HILFSSATZ 50. *Es gilt die zweite Gleichung* (12).

Beweis. Für die durch (118)-(122) bestimmte Menge $\mathfrak{R}^*$ nach (21) ist

$$\underset{r\in\mathfrak{R}^*}{T_k(r)} = \tau_{k4},$$

wo τ_{k4} die Summe (1.18) ist. Nach Hilfssatz 49 und der Definition (15) einer nach unten vollständigen Menge ist andererseits

$$\underset{r\in\mathfrak{R}^*}{\operatorname{Min}} T_k(r) = \tau_k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die zweite Gleichung (12).

VIII KAPITEL

DAS INTEGRAL $\int_0^x P_4^2(y)\,dy$

§ 1. Fragestellung — Hilfssätze

In diesem Kapitel hängt B nicht von k ab, so daß die $|B|$ unterhalb von absoluten Konstanten liegen.

In manchen Fällen, wo es nicht gelingt, die Größenordnung bei der Abschätzung einer zahlentheoretischen Funktion genau zu bestimmen, kann man über das Integral des Fehlerquadrats eine weitgehende Auskunft erhalten. Das ist auch für den Fehler $P_4(x)$ der Fall, der bei der Abschätzung von $A_4(x)$ entsteht. Wie wir schon am Schluß von § 3.1 bemerkt haben, ist die genaue Größenordnung von $P_4(x)$ nicht bekannt. Nach den Sätzen 2.8.1 und 3.1.2 wird diese Größenordnung zwischen

$$x\log^{3/4}x(\log\log x)^{1/2} \quad \text{und} \quad x\log\log x$$

zu suchen sein. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß

$$\int_0^x P_4^2(y)\,dy = \tfrac{2}{3}\pi^2x^3 + Bx^{5/2}. \tag{1}$$

Unsere Behandlung dieses Integrals wird sich, wie schon früher die Behandlung von $P_4(x)$ im II und III Kapitel, auf die Jacobische Formel (1.2.20) stützen, d. h. wir werden auch hier unsere Aufgabe auf ein gewisses Teilerproblem zurückführen. Außerdem werden wir von den van der Corputschen Hilfssätzen in § 2.3 Gebrauch machen. Unsere sonstigen Hilfsmittel werden von ziemlich einfacher Art sein, aber wir werden sehr lange Rechnungen auszuführen haben, bis es uns gelingt (1) zu beweisen.

Wir werden es im folgenden wieder viel mit der Funktion $\psi(y)$ zu tun haben, die durch (1.3.1) definiert ist. Sie ist nur eine etwas kürzere Bezeichnung für die Bernoullische Funktion $\bar{B}_1(y)$, vgl. (1.3.6). Daneben wird auch die Funktion $\bar{B}_2(y)$ auftreten, die mittels der Formel (1.3.3) aus dem zweiten Bernoullischen Polynom $B_2(y) = y^2-y+\frac{1}{6}$ gebildet ist. Diese Funktion wollen wir mit $\psi_2(y)$ bezeichnen, d. h. wir setzen

$$\bar{B}_2(y) = \psi_2(y), \tag{2}$$

wo also

$$\psi_2(y) = (y-[y])^2-(y-[y])+\tfrac{1}{6}. \tag{3}$$

Weiter werden wir es jetzt wieder mit den Teilerfunktionen $\sigma(t)$, vgl. (1.2.1), und $S(t)$, vgl. (1.2.23), zu tun haben. Für das in (2.2.2) auftretende Restglied soll eine besondere Bezeichnung eingeführt werden, und zwar sei

$$S(t) = \frac{\pi^2}{12}\,t^2+T(t). \tag{4}$$

Daneben führen wir, nur für diesen Paragraphen, noch die Teilerfunktionen

$$\sigma_0(n) = \sum_{q|n}\frac{1}{q}\,, \qquad S_0(t) = \sum_{n\leqslant t}\sigma_0(n) \tag{5}$$

ein und setzen, zu (4) entsprechend,

$$S_0(t) = \frac{\pi^2}{6}\,t-\frac{1}{2}\log t+T_0(t). \tag{6}$$

Mit γ werde die Eulersche Konstante bezeichnet. Sie wird nur in diesem Paragraphen auftreten.

In diesem ganzen Kapitel wird $x^{1/2}$ sehr oft vorkommen, und zwar vielfach an so unangenehmen Stellen, wie unter Summenzeichen. Es erscheint daher zweckmäßig, eine Abkürzung dafür einzuführen. Wir setzen

$$x^{1/2} = X \tag{7}$$

und bitten, diese Formel dauernd im Auge zu behalten, da wir uns auf sie nicht beziehen werden.

Eine Anzahl weiterer Bezeichnungen soll später eingeführt werden.

Es beginnt jetzt eine lange Reihe von Hilfssätzen, die sich über mehrere Paragraphen hinziehen wird.

Hilfssatz 1.

$$-T_0(x) = \tfrac{1}{2}(\gamma+\log 2\pi)+\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant X}n\psi\left(\frac{x}{n}\right)+ \tag{8}$$
$$+\frac{1}{2x^2}\sum_{n\leqslant X}n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{2}{X}\,\psi_2(X)+\frac{1}{12X}+\frac{B}{x}.$$

Beweis. Nach (5) ist

$$S_0(x) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{a|n}\frac{1}{a} = \sum_{ab\leqslant x}\frac{1}{a} = \sum_{\substack{a\leqslant b\leqslant x\\ ab\leqslant x}}\frac{1}{a}+\sum_{\substack{b\leqslant a\leqslant x\\ ab\leqslant x}}\frac{1}{a}-\sum_{\substack{a=b\leqslant x\\ ab\leqslant x}}\frac{1}{a}$$
$$= S_1+S_2-S_3, \tag{9}$$

zur Abkürzung.

In S_1 ist $a^2\leqslant ab\leqslant x$, also $a\leqslant X$. Folglich ist

$$S_1 = \sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}\sum_{a\leqslant b\leqslant x/a}1 = \sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}\left(\left[\frac{x}{a}\right]+1-a\right).$$

Zusammen mit (1.3.1) ergibt dies

$$S_1 = -\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}\,\psi\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}+x\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a^2}-X+\psi(X)+\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Die zweite a-Summe in (10) wird mittels der Formel (1.3.2) abgeschätzt, in der $X=\frac{1}{2}$, $Y=X$, $f(y)=1/y$ zu setzen ist. Man bekommt dann

$$\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a} = \log X+\theta-\frac{\psi(X)}{X}+\int_X^\infty\frac{\psi(y)}{y^2}\,dy,$$

wo θ eine gewisse Konstante ist. Hier ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_X^\infty = \frac{B}{X^2} = \frac{B}{x}.$$

Bedenkt man noch, daß nach der üblichen Definition der Eulerschen Konstanten

$$\gamma = \lim_{X=\infty}\left(\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}-\log X\right)$$

ist, so folgt, daß $\theta=\gamma$. Zugleich ergibt sich

$$\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\log x+\gamma-\frac{\psi(X)}{X}+\frac{B}{x}. \tag{11}$$

Bekanntlich ist

$$\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{12}$$

was z. B. aus (38) folgt, wenn man dort $y=0$ setzt. Hieraus ergibt sich für die zweite a-Summe in (10)

$$x\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6}x-x\sum_{a>X}\frac{1}{a^2}.$$

Um die a-Summe rechts abzuschätzen, werde Formel (1.3.4) benutzt, in der $f(y) = 1/y^2$, $r = 2$ zu setzen und danach der Grenzübergang $Y \to \infty$ auszuführen ist. Es ergibt sich dann, mit Rücksicht auf (1.3.6) und (2),

$$\sum_{a>X} \frac{1}{a^2} = \int_X^\infty \frac{dy}{y^2} + \frac{\psi(X)}{X^2} + \frac{\psi_2(X)}{X^3} - 3\int_X^\infty \frac{\psi_2(y)}{y^4}\,dy.$$

Hierin werde das letzte Integral wieder nach dem zweiten Mittelwertsatz abgeschätzt. Man bekommt dann

$$x\sum_{a>X} \frac{1}{a^2} = X + \psi(X) + \frac{\psi_2(X)}{X} + \frac{B}{x},$$

d. h.

$$x\sum_{a\leqslant X} \frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6}x - X - \psi(X) - \frac{\psi_2(X)}{X} + \frac{B}{x}. \tag{13}$$

Aus (10), (11) und (13) ergibt sich

$$S_1 = \frac{\pi^2}{6}x - 2X + \frac{1}{4}\log x + \frac{\gamma+1}{2} - \sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2X}\{\psi(X) + 2\psi_2(X)\} + \frac{B}{x}. \tag{14}$$

Die Summe S_2 wird weiter in zwei Summen gespalten. Hier ist nach (9)

$$S_2 = \sum_{b\leqslant X}\sum_{b\leqslant a\leqslant x/b}\frac{1}{a} = \sum_{b\leqslant X}\sum_{a\leqslant x/b}\frac{1}{a} - \sum_{b\leqslant X}\sum_{a<b}\frac{1}{a} = S_{21} - S_{22}. \tag{15}$$

Wendet man zur Abschätzung der links in (11) stehenden Summe nicht die Formel (1.3.2) an, sondern (1.3.4) mit $r = 2$, so ergibt sich

$$\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\log x + \gamma - \frac{\psi(X)}{X} - \frac{\psi_2(X)}{2X^2} + \frac{B}{X^3}. \tag{16}$$

Hierin darf $X = x/b$ gesetzt werden. Denn von X wird nur verlangt, daß $X \geqslant 3^{1/2}$ sei, und in S_2 ist

$$\frac{x}{b} \geqslant x^{1/2} \geqslant 3^{1/2}.$$

Dabei geht $\frac{1}{2}\log x$ über in

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{b}\right)^2 = \log x - \log b.$$

Somit ist

$$\sum_{a\leqslant x/b}\frac{1}{a} = \log x + \gamma - \log b - \frac{b}{x}\psi\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{b^2}{2x^2}\psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + B\frac{b^3}{x^3}. \tag{17}$$

Weiter ergibt sich durch Anwendung von (1.3.4) mit $X = \frac{1}{2}$, $Y = X$, $f(y) = \log y$ und $r = 2$, wenn θ_1 eine gewisse Konstante bedeutet,

$$\sum_{b\leqslant X}\log b = X\log X - X - \psi(X)\log X + \theta_1 + \frac{\psi_2(X)}{2X} + \frac{B}{x}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist hier $\theta_1 = \frac{1}{2}\log 2\pi$. Somit ist

$$\sum_{b\leqslant X}\log b = \tfrac{1}{2}X\log x - X - \tfrac{1}{2}\psi(X)\log x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{\psi_2(X)}{2X} + \frac{B}{x}. \tag{18}$$

Aus (15), (17), (18) und (1.3.1) folgt

$$\begin{aligned} S_{21} &= \sum_{b\leqslant X}\sum_{a\leqslant x/b}\frac{1}{a} = [X](\log x + \gamma) - \frac{1}{2}X\log x + X + \frac{1}{2}\psi(X)\log x - \\ &\quad - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{\psi_2(X)}{2X} - \frac{1}{x}\sum_{b\leqslant X} b\psi\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqslant X} b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{B}{x} \\ &= \frac{1}{2}[X]\log x + \gamma[X] + X - \frac{1}{4}\log x - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{\psi_2(X)}{2X} - \\ &\quad - \frac{1}{x}\sum_{b\leqslant X} b\psi\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqslant X} b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{B}{x}. \end{aligned} \tag{19}$$

Weiter folgt aus (15)

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sum_{b\leqslant X}\sum_{a<b}\frac{1}{a} = \sum_{a<X}\frac{1}{a}\sum_{a<b\leqslant X} 1 = \sum_{a<X}\frac{1}{a}([X] - a) \\ &= \sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a}([X] - a) = [X]\sum_{a\leqslant X}\frac{1}{a} - [X]. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (16), ergibt dies

$$S_{22} = \frac{1}{2}[X]\log x + \gamma[X] - [X]\left\{\frac{\psi(X)}{X} + \frac{\psi_2(X)}{2X^2} + 1\right\} + \frac{B}{x}. \tag{20}$$

Hierin ist nach (1.3.1)

$$[X]\{\,\} = \left(X - \frac{1}{2} - \psi(X)\right)\{\,\} = X - \frac{1}{2} - \frac{\psi(X)}{2X} - \frac{\psi^2(X)}{X} + \frac{\psi_2(X)}{2X} + \frac{B}{x}.$$

Andererseits ist nach (1.3.1) und (3)

$$\psi^2(y) = \psi_2(y)+\tfrac{1}{12}. \tag{21}$$

Somit ist in (20)

$$[X]\{\ \} = X-\frac12-\frac{\psi(X)}{2X}-\frac{\psi_2(X)}{2x}-\frac{1}{12X}+\frac{B}{x},$$

d. h.

$$S_{22} = \frac12[X]\log x+\gamma[X]-X+\frac12+\frac{1}{2X}\left\{\psi(X)+\psi_2(X)+\frac16\right\}+\frac{B}{x}. \tag{22}$$

Nach (15), (19) und (22) ist

$$S_2 = 2X-\frac14\log x-\frac12-\frac12\log 2\pi-\frac{1}{2X}\left\{\psi(X)+2\psi_2(X)+\frac16\right\}- \tag{23}$$
$$-\frac1x\sum_{b\le X} b\psi\left(\frac xb\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\le X} b^2\psi_2\left(\frac xb\right)+\frac{B}{x}.$$

Endlich ist nach (9) und (16)

$$S_3 = \sum_{a\le X}\frac1a = \frac12\log x+\gamma-\frac{\psi(X)}{X}+\frac{B}{x}. \tag{24}$$

Die Behauptung (8) des Hilfssatzes folgt aus (6), (9), (14), (23) und (24).

Es werde jetzt gesetzt

$$T_1(x) = xS_0(x)-S(x)-\frac{\pi^2}{12}x^2+\frac12 x\log x+\frac12(\gamma-1+\log 2\pi)x. \tag{25}$$

Hilfssatz 2.

$$T_1(x) = -\sum_{n\le X}\psi_2\left(\frac xn\right)+\frac{1}{2x}\int_1^x\sum_{n\le y^{1/2}}\psi_2\left(\frac xn\right)dy+B\log x. \tag{26}$$

Beweis. Der Bequemlichkeit wegen werde, analog zu (7), gesetzt

$$y^{1/2} = Y. \tag{27}$$

Nach (5) und (1.2.1) ist

$$n\sigma_0(n) = \sum_{q\mid n}\frac nq = \sum_{q\mid n} q = \sigma(n), \tag{28}$$

weil n/q zugleich mit q alle Teiler von n durchläuft. Aus (28), (1.2.23) und (5) folgt

$$\int_1^x S_0(y)\,dy = \int_1^x\sum_{n\le y}\sigma_0(n)\,dy = \sum_{n\le x}\sigma_0(n)\int_n^x dy = \sum_{n\le x}(x-n)\,\sigma_0(n) = xS_0(x)-S(x).$$

Hierin ist nach (6)

$$\int_1^x S_0(y)\,dy = \frac{\pi^2}{12}x^2-\frac12 x\log x+\frac x2+\int_1^x T_0(y)\,dy+B.$$

Berücksichtigt man also noch die Definition (25) von $T_1(x)$, so folgt

$$T_1(x) = \tfrac12(\gamma+\log 2\pi)x+\int_1^x T_0(y)\,dy+B.$$

Für $T_0(y)$ kann hier die rechte Seite von (8) mit $x=y$, $X=Y$ eingesetzt werden; denn (8) bleibt auch für $1\le x<3$ gültig. Es ergibt sich also

$$-T_1(x) = \int_1^x\sum_{n\le Y}\frac1n\psi\left(\frac yn\right)dy+\int_1^x\sum_{n\le Y}n\psi\left(\frac yn\right)\frac{dy}{y}+ \tag{29}$$
$$+\frac12\int_1^x\sum_{n\le Y}n^2\psi_2\left(\frac yn\right)\frac{dy}{y^2}+2\int_1^x\frac{\psi_2(Y)}{Y}\,dy+\frac X6+B\log x.$$

Nach (1.3.1) und (3) ist

$$f(t) = \int_0^t\psi(y)\,dy = \tfrac12\psi_2(t)-\tfrac1{12}; \tag{30}$$

in der Tat haben das Integral und $\psi_2(t)$ die Periode 1, und für $0<t\le 1$ ist (30) klar.

Aus (30) und (3) ergibt sich

$$\int_1^x\sum_{n\le Y}\frac1n\psi\left(\frac yn\right)dy = \sum_{n\le X}\frac1n\int_{n^2}^x\psi\left(\frac yn\right)dy$$
$$= \sum_{n\le X}\int_n^{x/n}\psi(y)\,dy = \frac12\sum_{n\le X}\psi_2\left(\frac xn\right)-\frac12\sum_{n\le X}\psi_2(n)$$
$$= \frac12\sum_{n\le X}\psi_2\left(\frac xn\right)-\frac1{12}\sum_{n\le X}1$$
$$= \frac12\sum_{n\le X}\psi_2\left(\frac xn\right)-\frac{X}{12}+B; \tag{31}$$

$$\int_n^{x/n}\psi(y)\frac{dy}{y} = \frac{f(y)}{y}\Big|_n^{x/n}+\int_n^{x/n}\frac{f(y)}{y^2}\,dy$$
$$= \frac{\psi_2(y)}{2y}\Big|_n^{x/n}+\frac12\int_n^{x/n}\frac{\psi_2(y)}{y^2}\,dy = \frac{n}{2x}\psi_2\left(\frac xn\right)-\frac1{12n}+\frac{B}{n^2},$$

$$\int_1^x \sum_{n\leqslant Y} n\psi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{y} = \sum_{n\leqslant X} n \int_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{y} = \sum_{n\leqslant x} n\int_n^{x/n}\psi(y)\,\frac{dy}{y} \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2x}\sum_{n\leqslant X} n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{X}{12} + B\log x;$$

$$\int_1^x \left|\sum_{n\leqslant Y} n^2\psi_2\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{y^2}\right| = \sum_{n\leqslant X} n^2 \int_{n^2}^x \psi_2\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{y^2}$$

$$= \sum_{n\leqslant X} n\int_n^{x/n}\psi_2(y)\,\frac{dy}{y^2} = B\sum_{n\leqslant X} n\cdot\frac{1}{n^2} = B\log x, \tag{33}$$

$$\int_1^x \frac{\psi_2(Y)}{Y}\,dy = 2\int_1^X \psi_2(y)\,dy = B. \tag{34}$$

Aus (29) und (31)-(34) folgt

$$-T_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2x}\sum_{n\leqslant X} n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + B\log x$$

$$= \sum_{n\leqslant X}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2x}\sum_{n\leqslant X}(x-n^2)\,\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + B\log x, \tag{35}$$

und schließlich ist

$$\int_1^x \sum_{n\leqslant Y}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)dy = \sum_{n\leqslant X}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)\int_{n^2}^x dy = \sum_{n\leqslant X}(x-n^2)\,\psi_2\left(\frac{x}{n}\right). \tag{36}$$

Aus (35) und (36) ergibt sich die Behauptung (26) des Hilfssatzes.

Hilfssatz 3. *Für $1\leqslant y\leqslant X$ ist*

$$\sum_{m\leqslant y}\psi_2\left(\frac{x}{m}\right) = Bx^{1/3}. \tag{37}$$

Beweis. Entwickelt man das Polynom $y^2-y+\frac{1}{6}$ im Intervall $0\leqslant y\leqslant 1$ in eine Fourierreihe, so bekommt man die wohlbekannte, zu (2.3.3) analoge Reihe

$$\psi_2(y) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n y}{n^2}, \tag{38}$$

aus der speziell für $y=0$ Gleichung (12) folgt.

Beim Beweise von (37) darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y > x^{1/3}$ angenommen werden, da sonst die Behauptung klar ist. Weiter genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant m\leqslant y}\psi_2\left(\frac{x}{m}\right) = Bx^{1/3}; \tag{39}$$

denn die Differenz der linken Seiten von (37) und (39) ist sicherlich $Bx^{1/3}$.

Es mögen die Zahlen M und M' der Bedingung

$$x^{1/3}\leqslant M\leqslant M'\leqslant 2M\leqslant 2X \tag{40}$$

genügen. Nach (38) ist

$$\pi^2\sum_{m=M}^{M'}\psi_2\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{n\leqslant M^3/x}\frac{1}{n^2}\sum_{m=M}^{M'}\cos\frac{2\pi n x}{m} +$$

$$+\sum_{n>M^3/x}\frac{1}{n^2}\sum_{m=M}^{M'}\cos\frac{2\pi n x}{m} = S_1+S_2, \tag{41}$$

zur Abkürzung.

In S_1 ist $nx/M^3\leqslant 1$. In (40) sei zunächst $M<M'$. Dann darf Hilfssatz 2.3.3 angewendet werden, mit $X=M$, $Y=M'$, $f(y)=nx/y$, $\varepsilon = nx/4M^3$. Es folgt

$$\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{nx}{m}\right) = B\,\frac{nx}{M^2}\left(\frac{M^3}{nx}\right)^{1/2},$$

d. h.

$$\sum_{m=M}^{M'}\cos\frac{2\pi n x}{m} = Bn^{1/2}XM^{-1/2},$$

und das ist auch für $M=M'$ richtig. Somit ist

$$S_1 = BXM^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2} = BXM^{-1/2}.$$

Für S_2 gilt nach (40) die triviale Abschätzung

$$S_2 = B\sum_{n>M^3/x}\frac{1}{n^2}M = B\,\frac{Mx}{M^3} = B\,\frac{x}{M^2} = BXM^{-1/2}.$$

Wegen (41) ist daher, unter der Annahme (40),

$$\sum_{m=M}^{M'}\psi_2\left(\frac{x}{m}\right) = BXM^{-1/2}. \tag{42}$$

Es bezeichne jetzt M_0 den kleinsten Wert, den m in der Summe (39) annimmt, und β sei eindeutig durch

$$2^\beta M_0 \leqslant y < 2^{\beta+1} M_0$$

bestimmt. Es ist dann

$$\sum_{x^{1/3} \leqslant m \leqslant y} \psi_2\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{a=0}^{\beta-1} \sum_{2^a M_0 \leqslant m < 2^{a+1} M_0} \psi_2\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{2^\beta M_0 \leqslant m \leqslant y} \psi_2\left(\frac{x}{m}\right).$$

Auf jede m-Summe rechts kann die Abschätzung (42) mit $M = 2^a M_0$, $M' = 2^{a+1} M_0 - 1$ bzw. mit $M = 2^\beta M_0$, $M' = [y]$ angewendet werden; da die Bedingungen (40) jedesmal erfüllt sind. Die linke Seite von (39) ist daher

$$B \sum_{a=0}^{\infty} X(2^a M_0)^{-1/2} + BX(2^\beta M_0)^{-1/2} = BXM_0^{-1/2} = BX(x^{1/3})^{-1/2} = Bx^{1/3},$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 4.

$$T_1(x) = Bx^{1/3}. \tag{43}$$

Beweis. (43) folgt aus (26) und (37).

Hilfssatz 5.

$$-T(x) = \frac{x}{2} + x \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leqslant X} n\psi\left(\frac{x}{n}\right) + \tag{44}$$
$$+ 2X\psi_2(X) + \frac{X}{12} + Bx^{1/3}.$$

Beweis. Aus (4), (6) und (25) ergibt sich

$$T(x) = xT_0(x) + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1 + \log 2\pi)x - T_1(x).$$

Zusammen mit (8) und (43) liefert dies

$$-T(x) = \frac{x}{2} + x \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leqslant X} n\psi\left(\frac{x}{n}\right) + 2X\psi_2(X) +$$
$$+ \frac{X}{12} + \frac{1}{2x} \sum_{n \leqslant X} n^2 \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + Bx^{1/3},$$

und hierin ist nach (36), (27) und (37)

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant X} n^2 \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant X} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{2}{x} \int_1^X \sum_{n \leqslant y} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) y\,dy$$
$$= Bx^{1/3} + \frac{B}{x} \int_1^X x^{1/3} y\,dy = Bx^{1/3}.$$

In diesem ganzen Kapitel bedeute h eine der Zahlen 1 oder 2. Es werde ferner gesetzt

$$U_h(t) = \int_0^t T(h^2 y) T(y)\,dy \qquad (h = 1 \text{ oder } 2). \tag{45}$$

Unser nächster Hilfssatz zeigt, daß sich das Integral (1) auf die beiden Integrale (45) zurückführen läßt.

Hilfssatz 6.

$$\int_0^x P_4^2(y)\,dy = 2^6 U_1(x) + 2^{12} U_1\left(\frac{x}{4}\right) - 2^{11} U_2\left(\frac{x}{4}\right) + Bx^2 \log x. \tag{46}$$

Beweis. Nach (1.2.24) und (4) ist

$$P_4(t) = A_4(t) - \frac{\pi^2}{2} t^2 = 8S(t) - 32S\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{\pi^2}{2} t^2 + 1$$
$$= 8T(t) - 32T\left(\frac{t}{4}\right) + 1. \tag{47}$$

Andererseits ist nach (2.2.2) und (4)

$$T(x) = Bx \log x. \tag{48}$$

Die Behauptung (46) des Hilfssatzes folgt aus (47), (45) und (48).

§ 2. Hilfssätze

In diesem Paragraphen soll Y, wenn es vorkommt, den Wert (1.27) haben.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$\mathcal{M}(a, \beta) = \mathcal{M}(a, \beta, h) = \begin{cases} h^2 & \text{für } a = \beta = 0 \quad \text{oder für } a = 0, \beta = 1, \\ 1 & \text{für } a = 1, \beta = 0 \quad \text{oder für } a = \beta = 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$N = \operatorname{Max}\left(\frac{m^2}{h^2}, n^2\right), \qquad E = \operatorname{Max}\left(\frac{m^2}{h^2}, 1\right). \tag{2}$$

Dann ist

$$U_h(x) = \frac{h^2}{12} x^3 + \sum_{a,\beta=0}^{1} \mathcal{M}(a, \beta) \sum_{\substack{m \leqslant hX \\ n \leqslant X}} m^{2a-1} n^{2\beta-1} \int_N^x \psi\left(\frac{h^2 y}{m}\right) \psi\left(\frac{y}{n}\right) y^{2-a-\beta}\,dy + \tag{3}$$
$$+ 2h^2 \sum_{m \leqslant hX} \frac{1}{m} \int_E^x \psi\left(\frac{h^2 y}{m}\right) \psi_2(Y) y^{3/2}\,dy +$$
$$+ 2h \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n} \int_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right) \psi_2(hY) y^{3/2}\,dy + Bx^{5/2}.$$

Beweis. Nach (1.44) ist

$$-T(h^2x) = \frac{h^2x}{2} + h^2x \sum_{m\leqslant hX} \frac{1}{m}\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right) + \sum_{m\leqslant hX} m\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right) + \\ + 2hX\psi_2(hX) + \frac{hX}{12} + Bx^{1/3}. \tag{4}$$

Aus (1.44), (4) und (1) folgt

$$T(h^2x)T(x) = \frac{h^2x^2}{4} + \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1} n^{2\beta-1}\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right)\psi\left(\frac{x}{n}\right)x^{2-\alpha-\beta} + \\ + 2h^2 \sum_{m\leqslant hX} \frac{1}{m}\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right)\psi_2(X)x^{3/2} + 2h\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\psi_2(hX)x^{3/2} + \\ + \frac{h^2}{2}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right)x^2 + \frac{h^2}{2}\sum_{n\leqslant X} n\psi\left(\frac{x}{n}\right)x + \\ + \frac{h^2}{2}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right)x^2 + \frac{h^2}{12}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right)x^{3/2} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{m\leqslant hX} m\psi\left(\frac{h^2x}{m}\right)x + \frac{h}{12}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right)x^{3/2} + Bx^{3/2}. \tag{5}$$

Andererseits ist nach (1.45)

$$U_h(x) = \int\limits_1^x T(h^2y)T(y)\,dy + B. \tag{6}$$

Die Abschätzung (5) bleibt auch für die von uns ausgeschlossenen Werte von x im Intervall $1 \leqslant x < 3$ gültig. Man kann daher $x = y$, $X = Y$ nehmen und den so erhaltenen Ausdruck in (6) einsetzen. Es ergibt sich dann, wenn man in jedem Glied, außer dem ersten und letzten, die Summation mit der Integration vertauscht und (2) beachtet,

$$U_h(x) = \frac{h^2}{12}x^3 + \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\int\limits_N^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi\left(\frac{y}{n}\right)y^{2-\alpha-\beta}\,dy + \\ + 2h^2\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi_2(Y)y^{3/2}\,dy + \\ + 2h\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)\psi_2(hY)y^{3/2}\,dy + \tag{7}$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)y^2\,dy + \frac{h^2}{2}\sum_{n\leqslant X} n\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)y\,dy + \\ + \frac{h^2}{2}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)y^2\,dy + \frac{h^2}{12}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)y^{3/2}\,dy + \\ + \frac{1}{2}\sum_{m\leqslant hX} m\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)y\,dy + \frac{h}{12}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)y^{3/2}\,dy + Bx^{5/2}.$$

Hierin ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)y^2\,dy = n^3\int\limits_n^{x/n}\psi(y)y^2\,dy = Bn^3\frac{x^2}{n^2} = Bx^2n.$$

Auf die gleiche Weise bekommt man für die letzten fünf Integrale auf der rechten Seite von (7) die Abschätzungen

$$Bxn,\quad Bx^2m,\quad Bx^{3/2}m,\quad Bxm,\quad Bx^{3/2}n.$$

Die Summe der letzten 7 Glieder in (7) ist daher

$$Bx^2\sum_{n\leqslant X}1 + Bx\sum_{n\leqslant X}n^2 + Bx^2\sum_{m\leqslant hX}1 + Bx^{3/2}\sum_{m\leqslant hX}1 + \\ + Bx\sum_{m\leqslant hX}m^2 + Bx^{3/2}\sum_{n\leqslant X}1 + Bx^{5/2} = Bx^{5/2},$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 2. *Sind in einem Intervall $\sigma \leqslant y \leqslant \theta$ die Funktionen $f(y), g(y), f_r(y), g_r(y)$ $(r \geqslant 1)$ und ihre Quadrate nach Riemann integrierbar, und außerdem bei wachsendem r*

$$\int\limits_\sigma^\theta f_r^2(y)\,dy \quad \text{und} \quad \int\limits_\sigma^\theta g_r^2(y)\,dy \quad \text{beschränkt}, \tag{8}$$

$$\int\limits_\sigma^\theta \{f(y)-f_r(y)\}^2\,dy \to 0, \qquad \int\limits_\sigma^\theta \{g(y)-g_r(y)\}^2\,dy \to 0, \tag{9}$$

so ist

$$\int\limits_\sigma^\theta f(y)g(y)\,dy = \lim_{r=\infty}\int\limits_\sigma^\theta f_r(y)g_r(y)\,dy. \tag{10}$$

Beweis. Es ist

$$\int\limits_\sigma^\theta f(y)g(y)\,dy - \int\limits_\sigma^\theta f_r(y)g_r(y)\,dy = \int\limits_\sigma^\theta \{f(y)-f_r(y)\}g_r(y)\,dy + \\ + \int\limits_\sigma^\theta \{g(y)-g_r(y)\}f_r(y)\,dy + \int\limits_\sigma^\theta \{f(y)-f_r(y)\}\{g(y)-g_r(y)\}\,dy,$$

und jedes der drei Integrale rechts strebt nach der Schwarzschen Ungleichung mit wachsendem r gegen Null.

Hilfssatz 3.

$$\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi_2(Y)y^{3/2}\,dy \tag{11}$$
$$= -\frac{1}{2\pi^3}\lim_{r=\infty}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{r}\frac{1}{ab^2}\left(\int\limits_E^x y^{3/2}\sin\left\{2\pi\left(\frac{h^2ay}{m}+bY\right)\right\}dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_E^x y^{3/2}\sin\left\{2\pi\left(\frac{h^2ay}{m}-bY\right)\right\}dy\right),$$

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)\psi_2(hY)y^{3/2}\,dy \tag{12}$$
$$= -\frac{1}{2\pi^3}\lim_{r=\infty}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{a,b=1}^{r}\frac{1}{ab^2}\left(\int\limits_{n^2}^x y^{3/2}\sin\left\{2\pi\left(\frac{ay}{n}+bhY\right)\right\}dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{n^2}^x y^{3/2}\sin\left\{2\pi\left(\frac{ay}{n}-bhY\right)\right\}dy\right).$$

Beweis. 1) Wir setzen

$$\sigma = E,\quad \theta = x,\quad f(y)=\psi\left(\frac{h^2y}{m}\right),\quad g(y)=\psi_2(Y)y^{3/2},$$

$$f_r(y) = -\frac{1}{\pi}\sum_{a=1}^{r}\frac{1}{a}\sin\frac{2\pi ah^2y}{m},\qquad g_r(y)=\frac{y^{3/2}}{\pi^2}\sum_{b=1}^{r}\frac{1}{b^2}\cos 2\pi bY.$$

Dann sind die Bedingungen (8), (9) von Hilfssatz 2 erfüllt. Für die Funktionen $f(y)$, $f_r(y)$ folgt es aus den Eigenschaften der Reihe (2.3.3), die beim Beweise von Hilfssatz 2.3.1 benutzt wurden. Für die Funktionen $g(y)$, $g_r(y)$ ergibt es sich unmittelbar aus (1.38), da diese letzte Reihe für alle y absolut und gleichmäßig konvergiert. Daher ist die Formel (10) anwendbar und sie liefert für die linke Seite von (11)

$$-\frac{1}{\pi^3}\lim_{r=\infty}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{r}\frac{1}{ab^2}\int\limits_E^x y^{3/2}\sin\frac{2\pi ah^2y}{m}\cos(2\pi bY)\,dy,$$

was der rechten Seite von (11) gleich ist.

2) Wir setzen

$$\sigma = n^2,\quad \theta = x,\quad f(y)=\psi\left(\frac{y}{n}\right),\quad g(y)=\psi_2(hY)y^{3/2},$$

$$f_r(y) = -\frac{1}{\pi}\sum_{a=1}^{r}\frac{1}{a}\sin\frac{2\pi ay}{n},\qquad g_r(y)=\frac{y^{3/2}}{\pi^2}\sum_{b=1}^{r}\frac{1}{b^2}\cos 2\pi bhY.$$

Dann ist die Formel (10) wieder anwendbar und sie liefert für die linke Seite von (12)

$$-\frac{1}{\pi^3}\lim_{r=\infty}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{a,b=1}^{r}\frac{1}{ab^2}\int\limits_{n^2}^x y^{3/2}\sin\frac{2\pi ay}{n}\cos(2\pi bhY)\,dy,$$

was der rechten Seite von (12) gleich ist.

Hilfssatz 4. *Es sei $h'=1$ oder 2,*

$$S(h,h',\pm) = \sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{1}{ab^2}\left|\int\limits_E^x y^{3/2}\sin\left\{2\pi\left(\frac{h^2ay}{m}\pm bh'Y\right)\right\}dy\right|. \tag{13}$$

Dann ist

$$S(h,h',\pm) = Bx^{9/4}\log x. \tag{14}$$

Beweis. Wir setzen (nur für den vorliegenden Beweis)

$$E=D^2,\quad X=R^2,\quad s=\frac{h^2a}{m},\quad t=\frac{h'bm}{2h^2a}. \tag{15}$$

Aus (13), (15) und (1.27) folgt, indem man y durch y^2 ersetzt,

$$S(h,h',\pm) = 2\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{1}{ab^2}\left|\int\limits_D^X y^4\sin\left\{2\pi\left(\frac{h^2ay^2}{m}\pm bh'y\right)\right\}dy\right|$$
$$\leqslant 2\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{1}{ab^2}\left|\int\limits_D^X y^4 e\left(\frac{h^2ay^2}{m}\pm bh'y\right)dy\right|$$
$$= 2\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{1}{ab^2}\left|\int\limits_D^X y^4 e\{s(y\pm t)^2\}\,dy\right|$$
$$= 2\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\left(\sum_{\substack{a,b=1\\ t\leqslant D/2}}^{\infty}+\sum_{\substack{a,b=1\\ t>D/2}}^{\infty}\right)\frac{1}{ab^2}\left|\int\limits_D^X y^4 e\{s(y\pm t)^2\}\,dy\right|$$
$$= S_1+S_2, \tag{16}$$

zur Abkürzung.

Die weiteren Überlegungen verlaufen ähnlich, wie beim Beweise von Hilfssatz 2.3.1.

Für $t \leqslant D/2$ ist, wegen (2) und (15),

$$\int\limits_D^X y^4 e\{s(y\pm t)^2\}\,dy = \frac{1}{4\pi i s}\int\limits_D^X \frac{y^4}{y\pm t}\,de\{\ \} = \frac{Bx^2}{sD} = \frac{Bx^2}{sm} = \frac{Bx^2}{a}, \tag{17}$$

und hieraus folgt nach (16)

$$S_1 = Bx^2 \sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{1}{a^2b^2} = Bx^2\log x. \tag{18}$$

Es sei jetzt $t > D/2$. Dann setzen wir

$$\int\limits_D^X y^4 e\{s(y\pm t)^2\}\,dy = \int\limits_{\substack{D\\|y\pm t|\leqslant R}}^{X} + \int\limits_{\substack{D\\|y\pm t|\geqslant R}}^{X} = J_1 + J_2.$$

In J_1 ist der Integrationsweg ein Intervall der Länge $\leqslant 2R$. Daher ist wegen (15)

$$J_1 = BRx^2 = Bx^{9/4}.$$

Für J_2 ergibt sich, ähnlich wie beim Integral (17),

$$J_2 = \frac{1}{4\pi i s}\int\limits_{\substack{D\\|y\pm t|\geqslant R}}^{X}\frac{y^4}{y\pm t}\,d\{\ \} = \frac{B}{s}\cdot\frac{x^2}{R} = Bx^{7/4}ma^{-1} = Bx^{9/4}.$$

Somit ist

$$\int\limits_D^X y^4 e\{s(y\pm t)^2\}\,dy = Bx^{9/4}.$$

Wegen $t > D/2$ ist, nach (15) und (2), $a < 2b$. Wegen (16) ist daher

$$S_2 = Bx^{9/4}\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^2}\sum_{a<2b}\frac{1}{a} = Bx^{9/4}\log(x)\sum_{b=1}^{\infty}\frac{\log b}{b^2} = Bx^{9/4}\log x. \tag{19}$$

Die Behauptung (14) des Hilfssatzes folgt aus (16), (18) und (19).

Hilfssatz 5.

$$U_h(x) = \frac{h^2}{12}x^3 + \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\int\limits_N^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi\left(\frac{y}{n}\right)y^{2-\alpha-\beta}\,dy + Bx^{5/2}. \tag{20}$$

Beweis. Nach (11), (13) und (14) ist

$$\sum_{m\leqslant hX}\frac{1}{m}\int\limits_E^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi_2(Y)y^{3/2}\,dy = BS(h,1,+)+BS(h,1,-) = Bx^{9/4}\log x. \tag{21}$$

Für $h=1$ ist nach (2), $E = m^2$. Nach (12), (13) und (14) ist somit, wenn man in (13) n statt m schreibt,

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\int\limits_{n^2}^x \psi\left(\frac{y}{n}\right)\psi_2(hY)y^{3/2}\,dy = BS(1,h,+)+BS(1,h,-) = Bx^{9/4}\log x. \tag{22}$$

Die Behauptung (20) des Hilfssatzes folgt aus (3), (21) und (22).

§ 3. Hilfssätze

In diesem Paragraphen bezeichnet q nur gerade Zahlen, m nur positive.

Hilfssatz 1.

$$\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2} = \frac{5}{2}, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2} = 2. \tag{2}$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^4} = \frac{\pi^4}{90}, \tag{3}$$

was man z. B. so feststellen kann: Es sei $0\leqslant y\leqslant 1$. Integriert man die Reihe (1.38) zweimal gliedweise von 0 bis y und setzt dann $y=\frac{1}{2}$, so folgt wegen (1.3)

$$\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Es ist somit

$$\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^4} = \sum_{c=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4c}}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^4} = \frac{16}{15}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Aus (1.12) und (3) ergibt sich

$$\frac{\pi^4}{36}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=d}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{(dm)^2(dn)}$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^4}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\pi^4}{90}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2},$$

womit die Gleichung (1) nachgewiesen ist. Weiter ist einerseits

$$\sum_{\substack{m,q=1\\(m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2q^2}=\sum_{\substack{u,q=1\\(u,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2q^2}=\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2}. \tag{4}$$

Andererseits ist nach (1)

$$\frac{5}{2}=\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2}+\sum_{\substack{q,n=1\\(q,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{q^2n^2}=\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2}+\sum_{\substack{m,q=1\\(m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2q^2}.$$

In Verbindung mit (4), ergibt dies

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{4}\sum_{\substack{u,n=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2},$$

d. h. die Gleichung (2).

Hilfssatz 2.

$$\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}, \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{8}\displaystyle\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2} & \textit{für}\quad n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2),\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{6}\displaystyle\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2} & \textit{für}\quad n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2);\end{cases} \tag{6}$$

$$\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\mu(u)}{u^3}=\frac{8}{7\zeta(3)},\qquad \sum_{q=2}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^3}=-\frac{1}{7\zeta(3)}, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^3}=\frac{\pi^2}{6\zeta(3)},\qquad \sum_{u=1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^3}=\frac{\pi^2}{7\zeta(3)}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(2n)}{n^3}=\frac{4\pi^2}{21\zeta(3)}. \tag{9}$$

Beweis. Bei diesem Beweis lassen wir ausnahmsweise auch $p=2$ zu. Es ist

$$\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\ldots\right)$$

$$=\prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right). \tag{10}$$

Hierbei ist nach (5.2.2), (5.2.1) und (1.12)

$$\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{11}$$

Ferner hat man, da die Funktion $\mu(d)/d^2$ multiplikativ ist,

$$\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}=\prod_{p|n}\left(1+\frac{\mu(p)}{p^2}\right)=\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right). \tag{12}$$

Aus (10)-(12) folgt (5); vgl. hierzu auch Winogradow [4], Aufgabe 20 zu Kapitel II.

Die links in (6) stehende Summe fällt für gerade n mit der links in (5) stehenden zusammen; denn für gerade n muß m in (5) ungerade sein. Damit ist die untere Zeile von (6) bewiesen. Die obere Zeile von (6) läßt sich auf die untere zurückführen. Für ungerade n ist nämlich

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2}=\sum_{\substack{u=1\\(u,2n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{d|2n}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{\pi^2}{6}\left(1+\frac{\mu(2)}{2^2}\right)\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Die erste Gleichung (7) folgt aus (5.2.7). Aus der ersten Gleichung (7) folgt die zweite Gleichung (7), denn es ist

$$\sum_{q=2}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^3}=\frac{\mu(2)}{2^3}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\mu(u)}{u^3}.$$

Weiter ist bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\qquad(s>2); \tag{13}$$

vgl. z. B. Winogradow [4], Aufgabe 29 zu Kapitel II.

Setzt man $s=3$ in (13) und beachtet (11), so ergibt sich die erste Gleichung (8). Die zweite Gleichung (8) läßt sich auf die erste zurückführen, denn es ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^m)}{2^{3m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{m-1}}{2^{3m}} = \frac{1}{6},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^3} = \left(1 + \frac{\varphi(2)}{2^3} + \frac{\varphi(2^2)}{2^6} + \ldots\right) \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u^3} = \frac{7}{6} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u^3}.$$

Endlich folgt die Gleichung (9) aus den beiden Gleichungen (8), denn es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(2n)}{n^3} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u^3} + 2 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^3} - \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u^3}.$$

HILFSSATZ 3.

$$S_h = \sum_{\substack{m \leqslant hX \\ n \leqslant X}} \frac{(m, h^2 n)^2}{m^2 n^2} = \begin{cases} \dfrac{5\pi^2}{12} - \dfrac{\pi^2}{6\zeta(3)} \cdot \dfrac{\log x}{X} + \dfrac{B}{X} & \text{für} \quad h = 1 \\[2ex] \dfrac{11\pi^2}{12} - \dfrac{5\pi^2}{14\zeta(3)} \cdot \dfrac{\log x}{X} + \dfrac{B}{X} & \text{für} \quad h = 2. \end{cases} \tag{14}$$

Beweis. Setzen wir $(m, h^2 n) = d$, so ist

$$S_h = \sum_{d \leqslant hX} d^2 \sum_{\substack{m \leqslant hX, n \leqslant X \\ (m, h^2 n) = d}} \frac{1}{m^2 n^2}. \tag{15}$$

Wir führen jetzt S_{h0}, S_{h1} und S_{h2} folgendermaßen ein. Für $h = 1$ sei $S_{h0} = S_h$, $S_{h1} = S_{h2} = 0$. Für $h = 2$ möge S_{h0} diejenige Teilsumme der rechten Seite von (15) sein, in der m durch 4 teilbar ist; S_{h1} sei die Teilsumme, in der $m = 2u$; S_{h2} sei die Teilsumme mit $m = u$. Jedenfalls ist

$$S_h = S_{h0} + S_{h1} + S_{h2}. \tag{16}$$

In S_{h0} ist $h^2 | m$, also auch $h^2 | d$. Ersetzt man daher m durch $h^2 m$ und d durch $h^2 d$, so folgt

$$S_{h0} = \sum_{d \leqslant X/h} d^2 \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m, n) = d}} \frac{1}{m^2 n^2}.$$

Hierin kann man m, n durch dm, dn ersetzen und bekommt

$$\begin{aligned} S_{h0} &= \sum_{d \leqslant X/h} \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{m \leqslant X/hd, n \leqslant X/d \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} \\ &= \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} \sum_{d \leqslant \mathrm{Min}(X/hm, X/n)} \frac{1}{d^2} \\ &= \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} - \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} \sum_{d > X \mathrm{Min}(1/hm, 1/n)} \frac{1}{d^2} \end{aligned}$$

$$= S'_{h0} - S''_{h0}. \tag{17}$$

Für S'_{h0} ergibt sich aus (17), (1.12) und (1)

$$S'_{h0} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m > X/h} \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{5\pi^2}{12} + \frac{B}{X}. \tag{18}$$

Für $s \geqslant 1$ ist

$$\sum_{d > s} \frac{1}{d^2} = \sum_{d > s} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+1}\right) + \sum_{d > s} \frac{1}{d^2(d+1)} = \frac{1}{[s]+1} + \frac{B}{s^2},$$

d. h. es ist

$$\sum_{d > s} \frac{1}{d^2} = \frac{1}{s} + \frac{B}{s^2} \qquad (s \geqslant 1). \tag{19}$$

Setzt man in (19)

$$s = X \mathrm{Min}\left(\frac{1}{hm}, \frac{1}{n}\right),$$

so ist

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{X} \mathrm{Max}(hm, n), \qquad \frac{1}{s^2} = \frac{B}{x} \mathrm{Max}(m^2, n^2).$$

Wegen (17) ist daher

$$S''_{h0} = \frac{1}{X} \sum_{\substack{m \leqslant X/h, n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \frac{\mathrm{Max}(hm, n)}{m^2 n^2} + \frac{B}{x} \sum_{m,n \leqslant X} \frac{\mathrm{Max}(m^2, n^2)}{m^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{X} \sum_{\substack{hm \leqslant n \leqslant X \\ (m,n)=1}} \sum \frac{1}{m^2 n} + \frac{h}{X} \sum_{\substack{n \leqslant hm \leqslant X \\ (m,n)=1}} \sum \frac{1}{mn^2} + \frac{B}{X} \sum_{hm = n \leqslant X} \frac{1}{m^3} + \frac{B}{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n \leqslant X} 1.$$

Hieraus folgt, wenn man im zweiten Gliede m und n vertauscht,

$$XS''_{h0} = \sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n/h\\(m,n)=1}}\frac{1}{m^2} + h\sum_{n\leqslant X/h}\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant hn\\(m,n)=1}}\frac{1}{m^2} + B$$

$$= \sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\Bigg(\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2}+\frac{B}{n}\Bigg) + h\sum_{n\leqslant X/h}\frac{1}{n}\Bigg(\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^2}+\frac{B}{n}\Bigg) + B.$$

In Verbindung mit (5), ergibt dies

$$XS''_{h0} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{\pi^2 h}{6}\sum_{n\leqslant X/h}\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d^2} + B.$$

Ersetzt man hier n durch dn, so folgt

$$XS''_{h0} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{dn\leqslant X}\frac{\mu(d)}{d^3 n} + \frac{\pi^2 h}{6}\sum_{dn\leqslant X/h}\frac{\mu(d)}{d^3 n} + B$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\sum_{d\leqslant X}\frac{\mu(d)}{d^3}\sum_{n\leqslant X/d}\frac{1}{n} + \frac{\pi^2 h}{6}\sum_{d\leqslant X/h}\frac{\mu(d)}{d^3}\sum_{n\leqslant X/hd}\frac{1}{n} + B$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\sum_{d\leqslant X}\frac{\mu(d)}{d^3}\Big(\log\frac{X}{d}+B\Big) + \frac{\pi^2 h}{6}\sum_{d\leqslant X/h}\frac{\mu(d)}{d^3}\Big(\log\frac{X}{hd}+B\Big) + B$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\log X\sum_{d\leqslant X}\frac{\mu(d)}{d^3} + B\sum_{d\leqslant X}\frac{\log d}{d^3} + \frac{\pi^2 h}{6}\log X\sum_{d\leqslant X/h}\frac{\mu(d)}{d^3} +$$

$$+ B\sum_{d\leqslant X}\frac{\log d}{d^3} + B$$

$$(20)\qquad = \frac{\pi^2}{12}\log x\Bigg(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^3}+\frac{B}{x}\Bigg) + \frac{\pi^2 h}{12}\log x\Bigg(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^3}+\frac{B}{x}\Bigg) + B.$$

Aus der wohlbekannten Formel

$$(21)\qquad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \qquad (s>1)$$

(vgl. Winogradow [4], Aufgabe 15 zu Kapitel II) oder durch Addition der beiden Gleichungen (7) folgt

$$(22)\qquad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^3} = \frac{1}{\zeta(3)}.$$

Aus (20) und (22) folgt

$$(23)\qquad XS''_{h0} = \frac{\pi^2(1+h)}{12\zeta(3)}\log x + B.$$

Aus (17), (18) und (23) folgt

$$(24)\qquad S_{h0} = \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi^2(1+h)}{12\zeta(3)}\cdot\frac{\log x}{X} + \frac{B}{X}.$$

Nach Definition von S_{h0} ist $S_{10}=S_1$. Aus (24) mit $h=1$ ergibt sich also die obere Zeile von (14). Für $h=2$ bekommt man aus (24)

$$(25)\qquad S_{20} = \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4\zeta(3)}\cdot\frac{\log x}{X} + \frac{B}{X}.$$

Nach Definition von S_{h1} und S_{h2} ist

$$(26)\qquad S_{21} = \sum_{d\leqslant 2X} d^2 \sum_{\substack{2u\leqslant 2X,\, n\leqslant X\\(2u,4n)=d}}\frac{1}{4u^2n^2},$$

$$(27)\qquad S_{22} = \sum_{d\leqslant 2X} d^2 \sum_{\substack{u\leqslant 2X,\, n\leqslant X\\(u,4n)=d}}\frac{1}{u^2n^2}.$$

In (26) ist d gerade. Ersetzt man d durch $2d$, so folgt

$$(28)\qquad S_{21} = \sum_{d\leqslant X} d^2 \sum_{\substack{u\leqslant X,\, n\leqslant X\\(u,n)=d}}\frac{1}{u^2n^2}.$$

In (27) und (28) ist d ungerade, kann also durch v ersetzt werden. Es ist daher, wenn r eine der Zahlen 1 oder 2 bedeutet,

$$(29)\qquad S_{2r} = \sum_{v\leqslant rX} v^2 \sum_{\substack{u\leqslant rX,\, n\leqslant X\\(u,n)=v}}\frac{1}{u^2n^2}.$$

Diese Summe wird analog wie oben die Summe S_{h0} behandelt, so daß wir uns etwas kürzer werden fassen können. Ersetzt man u, n durch

vu, vn, so folgt

$$S_{2r}=\sum_{v\leq rX}\frac{1}{v^2}\sum_{\substack{u\leq rX/v,\, n\leq X/v\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}$$

$$=\sum_{\substack{u\leq rX,\, n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}\sum_{v\leq \mathrm{Min}\,(rX/u,\, X/n)}\frac{1}{v^2}$$

$$=\sum_{\substack{u\leq rX,\, n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^2}-\sum_{\substack{u\leq rX,\, n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}\sum_{v>X\mathrm{Min}(r/u,\,1/n)}\frac{1}{v^2}$$

(30) $$=S'_{2r}-S''_{2r}.$$

Nach (6) mit $n=1$ ist

(31) $$\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Aus (30), (31) und (2) ergibt sich

(32) $$S'_{2r}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{\substack{u\leq rX,\, n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{\substack{u,n=1\\ (u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2n^2}+\frac{B}{X}=\frac{\pi^2}{4}+\frac{B}{X}.$$

Für die Abschätzung von S''_{2r} brauchen wir die zu (19) analoge Formel

(33) $$\sum_{v>s}\frac{1}{v^2}=\frac{1}{2s}+\frac{B}{s^2}\qquad(s\geqslant 1).$$

Beim Beweise kann $s\geqslant 2$ angenommen werden, und dann folgt (33) aus (19), wegen

$$\sum_{v>s}\frac{1}{v^2}=\sum_{d>s}\frac{1}{d^2}-\sum_{2d>s}\frac{1}{(2d)^2}=\sum_{d>s}\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4}\sum_{d>s/2}\frac{1}{d^2}.$$

Nach (30) und (33) ist

$$S''_{2r}=\frac{1}{2X}\sum_{\substack{u\leq rX,\, n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n^2}\,\mathrm{Max}\left(\frac{u}{r},\,n\right)+\frac{B}{x}\sum_{m,n\leq rX}\frac{\mathrm{Max}\,(m^2,n^2)}{m^2n^2}.$$

Das Restglied ist hier B/X, wie es sich oben bei der Behandlung von S''_{h0} ergab. Mithin ist

$$2XS''_{2r}=\sum\sum_{\substack{u/r\leq n\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2n}+\frac{1}{r}\sum\sum_{\substack{n\leq u/r\leq X\\ (u,n)=1}}\frac{1}{un^2}+B\sum_{u/r=n\leq X}\frac{1}{u^3}+B$$

$$=\sum_{n\leq X}\frac{1}{n}\sum_{\substack{u\leq rn\\ (u,n)=1}}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{r}\sum_{u\leq rX}\frac{1}{u}\sum_{\substack{n\leq u/r\\ (u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+B$$

$$=\sum_{n\leq X}\frac{1}{n}\sum_{\substack{u=1\\ (u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{r}\sum_{u\leq rX}\frac{1}{u}\sum_{\substack{n=1\\ (u,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+B.$$

Zusammen mit (6) und (5) ergibt dies

$$2XS''_{2r}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{q\leq X}\frac{1}{q}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}+\frac{\pi^2}{8}\sum_{u\leq X}\frac{1}{u}\sum_{d|u}\frac{\mu(d)}{d^2}+$$

$$+\frac{\pi^2}{6r}\sum_{u\leq rX}\frac{1}{u}\sum_{d|u}\frac{\mu(d)}{d^2}+B.$$

In der q-Summe kann man q durch dn ersetzen, mit der Maßgabe, daß dn gerade sein soll. In den beiden u-Summen kann man d durch v und u durch uv ersetzen. Das gibt

$$2XS''_{2r}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{\substack{dn\leq X\\ 2|dn}}\frac{\mu(d)}{d^3n}+\frac{\pi^2}{8}\sum_{uv\leq X}\frac{\mu(v)}{v^3u}+\frac{\pi^2}{6r}\sum_{uv\leq rX}\frac{\mu(v)}{v^3u}+B.$$

Im ersten Glied ist notwendig d ungerade, n gerade, d. h. man kann d durch u, n durch $2n$ ersetzen; oder aber ist d gerade, d. h. $d=q$. Somit ist

$$2XS''_{2r}=\frac{\pi^2}{12}\sum_{u\leq X/2}\frac{\mu(u)}{u^3}\sum_{n\leq X/2u}\frac{1}{n}+\frac{\pi^2}{6}\sum_{q\leq X}\frac{\mu(q)}{q^3}\sum_{n\leq X/q}\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{\pi^2}{8}\sum_{v\leq X}\frac{\mu(v)}{v^3}\sum_{u\leq X/v}\frac{1}{u}+\frac{\pi^2}{6r}\sum_{v\leq rX}\frac{\mu(v)}{v^3}\sum_{u\leq rX/v}\frac{1}{u}+B$$

$$=\frac{\pi^2}{12}\log X\sum_{u\leq X/2}\frac{\mu(u)}{u^3}+\frac{\pi^2}{6}\log X\sum_{q\leq X}\frac{\mu(q)}{q^3}+\frac{\pi^2}{16}\log X\sum_{v\leq X}\frac{\mu(v)}{v^3}+$$

$$+\frac{\pi^2}{12r}\log X\sum_{v\leq rX}\frac{\mu(v)}{v^3}+B$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi^2}{24r}\right)\log x\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\mu(u)}{u^3}+\frac{\pi^2}{12}\log x\sum_{q=2}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^3}+B.$$

In Verbindung mit (7), ergibt dies

$$(34)\qquad 2XS''_{2r} = \frac{\pi^2}{7\zeta(3)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3r}\right)\log x + B.$$

Aus (30), (32) und (34) folgt

$$S_{2r} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{7\zeta(3)}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6r}\right)\frac{\log x}{X} + \frac{B}{X},$$

d. h.

$$S_{21}+S_{22} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{28\zeta(3)}\frac{\log x}{X} + \frac{B}{X}.$$

Addiert man dies zu (25), so ergibt sich wegen (16) die zweite Zeile dei Behauptung (14).

Hilfssatz 4.

$$(35)\qquad T_h = \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{(m, h^2 n)^2}{m^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{12\zeta(3)} X\log x + BX & \text{für} \quad h=1,\\[2mm] \dfrac{13\pi^2}{84\zeta(3)} X\log x + BX & \text{für} \quad h=2;\end{cases}$$

$$(36)\qquad U_h = \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{(m, h^2 n)^2}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{12\zeta(3)} X\log x + BX & \text{für} \quad h=1,\\[2mm] \dfrac{17\pi^2}{21\zeta(3)} X\log x + BX & \text{für} \quad h=2.\end{cases}$$

Beweis. Setzt man $(m, h^2n) = d$ in der Summe (35), so ergibt sich die zu (15) analoge Formel

$$(37)\qquad T_h = \sum_{d\leqslant hX} d^2 \sum_{\substack{m\leqslant hX,\, n\leqslant X\\ (m,h^2n)=d}} \frac{1}{m^2}.$$

Darin ist

$$(38)\qquad T_h = T_{h0}+T_{h1}+T_{h2},$$

wobei T_{h0}, T_{h1}, T_{h2} dieselbe Bedeutung in bezug auf die Summe (37) haben, wie S_{h0}, S_{h1}, S_{h2} in bezug auf die Summe (15).

In T_{h0} ist $h^2|m$, also auch $h^2|d$. Ersetzt man daher m durch h^2m und d durch h^2d, so folgt

$$T_{h0} = \sum_{d\leqslant X/h} d^2 \sum_{\substack{m\leqslant X/h,\, n\leqslant X\\ (m,n)=d}} \frac{1}{m^2}.$$

Hierin kann man m, n durch dm, dn ersetzen und bekommt

$$T_{h0} = \sum_{d\leqslant X/h} \sum_{m\leqslant X/hd} \frac{1}{m^2} \sum_{\substack{n\leqslant X/d\\ (m,n)=1}} 1.$$

Hieraus ergibt sich weiter, da jedes Intervall der Länge m genau $\varphi(m)$ zu m teilerfremde n enthält,

$$\begin{aligned} T_{h0} &= \sum_{d\leqslant X/h} \sum_{m\leqslant X/hd} \frac{1}{m^2}\left(\frac{X}{dm}\varphi(m)+Bm\right)\\ &= X\sum_{d\leqslant X/h}\frac{1}{d}\sum_{m\leqslant X/hd}\frac{\varphi(m)}{m^3} + B\sum_{d\leqslant X}\sum_{m\leqslant X/d}\frac{1}{m}\\ &= X\sum_{d\leqslant X/h}\frac{1}{d}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m^3} + B\sum_{m>X/hd}\frac{m}{m^3}\right) + B\sum_{m\leqslant X}\frac{1}{m}\sum_{d\leqslant X/m} 1.\end{aligned}$$

Zusammen mit (8) ergibt dies

$$\begin{aligned} T_{h0} &= \frac{\pi^2 X}{6\zeta(3)}\sum_{d\leqslant X/h}\frac{1}{d} + BX\sum_{d\leqslant X}\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{X} + BX\sum_{m\leqslant X}\frac{1}{m^2}\\ (39)\qquad &= \frac{\pi^2}{6\zeta(3)} X\log X + BX = \frac{\pi^2}{12\zeta(3)} X\log x + BX.\end{aligned}$$

Wegen $T_{10} = T_1$ ist damit die obere Zeile von (35) bewiesen. Zugleich ergibt sich die Richtigkeit der ersten Zeile von (36); denn für $h=1$ fallen die Summen (35) und (36) zusammen.

Es sei r wieder einer der Werte 1 oder 2. Dann ergibt sich, genau wie beim Beweise von (29),

$$T_{2r} = \sum_{v\leqslant rX} v^2 \sum_{v\leqslant rX}\frac{1}{u^2}\sum_{\substack{n\leqslant X\\ (u,n)=v}} 1.$$

Ersetzt man hier u, n durch vu, vn, so folgt

$$\begin{aligned} T_{2r} &= \sum_{v\leqslant rX}\sum_{u\leqslant rX/v}\frac{1}{u^2}\sum_{\substack{n\leqslant X/v\\ (u,n)=1}} 1 = \sum_{v\leqslant rX}\sum_{u\leqslant rX/v}\frac{1}{u^2}\left(\frac{X}{vu}\varphi(u)+Bu\right)\\ &= X\sum_{v\leqslant rX}\frac{1}{v}\sum_{u\leqslant rX/v}\frac{\varphi(u)}{u^3} + B\sum_{v\leqslant rX}\sum_{u\leqslant rX/v}\frac{1}{u}\\ &= X\sum_{v\leqslant rX}\frac{1}{v}\left(\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^3}+B\frac{v}{X}\right) + B\sum_{u\leqslant rX}\frac{1}{u}\sum_{v\leqslant rX/u} 1.\end{aligned}$$

Zusammen mit (8) ergibt dies

$$T_{2r} = \frac{\pi^2 X}{7\zeta(3)} \sum_{v<rX} \frac{1}{v} + BX = \frac{\pi^2}{14\zeta(3)} X\log X + BX = \frac{\pi^2}{28\zeta(3)} X\log x + BX,$$

(40) $$T_{21}+T_{22} = \frac{\pi^2}{14\zeta(3)} X\log x + BX.$$

Aus (38)-(40) folgt die zweite Zeile von (35).

Die Behandlung von U_2 ist der von T_2 ähnlich. Zunächst ist

(41) $$U_2 = \sum_{d<2X} d^2 \sum_{\substack{m<2X,\, n<X\\ (m,4n)=d}} \frac{1}{n^2} = U_{20}+U_{21}+U_{22},$$

wobei U_{20} die Glieder mit $4|m$, U_{21} diejenigen mit $m=2u$, U_{22} diejenigen mit $m=u$ enthält.

Hier ist

$$U_{20} = 16 \sum_{d<X/2} d^2 \sum_{\substack{m<X/2,\, n<X\\ (m,n)=d}} \frac{1}{n^2} = 16 \sum_{d<X/2} \sum_{n<X/d} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{m<X/2d\\ (m,n)=1}} 1$$

$$= 16 \sum_{d<X/2} \sum_{n<X/d} \frac{1}{n^2} \left(\frac{X}{2dn}\varphi(n) + Bn\right)$$

$$= 8X \sum_{d<X/2} \frac{1}{d} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^3} + B\frac{d}{X}\right) + BX$$

(42) $$= \frac{4\pi^2 X}{3\zeta(3)} \sum_{d<X/2} \frac{1}{d} + BX = \frac{2\pi^2}{3\zeta(3)} X\log x + BX,$$

$$\frac{r^2}{4} U_{2r} = \sum_{v<rX} v^2 \sum_{n<X} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{u<rX\\ (u,n)=v}} 1 = \sum_{v<rX} \sum_{n<X/v} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{u<rX/v\\ (u,n)=1}} 1$$

$$= \sum_{v<rX} \sum_{n<X/v} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{m<rX/v\\ (m,2n)=1}} 1 = \sum_{v<rX} \sum_{n<X/v} \frac{1}{n^2} \left(\frac{rX}{2vn}\varphi(2n) + Bn\right)$$

$$= \frac{rX}{2} \sum_{v<rX} \frac{1}{v} \sum_{n<X/v} \frac{\varphi(2n)}{n^3} + BX$$

$$= \frac{rX}{2} \sum_{v<rX} \frac{1}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(2n)}{n^3} + BX.$$

In Verbindung mit (9), ergibt dies

$$U_{2r} = \frac{8\pi^2 X}{21\zeta(3)r} \sum_{v<rX} \frac{1}{v} + BX = \frac{2\pi^2}{21\zeta(3)r} X\log x + BX,$$

(43) $$U_{21}+U_{22} = \frac{\pi^2}{7\zeta(3)} X\log x + BX.$$

Aus (41)-(43) folgt die zweite Zeile von (36).

Hilfssatz 5.

(44) $$\sum_{\substack{a,b<x\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,n)^2}{mn} + \frac{B}{x}.$$

Beweis. Für $a>0$, $b>0$, $an=bm$ ist

$$a\frac{n}{(m,n)} = b\frac{m}{(m,n)},$$

also

$$a = d\frac{m}{(m,n)}, \qquad b = r\frac{n}{(m,n)},$$

$$d\frac{mn}{(m,n)^2} = r\frac{mn}{(m,n)^2}, \qquad d=r,$$

(45) $$a = d\frac{m}{(m,n)}, \qquad b = d\frac{n}{(m,n)}.$$

Umgekehrt sind die durch (45) gegebenen a, b positiv, und es ist $an = bm$. Somit ist, mit Rücksicht auf (1.12),

(46) $$\sum_{\substack{a,b=1\\ an=bm}}^{\infty} \frac{1}{ab} = \frac{(m,n)^2}{mn} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,n)^2}{mn},$$

$$\sum_{\substack{a>x,\, b>0\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \frac{(m,n)^2}{mn} \sum_{dm/(m,n)>x} \frac{1}{d^2} = \frac{(m,n)^2}{mn} \sum_{d>x(m,n)/m} \frac{1}{d^2}$$

$$= B\frac{(m,n)^2}{mn}\cdot\frac{m}{x(m,n)} = B\frac{(m,n)}{nx},$$

d. h.

(47) $$\sum_{\substack{a>x,\, b>0\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \frac{B}{x}.$$

Vertauscht man hier a mit b und m mit n, so folgt

$$\sum_{\substack{b>x,\,a>0\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \frac{B}{x}. \tag{48}$$

Aus (46)-(48) ergibt sich

$$\sum_{\substack{a,b<x\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \sum_{\substack{a,b=1\\ an=bm}}^{\infty} \frac{1}{ab} + B \sum_{\substack{a>x,\,b>0\\ an=bm}} \frac{1}{ab} + B \sum_{\substack{b>x,\,a>0\\ an=bm}} \frac{1}{ab} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,n)^2}{mn} + \frac{B}{x}.$$

Hilfssatz 6. *Es sei*

$$V_h = \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{1}{mn} \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}} \frac{1}{ab} \int\limits_N^x y^2\,dy. \tag{49}$$

Dann ist

$$V_1 = \frac{5\pi^2}{432}x^3 - \frac{\pi^2}{180\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}, \tag{50}$$

$$V_2 = \frac{11\pi^2}{432}x^3 - \frac{\pi^2}{84\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}. \tag{51}$$

Beweis. Aus (49), (44) (wo x durch x^2, n durch h^2n zu ersetzen ist) und (2.2) ergibt sich

$$V_h = \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{1}{mn}\left(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,h^2n)^2}{h^2mn} + \frac{B}{x^2}\right) \int\limits_N^x y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{(m,h^2n)^2}{m^2n^2} \int\limits_N^x y^2\,dy + \frac{B}{x^2} \sum_{m,n\leqslant hX} \frac{x^3}{mn}.$$

Vertauscht man im ersten Glied die Summation mit der Integration, indem man von der Definition (2.2) von N Gebrauch macht, so folgt, wenn noch die Abkürzung (1.27) benutzt wird,

$$V_h = \frac{1}{12}\int\limits_1^x y^2\,dy \sum_{\substack{m\leqslant hY\\ n\leqslant Y}} \frac{(m,h^2n)^2}{m^2n^2} + Bx\log^2 x. \tag{52}$$

Hier kann man für die m,n-Summe die Abschätzungen (14) mit $X = Y$ benutzen, denn diese Abschätzungen bleiben auch für $1 \leqslant Y < 3^{\frac{1}{2}}$

gültig. Dann folgt aus (52)

$$V_1 = \frac{5\pi^2}{144}\int\limits_1^x y^2\,dy - \frac{\pi^2}{72\,\zeta(3)}\int\limits_1^x y^{3/2}\log y\,dy + Bx^{5/2},$$

und daraus ergibt sich sofort die Abschätzung (50). Auf gleiche Weise bekommt man die Abschätzung (51).

Hilfssatz 7. *Es sei*

$$W_{h1} = \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{n}{m} \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}} \frac{1}{ab} \int\limits_N^x y\,dy, \tag{53}$$

$$W_{h2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{m}{n} \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}} \frac{1}{ab} \int\limits_N^x y\,dy. \tag{54}$$

Dann ist

$$W_{11} = \frac{\pi^2}{360\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}, \qquad W_{21} = \frac{13\pi^2}{2520\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}, \tag{55}$$

$$W_{12} = \frac{\pi^2}{360\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}, \qquad W_{22} = \frac{17\pi^2}{2520\,\zeta(3)} x^{5/2}\log x + Bx^{5/2}. \tag{56}$$

Beweis. Wie beim Beweise des vorigen Hilfssatzes ist

$$W_{h1} = \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{n}{m}\left(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,h^2n)^2}{h^2mn} + \frac{B}{x^2}\right) \int\limits_N^x y\,dy$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} \frac{(m,h^2n)^2}{m^2} \int\limits_N^x y\,dy + \frac{B}{x^2} \sum_{m,n\leqslant hX} \frac{n}{m} x^2$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_1^x y\,dy \sum_{\substack{m\leqslant hY\\ n\leqslant Y}} \frac{(m,h^2n)^2}{m^2} + Bx\log x.$$

Setzt man hier für die m,n-Summe die Abschätzung (35) mit $X = Y$, $h = 1$ ein, so folgt

$$W_{11} = \frac{\pi^2}{144\,\zeta(3)}\int\limits_1^x y^{3/2}\log y\,dy + Bx^{5/2},$$

und daraus ergibt sich die erste Abschätzung (55). Die zweite Abschätzung (55) beweist man analog.

Weiter ist

$$W_{h2}=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}}\frac{m}{n}\left(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{(m,h^2n)^2}{h^2mn}+\frac{B}{x^2}\right)\int\limits_N^x y\,dy$$

$$=\frac{1}{12h^2}\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}}\frac{(m,h^2n)^2}{n^2}\int\limits_N^x y\,dy+Bx\log x$$

$$=\frac{1}{12h^2}\int\limits_1^x y\,dy\sum_{\substack{m\leqslant hY\\ n\leqslant Y}}\frac{(m,h^2n)^2}{n^2}+Bx\log x.$$

Setzt man hier für die m, n-Summe die Abschätzung (36) mit $X=Y$, $h=2$ ein, so folgt

$$W_{22}=\frac{17\pi^2}{1008}\int\limits_1^x y^{3/2}\log y\,dy+Bx^{5/2}.$$

Daraus ergibt sich die zweite Abschätzung (56). Die erste Abschätzung (56) beweist man ebenso. Sie folgt auch aus der ersten Abschätzung (55), denn für $h=1$ fallen die Summen (53) und (54) zusammen (man vertausche in (53) m mit n, a mit b und beachte die Definition (2.2) von N).

Hilfssatz 8.

$$\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} mn\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x dy=Bx^{5/2}, \tag{57}$$

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\mathcal{M}(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-2}\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}+\frac{b}{n}\right)\right\}dy$$

$$=Bx^{5/2}. \tag{58}$$

Beweis. Nach (2.2) und (44) ist die linke Seite von (57)

$$=B\sum_{m,n\leqslant 2X} mn\left(\frac{(m,n)^2}{mn}+\frac{1}{x^2}\right)x=Bx\sum_{m,n\leqslant 2X}(m,n)^2=Bx\sum_{r\leqslant 2X}r^2\sum_{\substack{(m,n)\leqslant 2X\\ (m,n)=r}}1.$$

Ersetzt man hier m, n durch rm, rn, so folgt, daß die linke Seite von (57)

$$=Bx\sum_{r\leqslant 2X}r^2\sum_{m,n\leqslant 2X/r}1=Bx\sum_{r\leqslant 2X}r^2\left(\frac{X}{r}\right)^2=Bx^{5/2},$$

was zu beweisen war.

Die linke Seite von (58) ist nach (2.1) und (2.2), wenn man auf das Integral den zweiten Mittelwertsatz anwendet,

$$=B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\sum_{m,n\leqslant 2X}m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{x^{2-\alpha-\beta}}{ab}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)\right\}^{-1}.$$

Da aber das arithmetische Mittel von zwei positiven Zahlen nicht kleiner als das geometrische ist, so gilt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)\geqslant\left(\frac{ab}{mn}\right)^{1/2}.$$

Daher ist die linke Seite von (58)

$$=B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}x^{2-\alpha-\beta}\sum_{m,n\leqslant 2X}m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\left(\frac{mn}{ab}\right)^{1/2}$$

$$=B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}x^{2-\alpha-\beta}\sum_{m,n\leqslant 2X}m^{2\alpha-1/2}n^{2\beta-1/2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(ab)^{-3/2}$$

$$=B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}x^{2-\alpha-\beta}X^{2\alpha+2\beta+1}=B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}x^{5/2}=Bx^{5/2}.$$

§ 4. Hilfssätze

In diesem Paragraphen sind a, b, c, m positiv.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$Z_h(x)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\mathcal{M}(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}}m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\times \tag{1}$$

$$\times\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an\neq bm}}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{b}{n}\right)\right\}dy.$$

Dann ist

$$U_1(x)=\left(\frac{1}{12}+\frac{5\pi^2}{432}\right)x^3+\frac{1}{2\pi^2}Z_1(x)+Bx^{5/2}, \tag{2}$$

$$U_2(x)=\left(\frac{1}{3}+\frac{11\pi^2}{432}\right)x^3+\frac{1}{2\pi^2}Z_2(x)+Bx^{5/2}. \tag{3}$$

Beweis. Ist y nichtganz und läuft l über eine Reihe aufeinander folgender Zahlen, so ist (vgl. eine analoge Überlegung beim Beweise von Hilfssatz 2.5.1)

(4) $$\left|\sum_l \sin 2\pi l y\right| \leqslant |\operatorname{cosec}\pi y|.$$

Für ein geeignetes M ist nämlich

$$\left|\sum_l e(ly)\right| = \left|\sum_{l=0}^{M-1} e(ly)\right| = \frac{|1-e(My)|}{|1-e(y)|} \leqslant \frac{2}{|1-e(y)|} = |\operatorname{cosec}\pi y|.$$

Aus (4) folgt durch partielle Summation (Hilfssatz 1.3.3) für nichtganze y und beliebige j

$$\left|\sum_{n=r+1}^{r+j} \frac{\sin 2\pi n y}{n}\right| \leqslant \frac{|\operatorname{cosec}\pi y|}{r},$$

und hieraus folgt für $j\to\infty$

$$\left|\sum_{n>r} \frac{\sin 2\pi n y}{n}\right| \leqslant \frac{|\operatorname{cosec}\pi y|}{r}.$$

Ist hier die rechte Seite $\geqslant 1$, so ist $|\sin\pi y| \leqslant 1/r$. Hieraus folgt, indem man den Additionssatz für den Sinus benutzt und durch Induktion schließt, daß

$$|\sin n\pi y| \leqslant \frac{n}{r}$$

ist. Wegen (2.3.3) und (1.3.1) ist daher

$$\left|\sum_{n>r} \frac{\sin 2\pi n y}{n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^{r}\right| \leqslant \pi|\psi(y)| + \sum_{n=1}^{r} \frac{2n}{rn} = \pi|\psi(y)| + 2 \leqslant \frac{\pi}{2} + 2 \leqslant 4.$$

Jedenfalls ist also für nichtganze y

(5) $$\left|\sum_{n>r} \frac{\sin 2\pi n y}{n}\right| \leqslant 4\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{|\operatorname{cosec}\pi y|}{r}\right),$$

und dies gilt auch für ganzzahlige y, da nach Verabredung $\mathrm{Min}(s,\infty) = s$ zu setzen ist. (Aus (2.3.3), (1.3.1) und (5) ergibt sich übrigens sofort die gleichmäßige Beschränktheit der Summen (2.3.4)).

Wir setzen jetzt

(6) $$r = [x^2],$$

(7) $$f_r(y) = -\frac{1}{\pi}\sum_{a=1}^{r} \frac{1}{a} \sin \frac{2\pi a h^2 y}{m}, \qquad g_r(y) = -\frac{1}{\pi}\sum_{b=1}^{r} \frac{1}{b} \sin \frac{2\pi b y}{n}.$$

Aus (2.3.3), (1.3.1), (5), (6) und (7) folgt

$$f_r(y) = B, \qquad g_r(y) = B,$$

$$\psi\left(\frac{h^2 y}{m}\right) - f_r(y) = B\,\mathrm{Min}\left(1, x^{-2}\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi h^2 y}{m}\right|\right),$$

$$\psi\left(\frac{y}{n}\right) - g_r(y) = B\,\mathrm{Min}\left(1, x^{-2}\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi y}{n}\right|\right),$$

und hieraus ergibt sich weiter

$$\int_N^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi\left(\frac{y}{n}\right) y^{2-\alpha-\beta}\,dy - \int_N^x f_r(y) g_r(y)\, y^{2-\alpha-\beta}\,dy$$

$$= \int_N^x \left\{\psi\left(\frac{h^2y}{m}\right) - f_r(y)\right\} g_r(y)\, y^{2-\alpha-\beta}\,dy + \int_N^x \left\{\psi\left(\frac{y}{n}\right) - g_r(y)\right\} f_r(y)\, y^{2-\alpha-\beta}\,dy +$$

$$+ \int_N^x \left\{\psi\left(\frac{h^2y}{m}\right) - f_r(y)\right\}\left\{\psi\left(\frac{y}{n}\right) - g_r(y)\right\} y^{-\alpha-\beta}\,dy$$

(8) $$= B x^{2-\alpha-\beta}(J_1 + J_2),$$

wo

(9) $$J_1 = \int_N^x \mathrm{Min}\left(1, x^{-2}\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi h^2 y}{m}\right|\right) dy,$$

(10) $$J_2 = \int_N^x \mathrm{Min}\left(1, x^{-2}\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi y}{n}\right|\right) dy.$$

Im Integral (9) ersetzen wir y durch my/h^2 und erhalten

$$J_1 = \frac{m}{h^2}\int_{h^2N/m}^{h^2x/m} \mathrm{Min}(1, x^{-2}|\operatorname{cosec}\pi y|)\,dy \leqslant m\int_0^{h^2x/m}.$$

$$\leqslant \int_{\substack{0\\ |\operatorname{cosec}\pi y|\geqslant x}}^{h^2x/m} dy + m\int_{\substack{0\\ |\operatorname{cosec}\pi y|\leqslant x}}^{h^2x/m} x^{-2}|\operatorname{cosec}\pi y|\,dy = mJ_{11} + mJ_{12}.$$

In J_{11} ist y der Bedingung

$$f(y) = |\sin \pi y| \leqslant \frac{1}{x} \tag{11}$$

unterworfen. Durchläuft y ein Intervall der Länge 1, so bilden diejenigen y, die der Ungleichung (11) genügen, ein Teilintervall der Länge $\leqslant 1/x$. Die Funktion $f(y)$ hat nämlich die Periode 1, und für $|y| \leqslant \frac{1}{2}$ ist $f(y) \geqslant 2|y|$, so daß für diese y aus (11) die Ungleichung $|y| \leqslant 1/2x$ folgt. Für J_{11} haben wir demnach die Abschätzung

$$J_{11} = B\frac{x}{m}\cdot\frac{1}{x} = \frac{B}{m}.$$

Für J_{12} ist einfach

$$J_{12} \leqslant \int\limits_0^{h^2x/m} x^{-2}x\,dy = \frac{h^2}{m}.$$

Somit ist

$$J_1 = B. \tag{12}$$

Für das Integral (10) bekommt man analog

$$J_2 = B. \tag{13}$$

Aus (8), (12) und (13) folgt

$$\int\limits_N^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi\left(\frac{y}{n}\right) y^{2-\alpha-\beta}dy - \int\limits_N^x f_r(y)\,g_r(y)\,y^{2-\alpha-\beta}dy = Bx^{2-\alpha-\beta},$$

d. h., mit Rücksicht auf (2.1),

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1} \int\limits_N^x \psi\left(\frac{h^2y}{m}\right)\psi\left(\frac{y}{n}\right)y^{2-\alpha-\beta}dy -$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1} \int\limits_N^x f_r(y)\,g_r(y)\,y^{2-\alpha-\beta}dy$$

$$= B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} x^{2-\alpha-\beta} \sum_{m,n\leqslant 2X} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1} = Bx^{5/2}. \tag{14}$$

Andererseits ist nach (6) und (7), wenn von der Identität

$$\sin\sigma\sin\theta = \tfrac{1}{2}\cos(\sigma-\theta) - \tfrac{1}{2}\cos(\sigma+\theta)$$

Gebrauch gemacht wird,

$$\int\limits_N^x f_r(y)\,g_r(y)\,y^{2-\alpha-\beta}dy = \frac{1}{\pi^2}\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi a h^2 y}{m}\sin\frac{2\pi b y}{n}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}dy + \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an\neq bm}}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{b}{n}\right)\right\}dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}+\frac{b}{n}\right)\right\}dy.$$

Aus (2.20) und (14) ergibt sich

$$U_h(x) = \frac{h^2}{12}x^3 + \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\int\limits_N^x f_r(y)\,g_r(y)\,y^{2-\alpha-\beta}dy + Bx^{5/2}.$$

Hieraus folgt weiter, wegen (15) und (1),

$$U_h(x) = \frac{h^2}{12}x^3 + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an=bm}}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}dy + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}Z_h(x) - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} M(\alpha,\beta)\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant X}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\times$$

$$\times\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\int\limits_N^x y^{2-\alpha-\beta}\cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}+\frac{b}{n}\right)\right\}dy + Bx^{5/2}.$$

Auf Grund von (2.1), (3.49), (3.53), (3.54) und (3.57), erhalten wir für das zweite Glied auf der rechten Seite von (16)

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} = V_h + W_{h1} + W_{h2} + Bx^{5/2}.$$

Wegen (3.58) ist das vierte Glied $= Bx^{5/2}$. Somit ist

(17) $$U_h(x) = \frac{h^2}{12}x^3 + V_h + W_{h1} + W_{h2} + \frac{1}{2\pi^2} Z_h(x) + Bx^{5/2}.$$

Die Behauptungen (2), (3) des Hilfssatzes folgen aus (17), (3.50), (3.51), (3.55) und (3.56).

Im folgenden werden wir es nur noch mit der Funktion (1) zu tun haben, und zwar ist es unser Ziel nachzuweisen, daß

(18) $$Z_h(x) = Bx^{5/2}.$$

(1.1) folgt nämlich aus (1.46), (2), (3) und (18).

Im folgenden möge j einen der beiden Werte 1 oder 2 bedeuten. Es werde gesetzt

(19) $$R = \operatorname{Max}\left(\frac{m^2}{h^2}, \frac{n^2}{j^2}\right),$$

(20) $$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \mathcal{H}(\alpha, \beta, h, j) = \mathcal{M}(\alpha, \beta, h)\,\mathcal{M}(\beta, \alpha, j),$$

wobei die $\mathcal{M}$-Funktionen rechts durch (2.1) definiert sind. Ferner sei

(21) $$F(x; h, j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \mathcal{H}(\alpha, \beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant jX}} m^{2\alpha-1} n^{2\beta-1} \times$$
$$\times \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an>j^2bm}} \frac{1}{ab} \int_R^x y^{2-\alpha-\beta} \cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m} - \frac{j^2b}{n}\right)\right\} dy.$$

Hilfssatz 2.

(22) $$Z_h(x) = F(x; h, 1) + F(x; 1, h).$$

Beweis. Werden in (21) die Buchstaben $h, j, \alpha, \beta, m, n, a, b$ durch $j, h, \beta, \alpha, n, m, b, a$ ersetzt, so folgt wegen (19) und (20)

(23) $$F(x; j, h) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \mathcal{H}(\beta, \alpha, j, h) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant jX}} m^{2\alpha-1} n^{2\beta-1} \times$$
$$\times \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an<j^2bm}} \frac{1}{ab} \int_R^x y^{2-\alpha-\beta} \cos\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m} - \frac{j^2b}{n}\right)\right\} dy.$$

Andererseits ist nach (19), (20), (2.1) und (2.2)

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta, h, 1) = \mathcal{M}(\alpha, \beta, h)\,\mathcal{M}(\beta, \alpha, 1) = \mathcal{M}(\alpha, \beta, h) = \mathcal{M}(\alpha, \beta),$$
$$\mathcal{H}(\beta, \alpha, 1, h) = \mathcal{M}(\beta, \alpha, 1)\,\mathcal{M}(\alpha, \beta, h) = \mathcal{M}(\alpha, \beta, h) = \mathcal{M}(\alpha, \beta),$$
$$R = N \quad \text{für} \quad j = 1.$$

In Verbindung mit (21), (23) und (1), ergibt sich daraus die Gleichung (22).

Hilfssatz 3. *Zu jedem vorgegebenen Tripel a, b, c gibt es nicht mehr als*

(24) $$B\{(a, b)(ab)^{-1/2}X + 1\}$$

Paare m, n mit

(25) $$m \leqslant 2X, \quad n \leqslant 2X, \quad an - bm = c.$$

Beweis. Sind die Bedingungen (25) erfüllt, so muß $an \equiv c \pmod b$ sein. Es gehört also n einer festen Restklasse $\operatorname{mod}\big(b/(a, b)\big)$ an. m ist durch n eindeutig bestimmt. Es gibt also

$$B\left\{\frac{(a, b)}{b} X + 1\right\}$$

Lösungen m, n der Bedingungen (25). Wegen $bm \equiv -c \pmod a$ gehört m einer festen Restklasse $\operatorname{mod}\big(a/(a, b)\big)$ an. Da n durch m eindeutig bestimmt ist, so hat (25)

$$B\left\{\frac{(a, b)}{a} X + 1\right\}$$

Lösungen. Wegen

$$\operatorname{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \leqslant (ab)^{-1/2}$$

ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 4.

(26) $$F(x; h, j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \mathcal{H}(\alpha, \beta) \sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant jX}} m^{2\alpha} n^{2\beta} \sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an>j^2bm}} \{ab(h^2an - j^2bm)\}^{-1} \times$$
$$\times \left(x^{2-\alpha-\beta} \sin\left\{2\pi x\left(\frac{h^2a}{m} - \frac{j^2b}{n}\right)\right\} - R^{2-\alpha-\beta} \sin\left\{2\pi R\left(\frac{h^2a}{m} - \frac{j^2b}{n}\right)\right\}\right) + Bx^{5/2}.$$

Beweis. Das Integral in (21) ist

$$\int\limits_R^x = \frac{y^{2-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}}{2\pi\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)}\Bigg|_R^x -$$

$$-\frac{2-\alpha-\beta}{2\pi\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)}\int\limits_R^x y^{1-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi y\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}dy$$

(27)
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{mn}{h^2an-j^2bm}\left(x^{2-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi x\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-R^{2-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi R\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}\right)+$$

$$+Bx^{1-\alpha-\beta}m^2n^2(h^2an-j^2bm)^{-2}.$$

Das ist auch für $\alpha=\beta=1$ richtig, da alsdann $2-\alpha-\beta=0$ ist.

Setzt man (27) in (21) ein, so ergibt sich das Hauptglied auf der rechten Seite von (26) und ein Restglied, das zur Abkürzung mit S bezeichnet werden möge. Dabei ist nach (20) und (2.1)

$$S = B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\sum_{\substack{m\leqslant hX\\ n\leqslant jX}} m^{2\alpha-1}n^{2\beta-1}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an>j^2bm}}(ab)^{-1}x^{1-\alpha-\beta}m^2n^2(h^2an-j^2bm)^{-2}$$

$$= B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}x^{1-\alpha-\beta}\sum_{m,n\leqslant 2X}m^{2\alpha+1}n^{2\beta+1}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an>j^2bm}}(ab)^{-1}(h^2an-j^2bm)^{-2}$$

$$= Bx^2\sum_{m,n\leqslant 2X}\sum_{\substack{a,b\leqslant x^2\\ h^2an>j^2bm}}(ab)^{-1}(h^2an-j^2bm)^{-2}$$

$$= Bx^2\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^2}\sum_{\substack{m,n\leqslant 2X\\ h^2an-j^2bm=c}}1.$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 3 an, wobei a, b durch h^2a, j^2b zu ersetzen sind, so folgt

$$S = Bx^2\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^2}\{(a,b)(ab)^{-1/2}X+1\}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a,b=1}^{\infty}\frac{(a,b)}{(ab)^{3/2}}+Bx^2\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{d=1}^{\infty}d\sum_{\substack{a,b=1\\ (a,b)=d}}^{\infty}(ab)^{-3/2}+Bx^{5/2}.$$

Ersetzt man hier a, b durch da, db, so folgt

$$S = Bx^{5/2}\sum_{d=1}^{\infty}d^{-2}\sum_{a=1}^{\infty}a^{-3/2}\sum_{b=1}^{\infty}b^{-3/2}+Bx^{5/2} = Bx^{5/2},$$

was zu beweisen war.

Wir führen jetzt, bis zum Ende des Kapitels, die Bezeichnung

(28)
$$x^{1/100} = W$$

ein, die, ebenso wie (1.7), als bekannt vorausgesetzt und nicht zitiert wird.

Hilfssatz 5.

(29)
$$F(x;h,j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}H(\alpha,\beta)\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab}\sum_{c\leqslant h^2j^2(h^2a,j^2b)XW}\frac{1}{c}\times$$

$$\times\sum_{\substack{m\leqslant hX,n\leqslant jX\\ h^2an-j^2bm=c}}m^{2\alpha}n^{2\beta}\left(x^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi xc}{mn}-R^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi Rc}{mn}\right)+Bx^{5/2}.$$

Beweis. In (26) ist

$$h^2an-j^2bm\leqslant h^2an\leqslant h^2x^2jX\leqslant h^2j^2x^3.$$

Daher ist

$$F(x;h,j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}H(\alpha,\beta)\sum_{a,b\leqslant x^2}\frac{1}{ab}\sum_{c\leqslant h^2j^2x^3}\frac{1}{c}\times$$

$$\times\sum_{\substack{m\leqslant hX,\ n\leqslant jX\\ h^2an-j^2bm=c}}m^{2\alpha}n^{2\beta}\left(x^{2-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi x\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-R^{2-\alpha-\beta}\sin\left\{2\pi R\left(\frac{h^2a}{m}-\frac{j^2b}{n}\right)\right\}\right)+Bx^{5/2}.$$

Behält man hier nur die $a, b \leqslant W$ bei und nennt den dabei entstehenden Fehler S, so ist wegen (19)

$$S = B \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \Bigg(\sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} + \sum_{\substack{W<b\leqslant x^2\\ a\leqslant x^2}} \Bigg) \frac{1}{ab} \sum_{c\leqslant 16x^3} \frac{1}{c} \sum_{\substack{m,n\leqslant 2X\\ h^2an-j^2bm=c}} m^{2\alpha} n^{2\beta} x^{2-\alpha-\beta}$$

$$= Bx^2 \Bigg(\sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} + \sum_{\substack{W<b\leqslant x^2\\ a\leqslant x^2}} \Bigg) \frac{1}{ab} \sum_{c\leqslant 16x^3} \frac{1}{c} \sum_{\substack{m,n\leqslant 2X\\ h^2an-j^2bm=c}} 1.$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 3, auf dieselbe Weise wie beim Beweise von Hilfssatz 4 an, so ergibt sich

$$S = Bx^2 \Bigg(\sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} + \sum_{\substack{W<b\leqslant x^2\\ a\leqslant x^2}} \Bigg) \frac{1}{ab} \sum_{c\leqslant 16x^3} \frac{1}{c} \{(a, b)(ab)^{-1/2}X+1\}$$

$$= Bx^{5/2} \sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} \frac{(a, b)}{(ab)^{3/2}} \sum_{c\leqslant 16x^3} \frac{1}{c} + Bx^2 \sum_{a,b\leqslant x^2} \frac{1}{ab} \sum_{c\leqslant 16x^3} \frac{1}{c}$$

$$= Bx^{5/2}\log x \sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} \frac{(a, b)}{(ab)^{3/2}} + Bx^2\log^3 x$$

$$= Bx^{5/2}W^{1/2} \sum_{\substack{W<a\leqslant x^2\\ b\leqslant x^2}} \frac{(a, b)}{(ab)^{3/2}} + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}W^{1/2} \sum_{d=1}^{\infty} d \sum_{\substack{a>W, b>0\\ (a,b)=d}} (ab)^{-3/2} + Bx^{5/2}.$$

Ersetzt man hier a, b durch da, db, so folgt

$$S = Bx^{5/2}W^{1/2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-2} \sum_{a>W/d} a^{-3/2} \sum_{b=1}^{\infty} b^{-3/2} + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}W^{1/2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-2} \left(\frac{d}{W}\right)^{1/2} + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

Also ist

(30) $$F(x; h, j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \varkappa(\alpha, \beta) \sum_{a,b\leqslant W} \frac{1}{ab} \sum_{c\leqslant h^2j^2x^3} \frac{1}{c} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m\leqslant hX,\ n\leqslant jX\\ h^2an-j^2bm=c}} m^{2\alpha} n^{2\beta} \left(x^{2-\alpha-\beta} \sin\frac{2\pi xc}{mn} - R^{2-\alpha-\beta} \sin\frac{2\pi Rc}{mn} \right) + Bx^{5/2}.$$

In (30) ist

$$c = h^2an - j^2bm \leqslant h^2an \leqslant h^2WjX \leqslant h^2j^2XW.$$

Daher ist die m, n-Summe für $c > h^2j^2XW$ leer, und (29) folgt aus (30).

Bevor wir weitergehen, schicken wir einige einfache Bemerkungen voraus, die sich auf die in (29) auftretenden Zahlen a, b, c, m, n und R beziehen.

Es sei

(31) $$(h^2a, j^2b) = \Lambda, \qquad h^2a = K\Lambda, \qquad j^2b = L\Lambda.$$

Ist die m, n-Summe in (29) nicht leer, so muß Λ in c aufgehen. Wir setzen

(32) $$c = Q\Lambda.$$

Die Lösungen von

(33) $$h^2an - j^2bm = c,$$

d. h. von

(34) $$Kn - Lm = Q,$$

sind

(35) $$m = m(l) = m' + Kl, \qquad n = n(l) = n' + Ll \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei $m = m'$, $n = n'$ die Lösung mit kleinstem m ist. Insbesondere ist $m' \leqslant K$; denn, falls $m' > K$ wäre, so müßte $m'' = m' - K$, $n'' = n' - L$ eine Lösung mit noch kleinerem m sein. Somit ist

(36) $$Kn' - Lm' = Q,$$

(37) $$0 < m' \leqslant K, \qquad 0 < n' = (Q + Lm')/K \leqslant Q/K + L.$$

Von jetzt ab bedeuten m, n die durch (35) gegebenen Funktionen von l; damit hängt auch R nach (19) von l ab. Für das folgende wird es sogar nötig sein, m und n als Funktionen einer reellen Veränderlichen y zu betrachten. Wir setzen daher, in Übereinstimmung mit (35),

$$(38)\qquad m(y) = m'+Ky, \qquad n(y) = n'+Ly.$$

Hilfssatz 6. *Für $a \leqslant jb/h$ ist $m \leqslant hn/j$. Für $a > jb/h$ ist $m \leqslant hn/j$ dann und nur dann, wenn $l \leqslant (hn'-jm')/(jK-hL)$, und nur dann, wenn $l \leqslant h^3j^3(Q+ab)$ ist.*

Beweis. Für $a \leqslant jb/h$ ist nach (33)

$$c \leqslant hjb(n-jm/h),$$

also $n > jm/h$, d. h. $m < hn/j$.

Die Ungleichung $a > jb/h$ ist nach (31) mit der Ungleichung $jK > hl$ gleichbedeutend. Ist diese letzte erfüllt, so ist die Ungleichung $m \leqslant hn/j$ nach (35) mit der Ungleichung

$$l \leqslant \frac{hn'-jm'}{jK-hL}$$

gleichbedeutend, und hierin ist nach (37) und (31) die rechte Seite

$$\leqslant hn' \leqslant hn'K \leqslant h(Q+KL) \leqslant h(Q+h^2j^2ab) \leqslant h^3j^3(Q+ab).$$

Wir setzen noch zur Abkürzung

$$(39)\qquad \operatorname{Min}\left(\frac{hX-m'}{K}, \frac{jX-n'}{L}\right) = P.$$

Nach Definition von m', n' und den Summationsbedingungen für m, n in (29) ist $m' \leqslant m \leqslant hX$, $n' \leqslant n \leqslant jX$, also $P \geqslant 0$. Hieraus folgt weiter

$$(40)\qquad P = BX\operatorname{Min}\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{L}\right) = \frac{BX}{K^\sigma L^{1-\sigma}} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Hilfssatz 7.

$$(41)\qquad F(x;h,j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} H(\alpha,\beta) \sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\leqslant h^2j^2XW}\frac{1}{Q}\times$$
$$\times \sum_{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P} m^{2\alpha}n^{2\beta}\left(x^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi xQ\Lambda}{mn} - R^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi RQ\Lambda}{mn}\right) + Bx^{5/2}.$$

Beweis. Aus (29), (32), (31), (33), (35) und (39) ergibt sich (41), wobei nur die l-Summe über das Intervall $0 \leqslant l \leqslant P$ zu nehmen ist. Läßt man aber die $l < x^{4/9}$ weg, so ist nach (19) der Fehler

$$= B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\leqslant 16XW}\frac{1}{Q}\sum_{0\leqslant l<x^{4/9}} m^{2\alpha}n^{2\beta}x^{2-\alpha-\beta}$$
$$= B\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\sum_{a,b,Q\leqslant 16XW}\frac{1}{abQ}\sum_{0\leqslant l<x^{4/9}} x^2$$
$$= Bx^{2+4/9}\log^3 x = Bx^{5/2}.$$

§ 5. Beweis der Abschätzung (1.1)

Wir bringen jetzt eine letzte Serie von sechs Hilfssätzen, wonach der Beweis von (1.1) folgt.

Hilfssatz 1. *Es sei 1) $0 \leqslant \sigma \leqslant \theta - 1$; 2) im Intervall $\sigma \leqslant y \leqslant \theta$ sei die Funktion $f(y)$ reell und zweimal differenzierbar; $f''(y) \geqslant s$, $f''(y) = Bs$, wo s von y unabhängig ist; 3) im Intervall $\sigma \leqslant y \leqslant \theta$ sei ferner die Funktion $F(y)$ positiv und habe dort eine stetige Ableitung. Dann ist*

$$(1)\qquad \sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(l)\sin\{2\pi f(l)\} = B\left(F(\sigma)+\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy\right)(\theta s^{1/2}+s^{-1/2}).$$

Wird überdies noch $F'(y) > 0$ vorausgesetzt, so ist

$$(2)\qquad \sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(l)\sin\{2\pi f(l)\} = BF(\theta)(\theta s^{1/2}+s^{-1/2}).$$

Beweis. Da (2) unmittelbar aus (1) folgt, braucht nur (1) bewiesen zu werden. Wegen

$$0 < F(l) = F(\sigma)+\int_\sigma^l F'(y)\,dy \leqslant F(\sigma)+\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy$$

ist

$$\left|\sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(l)\sin\{2\pi f(l)\}\right| \leqslant \sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(l) \leqslant 20\left(F(\sigma)+\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy\right).$$

Damit ist die Abschätzung (1) für $s \geqslant 1$ bewiesen. Es sei im folgenden $s < 1$, d. h. $s = \varepsilon$. Wir haben

$$S = \sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta}\{F(l)-F(\sigma)\}\sin\{2\pi f(l)\} = \sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta}\int_\sigma^l F'(y)\,dy\sin\{2\pi f(l)\}$$
$$= \int_\sigma^\theta F'(y)\,dy\sum_{y\leqslant l\leqslant\theta}\sin\{2\pi f(l)\}.$$

Auf die l-Summe unter dem Integralzeichen wenden wir Hilfssatz 2.3.3 mit $\varepsilon = s$ an und erhalten

$$S = B\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy\,\{|f'(\theta)-f'(y)|+1\}s^{-1/2}$$

$$= B\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy\cdot\{|f'(\theta)-f'(\sigma)|+1\}s^{-1/2}.$$

Eine weitere Anwendung von Hilfssatz 2.3.3 ergibt

$$\sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(\sigma)\sin\{2\pi f(l)\} = BF(\sigma)\{|f'(\theta)-f'(\sigma)|+1\}s^{-1/2}.$$

Somit ist

$$\sum_{\sigma\leqslant l\leqslant\theta} F(l)\sin\{2\pi f(l)\} = B\Big(F(\sigma)+\int_\sigma^\theta |F'(y)|\,dy\Big)\{|f'(\theta)-f'(\sigma)|+1\}s^{-1/2},$$

und hierin ist nach Voraussetzung

$$\{|f'(\theta)-f'(\sigma)|+1\}s^{-1/2} = B\{(\theta-\sigma)s+1\}s^{-1/2} = B(\theta s^{1/2}+s^{-1/2}).$$

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$(3)\qquad F_1(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} H(\alpha,\beta)\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab\varLambda}\sum_{Q\leqslant h^2j^2XW}\frac{1}{Q}\times$$

$$\times\sum_{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P} m^{2\alpha}n^{2\beta}x^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi xQ\varLambda}{mn}.$$

Dann ist

$$(4)\qquad F_1(x;h,j) = Bx^{5/2}.$$

Beweis. Es sei

$$(5)\qquad x^{4/9}\leqslant M < M' \leqslant 2M \leqslant 2P.$$

Aus (5), (4.38) und (4.39) folgt

$$(6)\quad m(M)\leqslant m(M') = m'+KM' \leqslant m'+2KP \leqslant 2(m'+KP)\leqslant 2hX$$

und ebenso

$$(7)\qquad n(M)\leqslant n(M')\leqslant 2jX;$$

$$(8)\qquad m(M) = m'+KM \geqslant \tfrac12(m'+KM') = \tfrac12 m(M'),$$

$$(9)\qquad n(M)\geqslant \tfrac12 n(M');$$

$$(10)\qquad \frac{1}{m(M')} = \frac{1}{m'+KM'}\leqslant\frac{1}{KM'}\leqslant\frac{1}{Kx^{4/9}},$$

$$(11)\qquad \frac{1}{n(M')}\leqslant\frac{1}{Lx^{4/9}};$$

$$(12)\qquad M'\leqslant\{m(M')n(M')K^{-1}L^{-1}\}^{1/2}.$$

Es sei y eine beliebige Zahl des Intervalls $M\leqslant y\leqslant M'$,

$$(13)\qquad f_1(y) = \frac{xQ\varLambda}{m(y)n(y)},\qquad F_1(y) = m^{2\alpha}(y)n^{2\beta}(y),\qquad s_1 = f_1''(M').$$

Aus (13) und (4.38) ergibt sich

$$(14)\qquad f_1'(y) = -\frac{xQ\varLambda}{\{m(y)n(y)\}^2}\big(Kn(y)+Lm(y)\big),$$

und weiter

$$f_1''(y) = \frac{2xQ\varLambda}{\{m(y)n(y)\}^3}\big(\{Kn(y)+Lm(y)\}^2-KLm(y)n(y)\big)$$

$$= \frac{2xQ\varLambda}{\{m(y)n(y)\}^3}\big(\{Kn(y)-Lm(y)\}^2+3KLm(y)n(y)\big)$$

$$= \frac{2xQ\varLambda}{\{m(y)n(y)\}^3}\big(\{Kn'-Lm'\}^2+3KLm(y)n(y)\big).$$

In Verbindung mit (4.36), folgt hieraus

$$(15)\qquad f_1''(y) = \frac{2xQ\varLambda}{\{m(y)n(y)\}^3}\big(Q^2+3KLm(y)n(y)\big).$$

Mit wachsendem y nehmen $m(y)$ und $n(y)$ nach (4.38) zu. Wegen (15) nimmt also $f_1''(y)$ ab. Also ist, mit Rücksicht auf (13), (5), (15), (8) und (9),

$$s_1 = f_1''(M')\leqslant f_1''(y)\leqslant f_1''(M) = Bf_1''(M') = Bs_1.$$

Weiter ist die Funktion $F_1(y)$ nach (13), (4.38) positiv und besitzt eine stetige Ableitung, die für $\alpha+\beta>0$ positiv ist. Für $\alpha+\beta>0$ ist also (2) auf

$$\sigma = M,\qquad \theta = M',\qquad f(y) = f_1(y),\qquad F(y) = F_1(y),\qquad s = s_1$$

anwendbar und ergibt

$$\sum_{l=M}^{M'} F_1(l)\sin\{2\pi f_1(l)\} = BF_1(M')(M's_1^{1/2}+s_1^{-1/2}).$$

Dieselbe Abschätzung gilt aber auch für $a = \beta = 0$, da dann $F_1(y) = 1$, $F_1'(y) = 0$ ist, also das Integral in (1) wegfällt. Wegen (13) und (4.35) ist also

$$\sum_{l=M}^{M'} m^{2a} n^{2\beta} \sin\frac{2\pi x Q \Lambda}{mn} = Bm^{2a}(M')n^{2\beta}(M')(M's_1^{1/2}+s_1^{-1/2}). \tag{16}$$

Die rechte Seite von (16) wird mit Hilfe von (12), (13), (15), (6), (7), (10), (11), (4.37) und (5) abgeschätzt. Es folgt

$$\begin{aligned} m^{2a}(M')n^{2\beta}(M')M's_1^{1/2} &= Bm^{2a}(M')n^{2\beta}(M')m^{1/2}(M')n^{1/2}(M')\times \\ \times K^{-1/2}L^{-1/2}XQ^{1/2}\Lambda^{1/2}m^{-3/2}(M')n^{-3/2}(M')&\{Q+K^{1/2}L^{1/2}m^{1/2}(M')n^{1/2}(M')\} \\ &= BXm^{2a-1}(M')n^{2\beta-1}(M')\Lambda^{1/2}Q^{3/2}K^{-1/2}L^{-1/2}+ \\ &\quad +BXm^{2a-1/2}(M')n^{2\beta-1/2}(M')\Lambda^{1/2}Q^{1/2} \\ &= BX^{1+2a-8/9+2\beta-8/9}\Lambda Q^{3/2}+BX^{1+2a-4/9+2\beta-4/9}\Lambda Q^{1/2} \\ &= Bx^{a+\beta-7/18}\Lambda Q^{3/2}+Bx^{a+\beta+1/18}\Lambda Q^{1/2}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} m^{2a}(M')n^{2\beta}(M')s_1^{-1/2} &= Bm^{2a}(M')n^{2\beta}(M')m^{3/2}(M')n^{3/2}(M')\times \\ &\quad \times X^{-1}Q^{-1/2}\Lambda^{-1/2}K^{-1/2}L^{-1/2}m^{-1/2}(M')n^{-1/2}(M') \\ &= BX^{-1}m^{2a+1}(M')n^{2\beta+1}(M')Q^{-1/2}K^{-1/2}L^{-1/2} \\ &= BX^{-1}m(M')X^{2a}X^{2\beta+1}Q^{-1/2}K^{-1/2}L^{-1/2} \\ &= Bx^{a+\beta}KMQ^{-1/2}K^{-1/2}L^{-1/2} \\ &= Bx^{a+\beta}K^{1/2}L^{-1/2}Q^{-1/2}M. \end{aligned} \tag{18}$$

Aus (16)-(18) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l=M}^{M'} m^{2a} n^{2\beta} x^{2-a-\beta} \sin\frac{2\pi x Q\Lambda}{mn} \\ = Bx^{2-7/18}\Lambda Q^{3/2}+Bx^{2+1/18}\Lambda Q^{1/2}+Bx^2K^{1/2}L^{-1/2}Q^{-1/2}M. \end{aligned} \tag{19}$$

Das Summationsintervall $x^{4/9} \leqslant l \leqslant P$ für l in (3) kann man wegen (4.39) in $B\log x = BW$ Teilintervalle der Gestalt $M \leqslant l \leqslant M'$ so zerlegen, daß M und M' den Bedingungen (5) genügen und $\Sigma M = BP$ ist, wobei die Summe über alle benutzten Werte von M zu erstrecken ist. Um dies zu erreichen, bezeichne man mit M_0 die kleinste ganze Zahl, die $\geqslant x^{4/9}$ ist. Wird dann r durch $2^{r-1}M_0 \leqslant P < 2^r M_0$ bestimmt, so definiere man die ersten $r-1$ Teilintervalle durch

$$M = 2^{j-1}M_0, \quad M' = 2M-1 \quad (1 \leqslant j \leqslant r-1)$$

und das r-te durch

$$M = 2^{r-1}M_0, \quad M' = [P]$$

(für $r = 1$ bleibt nur das letzte Teilintervall übrig). Dann ist

$$\Sigma M = M_0(1+2+\ldots+2^{r-1}) < 2^r M_0 \leqslant 2P.$$

Aus (19) folgt daher, daß in (3)

$$\sum_{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P} = Bx^{2-7/18}W\Lambda Q^{3/2}+Bx^{2+1/18}W\Lambda Q^{1/2}+Bx^2K^{1/2}L^{-1/2}Q^{-1/2}P.$$

Nach (3.40) ist $P = BXK^{-1}$. Somit ist

$$\sum_{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P} = Bx^{2-7/18}W\Lambda Q^{3/2}+Bx^{2+1/18}W\Lambda Q^{1/2}+Bx^{5/2}K^{-1/2}L^{-1/2}Q^{-1/2}.$$

Setzt man dies in (3) ein und beachtet (4.31), so folgt

$$\begin{aligned} F_1(x;h,j) &= Bx^{2-7/18}W\sum_{a,b\leqslant W}(ab)^{-1}\sum_{Q\leqslant 16XW}Q^{1/2}+ \\ &\quad +Bx^{2+1/18}W\sum_{a,b\leqslant W}(ab)^{-1}\sum_{Q\leqslant 16XW}Q^{-1/2}+Bx^{5/2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(ab)^{-3/2}\sum_{Q=1}^{\infty}Q^{-3/2} \\ &= Bx^{2-7/18}W^2x^{3/4}W^{3/2}+Bx^{2+1/18}W^2x^{1/4}W^{1/2}+Bx^{5/2} \\ &= Bx^{2+13/36}W^4+Bx^{5/2} = Bx^{5/2}. \end{aligned}$$

HILFSSATZ 3. *Es sei*

$$F_2(x;h,j) = \sum_{a,\beta=0}^{1}H(a,\beta)\sum_{\substack{a,b\leqslant W\\ a\leqslant jb/h}}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\leqslant x^{1/4}}\frac{1}{Q}\times \tag{20}$$

$$\times\sum_{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P} m^{2a}n^{2\beta}R^{2-a-\beta}\sin\frac{2\pi RQ\Lambda}{mn}.$$

Dann ist

$$F_2(x;h,j) = Bx^{5/2}. \tag{21}$$

Beweis. Für $a \leqslant jb/h$ ist nach Hilfssatz 4.6 und (19)

$$m \leqslant \frac{hn}{j}, \quad R = \frac{n^2}{j^2}. \tag{22}$$

Aus (20) und (22) folgt

$$F_2(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} j^{2\alpha+2\beta-4} H(\alpha,\beta) \sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le jb/h}} \frac{1}{ab\Lambda} \sum_{Q\le x^{1/4}} \frac{1}{Q} \times \sum_{x^{4/9}\le l\le P} n^4 \left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha} \sin\frac{2\pi n Q\Lambda}{j^2 m}. \tag{23}$$

Für $a \le jb/h$ ist nach (4.31)

$$K \le \frac{hL}{j}. \tag{24}$$

Nach (4.34), (4.35) ist

$$\frac{n}{m}-\frac{L}{K} = \frac{Q}{Km} = B\frac{Q}{K^2 l}, \qquad \frac{m}{n}-\frac{K}{L} = -\frac{Q}{Ln} = B\frac{Q}{L^2 l}. \tag{25}$$

Aus (22), (24) und (25) folgt

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha}-\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha} = B\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{2}-\left(\frac{K}{L}\right)^{2}\right\} = B\left(\frac{m}{n}-\frac{K}{L}\right) = B\frac{Q}{L^2 l}. \tag{26}$$

Nach (4.35), (4.37), (5) und (7) ist

$$n^4 - L^4 l^4 = B(n-Ll)n^3 = Bn'n^3 = B(Q+L)X^3. \tag{27}$$

Nach (25) und (4.31) ist

$$\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} - \frac{2\pi Qb}{K} = B\frac{Q^2\Lambda}{K^2 l},$$

also

$$\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} - \sin\frac{2\pi Qb}{K} = B\,\mathrm{Min}\left(\frac{Q^2\Lambda}{K^2 l}, 1\right) = B\frac{Q}{K}\left(\frac{\Lambda}{l}\right)^{1/2}.$$

In Verbindung mit (24), (27), (7) und (26), folgt hieraus

$$n^4\left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} - L^4 l^4\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi Qb}{K}$$

$$= L^4 l^4\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\left(\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} - \sin\frac{2\pi Qb}{K}\right) +$$

$$+ (n^4 - L^4 l^4)\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} + n^4\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\right\}\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m}$$

$$= BL^4 l^{7/2} Q\Lambda^{1/2}K^{-1} + B(Q+L)X^3 + Bx^2\frac{Q}{L^2 l}. \tag{28}$$

Ersetzt man in der l-Summe von (23)

$$n^4\left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2 m} \quad \text{durch} \quad L^4 l^4\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi Qb}{K},$$

so ist der Fehler nach (28), (4.39) und (4.31)

$$B\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sum_{l\le P}\left(L^4 l^{7/2}Q\Lambda^{1/2}K^{-1} + (Q+L)X^3 + x^2\frac{Q}{L^2 l}\right)$$

$$= B\sum_{a,b\le W}\frac{L^4}{abK\Lambda^{1/2}}\sum_{Q\le x^{1/4}}\sum_{l\le jX/L} l^{7/2} + BX^3\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}1\cdot\sum_{l\le jX}1 +$$

$$+ BX^3\sum_{a,b\le W}\frac{L}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sum_{l\le jX/L}1 + Bx^2\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}1\cdot\sum_{l\le jX}\frac{1}{l}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a,b\le W}(abKL^{1/2}\Lambda^{1/2})^{-1} + Bx^{9/4}W + Bx^2 W + Bx^{9/4}W$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(ab)^{-5/4} + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

Somit ist

$$F_2(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} j^{2\alpha+2\beta-4} H(\alpha,\beta) \sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le jb/h}} \frac{1}{ab\Lambda} \sum_{Q\le x^{1/4}} \frac{1}{Q} \times \sum_{x^{4/9}\le l\le P} L^4 l^4\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\sin\frac{2\pi Qb}{K} + Bx^{5/2}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} j^{2\alpha+2\beta-4} H(\alpha,\beta) \sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le jb/h}} \frac{1}{ab\Lambda} L^4\left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha} \times \sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sin\frac{2\pi Qb}{K}\sum_{x^{4/9}\le l\le P} l^4 + Bx^{5/2}. \tag{29}$$

Nach (4.36) und (24) ist

$$\frac{hX-m'}{K} - \frac{jX-n'}{L} = \frac{(hL-jK)X+Q}{KL} \ge \frac{Q}{KL} > 0.$$

Wegen (4.39) ist also

$$P = \frac{jX-n'}{L}.$$

Zusammen mit (4.37) ergibt dies

(30) $$\sum_{x^{4/9}\le l\le P} l^4 = \sum_{x^{4/9}\le l\le jX/L} l^4 + BQ\frac{x^2}{L^4}.$$

Aus (29), (30) und (24) folgt

$$F_2(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} j^{2\alpha+2\beta-4} H(\alpha,\beta) \sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le jb/h}} \frac{1}{ab\Lambda} L^4 \left(\frac{K}{L}\right)^{2\alpha}\times$$

$$\times \sum_{Q\le x^{1/4}} \frac{1}{Q} \sin\frac{2\pi Qb}{K} \sum_{x^{4/9}\le l\le jX/L} l^4 + Bx^2 \sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\le x^{1/4}} 1 + Bx^{5/2}.$$

Hierin ist das erste B-Glied

$$= Bx^{9/4}W = Bx^{5/2}.$$

Im Hauptglied ist die l-Summe von Q unabhängig und

$$\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sin\frac{2\pi Qb}{K} = B;$$

vgl. unsere Bemerkung im Anschluss an (4.5). Daher ist, mit Rücksicht auf (24) und (4.31),

$$F_2(x;h,j) = B\sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le 2b}} \frac{1}{ab\Lambda} L^4\left(\frac{X}{L}\right)^5 + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{\substack{a,b\le W\\ a\le 2b}}\frac{1}{ab^2} + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{b=1}^{\infty} \frac{\log b}{b^2} + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

HILFSSATZ 4. *Es sei*

(31) $$F_3(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} H(\alpha,\beta)\sum_{\substack{a,b\le W\\ b<ha/j}}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\times$$

$$\times\sum_{x^{4/9}\le l\le P} m^{2\alpha}n^{2\beta}R^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi RQ\Lambda}{mn}.$$

Dann ist

(32) $$F_3(x;h,j)=Bx^{5/2}.$$

Beweis. Für $b<ha/j$, $l>h^3j^3(Q+ab)$ ist, nach Hilfssatz 4.6, $m>hn/j$. Nach (4.19) ist dann $R=m^2/h^2$. Ersetzt man daher in (31), R durch m^2/h^2, so ist der Fehler wegen (5), (6), (7) und (4.19)

$$B\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sum_{l\le h^3j^3(Q+ab)} x^{\alpha+\beta+2-\alpha-\beta}$$

$$= Bx^2\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{Q+ab}{Q}$$

$$= Bx^{9/4}\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab} + Bx^2\sum_{a,b\le W}1\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}$$

$$= Bx^{9/4}W + Bx^2W^3 = Bx^{5/2}.$$

Somit ist

(33) $$F_3(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} h^{2\alpha+2\beta-4}H(\alpha,\beta)\sum_{\substack{a,b\le W\\ b<ha/j}}\frac{1}{ab\Lambda}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\times$$

$$\times\sum_{x^{4/9}\le l\le P} m^4\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\Lambda}{h^2n} + Bx^{5/2}.$$

Für $b<ha/j$ ist nach (4.31)

(34) $$L<\frac{jK}{h}.$$

Ferner ist nach (25) für $Q\le x^{1/4}$, $l\ge x^{4/9}$

(35) $$\frac{n}{m} = B\left(\frac{L}{K}+\frac{Q}{K^2l}\right) = B\left(L+\frac{Q}{l}\right) = B(L+x^{1/4-4/9}) = BL.$$

Aus (35), (34) und (25) ergibt sich

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}-\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta} = B\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-\left(\frac{L}{K}\right)^2\right\} = B\left(\frac{n}{m}-\frac{L}{K}\right)L$$

(36) $$= B\frac{LQ}{K^2l} = \frac{BQ}{Kl}.$$

Nach (4.35), (4.37), (5) und (6) ist ferner

(37) $$m^4 - K^4\iota^4 = B(m-KL)m^3 = Bm'm^3 = BKX^3.$$

Nach (25) und (4.31) ist

$$\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} - \frac{2\pi Qa}{L} = B\frac{Q^2\lambda}{L^2 l},$$

also

$$\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} - \sin\frac{2\pi Qa}{L} = B\,\mathrm{Min}\left(\frac{Q^2\lambda}{L^2 l}, 1\right) = B\frac{Q}{L}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/2}.$$

In Verbindung mit (34), (37), (6) und (36), folgt hieraus

$$m^4\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} - K^4\iota^4\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi Qa}{L}$$

$$= K^4\iota^4\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\left(\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} - \sin\frac{2\pi Qa}{L}\right) +$$

$$+ (m^4 - K^4\iota^4)\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} + m^4\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta} - \left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\right\}\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n}$$

(38) $$= BK^4\iota^{7/2}Q\lambda^{1/2}L^{-1} + BKX^3 + Bx^2\frac{Q}{Kl}.$$

Ersetzt man in der l-Summe von (33)

$$m^4\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\lambda}{h^2 n} \quad \text{durch} \quad K^4\iota^4\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi Qa}{L},$$

so ist der Fehler nach (38), (4.39) und (4.31)

$$B\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab\lambda}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sum_{l\le P}\left(K^4 l^{7/2}Q\lambda^{1/2}L^{-1} + KX^3 + x^2\frac{Q}{Ll}\right)$$

$$= B\sum_{a,b\le W}\frac{K^4}{abL\lambda^{1/2}}\sum_{Q\le x^{1/4}}1\sum_{l\le hX/K}l^{7/2} +$$

$$+ BX^3\sum_{a,b\le W}\frac{K}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sum_{l\le hX/K}1 + Bx^2\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}1\sum_{l\le hX}\frac{1}{l}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a,b\le W}(abLK^{1/2}\lambda^{1/2})^{-1} + Bx^2 W + Bx^{9/4}W$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(ab)^{-5/4} + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

Mithin ist

(39) $$F_3(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1}h^{2\alpha+2\beta-4}H(\alpha,\beta)\sum_{\substack{a,b\le W\\ b<ha/j}}\frac{1}{ab\lambda}K^4\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sin\frac{2\pi Qa}{L}\sum_{x^{4/9}\le l\le P}l^4 + Bx^{5/2}.$$

Für $Q \le x^{1/4}$ ist nach (4.36) und (34)

$$\frac{jX-n'}{L} - \frac{hX-m'}{K} = \frac{(jK-hL)X-Q}{KL} \ge \frac{X-x^{1/4}}{KL} > 0,$$

also nach (4.39)

$$P = \frac{hX-m'}{K}.$$

Zusammen mit (4.37) ergibt dies

(40) $$\sum_{x^{4/9}\le l\le P}l^4 = \sum_{x^{4/9}\le l\le hX/K}l^4 + B\frac{x^2}{K^4}.$$

Aus (39), (40), (34) und (4.31) folgt, wie beim Beweise des vorigen Hilfssatzes,

$$F_3(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1}h^{2\alpha+2\beta-4}H(\alpha,\beta)\sum_{\substack{a,b\le W\\ b<ha/j}}\frac{1}{ab\lambda}K^4\left(\frac{L}{K}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q}\sin\frac{2\pi Qa}{L}\sum_{x^{4/9}\le l\le hX/K}l^4 +$$

$$+ Bx^2\sum_{a,b\le W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\le x^{1/4}}\frac{1}{Q} + Bx^{5/2}$$

$$= B\sum_{\substack{a,b\le W\\ b\le 2a}}\frac{1}{ab\lambda}K^4\left(\frac{X}{K}\right)^5 + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{\substack{a,b\le W\\ b\le 2a}}\frac{1}{a^2 b} + Bx^{5/2}$$

$$= Bx^{5/2}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\log a}{a^2} + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

Hilfssatz 5. *Es sei*

$$(41)\qquad F_4(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} H(\alpha,\beta) \sum_{a,b\leqslant W} \frac{1}{ab\Lambda} \sum_{x^{1/4}<Q\leqslant h^2j^2XW} \frac{1}{Q} \times$$
$$\times \sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m\leqslant hn/j}} m^{2\alpha} n^{2\beta} R^{2-\alpha-\beta} \sin\frac{2\pi RQ\Lambda}{mn}.$$

Dann ist

$$(42)\qquad F_4(x;h,j) = Bx^{5/2}.$$

Beweis. Für $m \leqslant hn/j$ ist, nach (4.19), $R = n^2/j^2$. Nach (41) ist also

$$(43)\qquad F_4(x;h,j) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{4} j^{2\alpha+2\beta-4} H(\alpha,\beta) \sum_{a,b\leqslant W} \frac{1}{ab\Lambda} \sum_{x^{1/4}<Q\leqslant h^2j^2XW} \frac{1}{Q} \times$$
$$\times \sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m\leqslant hn/j}} n^4 \left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha} \sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2m}.$$

M und M' mögen die Bedingungen (5) erfüllen, und überdies sei

$$(44)\qquad m \leqslant \frac{hn}{j} \quad \text{für} \quad M \leqslant l \leqslant M'.$$

Ferner sei y eine beliebige Zahl des Intervalls $M \leqslant y \leqslant M'$,

$$(45)\qquad f_2(y) = \frac{n(y)Q\Lambda}{j^2m(y)}, \qquad F_2(y) = m^{2\alpha}(y)\,n^{4-2\alpha}(y), \qquad s_2 = f_2''(M').$$

Aus (45), (4.38) und (4.36) folgt

$$(46)\qquad f_2'(y) = \frac{\{Lm(y) - Kn(y)\}Q\Lambda}{j^2m^2(y)} = -\frac{Q^2\Lambda}{j^2m^2(y)},$$

$$(47)\qquad f_2''(y) = \frac{2Q^2K\Lambda}{j^2m^3(y)}.$$

Mit wachsendem y nimmt $m(y)$ nach (4.38) zu. Wegen (47) nimmt also $f_2''(y)$ ab. Daher ist, mit Rücksicht auf (45), (47) und (8),

$$s_2 = f_2''(M') \leqslant f_2''(y) \leqslant f_2''(M) = Bf_2''(M') = Bs_2.$$

Nach (45) und (4.38) besitzt ferner $F_2(y)$ eine stetige positive Ableitung.

Also ist (2) auf

$$\sigma = M, \qquad \theta = M', \qquad f(y) = f_2(y), \qquad F(y) = F_2(y), \qquad s = s_2$$

anwendbar und ergibt

$$\sum_{l=M}^{M'} F_2(l) \sin\{2\pi f_2(l)\} = BF_2(M')(M's_2^{1/2} + s^{-1/2}).$$

Wegen (45) und (4.35) ist also

$$(48)\qquad \sum_{l=M}^{M'} n^4 \left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha} \sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2m} = Bn^4(M')\left\{\frac{m(M')}{n(M')}\right\}^{2\alpha} (M's_2^{1/2} + s_2^{-1/2}).$$

Die rechte Seite von (48) wird mit Hilfe von (44), (45), (47), (5), (6), (7), (10), (4.35) und (4.37) abgeschätzt. Es folgt

$$(49)\qquad \sum_{l=M}^{M'} n^4 \left(\frac{m}{n}\right)^{2\alpha} \sin\frac{2\pi nQ\Lambda}{j^2m}$$
$$= Bx^2\left\{\frac{m(M')}{n(M')}\right\}^{2\alpha} \left(MQK^{1/2}\Lambda^{1/2}m^{-3/2}(M') + m^{1/2}(M')\,m(M')Q^{-1}K^{-1/2}\Lambda^{-1/2}\right)$$
$$= Bx^2(MQK^{1/2}\Lambda K^{-3/2}x^{-2/3} + x^{1/4}KMQ^{-1}K^{-1/2})$$
$$= Bx^{4/3}\Lambda QM + Bx^{9/4}K^{1/2}Q^{-1}M.$$

Ist für ein gegebenes Tripel a, b, Q die l-Summe in (43) nicht leer, so läuft l über ein einziges Intervall (Hilfssatz 4.6). Wird dies Intervall in Teilintervalle der Gestalt $M \leqslant l \leqslant M'$ zerlegt, in denen die Bedingung (44) erfüllt ist, und wiederholt man denselben Schluß, der bei (19) gemacht worden ist, so folgt wegen (49) und (4.40), daß in (43)

$$\sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m\leqslant hn/j}} = Bx^{4/3}\Lambda QP + Bx^{9/4}K^{1/2}Q^{-1}P$$
$$= Bx^{4/3}\Lambda QX + Bx^{9/4}K^{1/2}Q^{-1}XK^{-3/4}L^{-1/4}$$
$$= Bx^{11/6}\Lambda Q + Bx^{11/4}K^{-1/4}L^{-1/4}Q^{-1}.$$

Setzt man dies in (43) ein und beachtet (4.31), so folgt

$$F_4(x;h,j) = Bx^{11/6} \sum_{a,b\leqslant W} \frac{1}{ab} \sum_{Q\leqslant h^2j^2XW} 1 + Bx^{11/4} \sum_{a,b=1}^{\infty} (ab)^{-5/4} \sum_{Q>x^{1/4}} Q^{-2}$$
$$= Bx^{7/3}W^2 + Bx^{5/2} = Bx^{5/2}.$$

Hilfssatz 6. *Es sei*

$$(50)\qquad F_5(x;h,j)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} H(\alpha,\beta)\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab\text{л}}\sum_{x^{1/4}<Q\leqslant h^2j^2XW}\frac{1}{Q}\times$$
$$\times\sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m>hn/j}} m^{2\alpha}n^{2\beta}R^{2-\alpha-\beta}\sin\frac{2\pi RQ\text{л}}{mn}.$$

Dann ist

$$(51)\qquad F_5(x;h,j)=Bx^{5/2}.$$

Beweis. Für $m>hn/j$ ist, nach (4.19), $R=m^2/h^2$. Nach (50) ist also

$$F_5(x;h,j)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} h^{2\alpha+2\beta-4}H(\alpha,\beta)\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab\text{л}}\sum_{x^{1/4}<Q\leqslant h^2j^2XW}\frac{1}{Q}\times$$
$$\times\sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m>hn/j}} m^4\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\text{л}}{h^2n}.$$

M und M' mögen nach wie vor die Bedingung (5) erfüllen, aber diesmal sei, statt (44),

$$m>\frac{hn}{j}\quad\text{für}\quad M\leqslant l\leqslant M'.$$

Es sei ferner y eine beliebige Zahl des Intervalls $M\leqslant y\leqslant M'$,

$$f_3(y)=-\frac{m(y)Q\text{л}}{h^2n(y)},\qquad F_3(y)=n^{2\beta}(y)m^{4-2\beta}(y),\qquad s_3=f_3''(M').$$

Durch genau dieselben Schlüsse, wie beim Beweise des vorigen Hilfssatzes, ergibt sich dann

$$f_3'(y)=\frac{\{Lm(y)-Kn(y)\}Q\text{л}}{h^2n^2(y)}=-\frac{Q^2\text{л}}{h^2n^2(y)},$$

$$f_3''(y)=\frac{2Q^2L\text{л}}{h^2n^3(y)},$$

$$s_3=f_3''(M')\leqslant f_3''(y)\leqslant f_3''(M)=Bf_3''(M')=Bs_3,$$

$$\sum_{l=M}^{M'}F_3(l)\sin\{2\pi f_3(l)\}=BF_3(M')(M's_3^{1/2}+s_3^{-1/2}),$$

$$\sum_{l=M}^{M'}m^4\left(\frac{n}{m}\right)^{2\beta}\sin\frac{2\pi mQ\text{л}}{h^2n}=Bm^4(M')\left\{\frac{n(M')}{m(M')}\right\}^{2\beta}(M's_3^{1/2}+s_3^{-1/2})$$
$$=Bx^2\left(MQL^{1/2}\text{л}^{1/2}n^{-3/2}(M')+n^{1/2}(M')n(M')Q^{-1}L^{-1/2}\text{л}^{-1/2}\right)$$
$$=Bx^2(MQL^{1/2}\text{л}L^{-3/2}x^{-2/3}+x^{1/4}(Q+LM)Q^{-1}L^{-1/2})$$
$$=Bx^{4/3}\text{л}QM+Bx^{9/4}+Bx^{9/4}L^{1/2}Q^{-1}M,$$

$$\sum_{\substack{x^{4/9}\leqslant l\leqslant P\\ m>hn/j}}=Bx^{4/3}\text{л}QP+Bx^{9/4}W+Bx^{9/4}L^{1/2}Q^{-1}P$$
$$=Bx^{4/3}\text{л}QX+Bx^{9/4}W+Bx^{9/4}L^{1/2}Q^{-1}XK^{-1/4}L^{-3/4}$$
$$=Bx^{11/6}\text{л}Q+Bx^{9/4}W+Bx^{11/4}K^{-1/4}L^{-1/4}Q^{-1},$$

$$F_5(x;h,j)=Bx^{11/6}\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\leqslant h^2j^2XW}1+$$
$$+Bx^{9/4}W\sum_{a,b\leqslant W}\frac{1}{ab}\sum_{Q\leqslant h^2j^2XW}\frac{1}{Q}+$$
$$+Bx^{11/4}\sum_{a,b=1}^{\infty}(ab)^{-5/4}\sum_{Q>x^{1/4}}Q^{-2}$$
$$=Bx^{7/3}W^2+Bx^{9/4}W^2+Bx^{5/2}=Bx^{5/2}.$$

Satz 1.

$$(52)\qquad \int\limits_0^x P_4^2(y)\,dy=\tfrac{2}{3}\pi^2x^3+Bx^{5/2}.$$

Beweis. Aus (4.41), (3), (20), (31), (41) und (50) folgt

$$2\pi F(x;h,j)=F_1(x;h,j)-\sum_{n=2}^{5}F_n(x;h,j).$$

Wegen (4), (21), (32), (42), (51) ist also

$$(53)\qquad F(x;h,j)=Bx^{5/2}.$$

Aus (4.22) und (53) folgt (4.18).

Die Behauptung (52), d. h. (1.1), des Satzes ergibt sich aus (1.46), (4.2), (4.3) und (4.18).