VII KAPITEL

DIE FUNKTIONEN P_k UND ϱ_k FÜR UNGERADES k

§ 1. Bezeichnungen — Problemstellung

In diesem Kapitel ist k ungerade, $k \geqslant 7$; $l = (k-1)/2$; R bezeichnet positive ganze Zahlen; w, N positive ungerade Zahlen; c nichtnegative ganze Zahlen. Die Funktionen $F(y, n)$ und $G(y, n)$ werden nach wie vor durch (6.1.4) und (6.1.5) bestimmt; die Funktionen $\zeta(s)$ und $L(s)$ durch (5.2.1) und (5.3.18); die Funktionen $F_k(n, 2v)$, $F_k(n, v)$ und $F_k(r, 4n)$ durch (4.4.3)-(4.4.5). Weiter führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$f(a, u) = \sum_{m=1}^{u} \psi\left(\frac{a-m^2}{u}\right), \tag{1}$$

$$g(a, u) = \sum_{m=1}^{u} \psi\left(\frac{a+\frac{1}{2}-m^2}{u}\right), \tag{2}$$

$$h(a, n) = \sum_{m=1}^{4n} F(a-m^2, 2n), \tag{3}$$

$$j(a, n) = \sum_{m=1}^{4n} G(a-m^2, n); \tag{4}$$

$$\mathfrak{S}_k(n) = \sum_{q=3}^{\infty} F_k(n, q)\, q^{-k/2}, \tag{5}$$

$$\Sigma_k = \limsup_{n=\infty} \mathfrak{S}_k(n), \qquad \sigma_k = \liminf_{n=\infty} \mathfrak{S}_k(n), \tag{6}$$

$$T_k(r) = \sum_{u=3}^{49} \frac{F_k(r, u)}{u^{k/2}} + \sum_{n=1}^{25} \frac{F_k(r, 4n)}{(4n)^{k/2}}, \tag{7}$$

$$T_k = \operatorname*{Max}_{r>0} T_k(r), \qquad \tau_k = \operatorname*{Min}_{r>0} T_k(r); \tag{8}$$

$$G_k(r, u) = u^{-1/2} F_k(r, u), \tag{9}$$

$$G_k(r, 4n) = \begin{cases} (-1)^{(k-1)/4} 2^{-(k+1)/2} n^{-1/2} F_k(r, 4n) & \text{für } k \equiv 1 \pmod 4, \\ (-1)^{(k-3)/4} 2^{-(k+1)/2} n^{-1/2} F_k(r, 4n) & \text{für } k \equiv 3 \pmod 4; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} T_{k1} = {} & 2^{-l}+2\cdot 3^{-1-l}+4^{-l}+5^{-l}+7^{-l}+9^{-l}-10^{-l}+2\cdot 11^{-l}+2\cdot 13^{-l}+ \\ & +3\cdot 14^{-l}-15^{-l}+2\cdot 16^{-l}+2\cdot 17^{-l}-18^{-l}+2\cdot 19^{-l}-21^{-l}+2\cdot 23^{-l}+ \\ & +2\cdot 24^{-l}+2\cdot 25^{-l}+4\cdot 26^{-l}+2\cdot 27^{-l}+2\cdot 28^{-l}+3\cdot 29^{-l}-30^{-l}+ \\ & +3\cdot 31^{-l}+2\cdot 34^{-l}+3\cdot 35^{-l}-2\cdot 36^{-l}+4\cdot 37^{-l}-39^{-l}+4\cdot 40^{-l}+ \\ & +4\cdot 41^{-l}+5\cdot 42^{-l}+4\cdot 43^{-l}+2\cdot 44^{-l}+2\cdot 46^{-l}+3\cdot 47^{-l}- \\ & -4\cdot 48^{-l}+3\cdot 49^{-l}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tau_{k1} = {} & -2^{-l}-3^{-1-l}-4^{-l}-5^{-l}-6^{-l}-7^{-l}-2\cdot 8^{-l}-9^{-l}+10^{-l}-11^{-l}- \\ & -2\cdot 12^{-l}-2\cdot 13^{-l}-14^{-l}+15^{-l}-2\cdot 16^{-l}-2\cdot 17^{-l}-3\cdot 18^{-l}- \\ & -2\cdot 19^{-l}-3\cdot 22^{-l}-3\cdot 23^{-l}-2\cdot 24^{-l}-2\cdot 25^{-l}-4\cdot 26^{-l}-27^{-l}- \\ & -4\cdot 28^{-l}-3\cdot 29^{-l}+3\cdot 30^{-l}-3\cdot 31^{-l}-4\cdot 32^{-l}-2\cdot 34^{-l}+ \\ & +2\cdot 35^{-l}-2\cdot 36^{-l}-4\cdot 37^{-l}-4\cdot 40^{-l}-4\cdot 41^{-l}-4\cdot 42^{-l}- \\ & -3\cdot 43^{-l}-2\cdot 44^{-l}-3\cdot 46^{-l}-5\cdot 47^{-l}-4\cdot 48^{-l}-3\cdot 49^{-l}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} T_{k2} = {} & 2^{-l}+2\cdot 3^{-1-l}+4^{-l}+5^{-l}+7^{-l}+2\cdot 8^{-l}+9^{-l}-10^{-l}+2\cdot 11^{-l}- \\ & -2\cdot 12^{-l}+2\cdot 13^{-l}+3\cdot 14^{-l}-15^{-l}+2\cdot 16^{-l}+2\cdot 17^{-l}-18^{-l}+ \\ & +2\cdot 19^{-l}+2\cdot 20^{-l}-21^{-l}+2\cdot 23^{-l}+2\cdot 25^{-l}+4\cdot 26^{-l}+2\cdot 27^{-l}- \\ & -2\cdot 28^{-l}+3\cdot 29^{-l}-30^{-l}+3\cdot 31^{-l}+4\cdot 32^{-l}+2\cdot 34^{-l}+3\cdot 35^{-l}+ \\ & +2\cdot 36^{-l}+4\cdot 37^{-l}-39^{-l}-4\cdot 40^{-l}+4\cdot 41^{-l}+5\cdot 42^{-l}+4\cdot 43^{-l}+ \\ & +4\cdot 44^{-l}+2\cdot 46^{-l}+3\cdot 47^{-l}-4\cdot 48^{-l}+3\cdot 49^{-l}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \tau_{k2} = {} & -2^{-l}-3^{-1-l}-4^{-l}-5^{-l}-6^{-l}-7^{-l}-9^{-l}+10^{-l}-11^{-l}+2\cdot 12^{-l}- \\ & -2\cdot 13^{-l}-14^{-l}+15^{-l}-2\cdot 16^{-l}-2\cdot 17^{-l}-3\cdot 18^{-l}-2\cdot 19^{-l}+ \\ & +4\cdot 20^{-l}-3\cdot 22^{-l}-3\cdot 23^{-l}-4\cdot 24^{-l}-2\cdot 25^{-l}-4\cdot 26^{-l}-27^{-l}+ \\ & +4\cdot 28^{-l}-3\cdot 29^{-l}+3\cdot 30^{-l}-3\cdot 31^{-l}-4\cdot 32^{-l}-2\cdot 34^{-l}+2\cdot 35^{-l}- \\ & -2\cdot 36^{-l}-4\cdot 37^{-l}-2\cdot 40^{-l}-4\cdot 41^{-l}-4\cdot 42^{-l}-3\cdot 43^{-l}+ \\ & +2\cdot 44^{-l}-3\cdot 46^{-l}-5\cdot 47^{-l}-3\cdot 49^{-l}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} T_{k3} = {} & 2^{-l}+3^{-1-l}+4^{-l}+5^{-l}+6^{-l}+7^{-l}+9^{-l}-10^{-l}+11^{-l}-2\cdot 12^{-l}+ \\ & +2\cdot 13^{-l}+14^{-l}-15^{-l}+2\cdot 16^{-l}+2\cdot 17^{-l}+3\cdot 18^{-l}+2\cdot 19^{-l}- \\ & -4\cdot 20^{-l}+3\cdot 22^{-l}+3\cdot 23^{-l}+4\cdot 24^{-l}+2\cdot 25^{-l}+4\cdot 26^{-l}+27^{-l}- \\ & -4\cdot 28^{-l}+3\cdot 29^{-l}-3\cdot 30^{-l}+3\cdot 31^{-l}+4\cdot 32^{-l}+2\cdot 34^{-l}-2\cdot 35^{-l}+ \\ & +2\cdot 36^{-l}+4\cdot 37^{-l}+2\cdot 40^{-l}+4\cdot 41^{-l}+4\cdot 42^{-l}+3\cdot 43^{-l}- \\ & -2\cdot 44^{-l}+3\cdot 46^{-l}+5\cdot 47^{-l}+3\cdot 49^{-l}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(16)\quad \tau_{k3} = {}&-2^{-l}-2\cdot 3^{-1-l}-4^{-l}-5^{-l}-7^{-l}-2\cdot 8^{-l}-9^{-l}+10^{-l}-2\cdot 11^{-l}+\\ &+2\cdot 12^{-l}-2\cdot 13^{-l}-3\cdot 14^{-l}+15^{-l}-2\cdot 16^{-l}-2\cdot 17^{-l}+18^{-l}-\\ &-2\cdot 19^{-l}-2\cdot 20^{-l}+21^{-l}-2\cdot 23^{-l}-2\cdot 25^{-l}-4\cdot 26^{-l}-2\cdot 27^{-l}+\\ &+2\cdot 28^{-l}-3\cdot 29^{-l}+30^{-l}-3\cdot 31^{-l}-4\cdot 32^{-l}-2\cdot 34^{-l}-3\cdot 35^{-l}-\\ &-2\cdot 36^{-l}-4\cdot 37^{-l}+39^{-l}+4\cdot 40^{-l}-4\cdot 41^{-l}-5\cdot 42^{-l}-4\cdot 43^{-l}-\\ &-4\cdot 44^{-l}-2\cdot 46^{-l}-3\cdot 47^{-l}+4\cdot 48^{-l}-3\cdot 49^{-l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(17)\quad T_{k4} = {}&2^{-l}+3^{-1-l}+4^{-l}+5^{-l}+6^{-l}+7^{-l}+2\cdot 8^{-l}+9^{-l}-10^{-l}+11^{-l}+\\ &+2\cdot 12^{-l}+2\cdot 13^{-l}+14^{-l}-15^{-l}+2\cdot 16^{-l}+2\cdot 17^{-l}+3\cdot 18^{-l}+\\ &+2\cdot 19^{-l}+3\cdot 22^{-l}+3\cdot 23^{-l}+2\cdot 24^{-l}+2\cdot 25^{-l}+4\cdot 26^{-l}+27^{-l}+\\ &+4\cdot 28^{-l}+3\cdot 29^{-l}-3\cdot 30^{-l}+3\cdot 31^{-l}+4\cdot 32^{-l}+2\cdot 34^{-l}-2\cdot 35^{-l}+\\ &+2\cdot 36^{-l}+4\cdot 37^{-l}+4\cdot 40^{-l}+4\cdot 41^{-l}+4\cdot 42^{-l}+3\cdot 43^{-l}+\\ &+2\cdot 44^{-l}+3\cdot 46^{-l}+5\cdot 47^{-l}+4\cdot 48^{-l}+3\cdot 49^{-l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(18)\quad \tau_{k4} = {}&-2^{-l}-2\cdot 3^{-1-l}-4^{-l}-5^{-l}-7^{-l}-9^{-l}+10^{-l}-2\cdot 11^{-l}-2\cdot 13^{-l}-\\ &-3\cdot 14^{-l}+15^{-l}-2\cdot 16^{-l}-2\cdot 17^{-l}+18^{-l}-2\cdot 19^{-l}+21^{-l}-\\ &-2\cdot 23^{-l}-2\cdot 24^{-l}-2\cdot 25^{-l}-4\cdot 26^{-l}-2\cdot 27^{-l}-2\cdot 28^{-l}-3\cdot 29^{-l}+\\ &+30^{-l}-3\cdot 31^{-l}-2\cdot 34^{-l}-3\cdot 35^{-l}+2\cdot 36^{-l}-4\cdot 37^{-l}+39^{-l}-\\ &-4\cdot 40^{-l}-4\cdot 41^{-l}-5\cdot 42^{-l}-4\cdot 43^{-l}-2\cdot 44^{-l}-2\cdot 46^{-l}-\\ &-3\cdot 47^{-l}+4\cdot 48^{-l}-3\cdot 49^{-l};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(19)\quad C_k = {}&\left\{(1+\log 25)\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{k-4}\right)+\frac{51}{25}\cdot\frac{1}{(k-4)^2}\right\}51^{2-k/2}+\\ &+\left\{(2+\log 51)\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{k-4}\right)+\frac{104}{51}\cdot\frac{1}{(k-4)^2}\right\}52^{2-k/2}.\end{aligned}$$

Dort, wo ganze Zahlen aufgezählt werden, die gewissen Bedingungen genügen (wie z. B. in den Tafeln von § 3), bezeichnet $a-b$ nicht die Differenz, sodern die Reihe aufeinander folgender Zahlen $a, a+1, \ldots, b$.

Die Definition der nach oben und unten vollständigen und unvollständigen Mengen, sowie der Zahlen Δ und Δ_q, wird in § 4 gegeben.

Das Hauptergebnis des vorliegenden Kapitels ist der folgende

Satz 1. *Für* $k \equiv 1 \pmod 8$ *ist*

$$(20)\qquad |P_k-1-2T_{k1}| \leqslant C_k, \qquad |\varrho_k-1-2\tau_{k1}| \leqslant C_k.$$

Für $k \equiv 5 \pmod 8$ *ist*

$$(21)\qquad |P_k-1-2T_{k2}| \leqslant C_k, \qquad |\varrho_k-1-2\tau_{k2}| \leqslant C_k.$$

Für $k \equiv 3 \pmod 8$ *ist*

$$(22)\qquad |P_k-1-2T_{k3}| \leqslant C_k, \qquad |\varrho_k-1-2\tau_{k3}| \leqslant C_k.$$

Für $k \equiv 7 \pmod 8$ *ist*

$$(23)\qquad |P_k-1-2T_{k4}| \leqslant C_k, \qquad |\varrho_k-1-2\tau_{k4}| \leqslant C_k.$$

Beim Beweise der Ungleichungen (20)-(23) wird die aus Satz 4.1.1 folgende Abschätzung (4.4.1) Peterssons benutzt. Nach (4.4.1), (4.4.2) und (5) ist

$$(24)\qquad P_k(n+\tfrac{1}{2}) = D_k n^{k/2-1}\mathfrak{S}_k(n)+Bn^{(k-3)/2}\log 2n.$$

Zusammen mit (3.1.2) ergibt dies

$$(25)\qquad \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = 1+2\mathfrak{S}_k(n)+Bn^{-1/2}\log 2n,$$

woraus nach (6.1.2) und (6) die Gleichungen

$$(26)\qquad P_k = 1+2\Sigma_k, \qquad \varrho_k = 1+2\sigma_k$$

folgen. Hierdurch wird unsere Aufgabe auf die Untersuchung der Funktionen Σ_k und σ_k zurückgeführt. Diese Funktionen hängen mit der unendlichen Reihe (5) zusammen, die durch die endliche Summe (7) angenähert wird. Zur Untersuchung der Summe (7) brauchen wir *alle* Werte der Funktion $F_k(n, q)$ für $q = u$, $3 \leqslant u \leqslant 49$ und $q = 4m$, $1 \leqslant m \leqslant 25$. Es wäre äußerst mühsam, wollte man diese Werte durch elementare Umformungen zu bestimmen suchen, wie es oben (Hilfssätze 4.4.2, 4.4.3, 4.4.6) in einigen Fällen geschah, da dies zu unabsehbaren Rechnungen führen würde. Glücklicherweise kann man die Funktion $F_k(n, q)$ durch die Summen (2)-(4) ausdrücken, die wesentlich einfacher berechnet werden können. Es gelten nämlich die folgenden Gleichungen, die wir in § 2 beweisen werden:

$$(27)\qquad \left(\frac{-1}{u}\right)^l u^{-1/2}F_k(n, u) = -\sum_{v|u} g(n, v)\,\mu\left(\frac{u}{v}\right),$$

$$(28)\qquad (-1)^{l/2}2^{-l}(2^cN)^{-1/2}F_k(r, 2^{c+2}N) = \sum_{v|N} h(r, 2^cv)\,\mu\left(\frac{N}{v}\right) \qquad (2|l),$$

$$(29)\qquad \left(\frac{-1}{lN}\right)2^{-l}(2^cN)^{-1/2}F_k(r, 2^{c+2}N) = \sum_{v|N}\left(\frac{-1}{v}\right) j(r, 2^cv)\,\mu\left(\frac{N}{v}\right) \qquad (2\nmid l).$$

Das Vorhandensein von Formeln, die die Funktion F_k mit den Summen g, h, j verknüpfen, wird durch die Lursmanaschwilischen Sätze 5.4.2 und 5.4.3 nahegelegt, die man für $k \geqslant 9$ auch unmittelbar zur Lösung unserer Frage heranziehen könnte.

Beim Beweise von Satz 1, der in § 4 durchgeführt wird, ist es bequem, neben der Funktion $F_k(r, q)$ auch die Funktion $G_k(r, q)$ zu verwenden, die mit dieser durch die Beziehungen (9) und (10) zusammenhängt. Tafeln der Funktion $G_k(r, q)$ für $q = u$, $3 \leqslant u \leqslant 49$ und $q = 4n$, $1 \leqslant n \leqslant 25$ werden in § 3 gegeben, auf Grund entsprechender Tafeln für die Summen (2)-(4). Dort erläutern wir auch an einigen Beispielen, wie alle diese Tafeln berechnet wurden.

§ 2. Gleichungen (1.27)-(1.29)

Wir schicken einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 1.

$$\psi\left(\frac{a}{q}\right) = -\frac{1}{2q} + \frac{1}{q}\sum_{r<q}\frac{e\left(-\frac{ar}{q}\right)}{e\left(\frac{r}{q}\right)-1}. \tag{1}$$

Beweis. Es sei $q > 1$, da für $q = 1$ Gleichung (1) klar ist (sie geht dann nach (1.3.1) in $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ über). Wir setzen

$$S_r = \sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right)e\left(\frac{br}{q}\right), \qquad T = \sum_{r=1}^{q-1}\frac{e\left(-\frac{ar}{q}\right)}{e\left(\frac{r}{q}\right)-1}.$$

Sei $1 \leqslant r < q$. Dann ist

$$\sum_{b=0}^{q-1} e\left(\frac{br}{q}\right) = 0,$$

und daher

$$S_r = \sum_{b=0}^{q-1}\left(\frac{b}{q}-\frac{1}{2}\right)e\left(\frac{br}{q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} b e\left(\frac{br}{q}\right),$$

$$\left\{e\left(\frac{r}{q}\right)-1\right\}S_r = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} b\left\{e\left(\frac{(b+1)r}{q}\right)-e\left(\frac{br}{q}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} e\left(\frac{br}{q}\right)+\frac{q-1}{q} = 1,$$

$$S_r = \left\{e\left(\frac{r}{q}\right)-1\right\}^{-1},$$

folglich

$$T = \sum_{r=1}^{q-1} e\left(-\frac{ar}{q}\right)\sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right)e\left(\frac{br}{q}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q} e\left(-\frac{ar}{q}\right)\sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right)e\left(\frac{br}{q}\right) - \sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right).$$

Hier ist

$$\sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right) = \sum_{b=0}^{q-1}\left(\frac{b}{q}-\frac{1}{2}\right) = \frac{q-1}{2}-\frac{q}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$T = \sum_{b=0}^{q-1}\psi\left(\frac{b}{q}\right)\sum_{r=1}^{q} e\left\{\frac{(b-a)r}{q}\right\}+\frac{1}{2} = q\psi\left(\frac{a}{q}\right)+\frac{1}{2},$$

da die r-Summe für $b \not\equiv a \pmod q$ gleich Null ist. Damit ist Gleichung (1) des Hilfssatzes bewiesen.

Wir gehen jetzt zum Beweise der Gleichung (1.27) über. Nach (1.3.1) und (6.1.41) ist

$$\psi\left(\frac{a+\frac{1}{2}-m^2}{u}\right)-\psi\left(\frac{a-m^2}{u}\right) = \frac{1}{2u}.$$

In Verbindung mit (1.1) und (1.2), ergibt sich daraus die Gleichung

$$g(a, u) = f(a, u)+\tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

Auf Grund von (1.1) und (1) ist

$$f(a, u) = \sum_{m=1}^{u}\left\{-\frac{1}{2u}+\frac{1}{u}\sum_{r=1}^{u-1}\frac{e\left(\frac{(m^2-a)r}{u}\right)}{e\left(\frac{r}{u}\right)-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{u}\sum_{r=1}^{u-1}\frac{e\left(-\frac{ar}{u}\right)}{e\left(\frac{r}{u}\right)-1}\sum_{m=1}^{u} e\left(\frac{rm^2}{u}\right),$$

also wegen (2)

$$g(a,u)=\frac{1}{u}\sum_{d\mid u}\sum_{\substack{r=1\\(r,u)=d}}^{u-1}\frac{e\left(-\dfrac{ar}{u}\right)}{e\left(\dfrac{r}{u}\right)-1}\sum_{m=1}^{u}e\left(\frac{rm^2}{u}\right).$$

Wir ersetzen r durch dr und schreiben rechts $u=dv$. Dann erhalten wir, nach Definition (1.1.1) der Gaußschen Summe,

$$g(a,u)=\frac{1}{u}\sum_{v\mid u}\sum_{\substack{r=1\\(r,v)=1}}^{v-1}\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}\sum_{m=1}^{\frac{u}{v}\cdot v}e\left(\frac{rm^2}{v}\right)$$

$$=\sum_{v\mid u}\frac{1}{v}\sum_{\substack{r=1\\(r,v)=1}}^{v-1}\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}S(r,v).$$

Wendet man auf die Gaußsche Summe Hilfssatz 1.1.8 an, so ergibt sich da die Bedingung $(r,v)=1$ weggelassen werden kann $\left(\text{für } (r,v)>1 \text{ ist } \left(\dfrac{r}{v}\right)=0\right)$,

$$g(a,u)=\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv1(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v}\left(\frac{r}{v}\right)\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}+$$

$$+i\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv3(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v}\left(\frac{r}{v}\right)\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}.$$

In den r-Summen behalten wir die Glieder, in denen $r<v/2$ ist, bei; in den übrigen Gliedern werde r durch $v-r$ ersetzt. Dann folgt

$$g(a,u)=\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv1(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\left\{\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}+\frac{e\left(\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(-\dfrac{r}{v}\right)-1}\right\}+$$

$$+i\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv3(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\left\{\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}-\frac{e\left(\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(-\dfrac{r}{v}\right)-1}\right\}$$

$$=2\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv1(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\mathrm{Re}\,\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1}-$$

$$-2\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv3(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\mathrm{Im}\,\frac{e\left(-\dfrac{ar}{v}\right)}{e\left(\dfrac{r}{v}\right)-1},$$

und daher

(3) $$-g(a,u)=\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv1\,(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\sin\frac{(2a+1)\pi r}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi r}{v}-$$

$$-\sum_{\substack{v\mid u\\v\equiv3\,(\mathrm{mod}\,4)}}v^{-1/2}\sum_{r<v/2}\left(\frac{r}{v}\right)\cos\frac{(2a+1)\pi r}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi r}{v}.$$

Weiter ist

(4) $$e\left\{\frac{(v-1)k}{8}\right\}\left(\frac{-2}{v}\right)=\begin{cases}1 & \text{für } v\equiv1(\mathrm{mod}\,4),\\(-1)^l i & \text{für } v\equiv3(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

Dies wird einfach so nachgeprüft, daß man links der Reihe nach $v=1$, 3, 5, 7 setzt.

Bezeichnet man die h-Summe in (4.4.4) mit S, so ergibt sich

$$S=\sum_{b<v/2}\left(\frac{b}{v}\right)\frac{e\left\{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b}{v}\right\}-\left(\dfrac{-1}{v}\right)e\left\{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b}{v}\right\}}{e\left(-\dfrac{b}{2v}\right)-e\left(\dfrac{b}{2v}\right)},$$

folglich

(5) $$S=\begin{cases}\displaystyle\sum_{b<v/2}\left(\frac{b}{v}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi b}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi b}{v} & \text{für } v\equiv1(\mathrm{mod}\,4),\\[2ex] \displaystyle i\sum_{b<v/2}\left(\frac{b}{v}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi b}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi b}{v} & \text{für } v\equiv3(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

Nach (4.4.4), (4) und (5) ist

$$(6)\qquad F_k(n,v)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{b<v/2}\left(\frac{b}{v}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi b}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi b}{v} & \text{für}\quad v\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4),\\[2ex] \displaystyle(-1)^{l+1}\sum_{b<v/2}\left(\frac{b}{v}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi b}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi b}{v} & \text{für}\quad v\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

Aus (3) und (6) ergibt sich

$$(7)\qquad -g(n,u)=\sum_{\substack{v|u\\ v\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} v^{-1/2}F_k(n,v)+(-1)^l\sum_{\substack{v|u\\ v\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}} v^{-1/2}F_k(n,v)$$

$$=\sum_{v|u}\left(\frac{-1}{v}\right)^l v^{-1/2}F_k(n,v).$$

Wendet man auf (7) die Möbiussche Umkehrformel an (vgl. Winogradow [4] Aufgabe 17,c zu Kapitel II), so bekommt man (1.27).

Wir gehen jetzt zum Beweise der Gleichungen (1.28) und (1.29) über. Nach (6.1.4) und (1) ist

$$F(a,q)=\frac{1}{q}\sum_{r<q}\frac{e\left(-\frac{ar}{q}\right)}{e\left(\frac{r}{q}\right)-1}-\frac{1}{q}\sum_{r<2q}\frac{e\left(-\frac{ar}{2q}\right)}{e\left(\frac{r}{2q}\right)-1}$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{\substack{r<2q\\ r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)}}\frac{e\left(-\frac{ar}{2q}\right)}{e\left(\frac{r}{2q}\right)-1}-\frac{1}{q}\sum_{r<2q}\frac{e\left(-\frac{ar}{2q}\right)}{e\left(\frac{r}{2q}\right)-1}$$

$$(8)\qquad =-\frac{1}{q}\sum_{u=1}^{2q-1}\frac{e\left(-\frac{au}{2q}\right)}{e\left(\frac{u}{2q}\right)-1}.$$

Aus (1.3) und (8) folgt

$$-h(a,n)=\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{4n}\sum_{u=1}^{4n-1}\frac{e\left(\frac{(m^2-a)u}{4n}\right)}{e\left(\frac{u}{4n}\right)-1}$$

$$=\frac{1}{2n}\sum_{u=1}^{4n-1}\frac{e\left(-\frac{au}{4n}\right)}{e\left(\frac{u}{4n}\right)-1}\sum_{m=1}^{4n}e\left(\frac{um^2}{4n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\sum_{v|n}\sum_{\substack{u=1\\ (u,n)=v}}^{4n-1}\sum_{m=1}^{4n}.$$

Wir setzen hier $n=2^cN$, $u=vw$. Dann durchläuft v die Teiler von N; zugleich durchläuft der Quotient N/v diese Teiler, kann also mit v bezeichnet werden. Auf diese Weise ergibt sich, wenn noch die Definition (1.1.1) der Gaußschen Summe beachtet wird,

$$-h(a,2^cN)=\frac{1}{2^{c+1}N}\sum_{v|N}\sum_{\substack{w<2^{c+2}v\\ (w,v)=1}}\frac{e\left(-\frac{aw}{2^{c+2}v}\right)}{e\left(\frac{w}{2^{c+2}v}\right)-1}\sum_{m\leqq 2^{c+2}N}e\left(\frac{wm^2}{2^{c+2}v}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{c+1}}\sum_{v|N}\frac{1}{v}\sum_{\substack{w<2^{c+2}v\\ (w,v)=1}}\frac{e\left(-\frac{aw}{2^{c+2}v}\right)}{e\left(\frac{w}{2^{c+2}v}\right)-1}\sum_{m\leqq 2^{c+2}v}e\left(\frac{wm^2}{2^{c+2}v}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{c+1}}\sum_{v|N}\frac{1}{v}\sum_{\substack{w<2^{c+2}v\\ (w,v)=1}}\frac{e\left(-\frac{aw}{2^{c+2}v}\right)}{e\left(\frac{w}{2^{c+2}v}\right)-1}S(w,2^{c+2}v).$$

Wendet man hier auf die Gaußsche Summe Hilfssatz 1.1.9 an, so folgt, da die Bedingung $(w,v)=1$ weggelassen werden kann,

$$-h(a,2^cN)=2^{(1-c)/2}\sum_{v|N}v^{-1/2}\sum_{w<2^{c+2}v}\left(\frac{2^{c+3}v}{w}\right)\frac{e\left(\frac{w}{8}-\frac{aw}{2^{c+2}v}\right)}{e\left(\frac{w}{2^{c+2}v}\right)-1}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist reell. Daher kann rechts der Bruch $\dfrac{e(\ )}{e(\ )-1}$ durch seinen Realteil $\mathrm{Re}\dfrac{e(\ )}{e(\ )-1}$ ersetzt werden. Das gibt

$$(9)\qquad h(a,2^cN)$$
$$=2^{-(c+1)/2}\sum_{v|N}v^{-1/2}\sum_{w<2^{c+2}v}\left(\frac{2^{c+1}v}{w}\right)\sin\frac{(2a+1-2^cv)\pi w}{2^{c+2}v}\operatorname{cosec}\frac{\pi w}{2^{c+2}v}.$$

Ferner ist in (9)

$$(10)\quad \left(\frac{2^{c+1}v}{2^{c+2}v-w}\right)\sin\frac{(2a+1-2^c v)\pi(2^{c+2}v-w)}{2^{c+2}v}=\left(\frac{2^{c+1}v}{w}\right)\sin\frac{(2a+1-2^c v)\pi w}{2^{c+2}v}$$

$$(11)\quad \operatorname{cosec}\frac{\pi(2^{c+2}v-w)}{2^{c+2}v}=\operatorname{cosec}\frac{\pi w}{2^{c+2}v}.$$

Die zweite Gleichung ist klar. Um die erste Gleichung nachzuprüfen, wollen wir die Fälle $c=0$ und $c>0$ getrennt behandeln. In beiden Fällen darf $(v, w)=1$ angenommen werden.

1) Es sei $c=0$. Dann ist $4v-w\equiv 4-w \pmod 8$, und daher

$$(12)\quad \left(\frac{2}{4v-w}\right)=-\left(\frac{2}{w}\right).$$

Ferner hat man

$$\left(\frac{v}{4v-w}\right)=\left(\frac{4v-w}{v}\right)(-1)^{\{(v-1)/2\}\{(4v-w-1)/2\}}=\left(\frac{-w}{v}\right)(-1)^{\{(v-1)/2\}\{(w+1)/2\}}$$

$$(13)\quad =\left(\frac{w}{v}\right)(-1)^{\{(v-1)/2\}\{(w-1)/2\}}=\left(\frac{v}{w}\right),$$

$$(14)\quad \sin\frac{(2a+1-v)\pi(4v-w)}{4v}=-\sin\frac{(2a+1-v)\pi w}{4v}.$$

Aus (12)-(14) ergibt sich die Gleichung (10) für $c=0$.

2) Es sei $c>0$. Dann ist

$$\left(\frac{2}{2^{c+2}v-w}\right)=\left(\frac{2}{w}\right),$$

$$\left(\frac{v}{2^{c+2}v-w}\right)=\left(\frac{-w}{v}\right)(-1)^{\{(v-1)/2\}\{(w+1)/2\}}=\left(\frac{v}{w}\right),$$

$$\sin\frac{(2a+1-2^c v)\pi(2^{c+2}v-w)}{2^{c+2}v}=\sin\frac{(2a+1-2^c v)\pi w}{2^{c+2}v}.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich wiederum Gleichung (10).

In der w-Summe auf der rechten Seite von (9) behalten wir diejenigen Glieder bei, in denen $w<2^{c+1}v$ ist. In den übrigen Gliedern werde w durch $2^{c+2}v-w$ ersetzt. Dann folgt wegen (10) und (11)

$$(15)\quad h(a, 2^c N)=2^{(1-c)/2}\sum_{v|N} v^{-1/2}\sum_{w<2^{c+1}v}\left(\frac{2^{c+1}v}{w}\right)\sin\frac{(2a+1-2^c v)\pi w}{2^{c+2}v}\operatorname{cosec}\frac{\pi w}{2^{c+2}v}.$$

Andererseits ist nach (4.4.5)

$$F_k(r, 4n)=2^{k/2}\sum_{u<2n}\left(\frac{2n}{u}\right)e\left\{-\left(r-\frac{nk}{2}\right)\frac{u}{4n}+(2r+1-nk)\frac{u}{8n}-\frac{u}{8n}\right\}\times$$
$$\times\sin\frac{(2r+1-nk)\pi u}{4n}\operatorname{cosec}\frac{\pi u}{4n}$$

$$(16)\quad =2^{k/2}\sum_{u<2n}\left(\frac{2n}{u}\right)\sin\frac{(2r+1-nk)\pi u}{4n}\operatorname{cosec}\frac{\pi u}{4n}.$$

Wir behandeln jetzt gesondert die Fälle eines geraden und ungeraden l.

1) Es sei l gerade. Dann ist in (16)

$$\sin\ldots=\sin\frac{(2r+1-n-4nl/2)\pi u}{4n}=(-1)^{l/2}\sin\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n};$$

folglich hat man

$$(17)\quad F_k(r, 4n)=(-1)^{l/2}2^{l+1/2}\sum_{u<2n}\left(\frac{2n}{u}\right)\sin\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n}\operatorname{cosec}\frac{\pi u}{4n}.$$

Auf Grund von (15) und (17) ist

$$h(r, 2^c N)=2^{(1-c)/2}\sum_{v|N} v^{-1/2}(-1)^{l/2}2^{-l-1/2}F_k(r, 2^{c+2}v),$$

und daher

$$(18)\quad (-1)^{l/2}2^l h(r, 2^c N)=\sum_{v|N}(2^c v)^{-1/2}F_k(r, 2^{c+2}v).$$

Gleichung (1.28) folgt aus (18) mittels der Möbiusschen Umkehrformel.

2) Es sei l ungerade. Dann ist in (16)

$$\sin\ldots=\sin\frac{(2r+1-3n-4n(l-1)/2\,\pi u)}{4n}$$

$$=(-1)^{(l-1)/2}\sin\left(\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n}-\frac{\pi u}{2}\right)=(-1)^{(l+1)/2}\left(\frac{-1}{u}\right)\cos\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n};$$

folglich hat man

$$(19)\quad F_k(r,4n) = (-1)^{(l+1)/2}2^{l+1/2}\sum_{u<2n}\left(\frac{-2n}{u}\right)\cos\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n}\operatorname{cosec}\frac{\pi u}{4n}.$$

Auf Grund von (1.3.1) ist

$$(20)\qquad \psi\left(\frac{y-n}{2n}\right) = \psi\left(\frac{y}{n}\right)-\psi\left(\frac{y}{2n}\right).$$

In der Tat haben beide Seiten dieser Gleichung in y die Periode $2n$; man braucht also nur die Fälle $0\leqslant y<n$ und $n\leqslant y<2n$ zu betrachten. Für $0\leqslant y<n$ ist

$$\psi\left(\frac{y-n}{2n}\right) = \frac{y-n}{2n}-(-1)-\frac{1}{2} = \frac{y}{2n}$$

$$= \left(\frac{y}{n}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{y}{2n}-\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{y}{n}\right)-\psi\left(\frac{y}{2n}\right);$$

ist aber $n\leqslant y<2n$, so hat man

$$\psi\left(\frac{y-n}{2n}\right) = \frac{y-n}{2n}-\frac{1}{2} = \left(\frac{y}{n}-1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{y}{2n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \psi\left(\frac{y}{n}\right)-\psi\left(\frac{y}{2n}\right).$$

Aus (6.1.4), (6.1.5) und (20) folgt

$$(21)\qquad F(y-n,2n) = G(y,n).$$

Nach (21), (1.3) und (1.4) ist ferner

$$(22)\qquad j(a,n) = h(a-n,n) = h(a+3n,n).$$

Weiterhin ergibt sich für $v|N$

$$\sin\left(X+\frac{3\pi 2^{c+1}Nu}{2^{c+2}v}\right) = \sin\left(X-\frac{\pi Nu}{2v}\right) = -\left(\frac{-1}{\frac{Nu}{v}}\right)\cos X$$

$$= -\left(\frac{-1}{N}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\left(\frac{-1}{v}\right)\cos X.$$

Daher folgt aus (22) und (15) $(n=2^cv)$

$$(23)\quad j(r,2^cN)$$

$$= -\left(\frac{-1}{N}\right)2^{(1-c)/2}\sum_{v|N}\left(\frac{-1}{v}\right)v^{-1/2}\sum_{u<2n}\left(\frac{-2n}{u}\right)\cos\frac{(2r+1-n)\pi u}{4n}\operatorname{cosec}\frac{\pi u}{4n}.$$

Außerdem ist nach (23) und (19)

$$j(r,2^cN) = -\left(\frac{-1}{N}\right)2^{(1-c)/2}\sum_{v|N}\left(\frac{-1}{v}\right)v^{-1/2}(-1)^{(l+1)/2}2^{-l-1/2}F_k(r,4n),$$

und somit

$$(24)\qquad \left(\frac{-1}{lN}\right)2^l j(r,2^cN) = \sum_{v|N}\left(\frac{-1}{v}\right)(2^cv)^{-1/2}F_k(r,2^{c+2}v).$$

(1.29) ergibt sich aus (24) mittels der Möbiusschen Umkehrformel.

§ 3. Tafeln der Funktionen (1.2), (1.3), (1.4), (1.9) und (1.10)

I. Tafel der Funktion $g(a,u)$ für $1\leqslant u\leqslant 49$

(Bei jedem Funktionswert werden in Klammern diejenigen Restklassen von a nach dem Modul u angegeben, für die dieser Wert angenommen wird).

$g(a,1)$	$=0$	(0).
$g(a,3)$	$=\frac{1}{3}$	(0, 2),
	$=-\frac{2}{3}$	(1).
$g(a,5)$	$=1$	(3),
	$=0$	(0, 2, 4),
	$=-1$	(1).
$g(a,7)$	$=1$	(0, 6),
	$=0$	(1, 3, 5),
	$=-1$	(2, 4).
$g(a,9)$	$=\frac{4}{3}$	(6, 8),
	$=\frac{1}{3}$	(3, 5, 7),
	$=-\frac{2}{3}$	(0, 2, 4),
	$=-\frac{5}{3}$	(1).
$g(a,11)$	$=1$	(0, 2, 8, 10),
	$=0$	(1, 3, 7, 9),
	$=-1$	(4, 6),
	$=-2$	(5).
$g(a,13)$	$=2$	(8),
	$=1$	(7, 9, 11),
	$=0$	(0, 2, 6, 10, 12),
	$=-1$	(1, 3, 5),
	$=-2$	(4).
$g(a,15)$	$=\frac{7}{3}$	(0, 14),
	$=\frac{4}{3}$	(3, 13),
	$=\frac{1}{3}$	(2, 8, 12),
	$=-\frac{2}{3}$	(1, 5, 7, 9, 11),
	$=-\frac{5}{3}$	(4, 6, 10).
$g(a,17)$	$=2$	(12, 14),
	$=1$	(7, 11, 13, 15),
	$=0$	(0, 6, 8, 10, 16),
	$=-1$	(1, 3, 5, 9),
	$=-2$	(2, 4).
$g(a,19)$	$=2$	(3, 15),
	$=1$	(0, 2, 4, 14, 16, 18),
	$=0$	(1, 5, 13, 17),
	$=-1$	(6, 8, 10, 12),
	$=-2$	(7, 9, 11).
$g(a,21)$	$=\frac{10}{3}$	(14),
	$=\frac{7}{3}$	(13, 15),

$= \frac{4}{3}$ (0, 12, 20),
$= \frac{1}{3}$ (3, 11, 17, 19),
$= -\frac{2}{3}$ (2, 6, 8, 10, 16, 18),
$= -\frac{5}{3}$ (1, 5, 7, 9),
$= -\frac{8}{3}$ (4).

$g(a, 23) = 3$ (0, 22),
$= 2$ (1, 21),
$= 1$ (2, 20),
$= 0$ (3, 5, 7, 11, 15, 17, 19),
$= -1$ (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18),
$= -2$ (9, 13).

$g(a, 25) = 3$ (23),
$= 2$ (18, 20, 22, 24),
$= 1$ (13, 15, 17, 19, 21),
$= 0$ (8, 10, 12, 14, 16),
$= -1$ (3, 5, 7, 9, 11),
$= -2$ (0, 2, 4, 6),
$= -3$ (1).

$g(a, 27) = \frac{7}{3}$ (6, 8, 24, 26),
$= \frac{4}{3}$ (3, 5, 7, 21, 23, 25),
$= \frac{1}{3}$ (0, 2, 4, 18, 20, 22),
$= -\frac{2}{3}$ (1, 15, 17, 19),
$= -\frac{5}{3}$ (12, 14, 16),
$= -\frac{8}{3}$ (9, 11, 13),
$= -\frac{11}{3}$ (10).

$g(a, 29) = 3$ (19, 21),
$= 2$ (18, 20, 22),
$= 1$ (3, 15, 17, 23, 27),
$= 0$ (0, 2, 4, 12, 14, 16, 24, 26, 28),
$= -1$ (1, 5, 11, 13, 25),
$= -2$ (6, 8, 10),
$= -3$ (7, 9).

$g(a, 31) = 3$ (0, 30),
$= 2$ (1, 3, 27, 29),
$= 1$ (2, 4, 6, 24, 26, 28),
$= 0$ (5, 7, 13, 15, 17, 23, 25),
$= -1$ (8, 12, 14, 16, 18, 22),
$= -2$ (9, 11, 19, 21),
$= -3$ (10, 20).

$g(a, 33) = \frac{10}{3}$ (24, 30),
$= \frac{7}{3}$ (21, 23, 29),
$= \frac{4}{3}$ (0, 14, 20, 22, 26, 28, 32),
$= \frac{1}{3}$ (11, 13, 15, 19, 25, 27, 31),
$= -\frac{2}{3}$ (2, 8, 10, 12, 18),
$= -\frac{5}{3}$ (1, 3, 7, 9, 17),
$= -\frac{8}{3}$ (6, 16),
$= -\frac{11}{3}$ (5),
$= -\frac{14}{3}$ (4).

$g(a, 35) = 3$ (0, 8, 28, 34),
$= 2$ (3, 7, 27, 33),
$= 1$ (2, 6, 10, 24, 26, 32),
$= 0$ (1, 5, 9, 13, 23, 25, 29, 31),
$= -1$ (4, 12, 14, 20, 22, 30),
$= -2$ (11, 15, 19, 21),
$= -3$ (18),
$= -4$ (17),
$= -5$ (16).

$g(a, 37) = 4$ (24),
$= 3$ (23, 25),
$= 2$ (20, 22, 26, 32),
$= 1$ (19, 21, 27, 29, 31, 33, 35),
$= 0$ (0, 2, 6, 8, 18, 28, 30, 34, 36),
$= -1$ (1, 3, 5, 7, 9, 15, 17),
$= -2$ (4, 10, 14, 16),
$= -3$ (11, 13),
$= -4$ (12).

$g(a, 39) = \frac{13}{3}$ (0, 38),
$= \frac{10}{3}$ (35, 37),
$= \frac{7}{3}$ (2, 8, 34, 36),
$= \frac{4}{3}$ (1, 3, 7, 9, 21, 33),
$= \frac{1}{3}$ (6, 20, 24, 32),
$= -\frac{2}{3}$ (5, 11, 15, 19, 23, 29, 31),
$= -\frac{5}{3}$ (4, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30),

$= -\frac{8}{3}$ (13, 17, 25, 27),
$= -\frac{11}{3}$ (16).

$g(a, 41) = 4$ (30),
$= 3$ (29, 31, 35),
$= 2$ (28, 32, 34, 36, 38),
$= 1$ (15, 17, 19, 27, 33, 37, 39),
$= 0$ (0, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 40),
$= -1$ (1, 3, 7, 13, 21, 23, 25),
$= -2$ (2, 4, 6, 8, 12),
$= -3$ (5, 9, 11),
$= -4$ (10).

$g(a, 43) = 3$ (8, 34),
$= 2$ (3, 5, 7, 9, 33, 35, 37, 39),
$= 1$ (0, 2, 4, 6, 10, 12, 30, 32, 36, 38, 40, 42),
$= 0$ (1, 11, 13, 29, 31, 41),
$= -1$ (14, 20, 22, 28),
$= -2$ (15, 19, 21, 23, 27),
$= -3$ (16, 18, 24, 26),
$= -4$ (17, 25).

$g(a, 45) = \frac{16}{3}$ (30),
$= \frac{13}{3}$ (29, 33),
$= \frac{10}{3}$ (28, 32, 44),
$= \frac{7}{3}$ (27, 31, 35, 43),
$= \frac{4}{3}$ (0, 8, 24, 26, 34, 42),
$= \frac{1}{3}$ (3, 7, 15, 23, 25, 39, 41),
$= -\frac{2}{3}$ (2, 6, 14, 18, 22, 38, 40),
$= -\frac{5}{3}$ (1, 5, 13, 17, 21, 37),
$= -\frac{8}{3}$ (4, 12, 16, 20, 36),
$= -\frac{11}{3}$ (9, 11, 19),
$= -\frac{14}{3}$ (10).

$g(a, 47) = 5$ (0, 46),
$= 4$ (1, 45),
$= 3$ (2, 44),
$= 2$ (3, 5, 41, 43),
$= 1$ (4, 6, 40, 42),
$= 0$ (7, 11, 13, 15, 23, 31, 33, 35, 39),
$= -1$ (8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38),
$= -2$ (9, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 37),
$= -3$ (18, 28).

$g(a, 49) = 4$ (42, 48),
$= 3$ (35, 41, 43, 45, 47),
$= 2$ (28, 34, 36, 38, 40, 44, 46),
$= 1$ (21, 27, 29, 31, 33, 37, 39),
$= 0$ (14, 20, 22, 24, 26, 30, 32),
$= -1$ (7, 13, 15, 17, 19, 23, 25),
$= -2$ (0, 6, 8, 10, 12, 16, 18),
$= -3$ (1, 3, 5, 9, 11),
$= -4$ (2, 4).

II. Tafel der Funktion $h(a,n)$ für $1 \leqslant n \leqslant 25$

(In den Klammern werden die entsprechenden Restklassen von a nach dem Modul $4n$ angeführt.)

$h(a, 1) = 2$ (1),
$= 0$ (0).

$h(a, 2) = 2$ (1-3),
$= -2$ (0).

$h(a, 3) = 4$ (4, 5),
$= 2$ (1, 2),
$= 0$ (3),
$= -2$ (0).

$h(a, 4) = 4$ (4-7),
$= 0$ (0-3).
$h(a, 5) = 6$ (5, 9),
$= 4$ (4),
$= 2$ (6-8),
$= 0$ (1-3),
$= -4$ (0).
$h(a, 6) = 6$ (9-11),
$= 2$ (1-8),
$= -6$ (0).
$h(a, 7) = 8$ (9, 10),
$= 4$ (8, 11-13),
$= 2$ (1, 4, 5, 6),
$= 0$ (7),
$= -2$ (0, 2, 3).
$h(a, 8) = 4$ (4-15),
$= -4$ (0-3).
$h(a, 9) = 10$ (16, 17),
$= 6$ (9, 13, 14, 15),
$= 4$ (4-6),
$= 0$ (1-3, 7, 8),
$= 2$ (10-12),
$= -4$ (0).
$h(a, 10) = 6$ (9-19),
$= 2$ (1-4),
$= -2$ (5-8),
$= -6$ (0).
$h(a, 11) = 8$ (12, 13, 20, 21),
$= 6$ (9, 10),
$= 4$ (11, 14, 16-19),
$= 2$ (5-8),
$= 0$ (15),
$= -2$ (1, 2, 4),
$= -6$ (0, 3).
$h(a, 12) = 8$ (16-23),
$= 4$ (4-11),
$= 0$ (12-15),
$= -4$ (0-3).
$h(a, 13) = 10$ (17-21),
$= 6$ (13, 16, 22, 25),
$= 4$ (9, 12),
$= 2$ (14, 15, 23, 24),
$= 0$ (1, 2, 4-8, 10, 11),
$= -4$ (0, 3).
$h(a, 14) = 10$ (25-27),
$= 6$ (9-20),
$= 2$ (21-24),
$= -2$ (1-8),
$= -10$ (0).

$h(a, 15) = 12$ (25-29),
$= 8$ (16-18, 24),
$= 6$ (4, 5, 9),
$= 4$ (21-23),
$= 2$ (6-8, 10-14),
$= 0$ (15, 19, 20),
$= -2$ (1-3),
$= -10$ (0).
$h(a, 16) = 8$ (16-31),
$= 0$ (0-15).
$h(a, 17) = 10$ (17, 25, 33),
$= 8$ (13, 14, 16),
$= 6$ (18, 21-24, 26-29, 32),
$= 4$ (9-12, 15),
$= 2$ (19, 20, 30, 31),
$= 0$ (8),
$= -4$ (1, 4-7),
$= -8$ (0, 2, 3).
$h(a, 18) = 10$ (9-12, 25-35),
$= 2$ (13-24),
$= -2$ (1-8),
$= -10$ (0).
$h(a, 19) = 12$ (25, 28, 29),
$= 8$ (20-22, 24, 26, 27, 30-34, 36, 37),
$= 6$ (5, 17, 18),
$= 4$ (19, 23, 35),
$= 2$ (4, 6, 9, 10, 16),
$= -2$ (1-3, 7, 8, 11-15),
$= -6$ (0).
$h(a, 20) = 12$ (20-23, 36-39),
$= 8$ (16-19),
$= 4$ (24-35),
$= 0$ (4-15),
$= -8$ (0-3).
$h(a, 21) = 18$ (37, 38),
$= 14$ (39-41),
$= 10$ (28, 29, 36),
$= 8$ (16, 17),
$= 6$ (21, 25-27, 30-35),
$= 4$ (4-6, 9-14, 18-20),
$= 0$ (7, 8, 15),
$= -2$ (22-24),
$= -4$ (1-3),
$= -12$ (0).
$h(a, 22) = 14$ (33-36),
$= 10$ (25-32),
$= 6$ (37-43),

$= 2$ (1-4, 9-24),
$= -6$ (0, 5-8).
$h(a, 23) = 12$ (25),
$= 10$ (16, 17),
$= 8$ (24, 26, 29, 30, 32-34, 36-38, 41-45),
$= 6$ (13-15, 18-22),
$= 4$ (23, 27, 28, 31, 35, 39, 40),
$= 2$ (12),
$= -2$ (1, 9-11),
$= -6$ (0, 2, 4, 5, 8),
$= -10$ (3, 6, 7).

$h(a, 24) = 12$ (36-47),
$= 4$ (4-35),
$= -12$ (0-3).
$h(a, 25) = 14$ (25, 29, 30, 44, 45, 49),
$= 10$ (26-28, 31-33, 36-38, 41-43, 46-48),
$= 6$ (34, 35, 39, 40),
$= 4$ (4, 5, 9, 10, 24),
$= 0$ (1-3, 6-8, 11-13, 16-18, 21-23),
$= -4$ (0, 14, 15, 19, 20).

III. Tafel der Funktion $j(a, n)$ für $1 \leqslant n \leqslant 25$

(In den Klammern werden die entsprechenden Restklassen von a nach dem Modul $4n$ angeführt.)

$j(a, 1) = 0$ (1),
$= -2$ (0).
$j(a, 2) = 2$ (3),
$= -2$ (0-2).
$j(a, 3) = 2$ (4, 5),
$= 0$ (0),
$= -2$ (3),
$= -4$ (1, 2).
$j(a, 4) = 0$ (4-7),
$= -4$ (0-3).
$j(a, 5) = 4$ (9),
$= 0$ (6-8),
$= -2$ (1-3),
$= -4$ (5),
$= -6$ (0, 4).
$j(a, 6) = 2$ (7-11),
$= -2$ (0-2),
$= -6$ (3-6).
$j(a, 7) = 2$ (8, 11-13),
$= 0$ (0),
$= -2$ (7, 9, 10),
$= -4$ (1, 4-6),
$= -8$ (2, 3).
$j(a, 8) = 4$ (12-15),
$= -4$ (0-11).
$j(a, 9) = 4$ (13-15),
$= 0$ (10-12, 16, 17),
$= -2$ (1-3),
$= -4$ (9),
$= -6$ (0, 4-6),
$= -10$ (7, 8).

$j(a, 10) = 6$ (19),
$= 2$ (11-14),
$= -2$ (15-18),
$= -6$ (0-10).
$j(a, 11) = 6$ (20, 21),
$= 2$ (16-19),
$= 0$ (4),
$= -2$ (12, 13, 15),
$= -4$ (0, 3, 5-8),
$= -6$ (11, 14),
$= -8$ (1, 2, 9, 10).
$j(a, 12) = 4$ (16-23),
$= 0$ (0-3),
$= -4$ (12-15),
$= -8$ (4-11).
$j(a, 13) = 4$ (22, 25),
$= 0$ (14, 15, 17-21, 23, 24),
$= -2$ (1, 2, 10, 11),
$= -4$ (13, 16),
$= -6$ (0, 3, 9, 12),
$= -10$ (4-8).
$j(a, 14) = 6$ (23-27),
$= -2$ (7-10, 15-22),
$= -6$ (0-6),
$= -10$ (11-14).
$j(a, 15) = 6$ (19, 20, 24),
$= 2$ (21-23, 25-29),
$= 0$ (0, 4, 5),
$= -2$ (16-18),
$= -4$ (6-8),

$= -8$ (1-3, 9),
$= -10$ (15),
$= -12$ (10-14).
$j(a, 16) = 0$ (16-31),
$= -8$ (0-15).
$j(a, 17) = 8$ (30, 31, 33),
$= 4$ (26-29, 32),
$= 0$ (25),
$= -2$ (2, 3, 13, 14),
$= -4$ (18, 21-24),
$= -6$ (1, 4-7, 9-12, 15),
$= -8$ (17, 19, 20),
$= -10$ (0, 8, 16).
$j(a, 18) = 10$ (27-30),
$= 2$ (31-35),
$= -2$ (0-6, 19-26),
$= -10$ (7-18).
$j(a, 19) = 6$ (24, 36, 37),
$= 2$ (23, 25, 28, 29, 35),
$= -2$ (20-22, 26, 27, 30-34),
$= -4$ (0, 4, 16),
$= -6$ (19),
$= -8$ (1-3, 5, 7, 8, 11-15, 17, 18),
$= -12$ (6, 9, 10).
$j(a, 20) = 8$ (36-39),
$= 0$ (24-35),
$= -4$ (4-15),
$= -8$ (20-23),
$= -12$ (0-3, 16-19).
$j(a, 21) = 8$ (37, 38),
$= 4$ (25-27, 30-35, 39-41),
$= 2$ (1-3),
$= 0$ (28, 29, 36),
$= -4$ (22-24),
$= -6$ (0, 4-6, 9-14),
$= -10$ (7, 8, 15),
$= -12$ (21),
$= -14$ (18-20),
$= -18$ (16, 17).
$j(a, 22) = 2$ (23-26, 31-43),
$= -2$ (0-2),
$= -6$ (15-22, 27-30),
$= -10$ (3-10),
$= -14$ (11-14).
$j(a, 23) = 10$ (39, 40),
$= 6$ (36-38, 41-45),
$= 2$ (35),
$= -2$ (24, 32-34),
$= -4$ (0, 4, 5, 8, 12, 16, 17),
$= -6$ (23, 25, 27, 28, 31),
$= -8$ (1, 3, 6, 7, 9-11, 13-15, 18-22),
$= -10$ (26, 29, 30),
$= -12$ (2).
$j(a, 24) = 4$ (28-47),
$= -4$ (0-11),
$= -12$ (12-27).
$j(a, 25) = 4$ (29, 30, 34, 35, 49),
$= 0$ (26-28, 31-33, 36-38, 41-43, 46-48),
$= -4$ (25, 39, 40, 44, 45),
$= -6$ (9, 10, 14, 15),
$= -10$ (1-3, 6-8, 11-13, 16-18, 21-23),
$= -14$ (0, 4, 5, 19, 20, 24).

IV. Tafel der Funktion $G_k(r, u)$ für $3 \leqslant u \leqslant 49$

(In Klammern werden die entsprechenden Restklassen von r nach dem Modul u angeführt.)

$(-1)^l G_k(r, 3) = \frac{2}{3}$ (1),
$= -\frac{1}{3}$ (0, 2).
$G_k(r, 5) = 1$ (1),
$= 0$ (0, 2, 4),
$= -1$ (3).
$(-1)^l G_k(r, 7) = 1$ (2, 4),
$= 0$ (1, 3, 5),
$= -1$ (0, 6).
$G_k(r, 9) = 1$ (0-2),
$= 0$ (3-5),
$= -1$ (6-8).
$(-1)^l G_k(r, 11) = 2$ (5),
$= 1$ (4, 6),
$= 0$ (1, 3, 7, 9),
$= -1$ (0, 2, 8, 10).
$G_k(r, 13) = 2$ (4),
$= 1$ (1, 3, 5),

$= 0$ (0, 2, 6, 10, 12),
$= -1$ (7, 9, 11),
$= -2$ (8).
$(-1)^l G_k(r, 15) = 1$ (4-6, 8-10),
$= 0$ (2, 3, 7, 11, 12),
$= -1$ (1, 13),
$= -2$ (0, 14).
$G_k(r, 17) = 2$ (2, 4),
$= 1$ (1, 3, 5, 9),
$= 0$ (0, 6, 8, 10, 16),
$= -1$ (7, 11, 13, 15),
$= -2$ (12, 14).
$(-1)^l G_k(r, 19) = 2$ (7, 9, 11),
$= 1$ (6, 8, 10, 12),
$= 0$ (1, 5, 13, 17),
$= -1$ (0, 2, 4, 14, 16, 18),
$= -2$ (3, 15).
$G_k(r, 21) = 2$ (5-7),
$= 1$ (1, 4, 8, 9),
$= 0$ (0, 2, 3, 10, 17, 18, 20),
$= -1$ (11, 12, 16, 19),
$= -2$ (13-15).
$(-1)^l G_k(r, 23) = 2$ (9, 13),
$= 1$ (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18),
$= 0$ (3, 5, 7, 11, 15, 17, 19),
$= -1$ (2, 20),
$= -2$ (1, 21),
$= -3$ (0, 22).
$G_k(r, 25) = 2$ (0-4),
$= 1$ (5-9),
$= 0$ (10-14),
$= -1$ (15-19),
$= -2$ (20-24).
$(-1)^l G_k(r, 27) = 2$ (9-17),
$= -1$ (0-8, 18-26),
$G_k(r, 29) = 3$ (7, 9),
$= 2$ (6, 8, 10),
$= 1$ (1, 5, 11, 13, 25),
$= 0$ (0, 2, 4, 12, 14, 16, 24, 26, 28),
$= -1$ (3, 15, 17, 23, 27),
$= -2$ (18, 20, 22),
$= -3$ (19, 21).
$(-1)^l G_k(r, 31) = 3$ (10, 20),
$= 2$ (9, 11, 19, 21),
$= 1$ (8, 12, 14, 16, 18, 22),
$= 0$ (5, 7, 13, 15, 17, 23, 25),
$= -1$ (2, 4, 6, 24, 26, 28),
$= -2$ (1, 3, 27, 29),
$= -3$ (0, 30).
$G_k(r, 33) = 3$ (4),
$= 2$ (2, 3, 5, 6, 8, 9),
$= 1$ (1, 7, 10-12, 17, 18),
$= 0$ (0, 13, 16, 19, 32),
$= -1$ (14, 15, 20-22, 25, 31),
$= -2$ (23, 24, 26, 27, 29, 30),
$= -3$ (28).
$(-1)^l G_k(r, 35) = 4$ (17),
$= 3$ (16, 18),
$= 2$ (13-15, 19-21),
$= 1$ (12, 22),
$= 0$ (4, 5, 11, 23, 29, 30),
$= -1$ (1, 3, 6, 7, 9, 10, 24, 25, 27, 28, 31, 33),
$= -2$ (0, 2, 8, 26, 32, 34).
$G_k(r, 37) = 4$ (12),
$= 3$ (11, 13),
$= 2$ (4, 10, 14, 16),
$= 1$ (1, 3, 5, 7, 9, 15, 17),
$= 0$ (0, 2, 6, 8, 18, 28, 30, 34, 36),
$= -1$ (19, 21, 27, 29, 31, 33, 35),
$= -2$ (20, 22, 26, 32),
$= -3$ (23, 25),
$= -4$ (24).

$(-1)^l G_k(r, 39) = 2$ (11-13, 16, 22, 25-27),
$= 1$ (10, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 28),
$= 0$ (5, 6, 8, 9, 19, 29, 30, 32, 33),
$= -1$ (4, 7, 31, 34),
$= -2$ (2, 3, 35, 36),
$= -3$ (1, 37),
$= -4$ (0, 38).

$G_k(r, 41) = 4$ (10),
$= 3$ (5, 9, 11),
$= 2$ (2, 4, 6, 8, 12),
$= 1$ (1, 3, 7, 13, 21, 23, 25),
$= 0$ (0, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 40),
$= -1$ (15, 17, 19, 27, 33, 37, 39),
$= -2$ (28, 32, 34, 36, 38),
$= -3$ (29, 31, 35),
$= -4$ (30).

$(-1)^l G_k(r, 43) = 4$ (17, 25),
$= 3$ (16, 18, 24, 26),
$= 2$ (15, 19, 21, 23, 27),
$= 1$ (14, 20, 22, 28),
$= 0$ (1, 11, 13, 29, 31, 41),
$= -1$ (0, 2, 4, 6, 10, 12, 30, 32, 36, 38, 40, 42),
$= -2$ (3, 5, 7, 9, 33, 35, 37, 39),
$= -3$ (8, 34).

$G_k(r, 45) = 3$ (12-17),
$= 2$ (9-11),
$= 1$ (3-5, 18-20),
$= 0$ (0-2, 6-8, 21-23, 36-38, 42-44),
$= -1$ (24-26, 39-41),
$= -2$ (33-35),
$= -3$ (27-32).

$(-1)^l G_k(r, 47) = 3$ (18, 28),
$= 2$ (9, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 37),
$= 1$ (8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38),
$= 0$ (7, 11, 13, 15, 23, 31, 33, 35, 39),
$= -1$ (4, 6, 40, 42),
$= -2$ (3, 5, 41, 43),
$= -3$ (2, 44),
$= -4$ (1, 45),
$= -5$ (0, 46).

$G_k(r, 49) = 3$ (0-6),
$= 2$ (7-13),
$= 1$ (14-20),
$= 0$ (21-27),
$= -1$ (28-34),
$= -2$ (35-41),
$= -3$ (42-48).

V. Tafel der Funktion $G_k(r, 4n)$ für $k \equiv 1 \pmod 4$, $1 \leqslant n \leqslant 25$

(In Klammern werden die entsprechenden Restklassen von r nach dem Modul $4n$ angeführt.)

$G_k(r, 4) = 1$ (1),
$= 0$ (0).

$G_k(r, 8) = 1$ (1-3),
$= -1$ (0).

$G_k(r, 12) = 2$ (4),
$= 1$ (2, 3, 5),
$= 0$ (1),
$= -1$ (0).

$G_k(r, 16) = 2$ (4-7),
$= 0$ (0-3).

$G_k(r, 20) = 2$ (4, 5, 7, 9),
$= 1$ (3, 6, 8),
$= 0$ (2),
$= -1$ (1),
$= -2$ (0).

$G_k(r, 24) = 2$ (0, 5-11),
$= 0$ (1-4).

$G_k(r, 28) = 4$ (10),
$= 3$ (9, 11),
$= 2$ (8, 12),
$= 1$ (4, 6, 7, 13),
$= 0$ (1, 3, 5),
$= -1$ (0, 2).

$G_k(r, 32) = 2$ (4-15),
$= -2$ (0-3).

$G_k(r, 36) = 3$ (9-11, 15-17),
$= 2$ (12-14),
$= 1$ (6-8),
$= 0$ (3-5),
$= -1$ (0-2).

$G_k(r, 40) = 4$ (13-16),
$= 2$ (9-12, 17-19
$= 0$ (1-8),
$= -2$ (0).

$G_k(r, 44) = 4$ (12, 20),
$= 3$ (10, 11, 13, 19, 21),
$= 2$ (7, 9, 14, 16, 18),
$= 1$ (6, 8, 15, 17),
$= 0$ (5),
$= -1$ (2, 4),
$= -2$ (1, 3),
$= -3$ (0).

$G_k(r, 48) = 4$ (16-19),
$= 2$ (8-15, 20-23),
$= 0$ (4-7),
$= -2$ (0-3).

$G_k(r, 52) = 6$ (19),
$= 5$ (18, 20),
$= 4$ (17, 21),
$= 3$ (16, 22),
$= 2$ (12, 13, 15, 23, 25),
$= 1$ (7, 9, 11, 14, 24),
$= 0$ (2, 4, 6, 8, 10),
$= -1$ (1, 3, 5),
$= -2$ (0).

$G_k(r, 56) = 4$ (13-16, 25-27),
$= 2$ (9-12, 17-24),
$= 0$ (5-8),
$= -2$ (1-4),
$= -4$ (0).

$G_k(r, 60) = 4$ (17, 18, 22, 26, 27),
$= 3$ (16, 19-21, 23-25, 28),
$= 2$ (11, 12, 14, 15, 29),
$= 1$ (8-10, 13),
$= 0$ (7),
$= -1$ (1, 4, 5, 6),
$= -2$ (0, 2, 3).

$G_k(r, 64) = 4$ (16-31),
$= 0$ (0-15).

$G_k(r, 68) = 4$ (14, 16, 17, 23, 25, 27, 33),
$= 3$ (11, 13, 15, 18, 22, 24, 26, 28, 32),
$= 2$ (10, 12, 19, 21, 29, 31),
$= 1$ (9, 20, 30),
$= 0$ (8),
$= -1$ (7),
$= -2$ (4, 6),
$= -3$ (1, 3, 5),
$= -4$ (0, 2).

$G_k(r, 72) = 4$ (21-32),
$= 2$ (9-20, 33-35),
$= -2$ (0-8).

$G_k(r, 76) = 6$ (28),
$= 5$ (25, 27, 29, 31),
$= 4$ (20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36),
$= 3$ (18, 19, 21, 23, 33, 35, 37),
$= 2$ (5, 17),
$= 1$ (4, 6, 10, 16),
$= 0$ (3, 7, 9, 11, 15),
$= -1$ (2, 8, 12, 14),
$= -2$ (1, 13),
$= -3$ (0).

$G_k(r, 80) = 4$ (16-23, 28-31, 36-39),
$= 2$ (12-15, 24-27, 32-35),
$= 0$ (8-11),
$= -2$ (4-7),
$= -4$ (0-3).

$G_k(r, 84) = 5$ (25, 37),
$= 4$ (20, 21, 23, 24, 26-28, 31, 34-36, 38, 39, 41),
$= 3$ (19, 22, 29, 30, 32, 33, 40),
$= 2$ (17, 18),
$= 1$ (11, 12, 16),
$= 0$ (5-7, 10, 13-15),

$= -1$ (4, 8, 9),
$= -2$ (2, 3),
$= -3$ (1),
$= -4$ (0).
$G_k(r, 88) = 6$ (29-36),
$= 4$ (25-28, 37-40),
$= 2$ (13-16, 21-24, 41-43),
$= 0$ (1-4, 9-12, 17-20),
$= -2$ (0, 5-8).
$G_k(r, 92) = 5$ (16, 25, 43),
$= 4$ (15, 17, 19, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38, 42, 44),
$= 3$ (14, 18, 20, 22, 23, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 45),
$= 2$ (13, 21, 28, 40),
$= 1$ (12),
$= 0$ (11),
$= -1$ (10),
$= -2$ (1, 9),
$= -3$ (0, 2, 4, 8),
$= -4$ (3, 5, 7),
$= -5$ (6).
$G_k(r, 96) = 4$ (20-47),
$= 0$ (4-19),
$= -4$ (0-3).
$G_k(r, 100) = 6$ (35-39),
$= 5$ (30-34, 40-44),
$= 4$ (25-29, 45-49),
$= 1$ (15-19),
$= 0$ (0-4, 10-14, 20-24),
$= -1$ (5-9).

VI. Tafel der Funktion $G_k(r, 4n)$ für $k \equiv 3 \pmod 4$, $1 \leqslant n \leqslant 25$

(In Klammern werden die entsprechenden Restklassen von r nach dem Modul $4n$ angeführt.)

$G_k(r, 4) = 0$ (1),
$= -1$ (0).
$G_k(r, 8) = 1$ (3),
$= -1$ (0-2).
$G_k(r, 12) = 1$ (5),
$= 0$ (4),
$= -1$ (0, 2, 3),
$= -2$ (1).
$G_k(r, 16) = 0$ (4-7),
$= -2$ (0-3).
$G_k(r, 20) = 2$ (9),
$= 1$ (8),
$= 0$ (7),
$= -1$ (1, 3, 6),
$= -2$ (0, 2, 4, 5).
$G_k(r, 24) = 2$ (11),
$= 0$ (7-10),
$= -2$ (0-6).
$G_k(r, 28) = 1$ (11, 13),
$= 0$ (8, 10, 12),
$= -1$ (0, 6, 7, 9),
$= -2$ (1, 5),
$= -3$ (2, 4),
$= -4$ (3).
$G_k(r, 32) = 2$ (12-15),
$= -2$ (0-11).
$G_k(r, 36) = 1$ (15-17),
$= 0$ (12-14),
$= -1$ (9-11),
$= -2$ (3-5),
$= -3$ (0-2, 6-8).
$G_k(r, 40) = 2$ (19),
$= 0$ (11-18),
$= -2$ (0-2, 7-10),
$= -4$ (3-6).
$G_k(r, 44) = 3$ (21),
$= 2$ (18, 20),
$= 1$ (17, 19),
$= 0$ (16),
$= -1$ (4, 6, 13, 15),
$= -2$ (3, 5, 7, 12, 14),
$= -3$ (0, 2, 8, 10, 11),
$= -4$ (1, 9).
$G_k(r, 48) = 2$ (20-23),
$= 0$ (16-19),
$= -2$ (0-3, 8-15),
$= -4$ (4-7).
$G_k(r, 52) = 2$ (25),
$= 1$ (20, 22, 24),
$= 0$ (15, 17, 19, 21, 23),
$= -1$ (1, 11, 14, 16, 18),

$= -2$ (0, 2, 10, 12, 13),
$= -3$ (3, 9),
$= -4$ (4, 8),
$= -5$ (5, 7),
$= -6$ (6).
$G_k(r, 56) = 4$ (27),
$= 2$ (23-26),
$= 0$ (19-22),
$= -2$ (3-10, 15-18),
$= -4$ (0-2, 11-14).
$G_k(r, 60) = 2$ (26, 27, 29),
$= 1$ (23-25, 28),
$= 0$ (22),
$= -1$ (16, 19-21),
$= -2$ (0, 14, 15, 17, 18),
$= -3$ (1, 4-6, 8-10, 13),
$= -4$ (2, 3, 7, 11, 12).
$G_k(r, 64) = 0$ (16-31),
$= -4$ (0-15).
$G_k(r, 68) = 4$ (31, 33),
$= 3$ (28, 30, 32),
$= 2$ (27, 29),
$= 1$ (26),
$= 0$ (25),
$= -1$ (3, 13, 24),
$= -2$ (2, 4, 12, 14, 21, 23),
$= -3$ (1, 5, 7, 9, 11, 15, 18, 20, 22),
$= -4$ (0, 6, 8, 10, 16, 17, 19).
$G_k(r, 72) = 2$ (27-35),
$= -2$ (0-2, 15-26),
$= -4$ (3-14).
$G_k(r, 76) = 3$ (37),
$= 2$ (24, 36),
$= 1$ (23, 25, 29, 35),
$= 0$ (22, 26, 28, 30, 34),
$= -1$ (21, 27, 31, 33),
$= -2$ (20, 32),
$= -3$ (0, 2, 4, 14, 16, 18, 19),
$= -4$ (1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17),
$= -5$ (6, 8, 10, 12),
$= -6$ (9).
$G_k(r, 80) = 4$ (36-39),
$= 2$ (32-35),
$= 0$ (28-31),
$= -2$ (4-7, 12-15, 24-27),
$= -4$ (0-3, 8-11, 16-23).
$G_k(r, 84) = 4$ (41),
$= 3$ (40),
$= 2$ (38, 39),
$= 1$ (32, 33, 37),
$= 0$ (26-28, 31, 34-36),
$= -1$ (25, 29, 30),
$= -2$ (23, 24),
$= -3$ (1, 8, 9, 11, 12, 19, 22),
$= -4$ (0, 2, 3, 5-7, 10, 13-15, 17, 18, 20 21),
$= -5$ (4, 16).
$G_k(r, 88) = 2$ (35-38, 43),
$= 0$ (23-26, 31-34, 39-42),
$= -2$ (0-2, 19-22, 27-30),
$= -4$ (3-6, 15-18),
$= -6$ (7-14).
$G_k(r, 92) = 5$ (39),
$= 4$ (38, 40, 42),
$= 3$ (37, 41, 43, 45),
$= 2$ (36, 44),
$= 1$ (35),
$= 0$ (34),
$= -1$ (33),
$= -2$ (5, 17, 24, 32),
$= -3$ (0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22, 23, 25, 27, 31),
$= -4$ (1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 26, 28, 30),
$= -5$ (2, 20, 29).
$G_k(r, 96) = 4$ (44-47),
$= 0$ (28-43),
$= -4$ (0-27).
$G_k(r, 100) = 1$ (40-44),
$= 0$ (25-29, 35-39, 45-49),
$= -1$ (30-34),
$= -4$ (0-4, 20-24),
$= -5$ (5-9, 15-19),
$= -6$ (10-14).

Wir wollen jetzt einige Hinweise dafür geben, wie die Tafeln I-VI berechnet worden sind.

1) Tafel I. Nach (1.2) und (1.3) hat die Funktion $g(a, u)$ in a die Periode u:

(1) $$g(a+u, u) = g(a, u).$$

In der Tafel brauchen daher nur diejenigen Werte angegeben zu werden, die $g(a, u)$ auf einem vollständigen Restklassensystem von a nach dem Modul u annimmt. Ferner ist

$$\left[\frac{b}{u}\right] - \left[\frac{b-1}{u}\right] = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad b \equiv 0 \pmod{u}, \\ 0 & \text{für} \quad b \not\equiv 0 \pmod{u}, \end{cases}$$

folglich

$$\psi\left(\frac{a-m^2}{u}\right) - \psi\left(\frac{a-1-m^2}{u}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{u} - 1 & \text{für} \quad a \equiv m^2 \pmod{u}, \\ \dfrac{1}{u} & \text{für} \quad a \not\equiv m^2 \pmod{u}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich nach (1.1) und (2.2)

(2) $$g(a, u) - g(a-1, u) = f(a, u) - f(a-1, u) = 1 - c_a,$$

wobei c_a die Lösungszahl der Kongruenz

(3) $$m^2 \equiv a \pmod{u}$$

bedeutet.

Wir wollen jetzt zwei Beispiele für die Berechnung von $g(a, u)$ anführen, und zwar den Fall $u = 47$, der für Primzahlen typisch ist, sowie den Fall $u = 45$, als Beispiel für eine zusammengesetzte Zahl.

Für $u = p$ ist nach (2)-(3) einfach

(4) $$g(a-1, u) - g(a, u) = \left(\frac{a}{u}\right). \quad (u \nmid a).$$

Hier hat man also beim Übergang von $g(a-1, u)$ zu $g(a, u)$ eine Eins hinzuzufügen oder abzuziehen, je nachdem, ob a quadratischer Nichtrest oder Rest der Zahl u ist.

Sei $u = 47$. Berechnet man $f(0, 47)$ nach Formel (1.1), so ergibt sich $f(0, 47) = \frac{9}{2}$. Nach (2.2) ist daher $g(0, 47) = 5$. Man hat jetzt nur noch nötig, die g-Spalte in der folgenden Tafel von oben nach unten auszufüllen; dabei sind in der a-Spalte die quadratischen Reste durch Sternchen gekennzeichnet.

a	g	a	g	a	g	a	g	a	g
*1	4	11	0	*21	-2	31	0	41	2
*2	3	*12	-1	22	-1	*32	-1	*42	1
*3	2	13	0	23	0	33	0	43	2
*4	1	*14	-1	*24	-1	*34	-1	44	3
5	2	15	0	*25	-2	35	0	45	4
*6	1	*16	-1	26	-1	*36	-1	46	5
*7	0	*17	-2	*27	-2	*37	-2		
*8	-1	*18	-3	*28	-3	38	-1		
*9	-2	19	-2	29	-2	39	0		
10	-1	20	-1	30	-1	40	1		

Zweitens sei $u = 45$. Hier ist $f(0, 45) = \frac{5}{6}$, $g(0, 45) = \frac{4}{3}$. Die Zahlen c_a werden gefunden, indem man die Reste aller Quadrate $1^2, \ldots, 44^2$ nach dem Modul 45 bestimmt. Alsdann werden sie in die c_a-Spalte der folgenden Tafel eingetragen. Endlich fülle man die g-Spalte von oben nach unten, unter Beachtung von (2), aus.

a	c_a	g	a	c_a	g	a	c_a	g	a	c_a	g
1	4	$-\frac{5}{3}$	12	0	$-\frac{8}{3}$	23	0	$\frac{1}{3}$	34	4	$\frac{4}{3}$
2	0	$-\frac{2}{3}$	13	0	$-\frac{5}{3}$	24	0	$\frac{4}{3}$	35	0	$\frac{7}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	14	0	$-\frac{2}{3}$	25	2	$\frac{1}{3}$	36	6	$-\frac{8}{3}$
4	4	$-\frac{8}{3}$	15	0	$\frac{1}{3}$	26	0	$\frac{4}{3}$	37	0	$-\frac{5}{3}$
5	0	$-\frac{5}{3}$	16	4	$-\frac{8}{3}$	27	0	$\frac{7}{3}$	38	0	$-\frac{2}{3}$
6	0	$-\frac{2}{3}$	17	0	$-\frac{5}{3}$	28	0	$\frac{10}{3}$	39	0	$\frac{1}{3}$
7	0	$\frac{1}{3}$	18	0	$-\frac{2}{3}$	29	0	$\frac{13}{3}$	40	2	$-\frac{2}{3}$
8	0	$\frac{4}{3}$	19	4	$-\frac{11}{3}$	30	0	$\frac{16}{3}$	41	0	$\frac{1}{3}$
9	6	$-\frac{11}{3}$	20	0	$-\frac{8}{3}$	31	4	$\frac{7}{3}$	42	0	$\frac{4}{3}$
10	2	$-\frac{14}{3}$	21	0	$-\frac{5}{3}$	32	0	$\frac{10}{3}$	43	0	$\frac{7}{3}$
11	0	$\frac{11}{3}$	22	0	$-\frac{2}{3}$	33	0	$\frac{13}{3}$	44	0	$\frac{10}{3}$

2) Tafel II. Nach (6.1.6) ist

(5) $$F(y+n, n) = -F(y, n), \qquad F(y+2n, n) = F(y, n),$$

also nach (1.3)

(6) $$h(a+2n, n) = -h(a, n), \qquad h(a+4n, n) = h(a, n).$$

Aus der zweiten Gleichung (6) ergibt sich, daß die Funktion $h(a, n)$ lediglich von der Restklasse der Zahl a nach dem Modul $4n$ abhängt;

wegen der ersten Gleichung (6) braucht daher $h(a, n)$ nur für $a = 0, \ldots, 2n-1$ berechnet zu werden.

Nach (6.1.6) ist ferner jedes Glied der Summe (1.3) gleich $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$, wobei beim Übergang von $a-1$ zu a ein Zeichenwechsel dann und nur dann eintritt, wenn

$$(7) \qquad a \equiv m^2 \quad \text{oder} \quad a \equiv m^2+2n \quad (\operatorname{mod} 4n).$$

Als typisches Beispiel betrachten wir den Fall $n = 25$. Nach (1.3) hat man

$$(8) \quad \begin{aligned} h(a, 25) = 10\{&\underset{+}{F(a, 50)}+\underset{-}{F(a-25, 50)}\}+ \\ +4\{&\underset{-}{F(a-1, 50)}+\underset{-}{F(a-4, 50)}+\underset{-}{F(a-9, 50)}+\underset{-}{F(a-16, 50)}+ \\ &+\underset{-}{F(a-21, 50)}+\underset{-}{F(a-24, 50)}+\underset{-}{F(a-29, 50)}+\underset{-}{F(a-36, 50)}+ \\ &+\underset{-}{F(a-41, 50)}+\underset{-}{F(a-44, 50)}+\underset{-}{F(a-49, 50)}+\underset{+}{F(a-56, 50)}+ \\ &+\underset{+}{F(a-61, 50)}+\underset{+}{F(a-64, 50)}+\underset{+}{F(a-69, 50)}+\underset{+}{F(a-76, 50)}+ \\ &+\underset{+}{F(a-81, 50)}+\underset{+}{F(a-84, 50)}+\underset{+}{F(a-89, 50)}+\underset{+}{F(a-96, 50)}\}. \end{aligned}$$

Hier ist unter jedem Gliede rechts dasjenige Zeichen angegeben, das für $a = 0$ angenommen wird.

Ändert in der ersten geschweiften Klammer ein Glied, beim Übergang von $a-1$ zu a, sein Vorzeichen von Plus auf Minus, so nimmt h um $10 \cdot 1 = 10$ ab; findet aber der Zeichenwechsel in umgekehrter Richtung statt, so wächst h um 10. Analog nimmt h um 4 ab, wenn ein Glied in der zweiten geschweiften Klammer sein Vorzeichen von Plus auf Minus wechselt, während h um 4 zunimmt, wenn der Zeichenwechsel in umgekehrter Richtung stattfindet.

Sei $a = 0$. Dann gibt es in der ersten geschweiften Klammer ein Pluszeichen und ein Minuszeichen; sie gleichen sich aus. In der zweiten Klammer gibt es 11 Minuszeichen und 9 Pluszeichen; im Endergebnis haben wir dort 2 Minuszeichen, d. h. es ist $h(0, 25) = -4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -4$.

Beim Übergang von $a = 0$ zu $a = 1$ ändert das Glied $F(a-1, 50)$ sein Vorzeichen von Plus auf Minus. Daher ist $h(1, 25) = -4+4 = 0$. Beim Übergang von 1 zu 2 und von 2 zu 3 finden keine Zeichenwechsel statt; es ist also $h(2,25) = h(3,25) = 0$. Beim Übergang von 3 zu 4 ändert $F(a-4, 50)$ sein Vorzeichen von Minus aus Plus, so daß $h(4, 25) = 4$. Der nächste Zeichenwechsel findet beim Übergang von 5 zu 6 statt, wobei $F(a-56, 50)$ sein Vorzeichen von Plus auf Minus wechselt (siehe die zweite Kongruenz (7) für $n = 25$). Daher ist $h(5, 25) = 4$, $h(6, 25) = 0$. Auf diese Weise fahre man fort, bis die folgende Tafel ausgefüllt ist.

a	h	a	h	a	h	a	h	a	h
0	-4	10	4	20	-4	30	14	40	6
1	0	11	0	21	0	31	10	41	10
2	0	12	0	22	0	32	10	42	10
3	0	13	0	23	0	33	10	43	10
4	4	14	-4	24	4	34	6	44	14
5	4	15	-4	25	14	35	6	45	14
6	0	16	0	26	10	36	10	46	10
7	0	17	0	27	10	37	10	47	10
8	0	18	0	28	10	38	10	48	10
9	4	19	-4	29	14	39	6	49	14

3) Tafeln III-VI.

Tafel III wird mittels (2.22) nach Tafel II berechnet. Aus (2.22) und (6), oder auch aus (1.4) und (6.1.7), folgen die zu (6) analogen Gleichungen

$$(9) \qquad j(a+2n, n) = -j(a, n), \qquad j(a+4n, n) = j(a, n).$$

Auch hier braucht die Funktion $j(a, n)$ nur für $a = 0, \ldots, 2n-1$ angegeben zu werden.

Um die Tafeln IV-VI aus den Tafeln I-III herzuleiten, müssen die Gleichungen (1.27)-(1.29) auf die Funktion $G_k(r, n)$ umgeschrieben werden, die durch (1.9)-(1.10) gegeben ist. Sie lauten dann wie folgt:

$$(10) \qquad \left(\frac{-1}{u}\right)^l G_k(n, u) = -\sum_{v|u} g(n, v)\, \mu\left(\frac{u}{v}\right),$$

$$(11) \qquad 2G_k(r, 2^{c+2}N) = \sum_{v|N} h(r, 2^c v)\, \mu\left(\frac{N}{v}\right) \quad \text{für} \quad k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4),$$

$$(12) \qquad 2G_k(r, 2^{c+2}N) = \left(\frac{-1}{N}\right) \sum_{v|N} \left(\frac{-1}{v}\right) j(r, 2^c v)\, \mu\left(\frac{N}{v}\right)$$
$$\text{für} \quad k \equiv 3 (\operatorname{mod} 4).$$

Es gelten, wie wir jetzt zeigen wollen, die Gleichungen

$$(13) \qquad G_k(n+u, u) = G_k(n, u),$$

$$(14) \qquad G_k(r+2n, 4n) = -G_k(r, 4n), \quad G_k(r+4n, 4n) = G_k(r, 4n).$$

Die erste ist zu (1), die beiden anderen zu (6) und (9) analog.

(13) ergibt sich aus (10), da nach (1) die Funktion $g(n, v)$ in n die Periode v, also auch die Periode u, besitzt. Weiter sei $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$. Ersetzt man in (11), r durch $r+2^{c+1}N$ und durch $r+2^{c+2}N$, so ergibt sich rechts

$$(15) \qquad h(r+2^{c+1}N, 2^c v) = -h(r, 2^c v),$$

$$(16) \qquad h(r+2^{c+2}N, 2^c v) = h(r, 2^c v).$$

In der Tat ist die Zahl $2^{c+1}N$ ein ungerades Vielfaches von $2^{c+1}v$; andererseits ändert nach den Gleichungen (6) die Funktion $h(a, n)$ ihr Vorzeichen, wenn zu a ein ungerades Vielfaches der Zahl $2n$ hinzugefügt wird. Ferner ist $2^{c+2}N$ durch die Periode $2^{c+2}v$ der Funktion $h(r, 2^c v)$ teilbar. Aus (11), (15) und (16) ergeben sich die Gleichungen (14) für $k \equiv 1 \pmod 4$. Analog werden sie auch für $k \equiv 3 \pmod 4$ bewiesen, indem man von (12) und (9) Gebrauch macht.

Auf Grund von (13) braucht die Funktion $G_k(n, u)$ nur auf einem vollen Restsystem von n nach dem Modul u berechnet zu werden, z. B. für $n \equiv 0, \ldots, u-1 \pmod u$. Ebenso folgt aus (14), daß es genügt, die Funktion $G_k(r, 4n)$ für $r \equiv 0, \ldots, 2n-1 \pmod{4n}$ anzugeben.

Die Tafeln IV-VI werden aus den Tafeln I-III, mit Hilfe von (10)-(12), (1), (6) und (9), auf einfache Weise berechnet. Ein Beispiel mag dies erläutern.

Es sei $k \equiv 3 \pmod 4$, $n = 21$. In (12) ist dann $c = 0$, $N = 21$, d. h. man hat

$$2G_k(r, 84) = j(r, 21)+j(r, 7)+j(r, 3)+j(r, 1). \tag{17}$$

Das muß für alle $r \equiv 0-41 \pmod{84}$ berechnet werden. Es ist dabe bequem, die Rechnungen nach folgendem Schema auszuführen:

$r\equiv$	(21)	(7)	(3)	(1)	$2G$	$r\equiv$	(21)	(7)	(3)	(1)	$2G$
0	−6	0	0	−2	−8	21	−12	2	2	0	−8
1	2	−4	−4	0	−6	22	−4	−2	−2	2	−6
2	2	−8	−4	2	−8	23	−4	2	−2	0	−4
3	2	−8	−2	0	−8	24	−4	2	0	−2	−4
4	−6	−4	2	−2	−10	25	4	−2	−4	0	−2
5	−6	−4	2	0	−8	26	4	−2	−4	2	0
6	−6	−4	0	2	−8	27	4	−2	−2	0	0
7	−10	−2	4	0	−8	28	0	0	2	−2	0
8	−10	2	4	−2	−6	29	0	−4	2	0	−2
9	−6	−2	2	0	−6	30	4	−8	0	2	−2
10	−6	−2	−2	2	−8	31	4	−8	4	0	0
11	−6	2	−2	0	−6	32	4	−4	4	−2	2
12	−6	2	0	−2	−6	33	4	−4	2	0	2
13	−6	2	−4	0	−8	34	4	−4	−2	2	0
14	−6	0	−4	2	−8	35	4	−2	−2	0	0
15	−10	4	−2	0	−8	36	0	2	0	−2	0
16	−18	8	2	−2	−10	37	8	−2	−4	0	2
17	−18	8	2	0	−8	38	8	−2	−4	2	4
18	−14	4	0	2	−8	39	4	2	−2	0	4
19	−14	4	4	0	−6	40	4	2	2	−2	6
20	−14	4	4	−2	−8	41	4	2	2	0	8

Hier werden die Glieder der Summe (17) der Kürze wegen mit (21), (7), (3), (1) bezeichnet. Die zweite Spalte wird unmittelbar aus Tafel III eingetragen. Sie stellt die erste Halbperiode der Funktion $j(r, 21)$ dar. In die dritte Spalte wird zunächst aus der Tafel die erste Halbperiode

$$0,\ -4,\ -8,\ -8,\ -4,\ -4,\ -4,\ -2,\ 2,\ -2,\ -2,\ 2,\ 2,\ 2$$

der Funktion $j(r, 7)$ eingetragen. Sodann trägt man die zweite Halbperiode

$$0,\ 4,\ 8,\ 8,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ -2,\ 2,\ 2,\ -2,\ -2,\ -2$$

ein, die aus der ersten durch Zeichenänderung erhalten wird. Schließlich wird nocheinmal die erste Halbperiode eingesetzt. Die vierte und fünfte Spalte füllt man analog aus.

§ 4. Beweis von Satz 1.1

Unsere Hauptaufgabe beim Beweise von Satz 1.1 wird darin bestehen, das Maximum und Minimum (1.8) in den vier Fällen des Satzes zu bestimmen. Vorher muß noch der Fehler abgeschätzt werden, der entsteht, wenn in (1.25) die volle Reihe (1.5) durch die endliche Summe (1.7) ersetzt wird.

Hilfssatz 1.

$$|\mathfrak{S}_k(r)-T_k(r)| \leqq \frac{C_k}{2}. \tag{1}$$

Beweis. Nach (1.5), (4.4.3) und (1.7) ist

$$\mathfrak{S}_k(r)-T_k(r) = \sum_{u=51}^{\infty} F_k(r, u)\, u^{-k/2}+2^{-k} \sum_{n=26}^{\infty} F_k(r, 4n)\, n^{-k/2}. \tag{2}$$

Hier ist nach (4.4.26) und Hilfssatz 1.3.4

$$\left|2 \sum_{u=51}^{\infty} F_k(r, u)\, u^{-k/2}\right| \leqq \sum_{m=25}^{\infty} \frac{1+\log m}{(2m+1)^{k/2-1}}$$

$$\leqq \frac{1+\log 25}{51^{k/2-1}} + \int_{25}^{\infty} \frac{1+\log y}{(2y+1)^{k/2-1}}\, dy. \tag{3}$$

Weiter hat man

$$(k-4) \int_{25}^{\infty} \frac{\log y}{(2y+1)^{k/2-1}}\, dy = 51^{2-k/2} \log 25 + \int_{25}^{\infty} \frac{dy}{y\,(2y+1)^{k/2-2}}.$$

Für $y \geqslant 25$ ist $y \geqslant \frac{25}{51}(2y+1)$. Somit ergibt sich

$$(k-4)\int\limits_{25}^{\infty} \frac{1+\log y}{(2y+1)^{k/2-1}}\,dy \leqslant 51^{2-k/2}\log 25 + \left(k-4+\tfrac{51}{25}\right)\int\limits_{25}^{\infty}\frac{dy}{(2y+1)^{k/2-1}}$$
$$= \left(1+\log 25+\frac{51}{25}\cdot\frac{1}{k-4}\right)51^{2-k/2}.$$

Wegen (3) bekommt man hieraus

$$(4)\qquad \left|\sum_{u=51}^{\infty} F_k(r,u)\,u^{-k/2}\right| \leqslant \left\{(1+\log 25)\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{2k-8}\right)+\frac{51}{50}\cdot\frac{1}{(k-4)^2}\right\}51^{2-k/2}.$$

Wir gehen zur Abschätzung der zweiten Summe in (2) über. Aus (4.4.28) folgt

$$\left|2^{-k/2-1}\sum_{n=26}^{\infty}F_k(r,4n)\,n^{-k/2}\right| \leqslant \sum_{n=26}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\log(2n-1)}{n^{k/2-1}}$$
$$(5)\qquad \leqslant \frac{1+\frac{1}{2}\log 51}{26^{k/2-1}} + \int\limits_{26}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\log(2y-1)}{y^{k/2-1}}\,dy.$$

Hier ist

$$X = \frac{1}{2}\int\limits_{26}^{\infty}\frac{\log(2y-1)}{y^{k/2-1}}\,dy = 2^{k/2-3}\int\limits_{51}^{\infty}\frac{\log y}{(y+1)^{k/2-1}}\,dy,$$

folglich

$$2^{2-k/2}(k-4)X = 52^{2-k/2}\log 51 + \int\limits_{51}^{\infty}\frac{dy}{y(y+1)^{k/2-2}}$$
$$\leqslant 52^{2-k/2}\log 51 + \frac{52}{51}\int\limits_{51}^{\infty}\frac{dy}{(y+1)^{k/2-1}} = \left(\log 51+\frac{104}{51}\cdot\frac{1}{k-4}\right)52^{2-k/2}.$$

Daher ist die rechte Seite der Ungleichung (5)

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{2}\log 51}{26}+\frac{2}{k-4}\right)26^{2-k/2}+X$$
$$\leqslant \left\{(2+\log 51)\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{k-4}\right)+\frac{104}{51}\cdot\frac{1}{(k-4)^2}\right\}26^{2-k/2}.$$

Somit ergibt sich

$$\left|2^{-k}\sum_{n=26}^{\infty}F_k(r,4n)\,n^{-k/2}\right| = \left|\frac{1}{2}\,2^{2-k/2}\cdot 2^{-k/2-1}\sum_{n=26}^{\infty}\right|$$
$$(6)\qquad \leqslant \left\{(2+\log 51)\left(\frac{1}{104}+\frac{1}{2k-8}\right)+\frac{52}{51}\cdot\frac{1}{(k-4)^2}\right\}52^{2-k/2}.$$

Aus (2), (4), (6) und (1.19) erhalten wir die Ungleichung (1) des Hilfssatzes.

Die Funktion $F_k(r, u)$ hat in r die Periode u; die Funktion $F_k(r, 4n)$ hat die Periode $4n$. Nach (1.7) ist daher auch die Funktion $T_k(r)$ periodisch, kann also nur endlich viele Werte annehmen. Auf Grund von (1), (1.6) und (1.8) folgen mithin die Ungleichungen

$$(7)\qquad |\Sigma_k - T_k| \leqslant \frac{C_k}{2},\qquad |\sigma_k-\tau_k| \leqslant \frac{C_k}{2}.$$

In der Tat ist einerseits für beliebige r

$$\mathfrak{S}_k(r) \leqslant T_k(r)+\frac{C_k}{2} \leqslant T_k+\frac{C_k}{2},$$

folglich

$$\Sigma_k \leqslant T_k+\frac{C_k}{2},\qquad \Sigma_k-T_k \leqslant \frac{C_k}{2}.$$

Andererseits ist, sobald $T_k(r') = T_k$,

$$\mathfrak{S}_k(r') \geqslant T_k(r')-\frac{C_k}{2} = T_k-\frac{C_k}{2}.$$

Wegen der Periodizität von $T_k(r)$ kann r' beliebig groß sein. Daher ist

$$\Sigma_k \geqslant T_k-\frac{C_k}{2},\qquad \Sigma_k-T_k \geqslant -\frac{C_k}{2}.$$

Damit ist die erste Ungleichung (7) bewiesen; die zweite ergibt sich analog.

Auf Grund von (7) und (1.26) gelten die Ungleichungen

$$(8)\qquad |P_k-1-2T_k| \leqslant C_k,\qquad |\varrho_k-1-2\tau_k| \leqslant C_k.$$

Wegen (8) und (1.20)-(1.23) wird Satz 1.1 bewiesen sein, sobald es gelingt, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Für* $k \equiv 1 \pmod 8$ *ist*

$$T_k = T_{k1}, \quad \tau_k = \tau_{k1}. \tag{9}$$

Für $k \equiv 5 \pmod 8$ *ist*

$$T_k = T_{k2}, \quad \tau_k = \tau_{k2}. \tag{10}$$

Für $k \equiv 3 \pmod 8$ *ist*

$$T_k = T_{k3}, \quad \tau_k = \tau_{k3}. \tag{11}$$

Für $k \equiv 7 \pmod 8$ *ist*

$$T_k = T_{k4}, \quad \tau_k = \tau_{k4}. \tag{12}$$

Die Beweise dieser acht Gleichungen unterscheiden sich sehr wenig voneinander. Dabei müssen für $k \equiv 7 \pmod 8$ die Rechnungen etwas genauer durchgeführt werden, als in den drei anderen Fällen, da hier nur $l \geqslant 3$ ist, dort aber $l \geqslant 4$. Daher beschränken wir uns auf den Nachweis der beiden Gleichungen (12). Die übrigen sechs Gleichungen (9)-(11) seien dem Leser überlassen — alle Vorbereitungen zu diesem Beweis sind von uns getroffen.

Wir führen jetzt den Begriff der nach oben und unten vollständigen und unvollständigen Mengen ein.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von positiven ganzen Zahlen heißt nach oben vollständig, wenn

$$\operatorname*{Max}_{r \in \mathfrak{R}} T_k(r) = T_k \tag{13}$$

ist; sie heißt nach oben unvollständig, wenn

$$\operatorname*{Max}_{r \in \mathfrak{R}} T_k(r) < T_k \tag{14}$$

ist.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ heißt nach unten vollständig, wenn

$$\operatorname*{Min}_{r \in \mathfrak{R}} T_k(r) = \tau_k \tag{15}$$

ist; sie heißt nach unten unvollständig, wenn

$$\operatorname*{Min}_{r \in \mathfrak{R}} T_k(r) > \tau_k \tag{16}$$

ist.

Leere Mengen sollen als nach oben und unten unvollständig angesehen werden.

Auf Grund von dieser Definition und nach Bestimmung (1.8) der Zahlen T_k, τ_k, genügt jede nichtleere Menge $\mathfrak{R}$ genau einer der Bedingungen (13), (14) und genau einer der Bedingungen (15), (16). Sie ist daher eindeutig entweder nach oben vollständig oder nach oben unvollständig, und ebenso eindeutig entweder nach unten vollständig oder nach unten unvollständig.

Eine nach oben (unten) vollständige Menge soll einfach vollständig heißen, wenn es ausgemacht ist, um welche Vollständigkeit es sich handelt, oder wenn es nicht darauf ankommt, was gemeint ist. Ebenso verfahren wir bei unvollständigen Mengen. So ist beim Beweise der *ersten* Gleichung (12) die Vollständigkeit (Unvollständigkeit) einer Menge so zu verstehen, daß sie *nach oben* vollständig (unvollständig) ist, während beim Beweise der *zweiten* Gleichung (12) die Vollständigkeit (Unvollständigkeit) *nach unten* gemeint ist.

Folgende Eigenschaften vollständiger und unvollständiger Mengen folgen aus der Definition und werden später stillschweigend benutzt:

1) *Die Menge aller positiven ganzen Zahlen ist vollständig.*

2) *Ist die Menge $\mathfrak{R}_1$ vollständig, $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$, so ist auch die Menge $\mathfrak{R}$ vollständig.*

3) *Ist $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ unvollständig, so ist auch $\mathfrak{R}_1$ unvollständig.*

4) *Ist $\mathfrak{R}_1$ unvollständig, $\mathfrak{R}$ vollständig, $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1$ vollständig.*

5) *Die Vereinigungsmenge beliebig vieler unvollständiger Mengen ist unvollständig.*

6) *Eine Menge $\mathfrak{R}$ ist nach oben unvollständig, wenn es zu jeder in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Zahl R ein solches r gibt, daß*

$$T_k(r) > T_k(R). \tag{17}$$

Eine Menge $\mathfrak{R}$ ist nach unten unvollständig, wenn es zu jeder in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Zahl R ein solches r gibt, daß

$$T_k(r) < T_k(R). \tag{18}$$

7) *Es seien $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ unvollständige Mengen; $\mathfrak{R}_1', \ldots, \mathfrak{R}_n'$ seien ihre komplementäre Mengen in bezug auf die Menge aller positiven ganzen Zahlen. Dann ist eine Menge $\mathfrak{R}$ unvollständig, wenn der Durschchnitt*

$$\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}\mathfrak{R}_1' \ldots \mathfrak{R}_n' \tag{19}$$

unvollständig ist.

In der Tat ist die Menge $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}^*$ Teilmenge der unvollständigen Menge $\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n$, also unvollständig. Daher ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* + \mathfrak{R}^{**}$ als Summe zweier unvollständiger Mengen selbst unvollständig.

Die Eigenschaft 7) wird benutzt: Für $n = 1$ beim Beweise der Hilfssätze 3-7, 9, 10, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 29, 31, 32, 35, 37-40, 42, 43, 47; für $n = 2$ beim Beweise der Hilfssätze 8, 12, 14, 17, 21, 24, 34, 36, 41, 44; für $n = 3$ beim Beweise der Hilfssätze 13, 18, 46.

Wir gehen jetzt zum Beweise der ersten Gleichung (12) über, der schrittweise ausgeführt wird (Hilfssätze 2-27). Die Zahl k werde $\equiv 7 \pmod 8$ angenommen, so daß $k \geqslant 7$, $l \geqslant 3$. Die Werte der Funktion $G_k(r, u)$ sind der IV Tafel zu entnehmen, wobei $(-1)^l = -1$ (da $l \equiv 3 \pmod 4$). Die Werte der Funktion $G_k(r, 4n)$ entnimmt man der VI Tafel; dabei ist nötigenfalls auch von der ersten Gleichung (3.14) Gebrauch zu machen.

Die Vollständigkeit (Unvollständigkeit) einer Menge natürlicher Zahlen ist im Sinne der Vollständigkeit (Unvollständigkeit) *nach oben* zu verstehen. Es sei

$$\Delta = T_k(r) - T_k(R), \qquad \Delta_q = G_k(r, q) - G_k(R, q). \tag{20}$$

Diese Beziehungen muß man stets im Auge behalten, da sie stillschweigend benutzt werden. Die Gleichung (1.7) drücken wir durch die Funktionen (1.9), (1.10) aus; sie lautet dann

$$T_k(r) = \sum_{u=3}^{49} G_k(r, u)\, u^{-l} - \sum_{n=1}^{25} G_k(r, 4n)\,(2n)^{-l}. \tag{21}$$

Auf Grund von (20) und (21) ist

$$\Delta = \sum_{u=3}^{49} \Delta_u u^{-l} - \sum_{n=1}^{25} \Delta_{4n} (2n)^{-l}. \tag{22}$$

Im folgenden werden wir es mit Mengen $\mathfrak{R}$ von Zahlen R zu tun haben, die durch eine oder mehrere Kongruenzen bestimmt werden. Der Kürze wegen sagen wir: *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod 4 \tag{23}$$

statt *Menge aller Zahlen* R, *die der Kongruenz* (23) *genügen*. Ebenso verfahren wir auch in anderen Fällen.

Gewöhnlich wird es sich darum handeln, die Unvollständigkeit einer gewissen Menge $\mathfrak{R}$ zu beweisen. Dazu wird stillschweigend angenommen, es sei eine beliebige Zahl R von $\mathfrak{R}$ vorgegeben, und wir werden zu diesem R ein solches r zu finden suchen, daß $\Delta > 0$, daß also die Ungleichung (17) erfüllt ist.

Hilfssatz 2. *Die Menge* (23) *ist unvollständig.*

Beweis. Es sei

$$r \equiv 0 \pmod{64}; \qquad r \equiv R \pmod u \qquad \text{für} \qquad 3 \leqslant u \leqslant 49. \tag{24}$$

Dann ist nach (22)

$$\Delta = -\sum_{n=1}^{25} \Delta_{4n} (2n)^{-l}. \tag{25}$$

Weiter erhalten wir aus den Tafeln

$$\Delta_4 \leqslant -1, \qquad \Delta_8 \leqslant 0, \qquad \Delta_{12} \leqslant 1+2 = 3,$$
$$\Delta_{4n} \leqslant 4 \quad \text{für} \quad n = 4-6; \qquad \Delta_{4n} \leqslant 12 \quad \text{für} \quad n = 7-25.$$

Somit ist

$$2^l \Delta \geqslant 1 - 3 \cdot 3^{-l} - 4 \sum_{n=4}^{6} n^{-l} - 12 \sum_{n=7}^{25} n^{-l} \geqslant 1 - 3^{1-3} - 4 \sum_{n=4}^{6} n^{-3} - 12 \sum_{n=7}^{25} n^{-3}$$
$$\geqslant 1 - 3^{-2} - 4 \cdot 3 \cdot 4^{-3} - 12 \cdot 19 \cdot 7^{-3} = 1 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{3}{16} - \tfrac{228}{343}$$
$$\geqslant 1 - 0{,}12 - 0{,}19 - 0{,}67 = 0{,}02,$$

und daher $\Delta > 0$.

Hilfssatz 3. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod 8 \tag{26}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (23) unvollständig ist, genügt es, die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 4 \pmod 8 \tag{27}$$

zu beweisen. Es möge r den Bedingungen (24) genügen. Dann bleibt (25) in Kraft. Nach (27) und (24) ist jetzt aber $r \equiv R \pmod 4$, folglich $\Delta_{4u} = 0$ für $1 \leqslant u \leqslant 25$, und daher

$$\Delta = -\sum_{n=1}^{12} \Delta_{8n} (4n)^{-l}. \tag{28}$$

Hier ist

$$\Delta_8 = -2; \qquad \Delta_{8n} \leqslant 4 \quad \text{für} \quad n = 2-4; \qquad \Delta_{8n} \leqslant 12 \quad \text{für} \quad n = 5-12,$$

folglich

$$4\Delta \geqslant 2 - 4 \cdot 2^{-3} - 4 \cdot 3^{-3} - 4 \cdot 4^{-3} - 8 \cdot 12 \cdot 5^{-3}$$
$$\geqslant 2 - 0{,}50 - 0{,}15 - 0{,}07 - 0{,}80 > 0,$$

d. h. $\Delta > 0$.

HILFSSATZ 4. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod{16} \tag{29}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (26) unvollständig ist, genügt es, die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 8 \pmod{16}$$

zu beweisen. Es möge r nach wie vor den Bedingungen (24) genügen. Dann ist $r \equiv R \pmod 8$, $\Delta_{4n} = 0$ für $1 \leqslant n \leqslant 25$, $4 \nmid n$. Daher haben wir statt (28)

$$\Delta = -\sum_{n=1}^{6} \Delta_{16n}(8n)^{-l}, \tag{30}$$

wobei

$$\Delta_{16} = -4, \quad \Delta_{32} \leqslant 4; \quad \Delta_{16n} \leqslant 8 \quad \text{für} \quad n = 3-6.$$

Auf diese Weise ist

$$8^l \Delta \geqslant 4 - 4\cdot 2^{-3} - 4\cdot 8\cdot 3^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

HILFSSATZ 5. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod{32} \tag{31}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (29) unvollständig ist, genügt es, die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 16 \pmod{32}$$

zu beweisen. Auch jetzt möge r den Bedingungen (24) genügen. Dann ist $r \equiv R \pmod{16}$, $\Delta_{4n} = 0$ für $1 \leqslant n \leqslant 25$, $8 \nmid n$,

$$\Delta = -\sum_{n=1}^{3} \Delta_{32n}(16)^{-l}, \tag{32}$$

$$\Delta_{32} = -4, \quad \Delta_{64} \leqslant 8, \quad \Delta_{96} \leqslant 8, \quad 16^l \Delta \geqslant 4 - 2\cdot 8\cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

HILFSSATZ 6. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod{64} \tag{33}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es genügt, die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 32 \pmod{64}$$

nachzuweisen. Wiederum sei r nach (24) bestimmt. Dann ist

$$\Delta = -\Delta_{64} 32^{-l} = 8\cdot 32^{-l} > 0.$$

HILFSSATZ 7. *Die Menge*

$$R \equiv 2 \pmod 3 \tag{34}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (26) unvollständig ist, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 0 \pmod 8, \quad R \equiv 2 \pmod 3$$

nachgewiesen zu werden.

Es sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 0 \pmod{27}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 5 \leqslant u \leqslant 49, \quad 3 \nmid u. \tag{35}$$

Dann ist

$$\Delta_u = 0 \quad \text{für} \quad 5 \leqslant u \leqslant 49, \quad 3 \nmid u; \quad \Delta_{4n} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 25, \quad 3 \nmid n. \tag{36}$$

Wegen (22) folgt hieraus $6^l \Delta = S_1 + S_2$, wobei

$$S_1 = \sum_{u=1}^{15} \Delta_{3u}\left(\frac{2}{u}\right)^l, \quad S_2 = -\sum_{n=1}^{8} \Delta_{12n} n^{-l}.$$

Hier ist

$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_9 \geqslant -2, \quad \Delta_{15} \geqslant -3, \quad \Delta_{21} \geqslant -4; \quad \Delta_{27} \geqslant -4; \quad \Delta_{3u} \geqslant -6 \quad \text{für} \quad u = 11, 13, 15, \tag{37}$$

$$r \equiv 0 \pmod{24}, \quad R \equiv 8 \pmod{24}, \quad \Delta_{12} = -2, \quad \Delta_{24} = -2, \quad \Delta_{36} \leqslant 6, \tag{38}$$

$$\Delta_{12n} \leqslant 8 \quad \text{für} \quad n = 4-6; \quad \Delta_{12n} \leqslant 10 \quad \text{für} \quad n = 7, 8, \tag{39}$$

und daher

$$\begin{aligned} S_1 &\geqslant -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 - 2\cdot 4\left(\tfrac{2}{7}\right)^3 - 3\cdot 6\left(\tfrac{2}{11}\right)^3 \\ &= -8\left(\tfrac{2}{27} + \tfrac{3}{125} + \tfrac{8}{343} + \tfrac{18}{1331}\right) \\ &\geqslant -8(0{,}075 + 0{,}024 + 0{,}024 + 0{,}014) \geqslant -1{,}1, \end{aligned}$$

$$S_2 \geqslant 2 - 6\cdot 3^{-3} - 3\cdot 8\cdot 4^{-3} - 2\cdot 10\cdot 7^{-3} = 2 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{3}{8} - \tfrac{20}{343} \geqslant 1{,}3.$$

$$S_1 + S_2 > 0, \quad \Delta > 0.$$

HILFSSATZ 8. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod 3 \tag{40}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (23) und (34) unvollständig sind, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 0 \pmod 4, \qquad R \equiv 1 \pmod 3$$

nachgewiesen zu werden. Es möge r wiederum die Bedingungen (35) erfüllen. Dann bleibt (36) in Kraft; daher ist $3^l\Delta = S_1+S_2$, wobei

$$S_1 = \sum_{u=1}^{15} \Delta_{3u} u^{-l}, \qquad S_2 = -\sum_{n=1}^{8} \Delta_{12n}(2n)^{-l}.$$

Hier ist: 1) $\Delta_3 = 1$; 2) die Ungleichungen (37) und (39) bleiben bestehen; (3) (38) muß durch

$$r \equiv 0 \pmod{12}, \quad R \equiv 4 \pmod{12}, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{24} \leqslant 4, \quad \Delta_{36} \leqslant 6$$

ersetzt werden. Man bekommt weiter

$$S_1 \geqslant 1-2\cdot 3^{-3}-3\cdot 5^{-3}-2\cdot 4\cdot 7^{-3}-3\cdot 6\cdot 11^{-3} \geqslant 1-0{,}08-0{,}03-0{,}03-0{,}02 \geqslant 0{,}8,$$

$$2^l S_2 \geqslant 1-4\cdot 2^{-3}-6\cdot 3^{-3}-3\cdot 8\cdot 4^{-3}-2\cdot 10\cdot 7^{-3} \geqslant 1-0{,}5-0{,}23-0{,}38-0{,}06 \geqslant -0{,}2,$$

$$S_2 \geqslant -0{,}2\cdot 2^{-l} \geqslant -0{,}2\cdot 2^{-3} \geqslant -0{,}1, \qquad S_1+S_2 > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 9. *Die Menge*

(41) $$R \not\equiv 0 \pmod 9$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (40) unvollständig ist, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 3,\ 6 \pmod 9$$

nachgewiesen zu werden. Es möge r nach wie vor den Bedingungen (35) genügen. Dann ist $r \equiv R \pmod 3$, folglich

$$r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 9 \nmid u,$$

und somit

$$\Delta_u = 0 \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 9\nmid u; \qquad \Delta_{4n} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 25, \quad 9 \nmid n,$$

$$\Delta = \sum_{u=1}^{5} \Delta_{9u}(9u)^{-l} - \sum_{n=1}^{2} \Delta_{36n}(18n)^{-l}.$$

Hier ist

$$\Delta_9 \geqslant 1, \quad \Delta_{27} \geqslant 1-1 = 0, \quad \Delta_{45} \geqslant -6, \quad \Delta_{36} \leqslant 6, \quad \Delta_{72} \leqslant 8,$$

so daß

$$9^l\Delta \geqslant 1-6\cdot 5^{-3}-6\cdot 2^{-3}-8\cdot 4^{-3} = 1-0{,}048-0{,}750-0{,}125 > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 10. *Die Menge*

(42) $$R \equiv 1-17,\ 19-26 \pmod{27}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Menge (41) unvollständig ist, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 9 \pmod{27}$$

nachgewiesen zu werden. Es genüge r immer noch den Bedingungen (35). Dann ist $r \equiv R \pmod 9$,

$$r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 27 \nmid u; \qquad \Delta_{4n} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 25,$$

folglich

$$\Delta = \Delta_{27} 27^{-l} = 3\cdot 27^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 11. *Die Menge*

(43) $$R \not\equiv 1 \pmod 5$$

ist unvollständig.

Beweis. Es sei

(44) $$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 1 \pmod{25}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 5 \nmid u.$$

Dann ist

$$\Delta_u = 0 \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 5 \nmid u; \qquad \Delta_{4n} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 24, \quad 5 \nmid n,$$

folglich $5\,\Delta = S_1+S_2$, wobei

$$S_1 = \sum_{u=1}^{9} \Delta_{5u} u^{-l}, \qquad S_2 = -\sum_{n=1}^{5} \Delta_{20n}(2n)^{-l}.$$

Hier ist

$$\Delta_5 \geqslant 1, \quad \Delta_{15} \geqslant -3, \quad \Delta_{25} \geqslant -4, \quad \Delta_{35} \geqslant -6, \quad \Delta_{45} \geqslant -6,$$
$$\Delta_{20} \leqslant 4, \quad \Delta_{40} \leqslant 8, \quad \Delta_{60} \leqslant 8, \quad \Delta_{80} \leqslant 8, \quad \Delta_{100} \leqslant 12,$$

d. h.

$$S_1 \geqslant 1-3\cdot 3^{-3}-4\cdot 5^{-3}-2\cdot 6\cdot 7^{-3} \geqslant 0{,}82,$$
$$S_2 \geqslant -4\cdot 2^{-3}(1+2\cdot 2^{-3}+2\cdot 3^{-3}+2\cdot 4^{-3}+3\cdot 5^{-3}) \geqslant -\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}4 = -0{,}7,$$
$$S_1+S_2 > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 12. *Die Menge*

(45) $$R \not\equiv 1 \pmod{25}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (23) und (43) unvollständig sind, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 0 \pmod 4, \qquad R \equiv 6, 11, 16, 21 \pmod{25}.$$

nachgewiesen zu werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (44). Dann ist $r \equiv R \pmod 5$.

$$\Delta_u = 0 \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 25 \nmid u; \quad \Delta_{4n} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 24,$$

$$25^l \Delta = \Delta_{25} + \Delta_{100} 2^{-l},$$

$$\Delta_{25} \geqslant 1; \quad r \equiv 76 \pmod{100}, \quad \Delta_{100} \leqslant 0+6 = 6,$$

$$25^l \Delta \geqslant 1 - 6 \cdot 2^{-3} > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 13. *Die Menge*

(46) $$R \equiv 6 \pmod 7$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (26), (40) und (43) unvollständig sind, braucht nur die Unvollständigkeit der Menge

$$R \equiv 0 \pmod 8, \quad R \equiv 0 \pmod 3, \quad R \equiv 1 \pmod 5, \quad R \equiv 6 \pmod 7$$

nachgewiesen zu werden. Es sei

(47) $$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 0 \pmod{49}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 47, \quad 7 \nmid u.$$

Dann ist

(48) $$14^l \Delta = \sum_{u=1}^{7} \Delta_{7u} \left(\frac{2}{u}\right)^l - \sum_{n=1}^{3} \Delta_{28n} n^{-l},$$

$$\Delta_7 = 0; \quad r \equiv 0 \pmod{21}, \quad R \equiv 6 \pmod{21}, \quad \Delta_{21} = -2,$$

$$r \equiv 21 \pmod{35}, \quad R \equiv 6 \pmod{35}, \quad \Delta_{35} = -3; \quad \Delta_{49} \geqslant -6,$$

$$r \equiv 0 \pmod{28}, \quad R \equiv 20 \pmod{28}, \quad \Delta_{28} = -2,$$

$$r \equiv 0 \pmod{56}, \quad R \equiv 48 \pmod{56}, \quad \Delta_{56} = -4,$$

$$r \equiv 0 \pmod{84}, \quad R \equiv 48 \pmod{84}, \quad \Delta_{84} = -8,$$

folglich

$$14^l \Delta \geqslant -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 - 6\left(\tfrac{2}{7}\right)^3 + 2 > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 14. *Die Menge*

(49) $$R \not\equiv 0 \pmod 7$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (23) und (46) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \qquad R \equiv 1-5 \pmod 7$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (47). Dann ist

$$7^l \Delta = \sum_{u=1}^{7} \Delta_{7u} u^{-l} - \sum_{n=1}^{3} \Delta_{28n} (2n)^{-l},$$

$$\Delta_7 \geqslant 1, \quad \Delta_{21} \geqslant -4, \quad \Delta_{35} \geqslant -6, \quad \Delta_{49} \geqslant -6, \quad \Delta_{56} \leqslant 8, \quad \Delta_{84} \leqslant 10,$$

$$r \equiv 0 \pmod{28}, \quad \Delta_{28} \leqslant -1+4 = 3,$$

und daher

$$7^l \Delta \geqslant 1 - 4 \cdot 3^{-3} - 6 \cdot 5^{-3} - 6 \cdot 7^{-3} - 3 \cdot 2^{-3} - 8 \cdot 4^{-3} - 10 \cdot 6^{-3}$$
$$\geqslant 1 - 0{,}15 - 0{,}05 - 0{,}02 - 0{,}50 - 0{,}05 > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 15. *Die Menge*

(50) $$R \not\equiv 0 \pmod{49}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (49) unvollständig ist, darf

$$R \equiv 7, 14, 21, 28, 35, 42 \pmod{49}$$

angenommen werden. Es genüge r immer noch den Bedingungen (47). Dann ist

$$\Delta = \Delta_{49} 49^{-l} \geqslant 49^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 16. *Die Menge*

(51) $$R \equiv 2, 10 \pmod{11}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (23) unvollständig ist, kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \qquad R \equiv 2, 10 \pmod{11}$$

angenommen werden. Es sei

(52) $$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 0 \pmod{11}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 11 \nmid u.$$

Dann ist

$$\Delta = \Delta_{11} 11^{-l} + \Delta_{33} 33^{-l} - \Delta_{44} 22^{-l} - \Delta_{88} 44^{-l}, \tag{53}$$

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{33} \geqslant -6; \quad r \equiv 0 \pmod{44}, \quad R \equiv 24,\ 32 \pmod{44},$$
$$\Delta_{44} = -6; \quad \Delta_{88} \leqslant 12,$$
$$22^l \Delta \geqslant -6\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 6 - 12 \cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 17. *Die Menge*

$$R \equiv 8 \pmod{11} \tag{54}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (26) und (40) unvollständig sind, darf

$$R \equiv 0 \pmod 8, \quad R \equiv 0 \pmod 3, \quad R \equiv 8 \pmod{11}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (52) Dann bleibt (53) in Kraft, und man hat

$$\Delta_{11} = 0; \quad r \equiv 0 \pmod{33}, \quad R \equiv 30 \pmod{33}, \quad \Delta_{33} = 2,$$
$$r \equiv 0 \pmod{88}, \quad R \equiv 8 \pmod{88}, \quad \Delta_{44} = 0, \quad \Delta_{88} = 4,$$
$$33^l \Delta = \Delta_{33} - \Delta_{88}\left(\tfrac{3}{4}\right)^l \geqslant 2 - 4\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 18. *Die Menge*

$$R \not\equiv 0 \pmod{11} \tag{55}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da die Mengen (26), (51) und (54) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 0 \pmod 8, \quad R \equiv 1,\ 3-7,\ 9 \pmod{11}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (52). Dann bleibt (53) bestehen, und man hat

$$\Delta_{11} \geqslant 1, \quad \Delta_{33} \geqslant -6; \quad r \equiv 0 \pmod{88}, \quad \Delta_{44} \leqslant -3+4 = 1,$$
$$\Delta_{88} \leqslant -2+6 = 4,$$
$$11^l \Delta \geqslant 1 - 6 \cdot 3^{-3} - 2^{-3} - 4 \cdot 4^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 19. *Die Menge*

$$R \not\equiv 4 \pmod{13} \tag{56}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (23) unvollständig ist, sei

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \not\equiv 4 \pmod{13}.$$

Weiter möge r den Bedingungen

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 4 \pmod{13}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 13 \nmid u$$

genügen. Dann ist

$$\Delta = \Delta_{13} 13^{-l} + \Delta_{39} 39^{-l} - \Delta_{52} 26^{-l},$$
$$\Delta_{13} \geqslant 1, \quad \Delta_{39} \geqslant -6; \quad r \equiv 4 \pmod{52}, \quad \Delta_{52} \leqslant -4+6 = 2,$$
$$13^l \Delta \geqslant 1 - 6 \cdot 3^{-3} - 2 \cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 20. *Die Menge*

$$R \equiv 2 \pmod{17} \tag{57}$$

ist unvollständig.

Beweis. Man darf

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \equiv 2 \pmod{17}$$

annehmen. Es sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 4 \pmod{17}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 17 \nmid u. \tag{58}$$

Dann ist

$$\Delta = \Delta_{17} 17^{-l} - \Delta_{68} 34^{-l}, \tag{59}$$

$$\Delta_{17} = 0; \quad r \equiv 4 \pmod{68}, \quad R \equiv 36 \pmod{68}, \quad \Delta_{68} = -4,$$
$$\Delta = 4 \cdot 34^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 21. *Die Menge*

$$R \not\equiv 4 \pmod{17} \tag{60}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (23) und (57) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \equiv 0,\ 1,\ 3,\ 5-16 \pmod{17}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (58). Dann bleibt (59) in Kraft, und es ist

$$\Delta_{17} \geqslant 1; \quad r \equiv 4 \pmod{68}, \quad \Delta_{68} \leqslant -2+4 = 2,$$
$$17^l \Delta \geqslant 1 - 2 \cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 22. *Die Menge*

$$R \equiv 0-2,\ 4-14,\ 16-18 \pmod{19} \tag{61}$$

ist unvollständig.

Beweis. Man kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \equiv 0-2,\ 4-14,\ 16-18 \pmod{19}$$

annehmen. Es sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 3 \pmod{19}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 19 \nmid u.$$

Dann ist

$$\Delta = \Delta_{19} 19^{-l} - \Delta_{76} 38^{-l},$$

$$\Delta_{19} \geqslant 1; \quad r \equiv 60 \pmod{76}, \quad \Delta_{76} \leqslant 0+6 = 6,$$

$$19^l \Delta \geqslant 1 - 6 \cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 23. *Die Menge*

(62) $$R \equiv 22 \pmod{23}$$

ist unvollständig.

Beweis. Man kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \equiv 22 \pmod{23}$$

annehmen. Es sei

(63) $$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 0 \pmod{23}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 23 \nmid u.$$

Dann ist

(64) $$\Delta = \Delta_{23} 23^{-l} - \Delta_{92} 46^{-l},$$

$$\Delta_{23} = 0; \quad r \equiv 0 \pmod{92}, \quad R \equiv 68 \pmod{92}, \quad \Delta_{92} = -6,$$

$$\Delta = 6 \cdot 46^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 24. *Die Menge*

(65) $$R \not\equiv 0 \pmod{23}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (23) und (62) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 0 \pmod 4, \quad R \equiv 1-21 \pmod{23}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (63). Dann bleibt (64) bestehen, und es ist

$$\Delta_{23} \geqslant 1; \quad r \equiv 0 \pmod{92}, \quad \Delta_{92} \leqslant -3+5 = 2,$$

$$23^l \Delta \geqslant 1 - 2 \cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 25. *Die folgenden sechs Mengen sind unvollständig:*

(66) $$R \equiv 0-6,\ 8,\ 10-28 \pmod{29},$$

(67) $$R \equiv 1-29 \pmod{31},$$

(68) $$R \not\equiv 12 \pmod{37},$$

(69) $$R \not\equiv 10 \pmod{41},$$

(70) $$R \equiv 0-7,\ 9-33,\ 35-42 \pmod{43},$$

(71) $$R \equiv 1-45 \pmod{47}.$$

Beweis. Es sei $p = 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,$

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv a_p \pmod p; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad p \nmid u,$$

wobei

$$a_{29} = 7, \quad a_{31} = 0, \quad a_{37} = 12, \quad a_{41} = 10, \quad a_{43} = 8, \quad a_{47} = 0.$$

Dann ist

$$\Delta = \Delta_p p^{-l} \geqslant p^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 26. *Das folgende Kongruenzensystem* (72)-(76) *bestimmt eine vollständige Menge* $\mathfrak{R}^*$:

(72) $$r \equiv 0 \pmod{64}, \quad r \equiv 0 \pmod{27}, \quad r \equiv 1 \pmod{25},$$

(73) $$r \equiv 0 \pmod{49}, \quad r \equiv 0 \pmod{11}, \quad r \equiv 4 \pmod{13},$$

(74) $$r \equiv 4 \pmod{17}, \quad r \equiv 3 \pmod{19}, \quad r \equiv 0 \pmod{23},$$

(75) $$r \equiv 7 \pmod{29}, \quad r \equiv 0 \pmod{31}, \quad r \equiv 12 \pmod{37},$$

(76) $$r \equiv 10 \pmod{41}, \quad r \equiv 8 \pmod{43}, \quad r \equiv 0 \pmod{47}.$$

Beweis. Die Summe $\mathfrak{R}$ der unvollständigen Mengen (33), (42), (45), (50), (55), (56), (60), (61), (65)-(71) ist selbst unvollständig. Ihre Ergänzung $\mathfrak{R}'$ ist eine vollständige Menge, die durch die folgenden Kongruenzen bestimmt wird:

(77) $$r \equiv 0 \pmod{64}, \quad r \equiv 0,\ 18 \pmod{27}, \quad r \equiv 1 \pmod{25},$$

(78) $$r \equiv 0 \pmod{49}, \quad r \equiv 0 \pmod{11}, \quad r \equiv 4 \pmod{13},$$

(79) $$r \equiv 4 \pmod{17}, \quad r \equiv 3,\ 15 \pmod{19}, \quad r \equiv 0 \pmod{23},$$

(80) $$r \equiv 7,\ 9 \pmod{29}, \quad r \equiv 0,\ 30 \pmod{31}, \quad r \equiv 12 \pmod{37},$$

(81) $$r \equiv 10 \pmod{41}, \quad r \equiv 8,\ 34 \pmod{43}, \quad r \equiv 0,\ 46 \pmod{47}.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß man aus diesem System die folgenden Kongruenzen streichen kann, ohne daß die zugehörige Menge aufhört vollständig zu sein:

(82) $\quad r \equiv 18 \pmod{27}, \qquad r \equiv 15 \pmod{19}, \qquad r \equiv 9 \pmod{29},$

(83) $\quad r \equiv 30 \pmod{31}, \qquad r \equiv 34 \pmod{43}, \qquad t \equiv 46 \pmod{47}.$

Die Restklassen 0, $18 \pmod{27}$ fallen nach dem Modul 9 zusammen. Daher kommen bei Berechnung der Funktion (21) die Restklassen $r \equiv 0,\ 18 \pmod{27}$ nur für diejenigen Glieder $G_k(r, u)u^{-l}$, $G_k(r, 4n)(2n)^{-l}$ in Betracht, in denen $27|u$, $27|n$, d. h. nur für das eine Glied $G_k(r, 27)27^{-l}$. Da aber $G_k(0, 27) = G_k(18, 27)$, so kann aus dem System (77)-(81) die erste Kongruenz (82) gestrichen werden. Analog stellt man fest, daß aus diesem System die dritte Kongruenz (82) und alle drei Kongruenzen (83) gestrichen werden können.

Die Restklassen $r \equiv 3,\ 15 \pmod{19}$ kommen nur für die Glieder

(84) $$G_k(r, 19)19^{-l}, \qquad G_k(r, 76)38^{-l}$$

der Funktion $T_k(r)$ in Betracht. Das erste Glied hat für diese beiden Restklassen denselben Wert, da $G_k(3, 19) = G_k(15, 19)$ ist. Auf Grund der ersten Kongruenz (77) ist ferner $r \equiv 0 \pmod 4$. Den beiden Restklassen 3, 15 nach dem Modul 19 entsprechen daher nur zwei Restklassen nach dem Modul 76, und zwar $r \equiv 60,\ 72 \pmod{76}$, und für diese nimmt das zweite Glied (84) denselben Wert an. Man kann also aus dem System (77)-(81) auch die zweite Kongruenz (82) streichen.

Hilfssatz 27. *Es gilt die erste Gleichung* (12).

Beweis. Für die durch (72)-(76) bestimmte Menge $\mathfrak{R}^*$ ist nach (21)

$$\underset{r \in \mathfrak{R}^*}{T_k}(r) = T_{k4},$$

wo T_{k4} die Summe (1.17) bedeutet. Nach Hilfssatz 26 und der Definition (13) einer nach oben vollständigen Menge ist andererseits

$$\underset{r \in \mathfrak{R}^*}{\operatorname{Max}} T(r) = T_k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die erste Gleichung (12).

Wir wenden uns jetzt zum Beweise der zweiten Gleichung (12), der auf dieselbe Weise durchgeführt wird (Hilfssätze 28-50). Die Vollständigkeit (Unvollständigkeit) einer Menge natürlicher Zahlen ist jetzt im Sinne der Vollständigkeit (Unvollständigkeit) *nach unten* zu verstehen. Die

Funktionen (20) nehmen wir mit umgekehrtem Vorzeichen, d. h. setzen

(85) $$\Delta = T_k(R) - T_k(r), \qquad \Delta_q = G_k(R, q) - G_k(r, q).$$

Alles Übrige, das vor Hilfssatz 2 gesagt worden ist, bleibt bestehen; insbesondere gelten die Gleichungen (21) und (22). Man muß nur im Auge behalten, daß jetzt die Ungleichung $\Delta > 0$ mit (18), und nicht mit (17), gleichbedeutend ist.

Hilfssatz 28. *Die Menge*

(86) $$R \not\equiv 2 \pmod 4$$

ist unvollständig.

Beweis. Es sei

(87) $\quad r \equiv 54 \pmod{64}; \quad r \equiv R \pmod u \quad$ für $\quad 3 \leqslant u \leqslant 49.$

Dann kann der Beweis von Hilfssatz 2 wörtlich wiederholt werden.

Hilfssatz 29. *Die Menge*

(88) $$R \not\equiv 6 \pmod 8$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) unvollständig ist, kann

$$R \equiv 2 \pmod 8$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (87). Dann braucht nur der Beweis von Hilfssatz 3 wiederholt zu werden.

Hilfssatz 30. *Die Menge*

(89) $$R \not\equiv 1 \pmod 3$$

ist unvollständig.

Beweis. Es sei

(90) $\quad r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 16 \pmod{27}; \quad r \equiv R \pmod u$

für $\quad 5 \leqslant u \leqslant 49, \quad 3 \nmid u.$

Dann bleibt (36) bestehen, und daher ist $3^l \Delta = S_1 + S_2$, wobei S_1 und S_2 wie beim Beweise von Hilfssatz 8 definiert sind. Hier ist $\Delta_3 = 1$, die Ungleichungen (37) und (39) bleiben in Kraft, während (38) durch

$$\Delta_{12} \leqslant 4, \qquad \Delta_{24} \leqslant 4, \qquad \Delta_{36} \leqslant 6$$

zu ersetzen ist. Für S_1 haben wir, wie beim Beweise von Hilfssatz 8, die Ungleichung $S_1 \geqslant 0{,}8$. Weiter ist

$$S_2 \geqslant -4\cdot 2^{-3}-4\cdot 4^{-3}-6\cdot 6^{-3}-3\cdot 8\cdot 8^{-3}-2\cdot 10\cdot 14^{-3}$$
$$\geqslant -(0{,}50+0{,}07+0{,}03+0{,}05+0{,}01) \geqslant -0{,}7,$$

also $S_1+S_2>0$, $\Delta>0$.

Hilfssatz 31. *Die Menge*

(91) $$R \not\equiv 7 \pmod 9$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (89) unvollständig ist, kann

$$R \equiv 1,\ 4 \pmod 9$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (90). Dann braucht nur der Beweis von Hilfssatz 9 wiederholt zu werden.

Hilfssatz 32. *Die Menge*

(92) $$R \not\equiv 16 \pmod{27}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (91) unvollständig ist, darf

$$R \equiv 7,\ 25 \pmod{27}$$

angenommen werden. Es genüge r immer noch den Bedingungen (90). Dann braucht nur noch der Beweis von Hilfssatz 10 wiederholt zu werden.

Hilfssatz 33. *Die Menge*

(93) $$R \not\equiv 3 \pmod 5$$

ist unvollständig.

Beweis. Es sei

(94) $$r \equiv R \pmod{64},\quad r\equiv 23 \pmod{25};\quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3\leqslant u\leqslant 49,\quad 5\nmid u.$$

Dann wiederhole man den Beweis von Hilfssatz 11.

Hilfssatz 34. *Die Menge*

(95) $$R \not\equiv 23 \pmod{25}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) und (93) unvollständig sind, kann

$$R\equiv 2 \pmod 4,\quad R\equiv 3,\ 8,\ 13,\ 18 \pmod{25}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (94). Dann wiederhole man den Beweis von Hilfssatz 12, wo nur die Kongruenz $r\equiv 76 \pmod{100}$ durch $r \equiv 98 \pmod{100}$ zu ersetzen ist.

Hilfssatz 35. *Die Menge*

(96) $$R\equiv 2 \pmod 7$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) unvollständig ist, kann

$$R\equiv 2 \pmod 4,\quad R \equiv 2 \pmod 7$$

angenommen werden. Es sei

(97) $$r\equiv R \pmod{64},\quad r\equiv 46 \pmod{49};\quad r\equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3\leqslant u \leqslant 47,\quad 7\nmid u.$$

Dann bleibt (48) in Kraft. Weiter ist

$$\Delta_7 = 0,\quad \Delta_{21}\geqslant -4,\quad \Delta_{35}\geqslant -6,\quad \Delta_{49}\geqslant -6,$$
$$r\equiv 18 \pmod{28},\quad R\equiv 2 \pmod{28},\quad \Delta_{28}=-6,\quad \Delta_{56}\leqslant 8,\quad \Delta_{84}\leqslant 10,$$
$$14^l\Delta \geqslant -4\left(\tfrac{2}{3}\right)^3-6\left(\tfrac{2}{5}\right)^3-6\left(\tfrac{2}{7}\right)^3+6-8\cdot 2^{-3}-10\cdot 3^{-3}$$
$$= -\tfrac{32}{27}-\tfrac{48}{125}-\tfrac{48}{343}+6-1-\tfrac{10}{27}>0,\quad \Delta>0.$$

Hilfssatz 36. *Die Menge*

(98) $$R\not\equiv 4 \pmod 7$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) und (96) unvollständig sind, darf

$$R\equiv 2 \pmod 4,\quad R\equiv 0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6 \pmod 7$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (97). Dann wiederhole man den Beweis von Hilfssatz 14, wo nur die Kongruenz $r\equiv 0 \pmod{28}$ durch $r\equiv 18 \pmod{28}$ zu ersetzen ist.

Hilfssatz 37. *Die Menge*

(99) $$R\not\equiv 46 \pmod{49}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (98) unvollständig ist, kann

$$R\equiv 4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32,\ 39 \pmod{49}$$

angenommen werden. Es genüge r immer noch den Bedingungen (97). Dann geht der Beweis wie bei Hilfssatz 15 fort.

Hilfssatz 38. *Die Menge*

$$R \not\equiv 5 \pmod{11} \tag{100}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es darf

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \not\equiv 5 \pmod{11}$$

angenommen werden. Es sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 5 \pmod{11}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 11 \nmid u.$$

Dann gilt (53). Weiter ist

$$\Delta_{11} \geqslant 1, \quad \Delta_{33} \geqslant -6; \quad r \equiv 38 \pmod{44}, \quad \Delta_{44} \leqslant 4-0 = 4; \quad \Delta_{88} \leqslant 12,$$
$$11^l \Delta \geqslant 1-6\cdot 3^{-3}-4\cdot 2^{-3}-12\cdot 4^{-3} > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 39. *Die Menge*

$$R \not\equiv 8 \pmod{13} \tag{101}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es darf

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \not\equiv 8 \pmod{13}$$

angenommen werden. Sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 8 \pmod{13}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 13 \nmid u.$$

Dann fahre man wie bei Hilfssatz 19 fort, nur ersetze man die Kongruenz $r \equiv 4 \pmod{52}$ durch $r \equiv 34 \pmod{52}$.

Hilfssatz 40. *Die Menge*

$$R \equiv 14 \pmod{17} \tag{102}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es darf

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \equiv 14 \pmod{17}$$

angenommen werden. Sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 12 \pmod{17}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 17 \nmid u. \tag{103}$$

Dann gilt (59). Ferner hat man

$$\Delta_{17} = 0; \quad r \equiv 46 \pmod{68}, \quad R \equiv 14 \pmod{68}, \quad \Delta_{68} = -4,$$
$$\Delta = 4\cdot 34^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 41. *Die Menge*

$$R \not\equiv 12 \pmod{17} \tag{104}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) und (102) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \equiv 0-11,\ 13,\ 15,\ 16 \pmod{17}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (103). Dann fahre man wie bei Hilfssatz 21 fort, nur ersetze man die Kongruenz $r \equiv 4 \pmod{68}$ durch $r \equiv 46 \pmod{68}$.

Hilfssatz 42. *Die Menge*

$$R \equiv 0-6,\ 8,\ 10,\ 12-18 \pmod{19} \tag{105}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es darf

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \equiv 0-6,\ 8,\ 10,\ 12-18 \pmod{19}$$

angenommen werden. Sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 11 \pmod{19}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 19 \nmid u.$$

Dann fahre man wie bei Hilfssatz 22 fort, nur ersetze man die Kongruenz $r \equiv 60 \pmod{76}$ durch $r \equiv 30 \pmod{76}$.

Hilfssatz 43. *Die Menge*

$$R \equiv 13 \pmod{23} \tag{106}$$

ist unvollständig.

Beweis. Es darf

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \equiv 13 \pmod{23}$$

angenommen werden. Es sei

$$r \equiv R \pmod{64}, \quad r \equiv 9 \pmod{23}; \quad r \equiv R \pmod u \quad \text{für} \quad 3 \leqslant u \leqslant 49, \quad 23 \nmid u. \tag{107}$$

Dann gilt (64). Weiter ist

$$\Delta_{23} = 0; \quad r \equiv 78 \pmod{92}, \quad R \equiv 82 \pmod{92}, \quad \Delta_{92} = -4,$$
$$\Delta = 4\cdot 46^{-l} > 0.$$

Hilfssatz 44. *Die Menge*

(108) $$R \not\equiv 9 \pmod{23}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (86) und (106) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 2 \pmod 4, \qquad R \equiv 0-8,\ 10-12,\ 14-22 \pmod{23}$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (107). Dann bleibt (64) in Kraft, und es ist

$$\Delta_{23} \geqslant 1; \quad r \equiv 78 \pmod{92}, \quad \Delta_{92} \leqslant 5-2=3,$$
$$23^l \Delta \geqslant 1-3\cdot 2^{-3} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 45. *Die folgenden sechs Mengen sind unvollständig:*

(109) $$R \equiv 0-18,\ 20,\ 22-28 \pmod{29},$$

(110) $$R \equiv 0-9,\ 11-19,\ 21-30 \pmod{31},$$

(111) $$R \not\equiv 24 \pmod{37},$$

(112) $$R \not\equiv 30 \pmod{41},$$

(113) $$R \equiv 0-16,\ 18-24,\ 26-42 \pmod{43},$$

(114) $$R \equiv 0-17,\ 19-27,\ 29-46 \pmod{47}.$$

Beweis. Man wiederhole den Beweis von Hilfssatz 25, mit

$$a_{29}=21, \quad a_{31}=20, \quad a_{37}=24, \quad a_{41}=30, \quad a_{43}=25, \quad a_{47}=28.$$

Hilfssatz 46. *Die Menge*

(115) $$R \not\equiv 6 \pmod{16}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (88), (89) und (93) unvollständig sind, kann

$$R \equiv 14 \pmod{16}, \quad R \equiv 1 \pmod 3, \quad R \equiv 3 \pmod 5$$

angenommen werden. Es genüge r nach wie vor den Bedingungen (87). Dann ist $r \equiv R \pmod 8$, und daher gilt (30). Weiter ist

$$\Delta_{16}=0, \quad \Delta_{32} \leqslant 2-2=0; \quad r \equiv 22 \pmod{48}, \quad R \equiv 46 \pmod{48}, \quad \Delta_{48} = -4,$$
$$\Delta_{64} \leqslant 4-0=4; \quad r \equiv 38 \pmod{80}, \quad R \equiv 78 \pmod{80}, \quad \Delta_{80} = -8; \quad \Delta_{96} \leqslant 8,$$
$$24^l \Delta \geqslant 4-4\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 - 8\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3-\tfrac{27}{16} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Hilfssatz 47. *Die Menge*

(116) $$R \not\equiv 22 \pmod{32}$$

ist unvollständig.

Beweis. Da (115) unvollständig ist, kann

$$R \equiv 6 \pmod{32}$$

angenommen werden. Es genüge r immer noch den Bedingungen (87). Dann bleibt (32) bestehen, und man fahre wie bei Hilfssatz 5 fort.

Hilfssatz 48. *Die Menge*

(117) $$R \equiv 0-21,\ 23-53,\ 55-63 \pmod{64}$$

ist unvollständig.

Beweis. Die Unvollständigkeit der Menge (117) ergibt sich aus der Unvollständigkeit von (116).

Hilfssatz 49. *Das folgende Kongruenzensystem* (118)-(122) *bestimmt eine vollständige Menge* $\mathfrak{R}^*$:

(118) $r \equiv 54 \pmod{64}$, $r \equiv 16 \pmod{27}$, $r \equiv 23 \pmod{25}$,

(119) $r \equiv 46 \pmod{49}$, $r \equiv 5 \pmod{11}$, $r \equiv 8 \pmod{13}$,

(120) $r \equiv 12 \pmod{17}$, $r \equiv 11 \pmod{19}$, $r \equiv 9 \pmod{23}$,

(121) $r \equiv 21 \pmod{29}$, $r \equiv 20 \pmod{31}$, $r \equiv 24 \pmod{37}$,

(122) $r \equiv 30 \pmod{41}$, $r \equiv 25 \pmod{43}$, $r \equiv 28 \pmod{47}$.

Beweis. Die Summe $\mathfrak{R}$ der unvollständigen Mengen (117), (92), (95), (99)-(101), (104), (105), (108)-(114) ist selbst unvollständig. Ihre Ergänzung $\mathfrak{R}'$ ist eine vollständige Menge, die durch das folgende System bestimmt wird:

(123) $r \equiv 22,\ 54 \pmod{64}$, $r \equiv 16 \pmod{27}$, $r \equiv 23 \pmod{25}$,

(124) $r \equiv 46 \pmod{49}$, $r \equiv 5 \pmod{11}$, $r \equiv 8 \pmod{13}$,

(125) $r \equiv 12 \pmod{17}$, $r \equiv 7,\ 9,\ 11 \pmod{19}$, $r \equiv 9 \pmod{23}$,

(126) $r \equiv 19,\ 21 \pmod{29}$, $r \equiv 10,\ 20 \pmod{31}$, $r \equiv 24 \pmod{37}$,

(127) $r \equiv 30 \pmod{41}$, $r \equiv 17,\ 25 \pmod{43}$, $r \equiv 18,\ 28 \pmod{47}$.

Wie beim Beweise von Hilfssatz 26, folgt jetzt, daß man aus diesem System die folgenden Kongruenzen streichen kann, ohne daß die zugehörige Menge aufhört vollständig zu sein:

(128) $r \equiv 22 \pmod{64}$, $r \equiv 7,\ 9 \pmod{19}$, $r \equiv 19 \pmod{29}$,

(129) $r \equiv 10 \pmod{31}$, $r \equiv 17 \pmod{43}$, $r \equiv 18 \pmod{47}$.

HILFSSATZ 50. *Es gilt die zweite Gleichung* (12).

Beweis. Für die durch (118)-(122) bestimmte Menge $\mathfrak{R}^*$ nach (21) ist

$$\underset{r\in\mathfrak{R}^*}{T_k(r)} = \tau_{k4},$$

wo τ_{k4} die Summe (1.18) ist. Nach Hilfssatz 49 und der Definition (15) einer nach unten vollständigen Menge ist andererseits

$$\operatorname*{Min}_{r\in\mathfrak{R}^*} T_k(r) = \tau_k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die zweite Gleichung (12).

VIII KAPITEL

DAS INTEGRAL $\int_0^x P_4^2(y)\,dy$

§ 1. Fragestellung — Hilfssätze

In diesem Kapitel hängt B nicht von k ab, so daß die $|B|$ unterhalb von absoluten Konstanten liegen.

In manchen Fällen, wo es nicht gelingt, die Größenordnung bei der Abschätzung einer zahlentheoretischen Funktion genau zu bestimmen, kann man über das Integral des Fehlerquadrats eine weitgehende Auskunft erhalten. Das ist auch für den Fehler $P_4(x)$ der Fall, der bei der Abschätzung von $A_4(x)$ entsteht. Wie wir schon am Schluß von § 3.1 bemerkt haben, ist die genaue Größenordnung von $P_4(x)$ nicht bekannt. Nach den Sätzen 2.8.1 und 3.1.2 wird diese Größenordnung zwischen

$$x\log^{3/4}x(\log\log x)^{1/2} \quad \text{und} \quad x\log\log x$$

zu suchen sein. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß

$$\int_0^x P_4^2(y)\,dy = \tfrac{2}{3}\pi^2x^3 + Bx^{5/2}. \tag{1}$$

Unsere Behandlung dieses Integrals wird sich, wie schon früher die Behandlung von $P_4(x)$ im II und III Kapitel, auf die Jacobische Formel (1.2.20) stützen, d. h. wir werden auch hier unsere Aufgabe auf ein gewisses Teilerproblem zurückführen. Außerdem werden wir von den van der Corputschen Hilfssätzen in § 2.3 Gebrauch machen. Unsere sonstigen Hilfsmittel werden von ziemlich einfacher Art sein, aber wir werden sehr lange Rechnungen auszuführen haben, bis es uns gelingt (1) zu beweisen.

Wir werden es im folgenden wieder viel mit der Funktion $\psi(y)$ zu tun haben, die durch (1.3.1) definiert ist. Sie ist nur eine etwas kürzere Bezeichnung für die Bernoullische Funktion $\bar{B}_1(y)$, vgl. (1.3.6). Daneben wird auch die Funktion $\bar{B}_2(y)$ auftreten, die mittels der Formel (1.3.3) aus dem zweiten Bernoullischen Polynom $B_2(y) = y^2-y+\frac{1}{6}$ gebildet ist. Diese Funktion wollen wir mit $\psi_2(y)$ bezeichnen, d. h. wir setzen

$$\bar{B}_2(y) = \psi_2(y), \tag{2}$$