

SATZ 2. Es sei  $k$  gerade,  $k \geq 4$ . Dann ist

$$(26) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k+1} \left\{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \right\}^{-1} \left( - \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \sum_{h=1}^u \psi \left( \frac{x-h^2}{u} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{k/2} 2^{-1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} \sum_{h=1}^{4d} \left\{ \psi \left( \frac{x-h^2}{2d} \right) - 2 \psi \left( \frac{x-h^2}{4d} \right) \right\} \right) x^{k-1/2} + \\ + B x^{k-3/2} \log x.$$

SATZ 3. Es sei  $k$  ungerade,  $k \geq 5$ . Dann ist

$$(27) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k+1} \{ L(k) \}^{-1} \left( - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{-k} \sum_{h=1}^u \psi \left( \frac{x-h^2}{u} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{(k-1)/2} 2^{-1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} \sum_{h=1}^{4d} \left\{ \psi \left( \frac{x-h^2}{d} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi \left( \frac{x-h^2}{2d} \right) - 2 \psi \left( \frac{x-h^2}{4d} \right) \right\} \right) x^{k-1/2} + B x^{k-3/2} \log x.$$

## VI KAPITEL

### DIE FUNKTIONEN $P_{2k}$ UND $\varrho_{2k}$

#### § 1. Problemstellung. $P_{2n}$ und $\varrho_{2n}$

Nach Satz 2.2.2 ist die Funktion

$$x^{1-k/2} P_k(x)$$

für jedes  $k > 4$  beschränkt und nach den Sätzen 4.4.8 und 4.4.9 hat sie einen oszillierenden Charakter, der durch die Eigenschaften des Symbols  $\Omega_{\pm}$  beschrieben wird. Es erscheint daher angebracht, für  $k > 4$  die Funktionen von  $k$

$$(1) \quad \limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = P_k^*, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = \varrho_k^*$$

einzuführen. Die Normierung durch den Faktor  $2/D_k$  erweist sich dabei als bequem; sie tritt schon in (4.4.68) und (4.4.69) auf.

Der folgende einfache Hilfssatz zeigt, daß es genügt, statt der Funktionen (1) die Funktionen

$$(2) \quad \limsup_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = P_k, \quad \liminf_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = \varrho_k$$

zu betrachten.

HILFSSATZ 1. Für  $k > 4$  ist

$$(3) \quad P_k^* = P_k, \quad \varrho_k^* = \varrho_k - 2.$$

Beweis. In jedem Intervall  $n \leq x < n+1$ , wo  $n \geq 3$ , nimmt die Funktion  $P_k(x)$  ihrer Definition nach ab. Daher nimmt in einem solchen Intervall auch die Funktion  $x^{1-k/2} P_k(x)$  ab, so daß auf Grund von (1) und (2)

$$P_k^* = \limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = \limsup_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = P_k,$$

womit die erste Gleichung (3) bewiesen ist. Weiter ist, aus demselben Grunde,

$$\varrho_k^* = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{2P_k(x)}{D_k n^{k/2-1}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2P_k(n+1-0)}{D_k(n+1)^{k/2-1}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2P_k(n+1-0)}{D_k n^{k/2-1}}.$$

Andererseits ist nach (3.1.2) und (4.4.65)

$$P_k(n) - P_k(n+1-0) = D_k n^{k/2-1} - B n^{k/2-2}.$$

Somit ist

$$\varrho_k^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} - 2 = \varrho_k - 2,$$

womit auch die zweite Gleichung (3) bewiesen ist.

Im vorliegenden Kapitel sollen die Funktionen (2) für gerade Werte  $\geq 8$  von  $k$ , mit Hilfe der Sätze 5.2.2 und 5.3.2, untersucht werden. Dabei ist es, wie im V Kapitel, bequem,  $2k$  statt  $k$  zu schreiben, wobei dann  $k \geq 4$  angenommen wird.

Für die in den  $n$ -Summen von (5.2.10) und (5.3.34) stehenden Verbindungen der  $\psi(y)$ -Funktionen erscheint es geboten, besondere Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen demgemäß

$$(4) \quad F(y, n) = \psi\left(\frac{y}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{y}{2n}\right),$$

$$(5) \quad G(y, n) = \psi\left(\frac{y}{n}\right) - \psi\left(\frac{y}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{y-n}{4n}\right).$$

Es ist von Belang festzustellen, und wird auch später benutzt werden, daß diese beiden Funktionen nur die Werte  $\pm \frac{1}{2}$  annehmen. Genauer gilt der folgende Hilfssatz, in dem Kongruenzen  $X \equiv Y \pmod{n}$  so zu verstehen sind, daß  $X-Y$  eine ganze durch  $n$  teilbare Zahl ist.

HILFSSATZ 2.

$$(6) \quad F(y, n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } y \equiv Y \pmod{2n}, \quad 0 \leq Y < n, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } y \equiv Y \pmod{2n}, \quad n \leq Y < 2n; \end{cases}$$

$$(7) \quad G(y, n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } y \equiv Y \pmod{4n}, \quad n \leq Y < 3n, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } y \equiv Y \pmod{4n}, \quad 0 \leq Y < n \end{cases}$$

oder  $3n \leq Y < 4n$ .

Beweis. Aus (1.3.1), (4) und (5) ergibt sich

1) Für  $y \equiv Y \pmod{2n}$ ,  $0 \leq Y < n$  ist

$$\begin{aligned} F(y, n) &= F(Y, n) = \psi\left(\frac{Y}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y}{2n}\right) \\ &= \frac{Y}{n} - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{Y}{2n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Für  $y \equiv Y \pmod{2n}$ ,  $n \leq Y < 2n$  ist

$$\begin{aligned} F(y, n) &= F(Y, n) = \psi\left(\frac{Y-n}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y}{2n}\right) \\ &= \frac{Y-n}{n} - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{Y}{2n} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Für  $y \equiv Y \pmod{4n}$ ,  $0 \leq Y < n$  ist

$$\begin{aligned} G(y, n) &= G(Y, n) = \psi\left(\frac{Y}{n}\right) - \psi\left(\frac{Y}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y+4n-n}{4n}\right) \\ &= \frac{Y}{n} - \frac{1}{2} - \left(\frac{Y}{2n} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{Y+3n}{4n} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) Für  $y \equiv Y \pmod{4n}$ ,  $n \leq Y < 2n$  ist

$$\begin{aligned} G(y, n) &= G(Y, n) = \psi\left(\frac{Y-n}{n}\right) - \psi\left(\frac{Y}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y-n}{4n}\right) \\ &= \frac{Y-n}{n} - \frac{1}{2} - \left(\frac{Y}{2n} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{Y-n}{4n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5) Für  $y \equiv Y \pmod{4n}$ ,  $2n \leq Y < 3n$  ist

$$\begin{aligned} G(y, n) &= G(Y, n) = \psi\left(\frac{Y-2n}{n}\right) - \psi\left(\frac{Y-2n}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y-n}{4n}\right) \\ &= \frac{Y-2n}{n} - \frac{1}{2} - \left(\frac{Y-2n}{2n} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{Y-n}{4n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6) Für  $y \equiv Y \pmod{4n}$ ,  $3n \leq Y < 4n$  ist

$$\begin{aligned} G(y, n) &= G(Y, n) = \psi\left(\frac{Y-3n}{n}\right) - \psi\left(\frac{Y-2n}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{Y-n}{4n}\right) \\ &= \frac{Y-3n}{n} - \frac{1}{2} - \left(\frac{Y-2n}{2n} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{Y-n}{4n} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Funktion (5.2.12) soll jetzt mit  $-\Psi_k(x)$  bezeichnet und auf beliebiges  $y$  ausgedehnt werden. Mit Rücksicht auf (4) setzen wir daher

$$(8) \quad \Psi_k(y) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-k} \psi\left(\frac{y}{n}\right) + (-1)^{k/2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} n^{1-k} F(y, n) \quad (k \text{ gerade}).$$

Was die Funktion (5.3.35) betrifft, wo  $\bar{B}_1(y) = \psi(y)$  nach (1.3.6) zu setzen ist, so erscheint es geboten, sie in zwei Funktionen zu zerlegen, wobei in der einen der Faktor  $(-1)^{(k+1)/2}$  durch 1, in der anderen durch  $-1$  ersetzt wird, während zugleich das Vorzeichen der  $u$ -Summe umgekehrt wird. Wir definieren demgemäß, mit Rücksicht auf (5),

$$(9) \quad \Phi_k(y) = - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{y}{u} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} G(y, n) \quad (k \text{ ungerade}),$$

$$(10) \quad \Psi_k(y) = - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{y}{u} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} G(y, n) \quad (k \text{ ungerade}).$$

In den Bezeichnungen (8)-(10) lassen sich die Sätze 5.2.2-5.3.2 so ausdrücken:

Für gerade  $k$ ,  $k \geq 4$  ist

$$(11) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \}^{-1} \Psi_k(x) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x.$$

Für  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $k \geq 5$  ist

$$(12) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{ L(k) \}^{-1} \Phi_k(x) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x.$$

Für  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $k \geq 7$  ist

$$(13) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{ L(k) \}^{-1} \Psi_k(x) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x.$$

Wir führen noch die beiden Grenzfunktionen

$$(14) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(n) = \Psi_k^*, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(n) = \psi_k^*$$

ein. Es soll dann gezeigt werden, daß  $P_{2k}$  und  $Q_{2k}$  für gerade  $k$  auf  $\Psi_k$  zurückgeführt werden können (Hilfssatz 3), für ungerade  $k$  auf  $\Psi_k$  und  $\psi_k$  (Hilfssatz 4).

HILFSSATZ 3. Für gerade  $k$ ,  $k \geq 4$  ist

$$(15) \quad P_{2k} = 2 \{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \}^{-1} \Psi_k,$$

$$(16) \quad Q_{2k} = 2 - P_{2k}.$$

Beweis. (15) folgt sofort aus (11), (2) und (14). Für den Beweis von (16) ist es zweckmäßig, die Grenzfunktionen

$$(17) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \Psi_k(x) = \Psi_k^*, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \Psi_k(x) = \psi_k^*$$

einzuführen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß

$$(18) \quad \psi_k^* = -\Psi_k^*$$

ist.

Für jede nichtganze Zahl  $y$  ist die Funktion  $\psi(y)$  ungerade:

$$(19) \quad \psi(-y) = -\psi(y) \quad \text{für } y > [y].$$

Dies folgt sofort aus der Reihenentwicklung (2.3.3), kann aber auch unmittelbar aus der Definition (1.3.1) hergeleitet werden. In der Tat hat  $\psi(y)$  die Periode 1; es darf daher  $0 < y < 1$  angenommen werden, und dann ist

$$\psi(y) + \psi(-y) = y - \frac{1}{2} - y - (-1) - \frac{1}{2} = 0.$$

Es sei nun  $x_1, x_2, \dots$  eine beliebige Folge mit

$$(20) \quad x_1 < x_2 < \dots; \quad x_r \rightarrow \infty, \quad x_r - [x_r] > 0.$$

Jedem  $x_r$  werde ein  $q_r$  so zugeordnet, daß

$$(21) \quad q_1 < q_2 < \dots \quad \text{und} \quad 3 < y_1 < y_2 < \dots, \quad y_r \rightarrow \infty, \\ \text{wo} \quad y_r = q_r! - x_r.$$

Für  $u \leq q_r$  ist nach (1.3.1), (21), (20) und (19)

$$(22) \quad \psi \left( \frac{y_r}{u} \right) = \psi \left( \frac{q_r! - x_r}{u} \right) = \psi \left( - \frac{x_r}{u} \right) = -\psi \left( \frac{x_r}{u} \right).$$

Analog folgt aus (4) für  $n \leq q_r/2$

$$(23) \quad F(y_r, n) = \psi \left( \frac{y_r}{n} \right) - 2\psi \left( \frac{y_r}{2n} \right) = \psi \left( - \frac{x_r}{n} \right) - 2\psi \left( - \frac{x_r}{2n} \right) \\ = - \left\{ \psi \left( \frac{x_r}{n} \right) - 2\psi \left( \frac{x_r}{2n} \right) \right\} = -F(x_r, n).$$

Nach (1.3.1) und (6) ist  $|\psi(y)| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|F(y, n)| \leq \frac{1}{2}$ . Aus (8), (22) und (23) ergibt sich daher

$$\left| \Psi_k(y_r) - \sum_{u \leq q_r} u^{1-k} \psi \left( \frac{y_r}{u} \right) + (-1)^{k/2} \sum_{\substack{n \leq q_r/2 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}} n^{1-k} F(x_r, n) \right| \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{u \leq q_r} u^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{n > q_r/2} n^{1-k}.$$

Unmittelbar aus (8) bekommt man

$$\left| \Psi_k(x_r) + \sum_{u \leq q_r} u^{1-k} \psi \left( \frac{x_r}{u} \right) - (-1)^{k/2} \sum_{\substack{n \leq q_r/2 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}} n^{1-k} F(x_r, n) \right| \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{u \leq q_r} u^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{n > q_r/2} n^{1-k}.$$

Somit ist

$$|\Psi_k(y_r) + \Psi_k(x_r)| \leq \sum_{u > q_r} u^{1-k} + \sum_{n > q_r/2} n^{1-k}.$$

Wegen  $q_r \rightarrow \infty$  ergibt sich hieraus

$$(24) \quad \Psi_k(y_r) + \Psi_k(x_r) \rightarrow 0.$$

Auf Grund von (1.3.1) ist  $\psi(y)$  für jedes  $y$  nach rechts stetig. Wegen (4) ist daher auch  $F(y) = F(y, n)$  nach rechts stetig, und dies folgt auch direkt aus (6). Da die Reihen (8) absolut und gleichmäßig konvergieren, ist  $\Psi_k(y)$  ebenfalls nach rechts stetig. Mit Rücksicht auf (17) kann man daher zwei Folgen der Gestalt (20) so wählen, daß für die eine dieser Folgen  $\Psi_k(x_r) \rightarrow \Psi_k^*$  und für die andere  $\Psi_k(x_r) \rightarrow \psi_k^*$ . Nach (24) ist dann für die erste dieser Folgen  $\Psi_k(y_r) \rightarrow -\Psi_k^*$ . Wegen (17) folgt hieraus

$$\psi_k^* \leq -\Psi_k^*.$$

Für die andere Folge ist analog  $\Psi_k(y_r) \rightarrow -\psi_k^*$ , woraus

$$\Psi_k^* \geq -\psi_k^*.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich

$$\psi_k^* \leq -\Psi_k^* \leq \psi_k^*,$$

d. h. die Gleichung (18).

Wegen (11), (1) und (17) ist

$$P_{2k}^* = 2 \{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \}^{-1} \Psi_k^*, \quad Q_{2k}^* = 2 \{ \}^{-1} \psi_k^*.$$

Zusammen mit (18) ergibt dies

$$(25) \quad Q_{2k}^* = -P_{2k}^*.$$

Die Behauptung (16) des Hilfssatzes folgt aus (25) und (3).

HILFSSATZ 4. Für  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $k \geq 5$  ist

$$(26) \quad P_{2k} = 2 \{ 1 - \{L(k)\}^{-1} \psi_k \}, \quad Q_{2k} = 2 \{ 1 - \{L(k)\}^{-1} \Psi_k \}.$$

Für  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $k \geq 7$  ist

$$(27) \quad P_{2k} = 2 \{ L(k) \}^{-1} \Psi_k, \quad Q_{2k} = 2 \{ L(k) \}^{-1} \psi_k.$$

Beweis. Die Gleichungen (27) folgen sofort aus (13), (2) und (14). Um die Behauptungen (26) zu beweisen, ist es zweckmäßig, die Definition (17) auch für ungerade  $k \geq 5$  beizubehalten und daneben noch für ungerade  $k \geq 5$  die Grenzfunktionen

$$(28) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \Phi_k^*, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \varphi_k^*,$$

$$(29) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_k(n) = \Phi_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_k(n) = \varphi_k$$

einzuführen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß

$$(30) \quad \zeta_k^* = -\Psi_k^*, \quad \psi_k^* = -\Phi_k^*.$$

Der Beweis dieser Gleichungen ist dem von Gleichung (18) sehr ähnlich. Wir werden uns daher etwas kürzer fassen können.

Die Folgen (20) und (21) behalten wir bei. Für  $u \leq q_r$  gilt dann (22). Weiter ist

$$(31) \quad G(y_r, n) = G(x_r, n) \quad \text{für} \quad n \leq \frac{q_r}{4}.$$

In der Tat ist

$$(32) \quad q_r! \equiv 0 \pmod{4n} \quad \text{für} \quad n \leq \frac{q_r}{4}.$$

Da  $x_r$  wegen (20) nicht ganz ist, so hat man

$$(33) \quad x_r \equiv X_r \pmod{4n}, \quad 0 < X_r < 4n,$$

wobei auch  $X_r$  nicht ganz ist.

Für  $0 < X_r < n$  oder  $3n < X_r < 4n$  ist  $3n < 4n - X_r < 4n$  oder  $0 < 4n - X_r < n$  und daher nach (7), (21), (32) und (33)

$$G(x_r, n) = -\frac{1}{2},$$

$$G(y_r, n) = G(-x_r, n) = G(4n - X_r, n) = -\frac{1}{2}.$$

Für  $n < X_r < 3n$  ist  $n < 4n - X_r < 3n$ , also

$$G(x_r, n) = \frac{1}{2}, \quad G(y_r, n) = G(4n - X_r, n) = \frac{1}{2}.$$

In beiden Fällen ist (31) erfüllt.

Aus (9), (10), (22) und (31) folgt

$$(34) \quad \Phi_k(y_r) + \Psi_k(x_r) = - \sum_{u > q_r} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \left\{ \psi \left( \frac{x_r}{u} \right) + \psi \left( \frac{y_r}{u} \right) \right\} + \sum_{n > q_r/4} (2n)^{1-k} \{ G(y_r, n) - G(x_r, n) \}.$$

Wegen (7) ergibt sich hieraus

$$|\Phi_k(y_r) + \Psi_k(x_r)| \leq \sum_{u > q_r} u^{1-k} + \sum_{n > q_r/4} (2n)^{1-k}.$$

Somit bekommt man die zu (24) analoge Beziehung

$$(35) \quad \Phi_k(y_r) + \Psi_k(x_r) \rightarrow 0.$$

Aus (20) und (21) geht hervor, daß die  $x_r$ -Folge aus der  $y_r$ -Folge durch denselben Übergang entsteht, wie umgekehrt die  $y_r$ -Folge aus der  $x_r$ -Folge. Man kann daher in (35)  $x_r$  mit  $y_r$  vertauschen und bekommt

$$(36) \quad \Psi_k(y_r) + \Phi_k(x_r) \rightarrow 0.$$

Wegen (7) ist die Funktion  $G(y) = G(y, n)$  nach rechts stetig. Wegen (9) und (10) sind somit auch  $\Phi_k(y)$  und  $\Psi_k(y)$  nach rechts stetig. Mit Rücksicht auf (17) und (28) kann man also vier Folgen der Gestalt (20) so wählen, daß für sie

$$(37) \quad \Psi_k(x_r) \rightarrow \Psi_k^*, \quad \Psi_k(y_r) \rightarrow \Psi_k^*, \quad \Phi_k(x_r) \rightarrow \Phi_k^*, \quad \Phi_k(y_r) \rightarrow \Phi_k^*.$$

Für die erste dieser Folgen gilt die erste Beziehung (37): Wegen (35) ist dann  $\Phi_k(y_r) \rightarrow -\Psi_k^*$ , und wegen (28) folgt hieraus

$$(38) \quad \Psi_k^* \leq -\Psi_k^*.$$

Ebenso folgt aus den übrigen Beziehungen (37), in Verbindung mit (35), (36), (17) und (28),

$$(39) \quad \begin{aligned} \Phi_k(y_r) &\rightarrow -\Psi_k^*, & \Psi_k(y_r) &\rightarrow -\Phi_k^*, & \Psi_k(y_r) &\rightarrow -\Psi_k^*, \\ \Phi_k^* &\geq -\Psi_k^*, & \Psi_k^* &\leq -\Phi_k^*, & \Psi_k^* &\geq -\Psi_k^*. \end{aligned}$$

Aus (38) und (39) folgt

$$\Psi_k^* \leq -\Psi_k^* \leq \Psi_k^*, \quad \Psi_k^* \leq -\Phi_k^* \leq \Psi_k^*,$$

womit die Gleichungen (30) nachgewiesen sind. Es soll jetzt gezeigt werden, daß

$$(40) \quad \Psi_k^* = \Psi_k, \quad \Phi_k^* = \Phi_k, \quad \Psi_k^* = \Psi_k - L(k), \quad \Phi_k^* = \Phi_k - L(k).$$

Zunächst ist

$$(41) \quad \left[ \frac{h+\varepsilon}{u} \right] = \left[ \frac{h}{u} \right].$$

In der Tat haben beide Seiten in  $h$  die Periode  $u$ . Es kann daher  $0 \leq h < u$  angenommen werden, und dann geht (41) über in  $0 = 0$ . Nach (1.3.1) und (41) ist

$$(42) \quad \psi\left(\frac{h+\varepsilon}{u}\right) = \frac{h+\varepsilon}{u} - \left[ \frac{h+\varepsilon}{u} \right] - \frac{1}{2} = \frac{h}{u} - \left[ \frac{h}{u} \right] - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{u} = \psi\left(\frac{h}{u}\right) + \frac{\varepsilon}{u}.$$

Weiter ist wegen (7)

$$(43) \quad G(h+\varepsilon, n) = G(h, n).$$

In der Tat haben beide Seiten von (43) in  $h$  die Periode  $4n$ , so daß  $0 \leq h < 4n$  angenommen werden kann. Für  $n \leq h < 3n$  ist  $n \leq h \leq 3n-1$ , folglich  $n \leq h+\varepsilon < 3n$ , und (43) nimmt die Gestalt  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  an. Ist aber  $0 \leq h < n$  oder  $3n \leq h < 4n$ , so ist  $0 \leq h+\varepsilon < n$  oder  $3n \leq h+\varepsilon < 4n$ , und (43) wird dann  $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ .

Aus (9), (42), (43) und (5.3.18) folgt

$$\begin{aligned} \Phi_k(h+\varepsilon) &= - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi\left(\frac{h+\varepsilon}{u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} G(h+\varepsilon, n) \\ &= - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi\left(\frac{h}{u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} G(h, n) - \varepsilon \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{-k}, \end{aligned}$$

$$(44) \quad \Phi_k(h+\varepsilon) = \Phi_k(h) - \varepsilon L(k).$$

Genau so ergibt sich, wenn (10) statt (9) benutzt wird,

$$(45) \quad \Psi_k(h+\varepsilon) = \Psi_k(h) - \varepsilon L(k).$$

Nach (5.3.19) ist  $L(k) > 0$ . Daher zeigen (44) und (45), daß  $\Phi_k(x)$  und  $\Psi_k(x)$  in jedem Intervall  $n \leq x < n+1$  ( $n \geq 3$ ) abnehmen. Durch denselben Schluß wie bei der ersten Gleichung (3) überzeugt man sich, daß die erste und zweite Gleichung (40) richtig sind.

Weiter folgt aus (44) und (45), wenn man  $\varepsilon$  gegen 1 rücken läßt,

$$\Phi_k(n+1-0) = \Phi_k(n) - L(k), \quad \Psi_k(n+1-0) = \Psi_k(n) - L(k),$$

und daraus ergeben sich die dritte und vierte Gleichung (40).

Aus (12), (2) und (29) ergibt sich für  $k \equiv 1 \pmod{4}$

$$(46) \quad P_{2k} = 2 \{L(k)\}^{-1} \Phi_k, \quad Q_{2k} = 2 \{L(k)\}^{-1} \Psi_k.$$

Die Behauptungen (26) des Hilfssatzes folgen jetzt aus (46), (40) und (30).

Für  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , d. h. für  $2k = 8n$ , lassen sich, gestützt auf Hilfssatz 3, die genauen Werte von  $P_{2k}$  und  $Q_{2k}$  sehr rasch berechnen, wie der Beweis des folgenden Satzes zeigt.

SATZ 1. Für  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $k \geq 4$  ist

$$(47) \quad P_{2k} = \frac{\zeta(k-1)}{(1-2^{-k})\zeta(k)}, \quad Q_{2k} = 2 - \frac{\zeta(k-1)}{(1-2^{-k})\zeta(k)}.$$

Beweis. Nach (1.3.1) und (6) ist  $\psi(y) \geq -\frac{1}{2}$ ,  $F(y, n) \leq \frac{1}{2}$ . Wegen (8) und (5.2.1) ist somit für  $k \equiv 0 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} \Psi_k(y) &= - \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{y}{u}\right) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} u^{1-k} F(y, n) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} n^{1-k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-k} = \frac{1}{2} \zeta(k-1). \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$(48) \quad \Psi_k(n) \leq \frac{1}{2}\zeta(k-1).$$

Andererseits ist nach (1.3.1) und (4) für  $q = (2r)!$ ,  $u \leq 2r$ ,  $n \leq r$

$$\psi\left(\frac{q}{u}\right) = -\frac{1}{2}, \quad F(q, n) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

und hieraus folgt, durch einen analogen Schluß wie bei (48), wenn das  $o$ -Zeichen auf  $r \rightarrow \infty$  bezogen wird,

$$\Psi_k(q) \geq \frac{1}{2} \left( \sum_{u=1}^{2r-1} u^{1-k} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^r n^{1-k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{u=2r+1}^{\infty} u^{1-k} - \frac{1}{2} \sum_{n=r+1}^{\infty} n^{1-k},$$

$$\Psi_k(q) \geq \frac{1}{2} \left( \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} n^{1-k} \right) + o(1),$$

$$\Psi_k(q) \geq \frac{1}{2}\zeta(k-1) + o(1).$$

Daher ist

$$(49) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_k\{(2r)!\} = \frac{1}{2}\zeta(k-1).$$

Aus (14), (48) und (49) folgt

$$(50) \quad \Psi_k = \frac{1}{2}\zeta(k-1) \quad \text{für} \quad k \equiv 0 \pmod{4}.$$

Aus (50), (15) und (16) ergeben sich die Behauptungen (47) des Satzes.

## § 2. $P_{8n+4}$ und $Q_{2k}$

In diesem Paragraphen wird  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $k \geq 6$  vorausgesetzt, so daß  $2k = 8n+4$  ist. Hier ist es noch nicht gelungen, in Analogie mit (1.50) und (1.47), die Werte von  $\Psi_k$ ,  $P_{2k}$  und  $Q_{2k}$  genau zu bestimmen. Mehr noch, es ist nicht einmal gelungen, diese Werte bei festem  $k$  mit jeder vorgegebenen Genauigkeit anzunähern. Doch soll in diesem Paragraphen ein Verfahren angegeben werden, das gestattet, für die Funktion  $\Psi_k$  (und damit auch für  $P_{2k}$  und  $Q_{2k}$ ) einen Näherungsausdruck zu finden, der von dem genauen Wert nicht mehr als um

$$1,04 \cdot 2^{-k(2k-1)}$$

abweicht. Der Fehler ist also, selbst im ungünstigsten Fall  $k = 6$ , nicht größer als  $1,04 \cdot 2^{-66}$ .

## Eine Kongruenz der Gestalt

$$(1) \quad u \equiv -\frac{1}{v} \pmod{2^n}$$

bedeute, daß  $uv \equiv -1 \pmod{2^n}$  ist. Eine solche Kongruenz bestimmt, bei gegebenem  $v$ , eindeutig eine Restklasse  $\pmod{2^n}$ , der  $u$  angehört. Z. B. ist  $u \equiv -\frac{1}{3} \pmod{8}$  nur ein anderer Ausdruck für  $u \equiv 5 \pmod{8}$ . Wir setzen

$$(2) \quad \theta_k = \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(1-k)} \sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv -1/3, \dots, -1/(2^{a-1}-1) \pmod{2^a}}}^{\infty} u^{1-k}.$$

Hier durchläuft  $u$ , bei festem  $a$ , alle ungeraden natürlichen Zahlen, die den angegebenen Restklassen nach dem Modul  $2^a$  angehören. Man beachte, daß die Restklasse  $u \equiv 1 \pmod{2^a}$  dabei *nicht* vorkommt; für sie wäre nämlich  $u \equiv -1/(2^a-1)$ .

Die Reihe (2) beginnt mit

$$(3) \quad \theta_k = 12^{1-k} + 28^{1-k} + 40^{1-k} + 44^{1-k} + 48^{1-k} + 56^{1-k} + 60^{1-k} + 76^{1-k} + 80^{1-k} + 92^{1-k} + \dots,$$

wobei hinter dem letzten Pluszeichen Glieder  $n^{1-k} = (2^a u)^{1-k}$  folgen, für die  $n > 100$  ist. Noch genauer ist

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta_k = & 12^{1-k} + 28^{1-k} + 40^{1-k} + 44^{1-k} + 48^{1-k} + 56^{1-k} + 60^{1-k} + 76^{1-k} + \\ & + 80^{1-k} + 92^{1-k} + 104^{1-k} + 108^{1-k} + 120^{1-k} + 124^{1-k} + 140^{1-k} + 144^{1-k} + \\ & + 156^{1-k} + 168^{1-k} + 172^{1-k} + 184^{1-k} + 188^{1-k} + 192^{1-k} + 204^{1-k} + 220^{1-k} + \\ & + 224^{1-k} + 232^{1-k} + 236^{1-k} + 240^{1-k} + 248^{1-k} + 252^{1-k} + 268^{1-k} + 284^{1-k} + \\ & + 288^{1-k} + 296^{1-k} + 300^{1-k} + 304^{1-k} + 312^{1-k} + 316^{1-k} + 332^{1-k} + 336^{1-k} + \\ & + 348^{1-k} + 360^{1-k} + 364^{1-k} + 376^{1-k} + 380^{1-k} + 396^{1-k} + 400^{1-k} + 412^{1-k} + \\ & + 424^{1-k} + 428^{1-k} + 440^{1-k} + 444^{1-k} + 448^{1-k} + 460^{1-k} + 476^{1-k} + 488^{1-k} + \\ & + 492^{1-k} + 496^{1-k} + 504^{1-k} + 508^{1-k} + 524^{1-k} + 540^{1-k} + 544^{1-k} + 552^{1-k} + \\ & + 556^{1-k} + 560^{1-k} + 568^{1-k} + 572^{1-k} + 576^{1-k} + 588^{1-k} + 592^{1-k} + 604^{1-k} + \\ & + 608^{1-k} + 616^{1-k} + 620^{1-k} + 632^{1-k} + 636^{1-k} + 640^{1-k} + 652^{1-k} + 656^{1-k} + \\ & + 668^{1-k} + 672^{1-k} + 680^{1-k} + 684^{1-k} + 696^{1-k} + 700^{1-k} + 704^{1-k} + 716^{1-k} + \\ & + 732^{1-k} + 744^{1-k} + 748^{1-k} + 752^{1-k} + 760^{1-k} + 764^{1-k} + 768^{1-k} + 780^{1-k} + \\ & + 796^{1-k} + 808^{1-k} + 812^{1-k} + 816^{1-k} + 824^{1-k} + 828^{1-k} + 844^{1-k} + 848^{1-k} + \\ & + 860^{1-k} + 864^{1-k} + 872^{1-k} + 876^{1-k} + 888^{1-k} + 892^{1-k} + 908^{1-k} + 912^{1-k} + \\ & + 924^{1-k} + 928^{1-k} + 936^{1-k} + 940^{1-k} + 952^{1-k} + 956^{1-k} + 960^{1-k} + 972^{1-k} + \\ & + 988^{1-k} + 992^{1-k} + 1000^{1-k} + 1004^{1-k} + 1008^{1-k} + 1016^{1-k} + 1020^{1-k} + \dots, \end{aligned}$$

wobei hinter dem letzten Pluszeichen Glieder  $n^{1-k}$  stehen, für die  $n \geq 2^{10} = 1024$  ist.

Um dies nachzuprüfen, beachte man, daß die Summe der in (4) aufgeschriebenen Glieder gleich

$$(5) \quad \sum_{a=2}^8 2^{a(1-k)} \sum'_{u < 2^{10-a}} u^{1-k}$$

sein soll, wobei der Strich an der  $u$ -Summe bedeutet, daß  $u$  den in (2) angegebenen Kongruenzen zu genügen hat. Man beachte dabei, daß die Werte  $a=9$  und  $a=10$  nicht in den Ausdruck (5) eingeschlossen zu werden brauchen; für  $a=10$  ist nämlich die  $u$ -Summe leer und für  $a=9$  könnte sie nur das eine Glied  $u=1$  enthalten, das aber nach der im Anschluß an (2) gemachten Bemerkung nicht vorkommen kann. In der Summe (5) treten also die folgenden Glieder auf:

$$\begin{aligned} a=2; & \quad u < 2^8; \quad u \equiv 3 \pmod{2^2}, \\ a=3; & \quad u < 2^7; \quad u \equiv 5, 7 \pmod{2^3}, \\ a=4; & \quad u < 2^6; \quad u \equiv 3, 5, 9, 15 \pmod{2^4}, \\ a=5; & \quad u = 7, 9, 17, 19, 21, 27, 29, 31, \\ a=6; & \quad u = 3, 7, 9, 11, 15, \\ a=7; & \quad u = 5, \\ a=8; & \quad u = 3. \end{aligned}$$

Bildet man die zugehörigen

$$n^{1-k} = (2^a u)^{1-k}$$

und ordnet sie nach wachsendem  $n$ , so ergeben sich die in (4) aufgeschriebenen Glieder.

Es ist nun merkwürdig, daß die Funktion

$$\frac{1}{2}\zeta(k-1) - \theta_k$$

eine sehr genaue Näherung für  $\Psi_k$  darstellt. Wir werden nämlich zeigen, und darin besteht unsere Hauptaufgabe, daß

$$(6) \quad \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \theta_k \leq \Psi_k \leq \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \theta_k + 1,04 \cdot 2^{-k(2k-1)}$$

ist. Die linke Hälfte der Ungleichung (6) wird ohne besondere Mühe nachzuweisen sein (Hilfssatz 1). Der Beweis der rechten Hälfte ist wesentlich umständlicher; er wird durch die Hilfssätze 2-7 vorbereitet.

Die Funktion  $\Psi_k(y)$  hat jetzt nach (1.8) die Gestalt

$$(7) \quad \Psi_k(y) = - \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{y}{u}\right) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} n^{1-k} F(y, n).$$

HILFSSATZ 1.

$$(8) \quad \Psi_k \geq \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \theta_k.$$

Beweis. Es sei  $a \geq 2$ ,

$$(9) \quad n \equiv -2 \pmod{2^{a+1}}, \quad n \equiv 0 \pmod{u}.$$

Dann ist

$$(10) \quad F(n, 2^a u) = \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad u \equiv -1, -1/3, \dots, -1/(2^{a-1}-1) \pmod{2^a},$$

$$(11) \quad F(n, 2^a u) = -\frac{1}{2} \quad \text{für} \quad u \equiv 1, 1/3, \dots, 1/(2^{a-1}-1) \pmod{2^a}.$$

In der Tat ist wegen (9)

$$n \equiv 2mu \pmod{2^{a+1}u},$$

wo

$$\begin{aligned} m &= -(2^{a-1}-1), -(2^{a-1}-3), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, (2^{a-1}-1), \\ mu &\equiv -1 \pmod{2^a}. \end{aligned}$$

Ist dabei  $m = 1, 3, \dots, (2^{a-1}-1)$ , genügt also  $u$  den in (10) angegebenen Kongruenzen, so ist

$$n \equiv a \pmod{2^{a+1}u}, \quad \text{wo} \quad 0 < a < 2^a u.$$

Nach (1.6) ist dann  $F(n, 2^a u) = \frac{1}{2}$ , womit (10) nachgewiesen ist.

Ist aber

$$m = -1, -3, \dots, -(2^{a-1}-1),$$

d. h. genügt  $u$  den in (11) angegebenen Kongruenzen, so ist

$$n \equiv -a \pmod{2^{a+1}u},$$

also

$$n \equiv b \pmod{2^{a+1}u}, \quad \text{wo} \quad 2^a u < b < 2^{a+1}u.$$

Nach (1.6) ist dann  $F(n, 2^a u) = -\frac{1}{2}$ , womit auch (11) nachgewiesen ist.

Für  $a=1$  ist, unter der Bedingung (9),  $F(n, 2u) = -\frac{1}{2}$ :

$$(12) \quad F(n, 2u) = -\frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \equiv 2 \pmod{4}, \quad n \equiv 0 \pmod{u}.$$

In der Tat ist dann  $n \equiv 2u \pmod{4u}$ , und (12) folgt aus (1.6).

Wir definieren jetzt eine Folge  $n_1, n_2, \dots$  so: Es sei  $n_1$  die kleinste Zahl, für die

$$n_1 \equiv -2 \pmod{2};$$

$n_2$  die kleinste Zahl, für die

$$n_2 \equiv -2 \pmod{2^2}, \quad n_2 \equiv 0 \pmod{3^2}, \quad n_2 > n_1;$$



$n_3$  sei die kleinste Zahl, für die

$$n_3 \equiv -2 \pmod{2^3}, \quad n_3 \equiv 0 \pmod{3^3 \cdot 5^3}, \quad n_3 > n_2$$

u. s. w. Dann ist

$$(13) \quad n_1 < n_2 < \dots; \quad n_r \equiv -2 \pmod{2^r}, \quad n_r \equiv 0 \pmod{3^r \cdot 5^r \dots p_{r-1}^r},$$

wo  $p_{r-1}$  die  $(r-1)$ -te ungerade Primzahl bedeutet.

Es sei jetzt irgendein  $v$  ( $\geq 3$ ) vorgegeben. Nach (13) gibt es dann einen solchen Index  $r_0 = r_0(v) \geq 2$ , daß

$$(14) \quad n_r \equiv -2 \pmod{2^{a+1}}, \quad n_r \equiv 0 \pmod{u} \quad \text{für } r \geq r_0, \quad 2 \leq a \leq v, \quad u \leq v.$$

Sei jetzt  $r \geq r_0$ . Auf Grund von (7) ist

$$(15) \quad \begin{aligned} \Psi_k(n_r) = & - \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n_r}{u}\right) - \sum_{u=1}^{\infty} (2u)^{1-k} F(n_r, 2u) - \\ & - \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{1-k} F(n_r, 2^a u) = S_1 + S_2, \end{aligned}$$

wobei

$$(16) \quad \begin{aligned} S_1 = & - \sum_{u \leq v} u^{1-k} \psi\left(\frac{n_r}{u}\right) - \sum_{u \leq v} (2u)^{1-k} F(n_r, 2u) - \sum_{2 \leq a \leq v} \sum_{u \leq v} (2^a u)^{1-k} F(n_r, 2^a u), \\ S_2 = & - \sum_{u > v} u^{1-k} \psi\left(\frac{n_r}{u}\right) - \sum_{u > v} (2u)^{1-k} F(n_r, 2u) - \\ & - \sum_{a > v} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{1-k} F(n_r, 2^a u) - \sum_{2 \leq a \leq v} \sum_{u > v} (2^a u)^{1-k} F(n_r, 2^a u). \end{aligned}$$

Aus (9) und (14) ergibt sich, daß in  $S_1$  die Bedingungen (10), (11) und (12) für  $n = n_r$  zutreffen. Wegen (14) ist ferner dort  $u | n_r$ . Auf Grund von (1.3.1) ist somit

$$\psi\left(\frac{n_r}{u}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten

$$(17) \quad S_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{u \leq v} u^{1-k} + \sum_{u \leq v} (2u)^{1-k} + \sum_{2 \leq a \leq v} \sum_{u \leq v} (2^a u)^{1-k} \right\} - \sum_{2 \leq a \leq v} \sum_{u \leq v} (2^a u)^{1-k}.$$

Der Strich an der  $u$ -Summe bedeutet hier, wie in (5), daß  $u$  den in (2) angegebenen Kongruenzen zu genügen hat.

Für  $v \rightarrow \infty$  strebt der Inhalt der geschweiften Klammer in (17), auf Grund von (5.2.1), gegen

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} + \sum_{u=1}^{\infty} (2u)^{1-k} + \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{1-k} \\ = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{1-k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-k} = \zeta(k-1). \end{aligned}$$

Die Doppelsumme in (17) strebt wegen (2) gegen  $\theta_k$ . Somit strebt  $S_1$  gegen

$$\frac{1}{2} \zeta(k-1) - \theta_k.$$

Wegen (16), (1.3.1) und (1.6) strebt  $S_2$  gegen Null. Wenn also ein beliebiges  $\varepsilon$  vorgegeben ist, so kann man wegen (15) ein solches  $v = v(\varepsilon)$  finden, daß für  $r \geq r_0(v)$

$$|\Psi_k(n_r) - \frac{1}{2} \zeta(k-1) + \theta_k| < \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, daß

$$(18) \quad \Psi_k(n_r) \rightarrow \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \theta_k.$$

Aus (18) und (1.14) ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (8).

Im folgenden werden wir mit  $\mathfrak{N}$  unendliche Mengen natürlicher Zahlen, mit  $\mathfrak{M}$  Mengen natürlicher Zahlen bezeichnen.

Wir führen jetzt den folgenden Begriff ein: Eine Menge  $\mathfrak{N}$  heiße vollständig, wenn

$$(19) \quad \limsup_{n \in \mathfrak{N}, n=\infty} \Psi_k(n) = \Psi_k;$$

sie heiße unvollständig, wenn

$$(20) \quad \limsup_{n \in \mathfrak{N}, n=\infty} \Psi_k(n) < \Psi_k.$$

Auf Grund von (1.14) muß einer der Fälle (19), (20) vorliegen. Folgende Tatsachen, von denen später Gebrauch zu machen ist, ergeben sich unmittelbar aus der obigen Definition und der anschließenden Bemerkung:

- 1) Die Menge aller natürlichen Zahlen ist vollständig.
- 2) Wenn aus einer vollständigen (unvollständigen) Menge eine endliche Menge von Gliedern entfernt wird, oder wenn zu einer vollständigen (unvollständigen) Menge eine endliche Menge von Gliedern hinzugefügt wird, so ist die so entstehende Menge vollständig (unvollständig).
- 3) Wenn aus einer vollständigen Menge  $\mathfrak{N}$  eine unvollständige Teilmenge  $\mathfrak{N}_0$  entfernt wird, so ist die Restmenge  $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0$  vollständig.



4) Jede unendliche Teilmenge einer unvollständigen Menge ist unvollständig.

5) Die Menge  $\mathcal{N}$  ist vollständig, wenn sie eine vollständige Teilmenge besitzt.

Es folgen jetzt sechs Hilfssätze.

HILFSSATZ 2. Die Menge  $\mathcal{N}_2$  aller geraden natürlichen Zahlen ist vollständig.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Menge  $\mathcal{N}'$  aller ungeraden natürlichen Zahlen unvollständig ist. Wir setzen

$$(21) \quad \Psi'_k = \limsup_{v=\infty} \Psi_k(v).$$

Nach (2), (3) und (1.3.8) ist

$$\theta_k \leq 12^{1-k} + 16^{1-k} + 20^{1-k} + \dots = 4^{1-k}(3^{1-k} + 4^{1-k} + 5^{1-k} + \dots)$$

$$\leq 4^{1-k} \left( 3^{1-k} + \int_3^{\infty} y^{1-k} dy \right) = 4^{1-k} \left( 3^{1-k} + \frac{3^{2-k}}{k-2} \right)$$

$$\leq 4^{1-k} (3^{1-k} + \frac{3}{2} \cdot 3^{1-k}) < 2 \cdot 4^{1-k} 3^{1-k},$$

$$(22) \quad \theta_k < 2 \cdot 12^{1-k}.$$

Aus (8) und (22) folgt

$$(23) \quad \Psi_k \geq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - 2 \cdot 12^{1-k}.$$

Wir betrachten jetzt gesondert drei Fälle.

1) Es sei  $v \equiv 1 \pmod{4}$ . Nach (1.6) ist dann  $F(v, 2) = \frac{1}{2}$ . Wegen (7), (1.3.1), (1.6), (5.2.1) und (23) ist daher

$$\begin{aligned} \Psi_k(v) &\leq \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} 2^{1-k} \\ &= \frac{1}{2} \zeta(k-1) - 2^{1-k} \leq \Psi_k + 2 \cdot 12^{1-k} - 2^{1-k}. \end{aligned}$$

2) Es sei  $v \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $v \equiv 0 \pmod{3}$ . Dann ist  $v \equiv 3 \pmod{12}$ , also  $F(v, 6) = \frac{1}{6}$ ,

$$\Psi_k(v) \leq \frac{1}{6} \zeta(k-1) - 6^{1-k} \leq \Psi_k + 2 \cdot 12^{1-k} - 6^{1-k}.$$

3) Es sei  $v \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $v \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Nach (1.3.1) ist dann

$$3^{1-k} \psi\left(\frac{v}{3}\right) \geq 3^{1-k} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 3^{-k} - \frac{1}{8} \cdot 3^{1-k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Psi_k(v) \leq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - 3^{-k} \leq \Psi_k + 2 \cdot 12^{1-k} - \frac{1}{8} \cdot 3^{1-k}.$$

Für alle  $v$  ist demnach

$$\begin{aligned} \Psi_k(v) &\leq \Psi_k + 2 \cdot 12^{1-k} - 6^{1-k} = \Psi_k + (2 - 2^{k-1}) 12^{1-k} \\ &\leq \Psi_k + (2 - 2^5) 12^{1-k}, \\ (24) \quad \Psi_k(v) &\leq \Psi_k - 30 \cdot 12^{1-k}. \end{aligned}$$

Aus (21) und (24) folgt

$$\Psi'_k \leq \Psi_k - 30 \cdot 12^{1-k} < \Psi_k.$$

Wegen (20) ist also die Menge  $\mathcal{N}'$  unvollständig.

HILFSSATZ 3. Die Menge  $\mathcal{N}$  ist unvollständig, wenn man jedem  $n$  in  $\mathcal{N}$  eine beliebig große Zahl  $M$  so zuordnen kann, daß

$$(25) \quad \Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq \varepsilon,$$

wo die Zahl  $\varepsilon$  nicht von  $n$  und  $M$  abhängt.

Beweis. Nehmen wir an, die Menge  $\mathcal{N}$  sei vollständig. Wegen (19) gibt es dann ein solches  $n \in \mathcal{N}$ , daß

$$\Psi_k \leq \Psi_k(n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diesem  $n$  ist nach Voraussetzung eine unendliche Menge  $\mathcal{M}$  von Zahlen  $M$  zugeordnet, die der Ungleichung (25) genügen. Für  $M \in \mathcal{M}$  gilt daher

$$\Psi_k(M) \geq \Psi_k(n) + \varepsilon \geq \Psi_k + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach (1.14) folgt hieraus

$$\Psi_k \geq \limsup_{M \in \mathcal{M}, M=\infty} \Psi_k(M) \geq \Psi_k + \frac{\varepsilon}{2},$$

was unmöglich ist.

HILFSSATZ 4. Für jedes  $r$  ist die Menge  $\mathcal{N}_{2r}$  aller Zahlen

$$(26) \quad n \equiv -2 \pmod{2^r}$$

vollständig.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist die Menge  $\mathcal{N}_{21} = \mathcal{N}_2$  vollständig. Es genügt daher,  $r \geq 2$  sowie die Vollständigkeit von  $\mathcal{N}_{2,r-1}$  anzunehmen und die Vollständigkeit von  $\mathcal{N}_{2r}$  zu beweisen (Induktion).

Da die Restklasse  $n \equiv -2 \pmod{2^{r-1}}$  in die beiden Restklassen

$$n \equiv -2 \quad \text{und} \quad 2^{r-1} - 2 \pmod{2^r}$$

zerfällt, so besteht nach (26) die Menge  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{2,r-1} - \mathcal{N}_{2r}$  aus denjenigen Zahlen  $n$ , für die

$$(27) \quad n \equiv 2^{r-1} - 2 \pmod{2^r}.$$

Es genügt daher nachzuweisen, daß diese Menge  $\mathfrak{N}$  unvollständig ist, weil daraus die Vollständigkeit der Menge  $\mathfrak{N}_{2r} = \mathfrak{N}_{2r-1} - \mathfrak{N}$  folgt.

Wir setzen jetzt für beliebige  $n$

$$(28) \quad T_1(n) = \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right),$$

$$(29) \quad T_2(n) = \sum_{\substack{q=2 \\ 2|q, 2^{r-1} \nmid q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q),$$

$$(30) \quad T_3(n) = \sum_{\substack{q=2 \\ 2^{r-1} \nmid q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q).$$

Nach (7) ist dann

$$(31) \quad \Psi_k(n) = -T_1(n) - T_2(n) - T_3(n).$$

Es sei  $n$  eine beliebige vorgegebene Zahl der durch (27) definierten Menge  $\mathfrak{N}$ . Ferner sei  $v$  irgendwie so gewählt, daß

$$(32) \quad \sum_{u>v} u^{1-k} \leq 2^{-rk}.$$

Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die den Bedingungen

$$(33) \quad M \equiv -2 \pmod{2^r}, \quad M \equiv n \pmod{\prod_{u \leq v} u}$$

genügen. Es ist klar, daß die Menge  $\mathfrak{M}$  dieser Zahlen  $M$  unendlich ist.

Nach (31) ist

$$(34) \quad \Psi_k(M) - \Psi_k(n) = \sum_{j=1}^3 \{T_j(n) - T_j(M)\}.$$

Hierbei ist nach (28), (1.3.1) und (33)

$$T_1(n) - T_1(M) = \sum_{u>v} u^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{n}{u}\right) - \psi\left(\frac{M}{u}\right) \right\},$$

also

$$(35) \quad |T_1(n) - T_1(M)| \leq \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Weiter ist nach (33) und (27)

$$M \equiv n \pmod{2^{r-1} \prod_{u \leq v} u}.$$

Wegen (1.6) folgt hieraus

$$F(M, 2^a u) = F(n, 2^a u) \quad \text{für} \quad 1 \leq a \leq r-2, \quad u \leq v.$$

Nach (29) ist somit

$$T_2(n) - T_2(M) = \sum_{1 \leq a \leq r-2} \sum_{u>v} (2^a u)^{1-k} \{F(n, 2^a u) - F(M, 2^a u)\},$$

d. h.

$$(36) \quad |T_2(n) - T_2(M)| \leq \sum_{a=1}^{\infty} 2^{a(1-k)} \sum_{u>v} u^{1-k} \leq \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Endlich ist nach (1.6), (27) und (33)

$$F(n, 2^{r-1}) = \frac{1}{2}, \quad F(M, 2^{r-1}) = -\frac{1}{2}.$$

Wird also in (30),  $q = 2^{r-1}m$  gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} T_3(n) - T_3(M) &= 2^{(r-1)(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} \{F(n, 2^{r-1}m) - F(M, 2^{r-1}m)\} \\ &= 2^{(r-1)(1-k)} \left( 1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{1-k} \right). \end{aligned}$$

Wegen (1.6) ist somit

$$T_3(n) - T_3(M) \geq 2^{(r-1)(1-k)} \left( 1 - \sum_{m=2}^{\infty} m^{1-k} \right).$$

Hierin ist

$$(37) \quad \sum_{m=2}^{\infty} m^{1-k} \leq 2^{1-k} + \int_2^{\infty} y^{1-k} dy = \left( 1 + \frac{2}{k-2} \right) 2^{1-k} \leq \frac{3}{2} \cdot 2^{1-k} \leq \frac{1}{20}.$$

Somit ist

$$(38) \quad T_3(n) - T_3(M) \geq 2^{(r-1)(1-k)-1} \geq 2^{2-rk}.$$

Aus (34), (35), (36), (38) und (32) ergibt sich

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq 2^{2-rk} - 2 \sum_{u>v} u^{1-k} \geq 2^{1-rk}.$$

Somit ist (25) mit  $\varepsilon = 2^{1-rk}$  erfüllt, und Hilfssatz 3 ergibt die Unvollständigkeit der Menge  $\mathfrak{N}$ .

Wir führen jetzt die folgenden Summen ein, die nach Art der Summen (28)-(30) gebildet sind. Um die Bezeichnungen etwas zu vereinfachen, soll bis zum Ende dieses Paragraphen der Buchstabe  $q$  nur *gerade* Werte

annehmen. Es sei

$$(39) \quad S_1(n) = \sum_{\substack{u=1 \\ p^r | u}}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right),$$

$$(40) \quad S_2(n) = \sum_{\substack{u=1 \\ p^r | u}}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right),$$

$$(41) \quad S_3(n) = \sum_{\substack{q=2 \\ p^r | q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q),$$

$$(42) \quad S_4(n) = \sum_{\substack{q=2 \\ p^r | q, 4 \nmid q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q),$$

$$(43) \quad S_5(n) = \sum_{\substack{q=2 \\ 4p^r | q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q).$$

Aus (7) und (39)-(43) ergibt sich

$$(44) \quad \Psi_k(M) - \Psi_k(n) = \sum_{j=1}^5 \{S_j(n) - S_j(M)\}.$$

Wird ferner in (43) gesetzt  $q = 4p^r m$ , so folgt

$$(45) \quad S_5(n) = (4p^r)^{1-k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} F(n, 4p^r m).$$

Wegen (45), (1.6) und (37) ist

$$(46) \quad |S_5(n)| \leq \frac{1}{2} (4p^r)^{1-k} \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{1-k}\right) \leq \frac{1,05}{2} (4p^r)^{1-k}.$$

**HILFSSATZ 5.** Es sei  $\mathfrak{N}$  eine beliebige vollständige Menge, deren Zahlen bei festem  $H \geq 4$ , der Bedingung

$$(47) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}$$

genügen. Es sei ferner  $\mathfrak{M}_p$  diejenige Teilmenge von  $\mathfrak{N}$ , für die

$$(48) \quad n \equiv 0 \pmod{p^{r-1}}.$$

Dann ist die Menge  $\mathfrak{M}_p$ , sofern  $p < 100$ , vollständig.

(Wir schreiben  $\mathfrak{M}_p$  und nicht  $\mathfrak{N}_p$ , da es nicht bekannt ist, ob die Menge  $\mathfrak{M}_p$  auch für jedes  $p > 100$  unendlich ist.)

Beweis. Es sei  $p$  zunächst beliebig, aber fest. Nach Voraussetzung ist die Menge  $\mathfrak{M}_{p^1}$  vollständig. Es genügt daher, die Menge  $\mathfrak{M}_p$  als vollständig vorauszusetzen und die Vollständigkeit der Menge  $\mathfrak{M}_{p^{r+1}}$  zu beweisen. Hierzu genügt es aber zu zeigen, daß die Menge  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_{p^{r+1}}$  endlich oder unvollständig ist. Diese Menge  $\mathfrak{M}$  besteht aus denjenigen Zahlen von  $\mathfrak{N}$ , die den Bedingungen

$$(49) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}; \quad n = p^{r-1}h, \quad p \nmid h$$

genügen. Ist  $\mathfrak{M}$  endlich, so ist nichts zu beweisen. Daher wollen wir annehmen, daß  $\mathfrak{M}$  unendlich ist.

Es sei  $n$  eine beliebig vorgegebene Zahl der Menge  $\mathfrak{M}$ . Ferner sei  $v$  irgendwie so gewählt, daß  $v \geq 5$  und

$$(50) \quad 2 \sum_{u>v} u^{1-k} + 2^{v(1-k)+1} < 0,01 (4p^r)^{1-k}.$$

Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die den Bedingungen

$$(51) \quad M \equiv n \pmod{2^v \prod_{\substack{u \leq v \\ p \nmid u}} u}, \quad M \equiv 0 \pmod{p^r}$$

genügen. Es ist klar, daß es unendlich viele solche Zahlen  $M$  gibt.

Aus (49) und (51) folgt

$$(52) \quad M \equiv n \pmod{u} \quad \text{für} \quad u \leq v, \quad p^r \nmid u.$$

In Verbindung mit (39) und (1.3.1), ergibt dies

$$(53) \quad |S_1(n) - S_1(M)| \leq \sum_{\substack{u>v \\ p^r \nmid u}} u^{1-k} \left| \psi\left(\frac{n}{u}\right) - \psi\left(\frac{M}{u}\right) \right| \leq \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Weiter folgt aus (51) und (52)

$$M \equiv n \pmod{2^a m} \quad \text{für} \quad m = 2^a u, \quad a < v, \quad u \leq v, \quad p^r \nmid u.$$

Wegen (1.6) ist daher

$$F(M, 2^a u) = F(n, 2^a u) \quad \text{für} \quad a < v, \quad u \leq v, \quad p^r \nmid u.$$

Nach (41) und (1.6) hat man somit

$$\begin{aligned}
 |S_3(n) - S_3(M)| &\leq \sum_{\substack{q=2 \\ 2^v|q}}^{\infty} q^{1-k} |F(n, q) - F(M, q)| + \\
 &\quad + \sum_{a=1}^{v-1} \sum_{u>v} (2^a u)^{1-k} |F(n, 2^a u) - F(M, 2^a u)| \\
 &\leq \sum_{\substack{q=2 \\ 2^v|q}}^{\infty} q^{1-k} + \sum_{a=1}^{\infty} 2^{a(1-k)} \sum_{u>v} u^{1-k} \\
 &\leq 2^{v(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} + \sum_{u>v} u^{1-k}.
 \end{aligned}$$

Zusammen mit (37) ergibt dies

$$(54) \quad |S_3(n) - S_3(M)| \leq 2^{v(1-k)+1} + \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Nach (1.3.1), (49) und (51) ist

$$\psi\left(\frac{n}{p^r}\right) = \psi\left(\frac{h}{p}\right) \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \quad \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Wegen (40) ist somit, wenn dort  $u$  durch  $p^r u$  ersetzt wird,

$$(55) \quad S_2(n) - S_2(M) = p^{r(1-k)} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{n}{p^r u}\right) - \psi\left(\frac{M}{p^r u}\right) \right\},$$

$$(56) \quad S_2(n) - S_2(M) \geq p^{r(1-k)-1} - p^{r(1-k)} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k}.$$

Weiter ist nach (1.6), (49) und (51)

$$F(n, 2p^r u) \geq -\frac{1}{2}, \quad M \equiv 2p^r \pmod{4p^r}, \quad F(M, 2p^r) = -\frac{1}{2}.$$

Nach (42) ist daher, wenn man dort  $q = 2p^r u$  setzt,

$$(57) \quad S_4(n) - S_4(M) = (2p^r)^{1-k} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \{F(n, 2p^r u) - F(M, 2p^r u)\},$$

$$(58) \quad S_4(n) - S_4(M) \geq -(2p^r)^{1-k} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k}.$$

Endlich ist nach (46)

$$(59) \quad |S_5(n) - S_5(M)| \leq 1,05 (4p^r)^{1-k}.$$

Aus (44), (53), (54), (56), (58), (59) und (50) folgt

$$\begin{aligned}
 \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq -2 \sum_{u>v} u^{1-k} - 2^{v(1-k)+1} + p^{r(1-k)-1} - \\
 &\quad - p^{r(1-k)} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} - (2p^r)^{1-k} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} - 1,05 (4p^r)^{1-k} \\
 (60) \quad &\geq p^{r(1-k)} \left\{ p^{-1} - (1+2^{1-k}) \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} - 1,06 \cdot 4^{1-k} \right\}.
 \end{aligned}$$

Hierin ist nach (1.3.8), mag  $k$  gerade sein oder nicht,

$$\begin{aligned}
 \sum_{u=5}^{\infty} u^{1-k} &\leq 5^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{m=6}^{\infty} m^{1-k} \leq 5^{1-k} + \frac{1}{2} \int_5^{\infty} y^{1-k} dy \\
 (61) \quad &= \left(1 + \frac{5}{2k-4}\right) 5^{1-k},
 \end{aligned}$$

also

$$(1+2^{1-k}) \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} + 1,06 \cdot 4^{1-k} \leq (1+2^{-5}) \cdot 2 \cdot 3^{-5} + 1,06 \cdot 4^{-5} < 0,01.$$

Somit ist

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq p^{r(1-k)} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{100} \right).$$

Jetzt machen wir von unserer Annahme  $p < 100$  Gebrauch. Es ist dann  $p \leq 97$  und daher ist die Ungleichung (25) mit

$$\varepsilon = p^{r(1-k)} \left( \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

erfüllt. Unsere Behauptung folgt jetzt aus Hilfssatz 3.

**HILFSSATZ 6.** Es sei  $\mathfrak{N}$  eine beliebige vollständige Menge, deren Zahlen, bei festem  $H \geq 4$ , den Bedingungen

$$(62) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}; \quad n \equiv 0 \pmod{u} \quad \text{für } u < 100$$

genügen. Es sei ferner  $\mathfrak{M}_{pr}$  derjenige Teil von  $\mathfrak{N}$ , für den

$$(63) \quad n \equiv 0 \pmod{p^{r-1}}.$$

Dann ist die Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$ , sofern

$$(64) \quad 100 < p < 2^{2k+1},$$

vollständig.

Beweis. Es möge  $p$  der Bedingung (64) genügen. Nach Voraussetzung ist die Menge  $\mathfrak{M}_{p1}$  vollständig. Es genügt daher, die Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$  als vollständig vorauszusetzen und die Vollständigkeit der Menge  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  zu beweisen. Und hierzu genügt es zu zeigen, daß die Menge  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{pr} - \mathfrak{M}_{p,r+1}$  endlich oder unvollständig ist. Diese Menge  $\mathfrak{M}$  besteht aus denjenigen Zahlen von  $\mathfrak{N}$ , die den Bedingungen (62) und außerdem der Bedingung

$$(65) \quad n = p^{r-1}h, \quad p \nmid h$$

genügen. Ist  $\mathfrak{M}$  endlich, so ist nichts zu beweisen. Daher dürfen wir annehmen, daß  $\mathfrak{M}$  unendlich ist.

Es sei  $n$  eine beliebig vorgegebene Zahl der Menge  $\mathfrak{M}$ . Ferner sei  $v$  irgendwie so gewählt, daß  $v > 100$  und

$$(66) \quad 2 \sum_{u>v} u^{1-k} + 2^{v(1-k)+1} < (1-2^{1-k}) p^{r(1-k)} \sum_{u>100} u^{1-k}.$$

Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die den Bedingungen (51) genügen. Es ist klar, daß es unendlich viele solche Zahlen  $M$  gibt. Die Formeln (52)-(59) bleiben in Kraft, doch sollen im folgenden nur (53), (54), (55), (57) und (59) benutzt werden.

Nach (62), (64) und (65) ist

$$n = p^{r-1}um, \quad p \nmid m = \frac{h}{u} \quad \text{für} \quad u < 100.$$

Wegen (1.3.1) ist daher

$$(67) \quad \psi\left(\frac{n}{p^r u}\right) = \psi\left(\frac{m}{p}\right) \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad u < 100.$$

Weiter ist nach (51) und (62)

$$M \equiv 0 \pmod{p^r u} \quad \text{für} \quad u < 100,$$

und daher

$$\psi\left(\frac{M}{p^r u}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{für} \quad u < 100.$$

Mit Rücksicht auf (55) und (67), bekommt man daher, statt (56),

$$(68) \quad S_2(n) - S_2(M) \geq p^{r(1-k)-1} \sum_{u<100} u^{1-k} - p^{r(1-k)} \sum_{u>100} u^{1-k}.$$

Ferner ist nach (1.6), (62) und (51) für  $u < 100$

$$(69) \quad F(n, 2p^r u) \geq -\frac{1}{2}, \quad M \equiv 2p^r u \pmod{4p^r u}, \quad F(M, 2p^r u) = -\frac{1}{2}.$$

Zusammen mit (57) ergibt dies, an Stelle von (58),

$$(70) \quad S_4(n) - S_4(M) \geq -(2p^r)^{1-k} \sum_{u>100} u^{1-k}.$$

Aus (44), (53), (54), (68), (70) und (66) folgt

$$\begin{aligned} \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq -2 \sum_{u>v} u^{1-k} - 2^{v(1-k)+1} + p^{r(1-k)-1} - \\ &\quad - (1+2^{1-k}) p^{r(1-k)} \sum_{u>100} u^{1-k} + S_5(n) - S_5(M) \\ &\geq p^{r(1-k)-1} - 2 p^{r(1-k)} \sum_{u>100} u^{1-k} + S_5(n) - S_5(M). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$2 \sum_{u>100} u^{1-k} \leq \sum_{m=100}^{\infty} m^{1-k} \leq \int_{99}^{\infty} y^{1-k} dy = \frac{99^{2-k}}{k-2} \leq \frac{99^{2-k}}{4} \leq 2^{8-6k}.$$

Somit ist

$$(71) \quad \Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq p^{r(1-k)-1} - 2^{8-6k} p^{r(1-k)} + S_5(n) - S_5(M).$$

Wir betrachten jetzt gesondert zwei Fälle, je nachdem

$$p^r \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{oder} \quad p^r \equiv 3 \pmod{4}.$$

1) Es sei  $p^r \equiv 1 \pmod{4}$ . Dann verlangen wir von  $p$  nur, daß es dem Intervall

$$(72) \quad 100 < p < 2^{3k-4}$$

angehöre. Das Intervall (64) ist in (72) enthalten.

Nach (1.6) ist

$$F(n, 4p^r) \geq -\frac{1}{2}.$$

Nach (51) und (62) ist

$$M \equiv -2 \pmod{8}, \quad M \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Daher ist (9) mit  $\alpha = 2$ ,  $n = M$ ,  $u = p^r$  erfüllt, und (11) ergibt

$$F(M, 4p^r) = -\frac{1}{2}.$$

Nunmehr folgt aus (45), (1.6) und (37)

$$\begin{aligned} S(n) - S_5(M) &= (4p^r)^{1-k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} \{F(n, 4p^r m) - F(M, 4p^r m)\} \\ &\geq -(4p^r)^{1-k} \sum_{m=2}^{\infty} m^{1-k} \geq -\frac{3}{2} (8p^r)^{1-k}. \end{aligned}$$

Daher ist nach (71) und (72)

$$\begin{aligned} \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq p^{r(1-k)}(p^{-1} - 2^{8-6k} - 3 \cdot 2^{2-3k}) \\ &\geq p^{r(1-k)} 2^{4-3k} (1 - 2^{4-3k} - \frac{3}{4}) \geq 2^{1-3k} p^{r(1-k)}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (25) ist daher mit

$$\varepsilon = 2^{1-3k} p^{r(1-k)}$$

erfüllt, und Hilfssatz 3 liefert die Behauptung.

Der Fall  $p^r \equiv 3 \pmod{4}$  wird in drei Unterfälle geteilt, je nach dem Verhalten der Zahl  $h$  in (55).

2.1) Es sei  $p^r \equiv 3 \pmod{4}$  und

$$(73) \quad h \equiv a \pmod{p}, \quad \text{wo} \quad 0 < a < p, \quad a \equiv 1 \text{ oder } 2 \pmod{3}.$$

Nach (62), (65) und (1.3.1) ist dann, wegen  $3|h$ ,  $3 \nmid a$ ,

$$h \equiv a + p \text{ oder } a + 2p \pmod{3p},$$

$$\psi\left(\frac{n}{3p^r}\right) = \psi\left(\frac{h}{3p}\right) \geq \psi\left(\frac{a+p}{3p}\right) = \frac{a}{3p} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Die hier angegebene untere Schranke für  $\psi(n/3p^r)$  ist um  $\frac{1}{3} - 2/3p$  besser als die durch (67) für  $u = 3$  gelieferte Schranke  $1/p - \frac{1}{2}$ . Zu der rechten Seite von (68) und (71) kann man daher wegen (55)

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3p}\right) (3p^r)^{1-k} = 3^{-k} p^{r(1-k)} - 2 \cdot 3^{-k} p^{r(1-k)-1}$$

hinzufügen. Das gibt

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq 3^{-k} p^{r(1-k)} - 2^{8-6k} p^{r(1-k)} + S_5(n) - S_5(M).$$

In Verbindung mit (46), folgt hieraus

$$\begin{aligned} \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq p^{r(1-k)} \{3^{-k} - 2^{8-6k} - 1,05 \cdot 4^{1-k}\} \\ &= (4p^r)^{1-k} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} - 2^{6-4k} - 1,05 \right\} \\ &\geq (4p^r)^{1-k} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^5 - 2^{6-24} - 1,05 \right\} \geq \frac{1}{3} (4p^r)^{1-k}, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 3 liefert die Behauptung.

2.2) Es sei  $p^r \equiv 3 \pmod{4}$  und

$$(74) \quad h \equiv a \pmod{p}, \quad \text{wo} \quad 0 < a < p, \quad a \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod{4}.$$

Dann ist zunächst

$$(75) \quad h \equiv a \text{ oder } a + p \pmod{4p}.$$

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte nach (74)

$$h \equiv a + 2p \text{ oder } a + 3p \pmod{4p}$$

sein. Wegen  $p^r \equiv 3 \pmod{4}$  ist  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Nach (62) und (65) ist  $h \equiv 2 \pmod{4}$ . Es müßte also sein  $2 \equiv a + 2$  oder  $a + 1 \pmod{4}$ , d. h.  $a \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$ , im Widerspruch zu (74).

Aus (75) und (65) ergibt sich

$$n \equiv ap^{r-1} \text{ oder } p^r + ap^{r-1} \pmod{4p^r}.$$

In Verbindung mit (74) und (1.6), ergibt dies

$$F(n, 2p^r) = \frac{1}{2},$$

während wir in (69) für  $u = 1$  nur  $F(n, 2p^r) \geq -\frac{1}{2}$  hatten. Zu der rechten Seite von (70) und (71) kann man daher, wegen (57),  $(2p^r)^{1-k}$  hinzufügen. Mit Rücksicht auf (46) bekommt man dann

$$\begin{aligned} \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq (2p^r)^{1-k} - 2^{8-6k} p^{r(1-k)} + S_5(n) - S_5(M) \\ &\geq (2p^r)^{1-k} (1 - 2^{7-5k} - 1,05 \cdot 2^{1-k}) \geq \frac{1}{2} (2p^r)^{1-k}, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 3 liefert die Behauptung.

Die Bedingungen (73) und (74) ergeben zusammen

$$h \equiv a \pmod{p}, \quad \text{wo} \quad 0 < a < p, \quad a \not\equiv 0 \text{ oder } 9 \pmod{12}.$$

Es genügt daher, noch den folgenden Fall zu betrachten:

2.3) Es sei  $p^r \equiv 3 \pmod{4}$  und

$$h \equiv a \pmod{p}, \quad \text{wo} \quad 9 \leq a < p.$$

Wegen (65) ist dann

$$n \equiv ap^{r-1} \pmod{p^r}, \quad \text{wo} \quad 9 \leq a < p,$$

d. h.

$$\psi\left(\frac{n}{p^r}\right) = \psi\left(\frac{a}{p}\right) \geq \psi\left(\frac{9}{p}\right) = \frac{9}{p} - \frac{1}{2}.$$

Das ist um  $8/p$  besser als die in (67) für  $u = 1$  gelieferte Schranke  $1/p - \frac{1}{2}$ . Zu (68) und (71) kann daher wegen (55)

$$\frac{8}{p} p^{r(1-k)} = 8p^{r(1-k)-1}$$

hinzugefügt werden.

A. Walfisz: Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln

Es ergibt sich dann, mit Rücksicht auf (46) und (64),

$$\begin{aligned} Y_k(M) - Y_k(n) &\geq 9p^{r(1-k)-1} - 2^{8-6k} p^{r(1-k)} + S_5(n) - S_5(M) \\ &\geq (4p^r)^{1-k} \left\{ \frac{9}{p} 4^{k-1} - 2^{8-4k} - 1,05 \right\} \\ &\geq (4p^r)^{1-k} \left\{ \frac{9}{2^{2k+1}} 4^{k-1} - 2^{-18} - 1,05 \right\} \\ &= (4p^r)^{1-k} \left\{ \frac{9}{8} - 2^{-18} - 1,05 \right\} \geq 0,05 (4p^r)^{1-k}, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 3 ergibt die Behauptung.

**HILFSSATZ 7.** Die durch die Bedingungen

$$(76) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}; \quad n \equiv 0 \pmod{u} \quad \text{für} \quad u < 2^{2k+1}$$

bestimmte Menge  $\mathfrak{N}$  ist vollständig.

**Beweis.** Wir wollen die Menge  $\mathfrak{N}$  einfach als Menge (76) bezeichnen und später bei anderen Mengen analog verfahren.

Da die Menge (76) bei wachsendem  $H$  abnimmt, darf  $H \geq 4$  vorausgesetzt werden. Nach Hilfssatz 4 ist die Menge

$$(77) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}$$

vollständig.

Wir legen jetzt die Zahl  $r$  folgendermaßen fest: Es sei  $r$  die kleinste natürliche Zahl, für die

$$(78) \quad 3^{r-1} > 2^{2k+1}.$$

Wendet man Hilfssatz 5 auf die vollständige Menge (77) und  $p = 3$  an, so folgt, daß die Menge

$$(79) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{3^{r-1}}$$

vollständig ist. Aermalige Anwendung von Hilfssatz 5 auf die Menge (79) und  $p = 5$  liefert die Vollständigkeit der Menge

$$n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{(3 \cdot 5)^{r-1}}.$$

Indem man fortfährt, Hilfssatz 5 anzuwenden, zeigt man die Vollständigkeit der Menge

$$(80) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{\prod_{p < 100} p^{r-1}}.$$

Weiter ist nach (78)

$$\prod_{p < 100} p^{r-1} \equiv 0 \pmod{u} \quad \text{für} \quad u < 100,$$

so daß jede Zahl der vollständigen Menge (80) der Bedingung (62) genügt. Man kann daher auf die Menge (80) den Hilfssatz 6 mit  $p = 101$  anwenden.

Das liefert die Vollständigkeit der Menge

$$(81) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{\prod_{p \leq 101} p^{r-1}}.$$

Eine weitere Anwendung von Hilfssatz 6 auf die Menge (81) und  $p = 103$  liefert die Vollständigkeit der Menge

$$n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{\prod_{p \leq 103} p^{r-1}}.$$

Indem man fortfährt Hilfssatz 6 anzuwenden, sieht man, daß die Menge

$$(82) \quad n \equiv -2 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 0 \pmod{\prod_{p < 2^{2k+1}} p^{r-1}}$$

vollständig ist. Da aber nach (78)

$$\prod_{p < 2^{2k+1}} p^{r-1} \equiv 0 \pmod{u} \quad \text{für} \quad u < 2^{2k+1},$$

so ist die vollständige Menge (82) in der Menge (76) enthalten. Daher ist auch die Menge (76) vollständig.

Wir haben jetzt alles zum Beweise des folgenden Satzes vorbereitet.

**SATZ 1.** Es sei  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $k \geq 6$ . Dann ist

$$(83) \quad \frac{\zeta(k-1) - 2\theta_k}{(1-2^{-k})\zeta(k)} \leq P_{2k} \leq \frac{\zeta(k-1) - 2\theta_k}{(1-2^{-k})\zeta(k)} + 1,04 \cdot 2^{1-k(2k-1)},$$

$$(84) \quad 2 - \frac{\zeta(k-1) - 2\theta_k}{(1-2^{-k})\zeta(k)} - 1,04 \cdot 2^{1-k(2k-1)} \leq Q_{2k} \leq 2 - \frac{\zeta(k-1) - 2\theta_k}{(1-2^{-k})\zeta(k)}.$$

**Beweis.** Die linke Hälfte der Ungleichung (6) ist auf Grund von (8) erfüllt. Jetzt soll die rechte Hälfte der Ungleichung (6) nachgewiesen werden. Dabei bedeute  $n$  eine Zahl der Menge (76).

Aus (7), (1.3.1), (1.6), (5.2.1), (76), (9), (10) und (11) folgt

$$\begin{aligned} Y_k(n) &= - \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right) - \sum_{q=2}^{\infty} q^{1-k} F(n, q) \\ &= - \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right) - \sum_{u=1}^{\infty} (2u)^{1-k} F(n, 2u) - \sum_{\substack{q=2 \\ 4|q}}^{\infty} q^{1-k} F(n, q) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} (2u)^{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (4m)^{1-k} - \sum_{\substack{q=2 \\ 4|q}}^{\infty} q^{1-k} \left\{ F(n, q) + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{1-k} \left\{ F(n, 2^a u) + \frac{1}{2} \right\} \\ (85) \quad &\leq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \sum_{2 \leq a < H} 2^{a(1-k)} \sum_{u < 2^{2k+1}} u^{1-k}. \end{aligned}$$



Der Strich an der  $u$ -Summe bedeutet hier, wie in (5) und (17), daß  $u$  den in (2) angegebenen Kongruenzen zu genügen hat.

Aus (85) folgt, auf Grund von Hilfssatz 7 und (19),

$$\Psi_k \leq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \sum_{2 \leq a < H} 2^{a(1-k)} \sum'_{u < 2^{2k+1}} u^{1-k}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung hängt nicht von  $H$  ab; rechts darf  $H$  beliebig groß sein. Wegen (2) ist daher

$$\begin{aligned} \Psi_k &\leq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(1-k)} \sum'_{u < 2^{2k+1}} u^{1-k} \\ (86) \quad &= \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \theta_k + \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(1-k)} \sum'_{u > 2^{2k+1}} u^{1-k}. \end{aligned}$$

In der  $u$ -Summe von (86) ist  $u$  an die in (2) angegebenen Kongruenzen gebunden, durchläuft also Zahlen von gewissen  $2^{a-2}$  Restklassen nach dem Modul  $2^a$ . Die einer festen Restklasse entsprechende Teilsumme ist, unter Beachtung von (1.3.8),

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{h=0}^{\infty} (2^{2k+1} + 2^a h)^{1-k} \leq 2^{(2k+1)(1-k)} + \int_0^{\infty} (2^{2k+1} + 2^a y)^{1-k} dy \\ &= 2^{(2k+1)(1-k)} + \frac{2^{(2k+1)(2-k)}}{2^a(k-2)} \\ &\leq 2^{(2k+1)(1-k)} + 2^{-a-2+(2k+1)(2-k)}. \end{aligned}$$

Daher ist in (86)

$$\begin{aligned} \sum_{a=2}^{\infty} &\leq \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(1-k)+a-2} \sum_{h=0}^{\infty} (2^{2k+1} + 2^a h)^{1-k} \\ &\leq 2^{(2k+1)(1-k)-2} \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(2-k)} + 2^{(2k+1)(2-k)-4} \sum_{a=2}^{\infty} 2^{a(1-k)} \\ &= (1-2^{2-k})^{-1} 2^{(2k+1)(1-k)-2(2-k)} + \\ &\quad + (1-2^{1-k})^{-1} 2^{(2k+1)(2-k)-4+2(1-k)} \\ &\leq \frac{16}{15} \cdot 2^{3-k-2k^2} + \frac{32}{31} \cdot 2^{k-2k^2} = \frac{32}{31} \left(1 + \frac{31}{30} \cdot 2^{3-2k}\right) 2^{-k(2k-1)} \\ &\leq \frac{32}{31} \left(1 + \frac{31}{30} \cdot 2^{-9}\right) 2^{-k(2k-1)} \leq 1,04 \cdot 2^{-k(2k-1)}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die rechte Hälfte der Ungleichung (6) bewiesen.

Aus (5.2.1) ergibt sich für  $s > 1$

$$(87) \quad (1-2^{-s}) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > 1.$$

Insbesondere ist

$$(88) \quad \frac{2}{(1-2^{-k}) \zeta(k)} < 2.$$

(83) folgt aus (1.15), (6) und (88); (84) folgt aus (1.16) und (83).

### § 3. $Q_{8n+2}$ und $P_{8n+6}$

In diesem Paragraphen wird  $k$  ungerade,  $k \geq 9$  vorausgesetzt. Hier lassen sich, wie im vorigen Paragraphen für  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , nur angenäherte Werte für  $P_{2k}$  und  $Q_{2k}$  angeben. Die Methode bleibt dieselbe, doch ist ihre Anwendung umständlicher und der Fehler größer. Insbesondere sind die Resultate, die man für  $k=5$  und  $7$  bekommt, von geringer Schärfe, so daß wir uns entschlossen haben, diese Werte auszuschließen. Aber mehr noch: Während wir im vorigen Paragraphen auf Grund von Hilfssatz 1.3 nur die eine Funktion  $\Psi_k$  anzunähern hatten, müssen wir jetzt, da wir statt dessen Hilfssatz 1.4 zur Verfügung haben, die beiden Funktionen  $\Psi_k$  und  $\psi_k$  getrennt behandeln. Um daher diesen Paragraphen nicht zu sehr anwachsen zu lassen und den Leser durch Wiederholung gleichartiger Dinge nicht zu ermüden, soll hier nur die eine Funktion  $\Psi_k$  untersucht werden, was uns die angenäherten Werte für  $Q_{8n+2}$  und  $P_{8n+6}$  liefern wird (Satz 1). Die analogen Ergebnisse für  $Q_{8n+6}$  und  $P_{8n+2}$ , die man mit Hilfe von  $\psi_k$  bekommt, sollen ohne Beweis angegeben werden (Satz 2).

In diesem Paragraphen soll  $q$  nur gerade Werte annehmen,  $m$  nur positive Werte.

Die zahlentheoretische Funktion  $n(m)$  sei folgendermaßen definiert:

Es sei  $n(2^a u)$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , die den Bedingungen genügt:

- (1)  $n \equiv -1 \pmod{2^{a+2}}$ ,
  - (2)  $n \equiv 0 \pmod{p^r}$  für  $p^r \parallel u$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,
  - (3)  $n \equiv p^v - p^{v-1} + \dots + p - 1 \pmod{p^v}$  für  $p^v \parallel u$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,
  - (4)  $n \equiv p^{q-1} - p^{q-2} + \dots + p - 1 \pmod{p^q}$  für  $p^q \parallel u$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$
- (für  $u=1$  fallen die Bedingungen (2)-(4) weg).

Weiter werde gesetzt

$$(5) \quad Z(k) = - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n(u)}{u} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n(m), m).$$

Unsere Aufgabe wird sein, die folgende Ungleichung zu beweisen, die der Ungleichung (2.6) entspricht, aber nicht so scharf ist:

$$(6) \quad Z(k) \leq \Psi_k \leq Z(k) + \frac{5790^{2-k}}{k-2}.$$

Die Funktion  $\Psi_k(y)$  hat jetzt nach (1.10) die Gestalt

$$(7) \quad \Psi_k(y) = - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{y}{u} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} G(y, m).$$

HILFSSATZ 1.

$$(8) \quad \Psi_k \geq Z(k).$$

Beweis. Nach Definition der Funktion  $n(m)$  ist

$$(9) \quad n(m) \equiv n(d) \pmod{4d} \quad \text{für} \quad d|m.$$

In der Tat, ist die Kongruenz (1) für ein gewisses  $\alpha$  erfüllt, so gilt sie auch für jedes  $\alpha_1 \leq \alpha$ . Ist die Kongruenz (2) für ein gewisses  $r$  erfüllt, so gilt sie auch für jedes  $r_1 \leq r$ . Ist weiter die Kongruenz (3) für ein gewisses  $v$  erfüllt, so gilt sie auch für jedes  $v_1 \leq v$ ; zugleich ist dann die Kongruenz (4) für jedes  $q_1 < v$  erfüllt. Ist endlich die Kongruenz (4) für ein gewisses  $q$  erfüllt, so gilt sie für jedes  $q_1 \leq q$ ; zugleich ist dann die Kongruenz (3) für jedes  $v_1 < q$  erfüllt.

Dies alles ist für  $m = 2^a u$  und die Zahlen  $\alpha_1, r_1, v_1, q_1$  anzuwenden die so definiert sind:

$$2^{\alpha_1} || d; \quad p^{r_1} || d \quad \text{für} \quad p \equiv 1 \pmod{4}; \quad p^{v_1} || d \quad \text{für} \quad p \equiv 3 \pmod{4}; \\ p^{q_1} || d \quad \text{für} \quad p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Die Zahlen  $r_1, v_1, q_1$  brauchen natürlich nicht alle zugleich definiert zu sein, und für  $d = 1$  ist sogar keine von ihnen definiert. Aber (9) ist jedenfalls richtig.

Wir bestimmen jetzt eine Folge  $n_1, n_2, \dots$  so: Es seien  $n_1, n_2, \dots$  die kleinsten Zahlen, für die

$$\begin{aligned} n_1 &\equiv -1 \pmod{2^2}; \\ n_2 &\equiv -1 \pmod{2^3}, \quad n_2 \equiv 2 \pmod{3}, \quad n_2 > n_1; \\ n_3 &\equiv -1 \pmod{2^4}, \quad n_3 \equiv 2 \pmod{3^2}, \quad n_3 \equiv 0 \pmod{5^2}, \quad n_3 > n_2; \\ n_4 &\equiv -1 \pmod{2^5}, \quad n_4 \equiv -7 \pmod{3^3}, \quad n_4 \equiv 0 \pmod{5^3}, \\ &\quad n_4 \equiv -43 \pmod{7^3}, \quad n_4 > n_3 \end{aligned}$$

u. s.w. Hierbei sind  $3, 5, 7, \dots$  die ungeraden Primzahlen, wachsend geordnet, und die Kongruenzen, denen die Zahlen  $n_r$  nach den Moduln  $p^{r-1}$  zu genügen haben, sind (2)-(4). Für  $n_4$  lautet z. B. die Kongruenz nach dem Modul  $7^3$ , in der Schreibweise (3),

$$n_4 \equiv 7^3 - 7^2 + 7 - 1 \pmod{7^3}.$$

Es sei irgendein  $v (\geq 3)$  gegeben. Auf Grund der obigen Kongruenzen für  $n_r$ , der Definition der Funktion  $n(m)$  und (9), kann man dann einen solchen Index  $r_0 = r_0(v) \geq 2$  finden, daß

$$(10) \quad n_r \equiv n(m) \pmod{4m} \quad \text{für} \quad r \geq r_0, \quad m = 2^a u, \quad 0 \leq a \leq v, \quad 0 < u \leq v.$$

Sei jetzt  $r \geq r_0$ . Nach (7) ist

$$\begin{aligned} \Psi_k(n_r) &= - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n_r}{u} \right) - \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^{a+1}u)^{1-k} G(n_r, 2^a u) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} S_1 &= - \sum_{u \leq v} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n_r}{u} \right) - \sum_{0 \leq a \leq v} \sum_{u \leq v} (2^{a+1}u)^{1-k} G(n_r, 2^a u), \\ S_2 &= - \sum_{u > v} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n_r}{u} \right) - \sum_{a > v} \sum_{u=1}^{\infty} (2^{a+1}u)^{1-k} G(n_r, 2^a u) \\ &\quad - \sum_{0 \leq a \leq v} \sum_{u > v} (2^{a+1}u)^{1-k} G(n_r, 2^a u). \end{aligned}$$

Nach (1.3.1) und (10) ist in  $S_1$

$$\psi \left( \frac{n_r}{u} \right) = \psi \left( \frac{n(u)}{u} \right);$$

nach (1.7) und (10) ist in  $S_1$

$$G(n_r, 2^a u) = G(n(2^a u), 2^a u).$$

Somit ist

$$S_1 = - \sum_{u \leq v} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n(u)}{u} \right) - \sum_{0 \leq a \leq v} \sum_{u \leq v} (2^{a+1}u)^{1-k} G(n(2^a u), 2^a u).$$

Nach (5) strebt also  $S_1$  für  $v \rightarrow \infty$  gegen  $Z(k)$ . Wegen (1.3.1) und (1.7) strebt  $S_2$  gegen Null. Der Schluß des Beweises verläuft jetzt genau so, wie beim analogen Hilfssatz 2.1 im vorigen Paragraphen.

Wie im vorigen Paragraphen, werden wir mit  $\mathfrak{N}$  unendliche Mengen natürlicher Zahlen, mit  $\mathfrak{M}$  Mengen natürlicher Zahlen bezeichnen. Die Definitionen (2.19) einer vollständigen Menge und (2.20) einer unvollständigen Menge behalten wir bei. Dann gelten auch die dort aufgezählten fünf Eigenschaften der vollständigen und unvollständigen Mengen. Auch Hilfssatz 2.3 bleibt in Kraft.

HILFSSATZ 2. Die Menge  $\mathfrak{N}_1$  aller ungeraden natürlichen Zahlen ist vollständig.

Beweis. Aus (5) und (5.2.1) folgt

$$(11) \quad Z(k) - \frac{1}{2}\zeta(k-1) + \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} = -Z_1(k) - Z_2(k),$$

wobei

$$(12) \quad Z_1(k) = \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{-1}{u} \right)^{\psi\left(\frac{n(u)}{u}\right)} + \frac{1}{2} \right\} u^{1-k} - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} = \sum_{u=1}^{\infty} X_u u^{1-k},$$

$$(13) \quad Z_2(k) = \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} \left\{ G(n(m), m) + \frac{1}{2} \right\} = \sum_{q=2}^{\infty} Y_q q^{1-k}.$$

Nach (1)-(4) ist

$$(14) \quad \begin{aligned} n(1) &\equiv 0(\bmod 1), & n(3) &\equiv 2(\bmod 3), & n(5) &\equiv 0(\bmod 5), \\ n(7) &\equiv 6(\bmod 7), & n(9) &\equiv 2(\bmod 9), & n(11) &\equiv 10(\bmod 11), \\ & & & & n(13) &\equiv 0(\bmod 13). \end{aligned}$$

Aus (12), (14) und (1.3.1) ergibt sich

$$X_1 = X_3 = X_5 = X_7 = X_{11} = X_{13} = 0, \quad X_u \leq 1.$$

In der Tat ist z. B.

$$X_{11} = \left\{ -\psi\left(\frac{10}{11}\right) + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{11} = -\frac{10}{11} + 1 - \frac{1}{11} = 0.$$

Somit ist

$$Z_1(k) \leq 9^{1-k} + \sum_{u=15}^{\infty} u^{1-k}.$$

Weiter ergibt sich aus (1)-(3)

$$(15) \quad \begin{aligned} n(1) &= 3, & n(2) &= 7, & n(3) &= 11, & n(4) &= 15, & n(5) &= 15, \\ & & n(6) &= 23, & n(7) &= 27. \end{aligned}$$

Aus (13), (15) und (1.7) folgt

$$Y_2 = Y_4 = \dots = Y_{14} = 0, \quad Y_q \leq 1.$$

Daher ist

$$Z_2(k) \leq \sum_{q=16}^{\infty} q^{1-k},$$

also, nach (1.3.8),

$$\begin{aligned} Z_1(k) + Z_2(k) &\leq 9^{1-k} + \sum_{n=15}^{\infty} n^{1-k} \leq 9^{1-k} + \int_{14}^{\infty} y^{1-k} dy \\ &= 9^{1-k} + \frac{14}{k-2} \cdot 14^{1-k} \leq 9^{1-k} + 2 \cdot 14^{1-k} \leq 2 \cdot 9^{1-k}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (11) und (8), ergibt dies

$$(16) \quad \Psi_k \geq \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} - 2 \cdot 9^{1-k}.$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Menge  $\mathfrak{N}'$  der geraden natürlichen Zahlen unvollständig ist. Hierzu betrachten wir gesondert drei Fälle. Zuvor sei bemerkt, daß nach (1.3.1)

$$-\frac{1}{2} \leq \psi\left(\frac{n}{u}\right) \leq \psi\left(\frac{u-1}{u}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{u},$$

und daher

$$(17) \quad -\left(\frac{-1}{u}\right)^{\psi\left(\frac{n}{u}\right)} \leq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } u \equiv 1(\bmod 4), \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{u} & \text{für } u \equiv 3(\bmod 4). \end{cases}$$

1) Es sei  $n \equiv 2(\bmod 4)$ . Nach (1.7) ist dann  $G(n, 1) = \frac{1}{2}$ . Wegen (7), (17), (1.7) und (5.2.1) ist daher

$$\begin{aligned} \Psi_k(n) &\leq \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} - 2^{1-k} \\ &= \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} - 2^{1-k}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (16), ergibt dies

$$(18) \quad \Psi_k(n) \leq \Psi_k - 2^{1-k} + 2 \cdot 9^{1-k}.$$

2) Es sei  $n \equiv 0(\bmod 4)$ ,  $n \equiv 2(\bmod 3)$ . Dann ist  $n \equiv 8(\bmod 12)$ , also  $G(n, 3) = \frac{1}{2}$ ,

$$\Psi_k(n) \leq \frac{1}{2}\zeta(k-1) - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} - 6^{1-k},$$

d. h.

$$\Psi_k(n) \leq \Psi_k - 6^{1-k} + 2 \cdot 9^{1-k}.$$

3) Es sei  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ . Nach (1.3.1) ist dann

$$-\left(\frac{-1}{3}\right) \psi\left(\frac{n}{3}\right) = \psi\left(\frac{n}{3}\right) \leq \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2},$$

während (17) für die linke Seite nur die Schranke  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{6}$  ergibt. Wir erhalten somit

$$\Psi_k(n) \leq \frac{1}{2} \zeta(k-1) - \sum_{u=3(\bmod 4)}^{\infty} u^{-k} - \frac{1}{3} \cdot 3^{1-k},$$

also

$$\Psi_k(n) \leq \Psi_k - 3^{-k} + 2 \cdot 9^{1-k}.$$

In allen drei Fällen ist

$$\Psi_k(n) \leq \Psi_k - 6^{1-k} + 2 \cdot 9^{1-k} \leq \Psi_k - 9^{1-k},$$

wegen

$$2 \cdot 9^{1-k} - 6^{1-k} = 9^{1-k} \left\{ 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \right\} \leq -9^{1-k}.$$

Daher ist

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \Psi_k(q) \leq \Psi_k - 9^{1-k} < \Psi_k,$$

womit die Unvollständigkeit der Menge  $\mathcal{N}'$  nachgewiesen ist.Setzt man die Reihe der Kongruenzen (14) fort, so folgt, daß  $n(u)$  für  $u = 1, \dots, 99$  die folgenden Reste mod  $u$  gibt:

$$(19) \quad \begin{aligned} &0, 2, 0, 6, 2, 10, 0, 5, 0, 18, 20, 22, 0, 20, 0, 30, 32, 20, 0, 26, 0, \\ &42, 20, 46, 6, 17, 0, 10, 56, 58, 0, 20, 0, 66, 68, 70, 0, 50, 76, 78, \\ &20, 82, 0, 29, 0, 13, 92, 75, 0, 65. \end{aligned}$$

Aus (12), (19) und (1.3.1) ergeben sich die Werte von  $X_u$  für  $u = 1, \dots, 99$ . Diese liefern die folgende Näherung für  $Z_1(k)$ :

$$(20) \quad \begin{aligned} Z_1(k) = & \frac{2}{9} \cdot 9^{1-k} + \frac{3}{5} \cdot 15^{1-k} + \frac{20}{21} \cdot 21^{1-k} + \frac{2}{9} \cdot 27^{1-k} + \frac{32}{33} \cdot 33^{1-k} + \\ & + \frac{2}{5} \cdot 35^{1-k} + \frac{4}{13} \cdot 39^{1-k} + \frac{4}{9} \cdot 45^{1-k} + \frac{6}{49} \cdot 49^{1-k} + \frac{11}{17} \cdot 51^{1-k} + \\ & + \frac{4}{5} \cdot 55^{1-k} + \frac{56}{57} \cdot 57^{1-k} + \frac{2}{3} \cdot 63^{1-k} + \frac{68}{69} \cdot 69^{1-k} + \frac{8}{25} \cdot 75^{1-k} + \\ & + \frac{76}{77} \cdot 77^{1-k} + \frac{20}{81} \cdot 81^{1-k} + \frac{19}{29} \cdot 87^{1-k} + \frac{11}{13} \cdot 91^{1-k} + \frac{92}{93} \cdot 93^{1-k} + \\ & + \frac{1}{5} \cdot 95^{1-k} + \frac{1}{3} \cdot 99^{1-k} + \dots \end{aligned}$$

Gleicherweise bekommt man durch Fortsetzung der Reihe (15) die folgenden Werte von  $n(m)$  für  $m = 1, \dots, 50$ :

$$(21) \quad \begin{aligned} &3, 7, 11, 15, 15, 23, 27, 31, 11, 15, 43, 47, 39, 55, 35, 63, 51, \\ &47, 75, 15, 83, 87, 91, 95, 75, 39, 47, 111, 87, 95, 123, 127, \\ &131, 119, 55, 47, 111, 151, 143, 95, 123, 167, 171, 175, 155, \\ &183, 187, 191, 55, 175. \end{aligned}$$

Aus (13), (21) und (1.7) ergeben sich dann die Werte von  $Y_q$  für  $q = 2, \dots, 100$ , und diese liefern die folgende Näherung für  $Z_2(k)$ :

$$(22) \quad \begin{aligned} Z_2(k) = & 18^{1-k} + 20^{1-k} + 30^{1-k} + 36^{1-k} + 52^{1-k} + 54^{1-k} + 70^{1-k} + 72^{1-k} + \\ & + 80^{1-k} + 98^{1-k} + \dots \end{aligned}$$

Wir fahren jetzt mit den Hilfssätzen fort.

HILFSSATZ 3. Für jedes  $r$  ist die Menge  $\mathcal{N}_r$  aller Zahlen

$$(23) \quad n \equiv -1 \pmod{2^r}$$

vollständig.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist die Menge  $\mathcal{N}_{11} = \mathcal{N}_1$  vollständig. Es genügt daher,  $r \geq 2$  sowie die Vollständigkeit von  $\mathcal{N}_{1,r-1}$  anzunehmen und die Vollständigkeit von  $\mathcal{N}_r$  zu beweisen.Es sei  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{1,r-1} - \mathcal{N}_r$ . Dann besteht  $\mathcal{N}$  aus denjenigen Zahlen  $n$ , für die

$$(24) \quad n \equiv 2^{r-1} - 1 \pmod{2^r}.$$

Es genügt nachzuweisen, daß diese Menge  $\mathcal{N}$  unvollständig ist, weil daraus die Vollständigkeit der Menge  $\mathcal{N}_r = \mathcal{N}_{1,r-1} - \mathcal{N}$  folgt.Für  $r = 2$  besteht die Menge (24) aus allen  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Für diese  $n$  ist nach (1.7),  $G(n, 1) = \frac{1}{2}$ , und hieraus bekommt man, wie beim Beweise von Hilfssatz 2, die Ungleichung (18) und die Unvollständigkeit der Menge  $\mathcal{N}$ . Daher sei  $r \geq 3$ .Wir setzen für beliebige  $n$ 

$$(25) \quad \begin{aligned} T_1(n) &= \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{1-k} \psi\left(\frac{n}{u}\right), \\ T_2(n) &= \sum_{\substack{m=1 \\ 2^{r-2} \nmid m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m), \\ T_3(n) &= \sum_{\substack{m=1 \\ 2^{r-2} \nmid m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m). \end{aligned}$$

Nach (7) ist dann

$$(26) \quad \Psi_k(n) = -T_1(n) - T_2(n) - T_3(n).$$

Es sei  $n$  eine beliebig vorgegebene Zahl der Menge (24), und  $v$  sei irgendwie so gewählt, daß

$$\sum_{u>v} u^{1-k} \leq 2^{-rk}.$$

Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die den Bedingungen

$$(27) \quad M \equiv -1 \pmod{2^r}, \quad M \equiv n \pmod{\prod_{u \leq v} u}$$

genügen. Es ist klar, daß die Menge  $\mathfrak{M}$  dieser Zahlen  $M$  unendlich ist.

Nach (26) ist

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) = \sum_{j=1}^3 \{T_j(n) - T_j(M)\}.$$

Hierbei ist nach (25), (1.3.1) und (27)

$$T_1(n) - T_1(M) = \sum_{u>v} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \left\{ \psi \left( \frac{n}{u} \right) - \psi \left( \frac{M}{u} \right) \right\},$$

also

$$|T_1(n) - T_1(M)| \leq \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Weiter sieht man durch denselben Schluß, wie beim Beweise von Hilfssatz 2.4, aber unter Benutzung von (1.7) statt (1.6), daß

$$T_2(n) - T_2(M) = \sum_{0 \leq \alpha \leq r-3} \sum_{u>v} (2^{\alpha+1}u)^{1-k} \{G(n, 2^\alpha u) - G(M, 2^\alpha u)\},$$

d. h.

$$|T_2(n) - T_2(M)| \leq \sum_{u>v} u^{1-k}.$$

Weiter ist nach (1.7), (24) und (27)

$$G(n, 2^{r-2}) = \frac{1}{2}, \quad G(M, 2^{r-2}) = -\frac{1}{2}.$$

Von hieraus ergibt sich, genau wie bei Hilfssatz 2.4,

$$T_3(n) - T_3(M) \geq 2^{2-rk}.$$

Auch der Schluß des Beweises verläuft, wie bei Hilfssatz 2.4.

Wir führen jetzt die fünf Summen ein, die den Summen (2.39)-(2.43) entsprechen:

$$(28) \quad S_1(n) = \sum_{\substack{u=1 \\ p^r \nmid u}}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n}{u} \right),$$

$$(29) \quad S_2(n) = \sum_{\substack{u=1 \\ p^r \nmid u}}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n}{u} \right),$$

$$(30) \quad S_3(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^r \nmid m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m),$$

$$(31) \quad S_4(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^r \nmid m, 2 \nmid m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m),$$

$$(32) \quad S_5(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ 2p^r \nmid m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m).$$

Aus (7) und (28)-(32) ergibt sich (2.44).

Die zu (2.45) analoge Formel lautet hier

$$S_5(n) = (4p^r)^{1-k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} G(n, 2p^r m).$$

Wegen (1.7) und (2.37) bleibt daher (2.46) in Kraft.

HILFSSATZ 4. Es sei  $\mathfrak{N}$  eine beliebige vollständige Menge, deren Zahlen, bei festem  $H \geq 4$ , der Bedingung

$$(33) \quad n \equiv -1 \pmod{2^H}$$

genügen. Es sei ferner  $\mathfrak{M}_p$  diejenige Teilmenge von  $\mathfrak{N}$ , für die

$$(34) \quad n \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \quad \text{für } p \equiv 1 \pmod{4},$$

$$(35) \quad n \equiv p^{r-1} - p^{r-2} + \dots + p - 1 \pmod{p^{r-1}} \quad \text{für } p \equiv 3 \pmod{4},$$

gerade  $r$ ,

$$(36) \quad n \equiv p^{r-2} - p^{r-3} + \dots + p - 1 \pmod{p^{r-1}} \quad \text{für } p \equiv 3 \pmod{4},$$

ungerade  $r \geq 3$ ,

$$(37) \quad n \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \quad \text{für } p \equiv 3 \pmod{4}, r = 1.$$

Dann ist die Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$  vollständig, sofern

$$(38) \quad p \leq 5749, \quad p \equiv 1 \pmod{4}, \quad r > 0,$$

$$(39) \quad p \leq 227, \quad p \equiv 3 \pmod{4}, \quad r > 0,$$

$$(40) \quad 227 < p \leq 5783, \quad p \equiv 3 \pmod{4}, \quad r = 2.$$

Beweis. 1) Es sei  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Nach Voraussetzung ist die Menge  $\mathfrak{M}_{p1}$  vollständig. Es genügt daher, die Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$  als vollständig anzunehmen und die Vollständigkeit der Menge  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  zu beweisen. Und hierzu genügt es zu zeigen, daß die Menge  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{pr} - \mathfrak{M}_{p,r+1}$  endlich oder unvollständig ist. Diese Menge  $\mathfrak{M}$  besteht aus denjenigen Zahlen von  $\mathfrak{N}$ , die den Bedingungen

$$(41) \quad n \equiv -1 \pmod{2^H}; \quad n = p^{r-1}h, \quad p \nmid h$$

genügen. Ist  $\mathfrak{M}$  endlich, so ist nichts zu beweisen. Daher darf die Menge  $\mathfrak{M}$  als unendlich angenommen werden.

Es sei nun  $n$  eine beliebig vorgegebene Zahl der Menge  $\mathfrak{M}$  und  $v$  sei irgendwie so gewählt, daß  $v \geq 5$  und die Ungleichung (2.50) erfüllt ist. Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die den Bedingungen (2.51) genügen. Es ist klar, daß unendlich viele solche Zahlen  $M$  vorhanden sind.

Aus (41) und (2.51) folgt (2.52). Wegen (28) und (1.3.1) ergibt sich daraus (2.53). Wegen (2.51) und (2.52) ist weiter

$$(42) \quad M \equiv n \pmod{4m} \quad \text{für } m = 2^a u, \quad a < v-1, \quad u \leq v, \quad p^r \nmid u.$$

In Verbindung mit (30) und (1.7), ergibt sich daraus, durch dieselbe Überlegung wie bei Hilfssatz 2.5, daß die Ungleichung (2.54) erfüllt ist (2.55) ist jetzt zu ersetzen durch

$$(43) \quad S_2(n) - S_2(M) = p^{r(1-k)} \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{p^r u} \right) u^{1-k} \left\{ \psi \left( \frac{n}{p^r u} \right) - \psi \left( \frac{M}{p^r u} \right) \right\}.$$

Da aber  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , d. h.  $p^r \equiv 1 \pmod{4}$ , so ist

$$S_2(n) - S_2(M) = p^{r(1-k)} \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \left\{ \psi \left( \frac{n}{p^r u} \right) - \psi \left( \frac{M}{p^r u} \right) \right\}.$$

Hieraus folgt, genau wie beim Beweise von Hilfssatz 2.5, daß die Ungleichung (2.56) erfüllt ist.

Weiter ist nach (31), wenn man dort  $m = p^r u$  setzt,

$$(44) \quad S_4(n) - S_4(M) = (2p^r)^{1-k} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \{ G(n, p^r u) - G(M, p^r u) \};$$

ferner ist aber nach (1.7), (41) und (2.51)

$$G(n, p^r u) \geq -\frac{1}{2}, \quad M \equiv -p^r \pmod{4p^r}, \quad G(M, p^r) = -\frac{1}{2}.$$

Die Ungleichung (2.58) bleibt somit in Kraft.

Genau wie beim Beweise von Hilfssatz 2.5, folgt jetzt, daß die Ungleichung (2.60) erfüllt ist. In (2.60) ist nach (2.61)

$$(45) \quad (1+2^{1-k}) \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} + 1,06 \cdot 4^{1-k} \leq (1+2^{-8})(3^{-8} + \frac{19}{14} \cdot 5^{-8}) + 1,06 \cdot 4^{-8} \leq 10^{-8} \left\{ \left(1 + \frac{1}{256}\right)(15242 + 348) + 1618 \right\} \leq 1727 \cdot 10^{-7} \leq \frac{1}{5790}.$$

Wegen (38) ist daher

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq \left( \frac{1}{5749} - \frac{1}{5790} \right) p^{r(1-k)},$$

und unsere Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.3.

2) Es sei  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Nach Voraussetzung ist die Menge  $\mathfrak{M}_{p1}$  vollständig. Es genügt daher, die Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$  als vollständig anzunehmen und die Vollständigkeit der Menge  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  zu beweisen. Hier ist  $r > 0$  unter der Bedingung (39) und  $r = 1$  unter der Bedingung (40). Diese beiden Fälle sollen zunächst gemeinsam behandelt werden;  $p$  und  $r$  können dabei beliebig sein.

Die Menge  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  ist in der Menge  $\mathfrak{M}_{pr}$  enthalten. Für  $r = 1$  ist dies klar, es sei also  $r \geq 2$ . Ist  $r$  gerade, so hat die Zahl  $n$  in  $\mathfrak{M}_{pr}$  die Bedingung (35) zu erfüllen und in  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  die Bedingung (36) mit  $r+1$  statt  $r$ , also die Bedingung

$$(46) \quad n \equiv p^{r-1} - p^{r-2} + \dots + p - 1 \pmod{p^r}.$$

Jedes  $n$  in  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  erfüllt daher auch die Bedingung (35), d. h. es ist  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  in  $\mathfrak{M}_{pr}$  enthalten. Für ungerade  $r \geq 3$  hat die Zahl  $n$  in  $\mathfrak{M}_{pr}$  die Bedingung (36) zu erfüllen und in  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  die Bedingung (35) mit  $r+1$  statt  $r$ , also die Bedingung

$$(47) \quad n \equiv p^r - p^{r-1} + \dots + p - 1 \pmod{p^r}.$$

Jedes  $n$  in  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  erfüllt daher auch die Bedingung (36), so daß hier ebenfalls  $\mathfrak{M}_{p,r+1}$  in  $\mathfrak{M}_{pr}$  enthalten ist. Jetzt ist ersichtlich, daß es genügt, die Endlichkeit oder Unvollständigkeit der Menge  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{pr} - \mathfrak{M}_{p,r+1}$  nachzuweisen.

Auf Grund von (35), (36), (37), (46) und (47), besteht  $\mathfrak{M}$  aus allen Zahlen der Menge  $\mathfrak{N}$ , die der Bedingung (33) genügen, und für die außerdem

$$(48) \quad n \equiv h \pmod{p} \quad \text{für } h = 0, 1, \dots, p-2 \quad (r = 1);$$

$$(49) \quad n \equiv hp^{r-1} + p^{r-1} - p^{r-2} + \dots + p - 1 \pmod{p^r} \quad \text{für } h = 1, \dots, p-1 \quad (r \text{ gerade});$$

$$(50) \quad n \equiv hp^{r-1} + p^{r-2} - p^{r-3} + \dots + p - 1 \pmod{p^r} \quad \text{für } h = 0, \dots, p-2 \quad (r \geq 3 \text{ ungerade}).$$

Ist  $\mathfrak{M}$  endlich, so ist nichts zu beweisen. Daher darf  $\mathfrak{M}$  als unendlich angenommen werden.

Es sei  $n$  eine beliebig vorgegebene Zahl der Menge  $\mathfrak{M}$ . Ferner sei  $v$  irgendwie so gewählt, daß  $v \geq 5$  und die Ungleichung (2.50) erfüllt ist. Der Zahl  $n$  ordnen wir alle Zahlen  $M$  zu, die der ersten Kongruenz (2.51) genügen, d. h. der Kongruenz

$$(51) \quad M \equiv n \pmod{2^v \prod_{u \leq v} p^u},$$

und für die außerdem

$$(52) \quad M \equiv \begin{cases} p^{r-1} - p^{r-2} + \dots + p - 1 \pmod{p^r} & \text{für gerade } r, \\ p^r - p^{r-1} + \dots + p - 1 \pmod{p^r} & \text{für ungerade } r. \end{cases}$$

Es ist klar, daß unendlich viele solche  $M$  vorhanden sind.

Aus (35), (36), (37), (51) und (52) folgt (2.52). Wegen (28) und (1.3.1) ergibt sich daraus (2.53). Aus (51) und (2.52) folgt (42). Daraus ergibt sich (2.54), wie im Falle  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Aus (48), (49), (50), (52) und (1.3.1) folgt

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) &= \frac{h}{p} - \frac{1}{2} \quad \text{für } h = 0, \dots, p-2 \quad (r = 1), \\ &= hp^{-1} + p^{-1} - p^{-2} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2} \quad \text{für } h = 1, \dots, p-1 \\ &\quad (r \text{ gerade}), \\ &= hp^{-1} + p^{-2} - p^{-3} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2} \quad \text{für } h = 0, \dots, p-2 \\ &\quad (r \geq 3 \text{ ungerade}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) &= p^{-1} - p^{-2} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2} \quad (r \text{ gerade}), \\ &= 1 - p^{-1} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2} \quad (r \text{ ungerade}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiter: 1) Für  $r = 1$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) &= \frac{h}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{p-2}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{p}, \\ \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) &= 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(53) \quad \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) - \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) \geq \frac{1}{p}.$$

2) Für gerade  $r$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) &\geq 2p^{-1} - p^{-2} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2}, \\ \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) &= p^{-1} - p^{-2} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(54) \quad \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) - \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) \geq \frac{1}{p}.$$

3) Für ungerade  $r \geq 3$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) &\leq (p-2)p^{-1} + p^{-2} - p^{-3} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2}, \\ \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) &= 1 - p^{-1} + \dots + p^{1-r} - p^{-r} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

woraus (53) folgt. Wegen (53) und (54) ist

$$\left(\frac{-1}{p^r}\right) \left\{ \psi\left(\frac{n}{p^r}\right) - \psi\left(\frac{M}{p^r}\right) \right\} \geq \frac{1}{p}.$$

In Verbindung mit (43), ergibt sich daraus (2.56).

Die Fälle (39) und (40) sollen jetzt getrennt behandelt werden.

2.1) Es sei  $p \leq 227$ ,  $r > 0$ . Aus (31) und (32) folgt

$$\begin{aligned} S_4(d) + S_5(d) &= \sum_{\substack{m=1 \\ p^r | m}}^{\infty} (2m)^{1-k} G(d, m) \\ &= (2p^r)^{1-k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-k} G(d, p^r m). \end{aligned}$$

Zusammen mit (1.7) und (2.37), ergibt dies

$$|S_4(d) + S_5(d)| \leq \frac{1,05}{2} (2p^r)^{1-k},$$

also

$$(55) \quad \left| \sum_{j=4}^5 \{S_j(n) - S_j(M)\} \right| \leq 1,05 (2p^r)^{1-k}.$$



Aus (2.44), (2.53), (2.56), (2.54), (55) und (2.50) folgt

$$\begin{aligned} \Psi_k(M) - \Psi_k(n) &\geq -2 \sum_{u>v} u^{1-k} - 2^{v(1-k)+1} + p^{r(1-k)-1} - \\ &\quad - p^{r(1-k)} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} - 1,05 (2p^r)^{1-k} \\ &\geq p^{r(1-k)} \left( p^{-1} - \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} - 1,06 \cdot 2^{1-k} \right). \end{aligned}$$

Hierin ist nach (2.61)

$$\begin{aligned} \sum_{u=3}^{\infty} u^{1-k} + 1,06 \cdot 2^{1-k} &\leq 3^{-8} + \frac{19}{14} \cdot 5^{-8} + 1,06 \cdot 2^{-8} \\ &\leq 0,000156 + 0,004141 \leq 0,0043 \leq \frac{1}{232}. \end{aligned}$$

Wegen  $p \leq 227$  ist daher

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq \left( \frac{1}{227} - \frac{1}{232} \right) p^{r(1-k)},$$

und unsere Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.3.

2.2) Es sei  $227 < p \leq 5783$ ,  $r = 1$ . Aus (33), (51) und (52) folgt

$$M \equiv -1 \pmod{4}, \quad M \equiv -1 \pmod{p},$$

d. h.

$$M \equiv -1 \pmod{4p}.$$

Wegen (1.7) ist also

$$G(n, p) \geq -\frac{1}{2}, \quad G(M, p) = -\frac{1}{2}.$$

Wegen (44) ist somit die Ungleichung (2.58) mit  $r = 1$  erfüllt. Nach (2.46) ist auch (2.59) für  $r = 1$  gültig. Wie beim Beweise von Hilfssatz 2.5, erhalten wir jetzt die Ungleichung (2.60) mit  $r = 1$ . In Verbindung mit (45), ergibt dies

$$\Psi_k(M) - \Psi_k(n) \geq \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{5790} \right) p^{1-k} \geq \left( \frac{1}{5783} - \frac{1}{5790} \right) p^{1-k},$$

und unsere Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.3.

**HILFSSATZ 5.** Die durch die Bedingungen

$$(56) \quad n \equiv -1 \pmod{2^H}; \quad n \equiv n(u) \pmod{u} \quad \text{für} \quad u \leq 5789$$

bestimmte Menge  $\mathfrak{N}$  ist vollständig.

Beweis. Da die Menge  $\mathfrak{N}$  bei wachsendem  $H$  abnimmt, darf  $H \geq 4$  angenommen werden.

Nach Hilfssatz 3 ist die Menge

$$(57) \quad n \equiv -1 \pmod{2^H}$$

vollständig. Wir setzen jetzt  $r = 9$  und wenden Hilfssatz 4 auf die vollständige Menge (57) und  $p = 3$  an. Dann folgt, daß die Menge

$$(58) \quad n \equiv -1 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 3^7 - 3^6 + \dots + 3 - 1 \pmod{3^8}$$

vollständig ist. Abermalige Anwendung von Hilfssatz 4 auf die Menge (58) und  $p = 5$  liefert die Vollständigkeit der Menge

$$n \equiv -1 \pmod{2^H}, \quad n \equiv 3^7 - 3^6 + \dots + 3 - 1 \pmod{3^8}, \quad n \equiv 0 \pmod{5^8}.$$

Indem man auf diese Weise bis  $p = 227$  fortfährt, zeigt man, daß diejenige Menge vollständig ist, deren Zahlen 1) der Bedingung (57); 2) der Bedingung (34) mit  $r = 9$  für  $p < 227$ ; 3) der Bedingung (36) mit  $r = 9$  für  $p \leq 227$  genügen.

Bei der weiteren Anwendung von Hilfssatz 4 auf die Primzahlen im Intervall  $227 < p \leq 5783$  werde  $r = 2$  angenommen. Es folgt dann, daß diejenige Menge  $\mathfrak{N}$  vollständig ist, deren Zahlen die folgenden Bedingungen erfüllen: 1) (57); 2) (34) mit  $r = 9$  für  $p < 227$  und mit  $r = 2$  für  $227 < p < 5783$ ; 3) (36) mit  $r = 9$  für  $p < 227$ ; 4) (35) mit  $r = 2$  für  $227 < p \leq 5783$ .

Es genügt jetzt zu zeigen, daß diese vollständige Menge  $\mathfrak{N}$  in der Menge  $\mathfrak{N}$  des Hilfssatzes enthalten ist, und dazu braucht, nach Definition von  $n(u)$ , nur gezeigt zu werden, daß für  $u \leq 5789$  jede Zahl  $n$  von  $\mathfrak{N}$  den Bedingungen (2)-(4) genügt.

Es sei zunächst  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p^r \parallel u$ . Wegen  $3^8 > 6000 > u$  ist dann  $r \leq 8$ . Ist  $p < 227$ , so genügt  $n$  nach Definition von  $\mathfrak{N}$  der Kongruenz  $n \equiv 0 \pmod{p^8}$ , also gewiß der Kongruenz (2). Ist  $p > 227$ , so muß  $r = 1$  sein, weil  $227^2 > 6000 > u$  ist. Dann genügt  $n$  der Kongruenz (34) mit  $r = 2$ , d. h. der Kongruenz (2) mit  $r = 1$ .

Weiter sei  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p^r \parallel u$ . Dann ist wieder  $r \leq 8$  und  $r = 1$  für  $p \geq 227$ . Ist  $p \leq 227$ , so erfüllt  $n$  die Kongruenz (36) mit  $r = 9$ , d. h. die Kongruenz

$$n \equiv p^7 - p^6 + \dots + p - 1 \pmod{p^8}.$$

Ist dann  $p^v \parallel u$ , so ist  $v \leq 7$ , und  $n$  genügt der Kongruenz (3). Ist aber  $p^q \parallel u$ , so ist  $q \leq 8$ , und  $n$  genügt der Kongruenz (4). Ist endlich  $p > 227$ , so erfüllt  $n$  die Kongruenz (35) mit  $r = 2$ , d. h. die Kongruenz (3) mit  $v = 1$ .

Wir sind jetzt in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. Für  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $k \geq 9$  ist

$$(59) \quad 2 - 2 \frac{Z(k)}{L(k)} - 2,001 \cdot \frac{5790^{2-k}}{k-2} \leq Q_{2k} \leq 2 - 2 \frac{Z(k)}{L(k)}.$$

Für  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $k \geq 11$  ist

$$(60) \quad 2 \frac{Z(k)}{L(k)} \leq P_{2k} \leq 2 \frac{Z(k)}{L(k)} + 2,001 \cdot \frac{5790^{2-k}}{k-2}.$$

Beweis. Die linke Hälfte der Ungleichung (6) ist auf Grund von (8) erfüllt. Jetzt soll die rechte Hälfte der Ungleichung (6) nachgewiesen werden. Dabei bedeute  $n$  eine Zahl der Menge (56).

Nach (56) und (1.3.1) ist

$$(61) \quad \begin{aligned} & - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n}{u} \right) \\ & = - \sum_{u \leq 5789} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n(u)}{u} \right) - \sum_{u > 5789} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n}{u} \right) \\ & \leq - \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n(u)}{u} \right) + \sum_{u > 5789} u^{1-k}. \end{aligned}$$

Die größte Potenz von 2, die in den Zahlen  $m \leq 5790$  aufgeht, ist 12. Nimmt man also in (56),  $H = 14$  und beachtet die Definition der Funktion  $n(m)$ , so folgt

$$n \equiv n(m) \pmod{4m} \quad \text{für} \quad m \leq 5790.$$

Nach (1.7) ist daher

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n, m) &= - \sum_{m \leq 2895} (2m)^{1-k} G(n(m), m) - \sum_{m > 2895} (2m)^{1-k} G(n, m) \\ &\leq - \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n(m), m) + \sum_{m > 2895} (2m)^{1-k}. \end{aligned}$$

Aus (7), (61), (62) und (5) folgt

$$(62) \quad \begin{aligned} \Psi_k(n) &\leq Z(k) + \sum_{m=5791}^{\infty} m^{1-k} \\ &\leq Z(k) + \int_{5790}^{\infty} y^{1-k} dy = Z(k) + \frac{5790^{2-k}}{k-2}. \end{aligned}$$

Damit ist wegen (1.14) auch die rechte Hälfte der Ungleichung (6) bewiesen.

Nach (5.3.18) ist

$$L(k) = 1 - 3^{-k} + 5^{-k} - 7^{-k} + \dots > 1 - 3^{-k} \geq 1 - 3^{-9},$$

also

$$(63) \quad \frac{1}{L(k)} \leq 1,0005.$$

Die Ungleichungen (59), (60) des Satzes folgen aus (1.26), (1.27), (6) und (62).

Wir wollen jetzt eine zu  $n(m)$  analoge Funktion  $n\{m\}$  wie folgt einführen:

Es sei  $n\{2^a u\}$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , die den Bedingungen genügt

$$(64) \quad n \equiv 2^{a+1} + 2^{a-1} + \dots + 2 \pmod{2^{a+2}} \quad \text{für gerade } a,$$

$$(65) \quad n \equiv 2^a + 2^{a-2} + \dots + 2 \pmod{2^{a+2}} \quad \text{für ungerade } a,$$

$$(66) \quad n \equiv -1 \pmod{p^*} \quad \text{für } p^* \parallel u, p \equiv 1 \pmod{4},$$

$$(67) \quad n \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{für } p \parallel u, p \equiv 3 \pmod{4},$$

$$(68) \quad n \equiv p^{v-1} - p^{v-2} + \dots + p^2 - p \quad \text{für } p^v \parallel u, v \geq 3, p \equiv 3 \pmod{4},$$

$$(69) \quad n \equiv p^a - p^{a-1} + \dots + p^2 - p \quad \text{für } p^a \parallel u, p \equiv 3 \pmod{4}.$$

(Für  $u = 1$  fallen die Bedingungen (66)-(69) weg.)

Ferner werde gesetzt

$$(70) \quad Z\{k\} = \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left( \frac{n\{u\}}{u} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{1-k} G(n\{m\}, m).$$

Dann gilt, wie hier ohne Beweis mitgeteilt sei, die Ungleichung

$$(71) \quad Z\{k\} - \frac{5790^{2-k}}{k-2} \leq \Psi_k \leq Z\{k\},$$

welche jetzt an die Stelle von (6) tritt.

Aus (1.26), (1.27), (71) und (63) ergibt sich

Satz 2. Für  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $k \geq 9$  ist

$$(72) \quad 2 - 2 \frac{Z\{k\}}{L(k)} \leq P_{2k} \leq 2 - 2 \frac{Z\{k\}}{L(k)} + 2,001 \cdot \frac{5790^{2-k}}{k-2}.$$

Für  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $k \geq 11$  ist

$$(73) \quad 2 \frac{Z\{k\}}{L(k)} - 2,001 \cdot \frac{5790^{2-k}}{k-2} \leq Q_{2k} \leq 2 \frac{Z\{k\}}{L(k)}.$$