}}^{\infty} |S(h,4q)|^{2k} h^{-2} (4q)^{2-2k}$$

$$= \sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{\substack{h=1\\(h,u)=1}}^{\infty} h^{-2} + 2^{4-k} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2-k} \sum_{\substack{h=1\\(h,2q)=1}}^{\infty} h^{-2}.$$

In Verbindung mit (8.3.5), ergibt dies

$$\frac{6}{\pi^2} Z_k = \sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2} + 2^{4-k} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2-k} \sum_{d|2q} \mu(d) d^{-2}. \tag{75}$$

Setzt man in der q-Summe $q = 2^\alpha u$, $d = 2^\beta v$, so wird

$$\sum_{d|2q} \mu(d) d^{-2} = \sum_{\beta=0}^{\alpha+1} \sum_{v|u} \mu(2^\beta v) 2^{-2\beta} v^{-2}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha+1} \mu(2^\beta) 2^{-2\beta} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}$$

$$= (1-\tfrac{1}{4}) \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2} = \tfrac{3}{4} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}.$$

Hieraus folgt, daß in (75)

$$\sum_{q=1}^{\infty} = \tfrac{3}{4} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^\alpha u)^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}$$

$$= \tfrac{3}{4} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (2^{2-k})^\alpha \sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}$$

$$= \tfrac{3}{4} (1-2^{2-k})^{-1} \sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}.$$

Somit ist

$$Z_k = \frac{\pi^2}{6} \{1 + 3\cdot 2^{2-k}(1-2^{2-k})^{-1}\} \sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}. \tag{76}$$

Die Funktion

$$f(u) = u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2}$$

ist multiplikativ. Daher ist (vgl. den analogen Beweis von (5.2.7))

$$\sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2} = \sum_{u=1}^{\infty} f(u) = \prod_{p>2} \{1 + f(p) + f(p^2) + \dots\}$$

$$= \prod_{p>2} \{1 + p^{2-k}(1-p^{-2}) + p^{2(2-k)}(1-p^{-2}) + \dots\}$$

$$= \prod_{p>2} \left\{1 + \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \frac{p^{2-k}}{1-p^{2-k}}\right\}$$

$$= \prod_{p>2} \left\{1 + \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \frac{1}{p^{k-2}-1}\right\} = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{p^2-1}{p^k-p^2}\right)$$

$$= \prod_{p>2} \frac{p^k-1}{p^k-p^2} = \prod_{p>2} \frac{1-p^{-k}}{1-p^{2-k}}.$$

Nach (5.2.2) ist

$$\prod_{p>2} (1-p^{-k}) = \{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1},$$

$$\prod_{p>2} (1-p^{2-k})^{-1} = (1-2^{2-k})\zeta(k-2).$$

Somit ist

$$\sum_{u=1}^{\infty} u^{2-k} \sum_{v|u} \mu(v) v^{-2} = \frac{(1-2^{2-k})\zeta(k-2)}{(1-2^{-k})\zeta(k)}. \tag{77}$$

Ferner ist

$$1+3\cdot 2^{2-k}(1-2^{2-k})^{-1} = \frac{1+2^{3-k}}{1-2^{2-k}}.$$

Aus (76) und (77) ergibt sich daher

$$Z_k = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(1+2^{3-k})\,\zeta(k-2)}{(1-2^{-k})\,\zeta(k)} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(2^k+8)\,\zeta(k-2)}{(2^k-1)\,\zeta(k)}. \tag{78}$$

Zusammen mit (74) ergibt dies die Behauptung (72) des Hilfssatzes.

Aus den Hilfssätzen 1.3, 1, 2, 3, 5 und der Definition (1) der Funktion $g_k(x)$ ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 1.

$$M_k(x) - \frac{D_k^2(2^k+8)\,\zeta(k-2)}{12\,(k-1)\,(2^k-1)\,\zeta(k)}\,x^{k-1} = \begin{cases} Bx^{5/2}\log x & \textit{für} \quad k=4,\\ Bx^3\log^2 x & \textit{für} \quad k=5,\\ Bx^{k-2} & \textit{für} \quad k>5.\end{cases} \tag{79}$$

Für $k=4$ ist der Koeffizient von x^{k-1} in (79) nach (1.4.2), (5.2.1), (8.1.12) und (8.3.3) gleich

$$\frac{\pi^4\cdot 24\,\zeta(2)}{12\cdot 3\cdot 15\,\zeta(4)} = \frac{24\pi^4}{12\cdot 3\cdot 15}\cdot\frac{90\pi^2}{6\pi^4} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

In (79) ist daher als Spezialfall die Abschätzung (1.2) enthalten, die etwas schwächer als (8.1.1) ist.

Der nächste elementare Satz bringt eine Abschätzung vom Ω-Typus für die linke Seite von (79).

Satz 2. *Für $k \geqslant 4$ ist*

$$M_k(x) - \frac{D_k^2(2^k+8)\,\zeta(k-2)}{12\,(k-1)\,(2^k-1)\,\zeta(k)}\,x^{k-1} = \Omega(x^{k-2}). \tag{80}$$

Allgemeiner ist für jede von x unabhängige Zahl Y_k

$$M_k(x) - \frac{D_k^2(2^k+8)\,\zeta(k-2)}{12\,(k-1)\,(2^k-1)\,\zeta(k)}\,x^{k-1} - Y_k x^{k-2} = \Omega(x^{k-2}). \tag{81}$$

Beweis. Der Koeffizient von x^{k-1} in (79)-(81) werde zur Abkürzung mit N_k bezeichnet. Wäre die Behauptung (81) nicht richtig, so müßte für ein geeignetes Y_k

$$M_k(x) = N_k x^{k-1} + Y_k x^{k-2} + o(x^{k-2}) \tag{82}$$

sein. Daraus folgte

$$M_k(n+\varepsilon) - M_k(n) = N_k\{(n+\varepsilon)^{k-1} - n^{k-1}\} + Y_k\{(n+\varepsilon)^{k-2} - n^{k-2}\} + o(n^{k-2}). \tag{83}$$

Andererseits ist nach Definition der Funktion $P_k(x)$ und (2.1.6) für $n \leqslant y \leqslant n+\varepsilon$

$$P_k(y) = A_k(y) - V_k(y) = A_k(n) - V_k(y) = A_k(n) - \frac{2D_k}{k}\,y^{k/2},$$

also wegen (1.1)

$$M_k(n+\varepsilon) - M_k(n) = \int\limits_n^{n+\varepsilon} P_k^2(y)\,dy$$

$$= \varepsilon A_k^2(n) - \frac{4D_k}{k(\frac{1}{2}k+1)}\,A_k(n)\,\{(n+\varepsilon)^{k/2+1} - n^{k/2+1}\} + \frac{4D_k^2}{k^2(k+1)}\{(n+\varepsilon)^{k+1} - n^{k+1}\}. \tag{84}$$

Ferner ist nach (2.1.1) und (2.1.6)

$$A_k(x) = V_k(x) + P_k(x) = Bx^{k/2} + Bx^{(k-1)/2} = Bx^{k/2}. \tag{85}$$

Zieht man (84) von (83) ab und beachtet (85), so ergibt sich

$$0 = \varepsilon(k-1)\,N_k n^{k-2} - \varepsilon A_k^2(n) + \frac{4D_k}{k(\frac{1}{2}k+1)}\,A_k(n)\times$$
$$\times\left\{\varepsilon\left(\frac{k}{2}+1\right)n^{k/2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{k}{2}\,n^{k/2-1} + \frac{1}{6}\varepsilon^3\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)n^{k/2-2}\right\} -$$
$$-\frac{4D_k^2}{k^2(k+1)}\left\{\varepsilon\,(k+1)\,n^k + \frac{1}{2}\varepsilon^2(k+1)\,kn^{k-1} + \frac{1}{6}\varepsilon^3(k+1)k\,(k-1)n^{k-2}\right\} +$$
$$+o\,(n^{k-2}).$$

Dividiert man hier durch n^{k-2}, so folgt für $n\to\infty$

$$\varepsilon(k-1)\,N_k - \varepsilon A_k^2(n)\,n^{2-k} + \frac{4D_k}{k}\,A_k(n)\,n^{-k/2}\left(\varepsilon n^2 + \frac{k}{4}\varepsilon^2 n + \frac{k(k-2)}{24}\varepsilon^3\right) -$$
$$-\frac{4D_k^2}{k^2}\left(\varepsilon n^2 + \frac{k}{2}\varepsilon^2 n + \frac{k(k-1)}{6}\varepsilon^3\right) \to 0,$$

d. h.

$$\left\{(k-1)\,N_k - A_k^2(n)\,n^{2-k} + \frac{4D_k}{k}A_k(n)\,n^{2-k/2} - \frac{4D_k^2}{k^2}n^2\right\}\varepsilon +$$
$$+ D_k n\left(A_k(n)\,n^{-k/2} - \frac{2D_k}{k}\right)\varepsilon^2 +$$
$$+ \frac{(k-2)\,D_k}{6}\left(A_k(n)\,n^{-k/2} - \frac{2D_k}{k}\cdot\frac{2k-2}{k-2}\right)\varepsilon^3 \to 0. \tag{86}$$

Links in (86) steht ein Polynom in ε, dessen Koeffizienten von n abhängen. Also muß bei wachsendem n jeder Koeffizient einzeln gegen Null streben. In der Tat hat (86) die Gestalt

$$f_1(n)\,\varepsilon+f_2(n)\,\varepsilon^2+f_3(n)\,\varepsilon^3 \to 0.$$

Setzt man hier $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, so folgt

$$f_1(n)+\tfrac{1}{2}f_2(n)+\tfrac{1}{4}f_3(n) = g_1(n) \to 0,$$
$$f_1(n)+\tfrac{1}{3}f_2(n)+\tfrac{1}{9}f_3(n) = g_2(n) \to 0,$$
$$f_1(n)+\tfrac{1}{4}f_2(n)+\tfrac{1}{16}f_3(n) = g_3(n) \to 0.$$

Drückt man auf Grund dieser Gleichungen f_1, f_2, f_3 durch g_1, g_2, g_3 aus, so überzeugt man sich, daß

$$f_1(n) \to 0, \quad f_2(n) \to 0, \quad f_3(n) \to 0.$$

Aus (86) folgt jetzt

$$A_k(n)\,n^{-k/2} \to \frac{2D_k}{k}, \qquad A_k(n)\,n^{-k/2} \to \frac{2D_k}{k}\cdot\frac{2k-2}{k-2}.$$

Da diese beiden Beziehungen nicht gleichzeitig bestehen können, so ist (82) falsch, also (81) richtig.

Aus (80) folgt, daß die Abschätzung (79) für $k > 5$ endgültig ist und für $k = 5$ höchstens um $\log^2 x$ verbessert werden kann.

X KAPITEL

ENTWICKLUNG DER FUNKTION $P_k(t)$ IN EINE REIHE NACH BESSELSCHEN FUNKTIONEN

§ 1. Hilfssätze über Besselsche Funktionen

In diesem Kapitel ist $k \geqslant 2$, $h = [(k+1)/2]$.

Die Potenz z^y $(z \neq 0)$ ist nach wie vor durch (4.2.49) bestimmt, d. h. es wird

$$z^y = \exp(y \log z), \quad \text{wo} \quad -\pi < \operatorname{Im}(\log z) \leqslant \pi \tag{1}$$

angenommen. Nach dieser Definition ist

$$(z_1 z_2)^y = z_1^y z_2^y \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} z_1 > 0,\ \operatorname{Re} z_2 \geqslant 0,\ z_2 \neq 0. \tag{2}$$

Unsere Aufgabe wird darin bestehen, die Funktion $P_k(t)$, oder genauer gesagt, die Funktion

$$\tfrac{1}{2}\{P_k(t+0)+P_k(t-0)\} \tag{3}$$

(mit der wir es schon im IV Kapitel zu tun hatten), in eine Reihe nach Besselschen Funktionen zu entwickeln. Diese Reihe konvergiert nur für $k = 2$; für $k > 2$ divergiert sie, ist aber nach einem der Rieszschen Verfahren summierbar. Wir setzen beim Leser keine Kenntnisse aus der Theorie Besselscher Funktionen oder summierbarer Reihen voraus. Das Nötige wird in den §§ 1 und 2 gebracht.

Es sei $N \geqslant 1$. Die Funktion $J_N(t)$, die Besselsche Funktion erster Art, der Ordnung N, werde durch die Reihe

$$J_N(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(N+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{N+2m} \tag{4}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert in jedem Intervall $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ absolut und gleichmäßig. Man kann sie beliebig oft gliedweise differenzieren.

Hilfssatz 1.

$$J'_{N+1}(t) = J_N(t) - \frac{N+1}{t}\,J_{N+1}(t). \tag{5}$$