

(78) ist bereits für $r = k+2 \geq 6$ bewiesen worden; vgl. (2.4.6)-(2.4.9). Der Beweis bleibt auch für $r = 4$ und 5 in Kraft. (79) ist in § 3.8 für $k > 4$ bewiesen worden, doch gilt der Beweis auch für $k = 4$.

Es sei

$$(80) \quad aP_k(x) \leq tx^{k/2-1} \quad \text{für} \quad x \geq B \geq 3.$$

Dann ist nach (79) und (78)

$$aP_{k+1}(x) \leq t \sum_{-x^{1/2} \leq m \leq x^{1/2}} (x-m^2)^{k/2-1} + Bx^{k/2-1} = \frac{t\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} x^{(k-1)/2} + Bx^{k/2-1}.$$

Zusammen mit (76) ergibt dies

$$\frac{D_{k+1}}{2} s \leq \frac{t\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Hieraus folgt wegen (1.4.2)

$$(81) \quad t \geq \frac{D_k}{2} s.$$

(77) folgt aus (80) und (81).

Damit ist Satz 9 bewiesen. Für $k = 4$ gilt nach (75)

$$(82) \quad P_4(x) = \Omega_+(x), \quad P_4(x) = \Omega_-(x).$$

Aus (3.1.3) geht hervor, daß eine der beiden Abschätzungen (82) verschärft werden kann; man weiß aber nicht, welche.

V KAPITEL

LURSMANASCHWILISCHE SÄTZE

§ 1. Hilfssätze

In den §§ 1-3 dieses Kapitels ist die Dimension der Kugel gerade und ≥ 8 . Aus technischen Gründen, um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, soll diese Dimension durch $2k$ bezeichnet werden (wobei unsere Annahme $k \geq 4$ also immer noch in Kraft bleibt). Es sei stets

$$(1) \quad r \leq j \leq \frac{k}{2} - 1.$$

Unsere Aufgabe wird sein, Näherungsausdrücke für $P_{2k}(x)$ zu finden, die ein Restglied von der Größenordnung $Bx^{k-j-1} \log x$ besitzen. Für gerade k wird dies in § 2 geleistet, für ungerade k in § 3. Im vorliegenden § 1 wird eine Reihe von Hilfssätzen bewiesen.

Es sei

$$(2) \quad \sigma_q(n) = \sum_{d|n} d^q$$

die Summe der q -ten Potenzen der Teiler von n .

HILFSSATZ 1.

$$(3) \quad \sigma_q(n) = Bn^q \log 2n.$$

Beweis. Nach (2) ist, da n/d zugleich mit d alle Teiler von n durchläuft,

$$\sigma_q(n) = \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^q = n^q \sum_{d|n} \frac{1}{d^q} \leq n^q \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq n^q \sum_{d \leq n} \frac{1}{d},$$

woraus die Behauptung (3) folgt.

HILFSSATZ 2.

$$(4) \quad k \sum_{n \leq s} n^{k-1} = s^k + \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r(s) s^{k-r} + B s^{k-j-1},$$

$$(5) \quad 4k \sum_{0 \leq m \leq (t-1)/4} (4m+1)^{k-1} = t^k + \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} 2^{2r} \bar{B}_r\left(\frac{t-1}{4}\right) t^{k-r} + B t^{k-j-1} \quad (t > 1).$$

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 1.3.2 an mit $X = 0$, $Y = s$, $f(y) = y^{k-1}$, $r = j$, was wegen (1) gestattet ist, und erhalten

$$k \sum_{n \leq s} n^{k-1} = s^k + \sum_{n=1}^j (-1)^n \binom{k}{n} \bar{B}_n(s) s^{k-n} + B \int_0^s \bar{B}_j(y) y^{k-j-1} dy.$$

Hierin ist nach (1.3.5) und dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_0^s = B s^{k-j-1}.$$

Zweitens nehmen wir $X = 0$, $Y = (t-1)/4$, $f(y) = (4y+1)^{k-1}$, $r = j$ und erhalten

$$\begin{aligned} 4k \sum_{0 \leq m \leq (t-1)/4} (4m+1)^{k-1} &= B + 4k \sum_{0 \leq m \leq (t-1)/4} \\ &= t^k + \sum_{n=1}^j (-1)^n \binom{k}{n} 4^n \bar{B}_n\left(\frac{t-1}{4}\right) t^{k-n} + B + \\ &\quad + B \int_0^{(t-1)/4} \bar{B}_j(y) (4y+1)^{k-j-1} dy, \end{aligned}$$

woraus (5) folgt.

Es werde jetzt gesetzt

$$(6) \quad S_q(x) = S_{k,q}(x) = \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

HILFSSATZ 3.

$$(7) \quad S_q(x) = \sum_{M|q} M^{k-1} \sum_{d|M} d \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{H|\frac{q}{M}} \mu(H) H^{k-1} \sum_{n \leq x/MH} n^{k-1}.$$

Beweis. Auf Grund von (6) ist

$$S_q(x) = \sum_{M|q} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=M}} n^{k-1} \sum_{d|M} d \mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

Ersetzt man hierin n durch Mn , so folgt

$$\begin{aligned} S_q(x) &= \sum_{M|q} M^{k-1} \sum_{\substack{n \leq x/M \\ (n,q/M)=1}} n^{k-1} \sum_{d|M} d \mu\left(\frac{q}{d}\right) \\ (8) \quad &= \sum_{M|q} M^{k-1} \sum_{d|M} d \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{\substack{n \leq x/M \\ (n,q/M)=1}} n^{k-1}. \end{aligned}$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Möbiusschen Funktion ist

$$(9) \quad \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

vgl. z. B. Winogradow [4], Kapitel II, § 3). Wegen (9) ist in (8)

$$\sum_n = \sum_{n \leq x/M} n^{k-1} \sum_{H|(n,q/M)} \mu(H) = \sum_{H|\frac{q}{M}} \mu(H) \sum_{\substack{n \leq x/M \\ H|n}} n^{k-1}.$$

Ersetzt man hierin n durch Hn , so folgt, daß in (8)

$$(10) \quad \sum_n = \sum_{H|\frac{q}{M}} \mu(H) H^{k-1} \sum_{n \leq x/MH} n^{k-1}.$$

Die Behauptung (7) des Hilfssatzes folgt aus (8) und (10).

Wir setzen jetzt

$$(11) \quad f(q) = \sum_{M|q} \frac{1}{M} \sum_{d|M} d \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{H|\frac{q}{M}} \frac{\mu(H)}{H}.$$

HILFSSATZ 4. Es ist

$$(12) \quad f(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Beweis. Die erste Zeile von (12) ist klar. Für $(q_1, q_2) = 1$ ist ferner

$$\begin{aligned}
 f(q_1 q_2) &= \sum_{M|q_1 q_2} \frac{1}{M} \sum_{d|M} d \mu \left(\frac{q_1 q_2}{d} \right) \sum_{H|\frac{q_1 q_2}{M}} \frac{\mu(H)}{H} \\
 &= \sum_{\substack{M_1|q_1 \\ M_2|q_2}} \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{d|M_1 M_2} d \mu \left(\frac{q_1 q_2}{d} \right) \sum_{H|\frac{q_1}{M_1} \cdot \frac{q_2}{M_2}} \frac{\mu(H)}{H} \\
 &= \sum_{\substack{M_1|q_1 \\ M_2|q_2}} \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{\substack{d_1|M_1 \\ d_2|M_2}} d_1 d_2 \mu \left(\frac{q_1}{d_1} \cdot \frac{q_2}{d_2} \right) \sum_{H_1|\frac{q_1}{M_1}, H_2|\frac{q_2}{M_2}} \frac{\mu(H_1 H_2)}{H_1 H_2} \\
 &= \sum_{M_1|q_1} \frac{1}{M_1} \sum_{d_1|M_1} d_1 \mu \left(\frac{q_1}{d_1} \right) \sum_{H_1|\frac{q_1}{M_1}} \frac{\mu(H_1)}{H_1} \times \\
 &\quad \times \sum_{M_2|q_2} \frac{1}{M_2} \sum_{d_2|M_2} d_2 \mu \left(\frac{q_2}{d_2} \right) \sum_{H_2|\frac{q_2}{M_2}} \frac{\mu(H_2)}{H_2} = f(q_1) f(q_2),
 \end{aligned}$$

d. h. die Funktion $f(q)$ ist multiplikativ. Es genügt also, die zweite Zeile der Behauptung (12) für den Fall $q = p^n$ zu beweisen, wobei ausnahmsweise auch $p = 2$ zugelassen werden soll. Dann sind in (11) alle Glieder, außer denen mit $M = p^n$ und $M = p^{n-1}$ gleich Null, da $\mu(q/d) = 0$ für $d|p^{n-2}$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
 f(p^n) &= \frac{1}{p^n} \{ p^n \mu(1) + p^{n-1} \mu(p) \} \mu(1) + \frac{1}{p^{n-1}} p^{n-1} \mu(p) \left(\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(p)}{p} \right) \\
 &= \frac{1}{p^n} (p^n - p^{n-1}) - \left(1 - \frac{1}{p} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 5. Für $q > 1$ ist

$$(13) \quad S_q(x) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \sum_{d|q} \mu \left(\frac{q}{d} \right) d^r \bar{B}_r \left(\frac{x}{d} \right) x^{k-r} + B x^{k-j-1} q^{j+1} \log^3 q.$$

Beweis. Nach (4) ist in (7)

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \sum_{n \leq x/MH} n^{k-1} &= \frac{1}{k} \left(\frac{x}{MH} \right)^k + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r \left(\frac{x}{MH} \right) \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-r} + \\
 &\quad + B \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-j-1}.
 \end{aligned}$$

Setzt man (14) in (7) ein, so ergibt sich das Restglied

$$B \sum_{M|q} M^{k-1} \sum_{d|M} d \sum_{H|\frac{q}{M}} H^{k-1} \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-j-1} = B x^{k-j-1} \sum_{M|q} M^j \sum_{d|M} d \sum_{H|\frac{q}{M}} H^j.$$

Wegen (2) und (3) ist dies Restglied

$$\begin{aligned}
 &= B x^{k-j-1} \sum_{M|q} M^j \sigma_1(M) \sigma_j \left(\frac{q}{M} \right) = B x^{k-j-1} \sum_{M|q} M^j M \left(\frac{q}{M} \right)^j \log^2 q \\
 &= B x^{k-j-1} q^j \sigma_1(q) \log^2 q = B x^{k-j-1} q^{j+1} \log^3 q.
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 k S_q(x) &= \sum_{M|q} M^{k-1} \sum_{d|M} d \mu \left(\frac{q}{d} \right) \sum_{H|\frac{q}{M}} \mu(H) H^{k-1} \left\{ \left(\frac{x}{MH} \right)^k + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r \left(\frac{x}{MH} \right) \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-r} \right\} + B x^{k-j-1} q^{j+1} \log^3 q \\
 &= f(q) x^k + \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} f_r(q) x^{k-r} + B x^{k-j-1} q^{j+1} \log^3 q,
 \end{aligned}$$

wo $f(q)$ durch (11) gegeben ist und

$$(15) \quad f_r(q) = \sum_{M|q} M^{r-1} \sum_{d|M} d \mu \left(\frac{q}{d} \right) \sum_{H|\frac{q}{M}} \mu(H) H^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x}{MH} \right).$$

Wegen (12) ist also

$$(16) \quad k S_q(x) = \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} f_r(q) x^{k-r} + B x^{k-j-1} q^{j+1} \log^3 q.$$

Setzt man in (15): $MH = n$, $H = n/M$, so folgt

$$\begin{aligned}
 f_r(q) &= \sum_{n|q} \sum_{M|n} \sum_{d|M} M^{r-1} d \mu \left(\frac{q}{d} \right) \mu \left(\frac{n}{M} \right) \left(\frac{n}{M} \right)^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x}{n} \right) \\
 &= \sum_{n|q} n^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x}{n} \right) \sum_{M|n} \mu \left(\frac{n}{M} \right) \sum_{d|M} d \mu \left(\frac{q}{d} \right) \\
 &= \sum_{n|q} n^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x}{n} \right) \sum_{d|n} d \mu \left(\frac{q}{d} \right) \sum_{\substack{M|n \\ d|M}} \mu \left(\frac{n}{M} \right).
 \end{aligned}$$

Ersetzt man hier M durch dM , so folgt wegen (9)

$$\begin{aligned} f_r(q) &= \sum_{n|q} n^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{M|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dM}\right) \\ &= \sum_{n|q} n^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{x}{n}\right) n\mu\left(\frac{q}{n}\right). \end{aligned}$$

In Verbindung mit (16), ergibt dies die Behauptung (13) des Hilfssatzes.

HILFSSATZ 6.

$$\begin{aligned} (17) \quad P_{2k}(x) &= \frac{D_{2k}}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r(x) x^{k-r} + \\ &+ D_{2k} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{2k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bx^{k-j-1} \log x. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen (1) ist

$$x^{k/2} \log x \leq x^{k-j-1} \log x.$$

Nach (1.4.3) und (1.1.1) ist daher

$$(18) \quad A_{2k}(x) = D_{2k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} + D_{2k} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} + Bx^{k-j-1} \log x,$$

wobei unter der q -Summe dasselbe wie in (17) steht.

Die Behauptung (17) des Hilfssatzes folgt aus (18), (4), (1.4.2) und der Definition von $P_{2k}(x)$.

Zum Schluß noch ein Hilfssatz über die Ramanujanschen Summen (1.1.27).

HILFSSATZ 7.

$$(19) \quad C(h, q) = \sum_{d|(h, q)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

Beweis. Beide Seiten von (19) sind, als Funktionen von q betrachtet, multiplikativ. Für die linke Seite ist es beim Beweise von Hilfssatz 3.3.3 gezeigt worden, für die rechte Seite folgt es aus der Multiplikativität der Funktion $\mu(n)$. Somit genügt es, (19) für $q = p^n$ und $q = 2^n$ zu beweisen. Wir behandeln nur den Fall $q = p^n$, da der Fall $q = 2^n$ wört-

lich genau so geht. (19) nimmt dann die Gestalt an

$$(20) \quad C(h, p^n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p^{n-1} \nmid h, \\ -p^{n-1}, & \text{wenn } p^{n-1} \parallel h, \\ p^n - p^{n-1}, & \text{wenn } p^n \mid h. \end{cases}$$

Ein reduziertes Restsystem nach dem Modul p^n wird erhalten, wenn man aus dem vollen Restsystem die Vielfachen von p ausschließt, d. h. die Zahlen pa ausnimmt, wo a ein volles Restsystem mod p^{n-1} durchläuft. Daher folgt, auf Grund der Definition (1.1.27),

$$C(h, p^n) = \sum_{a \bmod p^n} e\left(\frac{ha}{p^n}\right) - \sum_{a \bmod p^{n-1}} e\left(\frac{ha}{p^{n-1}}\right).$$

Für $p^{n-1} \nmid h$ sind beide Summen gleich Null. Für $p^{n-1} \parallel h$ ist die erste Summe gleich Null, die zweite gleich p^{n-1} . Ist endlich $p^n \mid h$, so ist die erste Summe $= p^n$, die zweite $= p^{n-1}$. Damit ist (20) bewiesen.

§ 2. Der erste Lursmanaschwilische Satz

In diesem Paragraphen ist k gerade. Für $s > 1$ führen wir die Funktion $\zeta(s)$, die sog. Zetafunktion, mittels der Reihe

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

ein. Bekanntlich ist

$$(2) \quad \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (s > 1);$$

vgl. z. B. Winogradow [4], Aufgabe 13, a zu Kapitel II. Weiter sei

$$(3) \quad \Psi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty} u^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{y}{u}\right) + (-1)^{k/2+1} 2^{r-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} \left\{ \bar{B}_r\left(\frac{y}{2d}\right) - 2^r \bar{B}_r\left(\frac{y}{4d}\right) \right\}.$$

Da die Funktion $\bar{B}_r(y)$ nach (1.3.3) beschränkt ist, so konvergieren die Reihen in (3) wegen (1.1) absolut und gleichmäßig. Daher sind auch die Funktionen $\Psi_{k,r}(y)$ beschränkt.

SATZ 1. Es sei k gerade, $k \geq 2j+2$. Dann ist

$$(4) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{k(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \Psi_{k,r}(x) x^{k-r} + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Beweis. Für die q -Summe in (1.17) ist nach (1.1.9), (1.1.27) und (1.1.19)

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} &= \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} u^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{h \bmod u}' e\left(-\frac{nh}{u}\right) + \\ &\quad + (-4)^{k/2} \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{h \bmod q}' e\left(-\frac{nh}{q}\right) \\ &= \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} u^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} G(n, u) + (-4)^{k/2} \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} G(n, q) \\ &= \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} u^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{d|(n, u)} d \mu\left(\frac{u}{d}\right) + \\ &\quad + (-4)^{k/2} \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{d|(n, q)} d \mu\left(\frac{q}{d}\right). \end{aligned}$$

Wegen (1.6) ist daher in (1.17)

$$\sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} = \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} u^{-k} S_u(x) + (-4)^{k/2} \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} S_q(x).$$

In Verbindung mit (1.13), ergibt dies

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} &= \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} u^{-k} \sum_{d|u} \mu\left(\frac{u}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{k} (-4)^{k/2} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + Bx^{k-j-1} \sum_{u=3}^{\infty} u^{j+1-k} \log^3 u + Bx^{k-j-1} \sum_{q=4}^{\infty} q^{j+1-k} \log^3 q. \end{aligned}$$

Wegen (1.1) ist hier jedes Restglied Bx^{k-j-1} . Läßt man ferner u alle ungeraden Zahlen $u \geq 3$ und q alle durch 4 teilbaren Zahlen $q \geq 4$ durch-

laufen, so ist der Fehler, nach (1.2), (1.3) und (1.1),

$$\begin{aligned} B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \left(\sum_{u > x^{1/2}} u^{-k} \sigma_r(u) + \sum_{q > x^{1/2}} q^{-k} \sigma_r(q) \right) \\ = B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \sum_{q > x^{1/2}} q^{-k} \sigma_r(q) = B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \sum_{q > x^{1/2}} q^{r-k} \log q \\ = B \sum_{r=1}^j x^{k-r+(1+r-k)/2} \log x = Bx^{k/2} \log x \\ = Bx^{k-j-1} \log x. \end{aligned} \quad (5)$$

Somit ist in (1.17)

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} &= \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{u=3}^{\infty} u^{-k} \sum_{d|u} \mu\left(\frac{u}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{k} (-4)^{k/2} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{\substack{q=4 \\ q \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} q^{-k} \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + Bx^{k-j-1} \log x. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1.17) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (6) \quad P_{2k}(x) &= \frac{D_{2k}}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \sum_{d|u} \mu\left(\frac{u}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + \frac{D_{2k}}{k} (-4)^{k/2} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{\substack{q=4 \\ q \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} q^{-k} \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + \\ &\quad + Bx^{k-j-1} \log x. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$(7) \quad \sum_{u=1}^{\infty} u^{-s} \mu(u) = \{(1-2^{-s}) \zeta(s)\}^{-1} \quad (s > 1).$$

Das Summenglied links ist nämlich, als Funktion von u betrachtet, multiplikativ. Die linke Seite ist also gleich

$$\prod_{p \geq 2} \{1 + p^{-s} \mu(p)\} = \prod_{p \geq 2} (1 - p^{-s}),$$

d. h. wegen (2) gleich der rechten Seite (vgl. hierzu auch Winogradov [4], Aufgabe 15 zu Kapitel II).

In der u -Summe von (6) ist d als Teiler von u ungerade, kann also mit v bezeichnet werden. Es ergibt sich daher, mit Rücksicht auf (7),

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \sum_{v|u} \mu\left(\frac{u}{v}\right) v^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{v}\right) \\
 = \sum_{v=1}^{\infty} v^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{v}\right) \sum_{\substack{u=1 \\ v|u}}^{\infty} u^{-k} \mu\left(\frac{u}{v}\right) \\
 = \sum_{v=1}^{\infty} v^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{v}\right) \sum_{u=1}^{\infty} (uv)^{-k} \mu(u) \\
 = \sum_{v=1}^{\infty} v^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{v}\right) \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \mu(u) \\
 = \{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \sum_{u=1}^{\infty} u^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{u}\right).
 \end{aligned}$$

Ersetzt man in der q -Summe von (6), q durch $4q$, so folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_q = \sum_{q=1}^{\infty} (4q)^{-1} \sum_{d|4q} \mu\left(\frac{4q}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) \\
 = 4^{-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) \sum_{\substack{q=1 \\ d|4q}}^{\infty} q^{-k} \mu\left(\frac{4q}{d}\right).
 \end{aligned}$$

Setzt man hier $4q = nd$, so kommt

$$\begin{aligned}
 \sum_q = 4^{-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ nd \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} \left(\frac{nd}{4}\right)^{-k} \mu(n) \\
 = \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ nd \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} n^{-k} \mu(n).
 \end{aligned}$$

Ist darin n ungerade, d. h. $n = u$, so durchläuft d alle durch 4 teilbaren positiven Zahlen und kann durch $4d$ ersetzt werden. Ist n das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $n = 2u$, so durchläuft d alle natürlichen geraden Zahlen und kann durch $2d$ ersetzt werden. Ist endlich n durch 4 teilbar, so ist $\mu(n) = 0$, d. h. diese Glieder können fortgelassen werden.

Somit ist

$$\sum_q = \sum_{d=1}^{\infty} (4d)^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{4d}\right) \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \mu(u) + \sum_{d=1}^{\infty} (2d)^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{2d}\right) \sum_{u=1}^{\infty} (2u)^{-k} \mu(2u).$$

Wegen $\mu(2u) = \mu(2)\mu(u) = -\mu(u)$ und (7) folgt hieraus

$$(9) \quad \sum_q = \{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \left(4^{r-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{4d}\right) - 2^{r-2k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{2d}\right) \right).$$

Setzt man (8) und (9) in (6) ein und berücksichtigt die Definition (3) von $\Psi_{k,r}(x)$, so ergibt sich die Behauptung (4) des Satzes.

Der Spezialfall $j = 1$ von Satz 1 wird im nächsten Kapitel angewendet werden. Daher soll er hier als besonderer Satz formuliert werden. Hierbei bedeutet $\psi(y)$, wie stets in diesem Buch, die Funktion (1.3.1).

Satz 2. Es sei k gerade, $k \geq 4$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (10) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \left(- \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{x}{u}\right) + \right. \\
 \left. + (-1)^{k/2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} u^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{2n}\right) \right\} \right) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x.
 \end{aligned}$$

Beweis. Für $j = 1$ folgt aus (4) und (3), sofern $k \geq 4$,

$$(11) \quad P_{2k}(x) = -D_{2k} \{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1} \Psi_{k,1}(x) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x,$$

wo

$$\Psi_{k,1}(x) = \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \bar{B}_1\left(\frac{x}{u}\right) + (-1)^{k/2+1} 2^{1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{1-k} \left\{ \bar{B}_1\left(\frac{x}{2d}\right) - 2\bar{B}_1\left(\frac{x}{4d}\right) \right\}.$$

Setzt man hier $2d = n$, so ergibt sich wegen (1.3.6)

$$(12) \quad \Psi_{k,1}(x) = \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{x}{u}\right) + (-1)^{k/2+1} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^{\infty} u^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{2n}\right) \right\}.$$

(11) und (12) ergeben (10).

§ 3. Der zweite Lursmanaschwilische Satz

In diesem Paragraphen sei k ungerade. Ferner seien H, M ungerade. Wir brauchen noch einige Hilfssätze. Es sei

$$(1) \quad T(an, q) = \sum_{\substack{u=1 \\ (u,q)=1}}^{4q-1} \left(\frac{-1}{u} \right) e\left(\frac{anu}{4q} \right) \quad \text{für } a = 1 \text{ oder } -1.$$

HILFSSATZ 1.

$$(2) \quad T(n, 2^a H) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 2^a M,$$

$$(3) \quad T(2^a M, 2^a H) = 2^{a+1} \left(\frac{-1}{MH} \right) i \sum_{u|(M, H)} u \mu \left(\frac{H}{u} \right).$$

Beweis. Sei

$$(4) \quad U(n, q) = \sum_{u=1}^{4q-1} \left(\frac{-1}{u} \right) e \left(\frac{nu}{4q} \right).$$

Dann ist, wenn $u = 2m-1$ gesetzt wird,

$$(5) \quad \begin{aligned} U(n, q) &= \sum_{m=1}^{2q} (-1)^{(2m-1)-1} e \left(\frac{n(2m-1)}{4q} \right) \\ &= e \left(-\frac{n}{4q} \right) \sum_{m=1}^{2q} (-1)^{m-1} e \left(\frac{nm}{2q} \right) \\ &= e \left(-\frac{n}{4q} \right) \left\{ \sum_{m=1}^q (-1)^{(2m-1)-1} e \left(\frac{n(2m-1)}{2q} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^q (-1)^{2m-1} e \left(\frac{2nm}{2q} \right) \right\} \\ &= e \left(-\frac{n}{4q} \right) \left\{ e \left(-\frac{n}{2q} \right) - 1 \right\} \sum_{m=1}^q e \left(\frac{nm}{q} \right). \end{aligned}$$

Nach (5) ist

$$(6) \quad U(n, q) = 0 \quad \text{für} \quad q \nmid n \quad \text{und für} \quad 2q|n.$$

Für $q \nmid n$ ist nämlich $\sum_m = 0$ und für $2q|n$ ist $\{ \} = 0$. Weiter ist nach (5)

$$(7) \quad U(qu, q) = 2i \left(\frac{-1}{u} \right) q.$$

Die linke Seite ist nämlich

$$= e \left(-\frac{u}{4} \right) \left\{ e \left(-\frac{u}{2} \right) - 1 \right\} q = -2i^{-u} q = 2i \cdot i^{1-u} q = 2i \left(\frac{-1}{u} \right) q.$$

Andererseits ist nach (4)

$$U(n, q) = \sum_{v|q} \sum_{\substack{u=1 \\ (u, q)=v}}^{4q-1} \left(\frac{-1}{u} \right) e \left(\frac{nu}{4q} \right).$$

Ersetzt man hier u durch uv und berücksichtigt (1), so folgt

$$\begin{aligned} U(n, q) &= \sum_{v|q} \left(\frac{-1}{v} \right) \sum_{\substack{u=1 \\ (u, q/v)=1}}^{4q/v-1} \left(\frac{-1}{u} \right) e \left(\frac{nuv}{4q} \right) \\ &= \sum_{v|q} \left(\frac{-1}{v} \right) T \left(n, \frac{q}{v} \right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \sum_{u|q} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) U \left(n, \frac{q}{u} \right) &= \sum_{u|q} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) \sum_{v|\frac{q}{u}} \left(\frac{-1}{v} \right) T \left(n, \frac{q}{uv} \right) \\ &= \sum_{H|q} T \left(n, \frac{q}{H} \right) \sum_{H=uv} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) \left(\frac{-1}{v} \right) \\ &= \sum_{H|q} \left(\frac{-1}{H} \right) T \left(n, \frac{q}{H} \right) \sum_{u|H} \mu(u) = T(n, q), \end{aligned}$$

wegen (1.9), da die ungeraden Zahlen H nur ungerade Teiler besitzen. In Verbindung mit (6) und (7), ergibt sich jetzt

$$(8) \quad T(n, q) = \sum_{u|q} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) U \left(n, \frac{q}{u} \right) = 2i \sum_{\substack{u|q \\ n=(q/u)v}} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) \left(\frac{-1}{v} \right) \frac{q}{u}.$$

Die zusätzliche Bedingung $n = (q/u)v$ in (8) bedeutet, daß n und q die Zahl 2 in derselben Vielfachheit enthalten müssen, damit $T(n, q)$ von Null verschieden ist. Damit ist (2) bewiesen. Weiter folgt aus (8)

$$T(2^a M, 2^a H) = 2i \sum_{\substack{u|H \\ M=(H/u)v}} \left(\frac{-1}{u} \right) \mu(u) \left(\frac{-1}{v} \right) \frac{2^a H}{u}.$$

Da zugleich mit u auch H/u alle Teiler von H durchläuft, kann u durch H/u ersetzt werden. Dann folgt

$$T(2^a M, 2^a H) = 2^{a+1} i \sum_{\substack{u|H \\ u|M}} \left(\frac{-1}{H/u} \right) \mu \left(\frac{H}{u} \right) \left(\frac{-1}{M/u} \right) u,$$

womit auch die Behauptung (3) des Hilfssatzes bewiesen ist.

Es werde jetzt gesetzt

$$(9) \quad T_u(y) = \sum_{v \leq y} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} \sum_{d|(u, v)} d \mu \left(\frac{u}{d} \right).$$

Dann gilt der folgende

HILFSSATZ 2.

$$(10) \quad T_u(x) = \sum_{M|u} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{k-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \sum_{H|\frac{u}{M}} \left(\frac{-1}{H} \right) \mu(H) H^{k-1} \times \\ \times \sum_{v \leq x/MH} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1}.$$

Der Beweis verläuft analog wie der von Hilfssatz 1.3. Auf Grund von (9) ist

$$(11) \quad T_u(x) = \sum_{M|u} \sum_{\substack{v \leq x \\ (u,v)=M}} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \\ = \sum_{M|u} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{k-1} \sum_{\substack{v \leq x/M \\ (v,u/M)=1}} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \\ = \sum_{M|u} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{k-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \sum_{\substack{v \leq x/M \\ (v,u/M)=1}} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1}.$$

Wegen (1.9) ist in (11)

$$\sum_v = \sum_{v \leq x/M} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} \sum_{H|\left(v, \frac{u}{M}\right)} \mu(H) \\ = \sum_{H|\frac{u}{M}} \mu(H) \sum_{\substack{v \leq x/M \\ H|v}} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} \\ = \sum_{H|\frac{u}{M}} \left(\frac{-1}{H} \right) \mu(H) H^{k-1} \sum_{v \leq x/MH} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1}.$$

Setzt man dies in (11) ein, so ergibt sich die Behauptung (10) des Hilfssatzes.

Es sei

$$(12) \quad G_r(y, q) = \bar{B}_r \left(\frac{y}{q} \right) - 2^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{y}{2q} \right) - 2^{2r-1} \bar{B}_r \left(\frac{y-q}{4q} \right).$$

HILFSSATZ 3.

$$(13) \quad k \sum_{v \leq x} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} = - \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} G_r(x, 1) x^{k-r} + Bx^{k-j-1}.$$

Beweis.

$$\sum_{v \leq x} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} = \sum_{\substack{v \leq x \\ v \equiv 1 \pmod{4}}} v^{k-1} - \sum_{\substack{v \leq x \\ v \equiv 3 \pmod{4}}} v^{k-1} \\ = 2 \sum_{\substack{v \leq x \\ v \equiv 1 \pmod{4}}} v^{k-1} - \sum_{v \leq x} v^{k-1} \\ = 2 \sum_{0 \leq m \leq (x-1)/4} (4m+1)^{k-1} - \sum_{n \leq x} n^{k-1} + \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{2}}} n^{k-1} \\ = 2 \sum_{0 \leq m \leq (x-1)/4} (4m+1)^{k-1} - \sum_{n \leq x} n^{k-1} + 2^{k-1} \sum_{n \leq x/2} n^{k-1}.$$

Aus (14), (1.4) und (1.5) folgt

$$k \sum_{v \leq x} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{k-1} = \frac{1}{2} x^k + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} 2^{2r} \bar{B}_r \left(\frac{x-1}{4} \right) x^{k-r} - \\ - x^k - \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r(x) x^{k-r} + 2^{k-1} \left(\frac{x}{2} \right)^k + \\ + 2^{k-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \bar{B}_r \left(\frac{x}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{k-r} + Bx^{k-j-1} \\ = - \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \left\{ \bar{B}_r(x) - 2^{r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x}{2} \right) - 2^{2r-1} \bar{B}_r \left(\frac{x-1}{4} \right) \right\} + \\ + Bx^{k-j-1}.$$

In Verbindung mit (12), ergibt dies die Behauptung (13).

HILFSSATZ 4. Für $x \geq 3u$ ist

$$(15) \quad T_u(x) = - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{n|u} \left(\frac{-1}{n} \right) \mu \left(\frac{u}{n} \right) n^r G_r(x, n) + \\ + Bx^{k-j-1} u^{j+1} \log^3 2u.$$

Beweis. Auf die v -Summe in (10) kann (13) angewendet werden, denn aus $x \geq 3u$ folgt $x/MH \geq 3$, so daß in (13), x durch x/MH ersetzt

werden kann. Es folgt

$$T_u(x) = \frac{1}{k} \sum_{M|u} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{k-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \sum_{H|\frac{u}{M}} \left(\frac{-1}{H} \right) \mu(H) H^{k-1} \times \\ \times \left\{ - \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} G_r \left(\frac{x}{MH}, 1 \right) \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-r} + B \left(\frac{x}{MH} \right)^{k-j-1} \right\},$$

also

$$(16) \quad T_u(x) = -\frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{M|u} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{r-1} \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \times \\ \times \sum_{H|\frac{u}{M}} \left(\frac{-1}{H} \right) \mu(H) H^{r-1} G_r \left(\frac{x}{MH}, 1 \right) + B x^{k-j-1} \sum_{M|u} M^j \sum_{d|M} d \sum_{H|\frac{u}{M}} H^j.$$

Hier ist das Restglied, nach (1.2) und (1.3),

$$= B x^{k-j-1} \sum_{M|u} M^j \sum_{d|M} d \left(\frac{u}{M} \right)^j \log 2u \\ = B x^{k-j-1} u^j \log(2u) \sum_{M|u} \sum_{d|M} d \\ = B x^{k-j-1} u^j \log^2(2u) \sum_{M|u} M = B x^{k-j-1} u^{j+1} \log^3 2u,$$

also von derselben Größenordnung wie in (15).

Setzt man in dem Hauptglied von (16)

$$MH = n, \quad H = \frac{n}{M},$$

so folgt

$$\sum_{M|u} = \sum_{n|u} \sum_{M|n} \sum_{d|M} \left(\frac{-1}{M} \right) M^{r-1} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \left(\frac{-1}{n/M} \right) \mu \left(\frac{n}{M} \right) \left(\frac{n}{M} \right)^{r-1} G_r \left(\frac{x}{n}, 1 \right) \\ (17) \quad = \sum_{n|u} \left(\frac{-1}{n} \right) n^{r-1} G_r \left(\frac{x}{n}, 1 \right) \sum_{M|n} \mu \left(\frac{n}{M} \right) \sum_{d|M} d\mu \left(\frac{u}{d} \right).$$

Hierin ist

$$\sum_{M|n} = \sum_{d|n} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \sum_{\substack{M|n \\ d|M}} \mu \left(\frac{n}{M} \right).$$

Ersetzt man in der M -Summe rechts M durch dM und beachtet (1.9), so folgt, daß in (17)

$$\sum_{M|n} = \sum_{d|n} d\mu \left(\frac{u}{d} \right) \sum_{\substack{M|n \\ d|M}} \mu \left(\frac{n}{dM} \right) = n\mu \left(\frac{u}{n} \right).$$

Setzt man das in (17) ein, so folgt, daß in (16)

$$\sum_{M|u} = \sum_{n|u} \left(\frac{-1}{n} \right) \mu \left(\frac{u}{n} \right) n^r G_r \left(\frac{x}{n}, 1 \right).$$

Nach (12) ist andererseits

$$G_r \left(\frac{x}{n}, 1 \right) = G_r(x, n).$$

In (16) ist somit

$$\sum_{M|u} = \sum_{n|u} \left(\frac{-1}{n} \right) \mu \left(\frac{u}{n} \right) n^r G_r(x, n).$$

Setzt man dies in (16) ein, so überzeugt man sich, daß auch das Hauptglied in (16) mit dem Hauptglied von (15) übereinstimmt.

Für das Folgende brauchen wir noch die zur Zetafunktion (2.1) analoge Funktion

$$(18) \quad L(s) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) \frac{1}{u^s} \quad (s > 1).$$

Für sie gilt die zu (2.2) analoge Produktdarstellung

$$(19) \quad L(s) = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \quad (s > 1).$$

In der Tat ist das Summenglied in (18), als Funktion von u betrachtet multiplikativ, und daher

$$L(s) = \prod_{p>2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1}{p^s} + \left(\frac{-1}{p} \right)^2 \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right),$$

woraus (19) folgt, wenn man die geometrische Reihe unter dem Produktzeichen summiert. Aus (19) sieht man, daß $L(s) \neq 0$ ist. Ferner ergibt sich aus (19) die zu (2.7) analoge Formel

$$(20) \quad \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{-s} \mu(u) = \{L(s)\}^{-1}.$$

In der Tat ist das Summenglied multiplikativ, so daß die linke Seite von (20) gleich ist

$$\prod_{p>2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) \mu(p) p^{-s}\right) = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right) p^{-s}\right).$$

Schließlich führen wir die zu (2.3) analoge Funktion

$$(21) \quad \Phi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{y}{u}\right) + (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} G_r(y, d)$$

ein. Wir kommen nun zum zweiten Lursmanaschwilischen Satz.

SATZ 1. *Es sei k ungerade, $k \geq 2j+3$. Dann ist*

$$(22) \quad P_{2k}(x) = D_{2k}\{kL(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \Phi_{k,r}(x) x^{k-r} + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geq 16$, d. h. $x^{1/2} \geq 4$. Wegen

$$i^{uk} = i^k (-1)^{(u-1)k/2} = i^k (-1)^{(u-1)/2} = i^k \left(\frac{-1}{u}\right)$$

ist die q -Summe in (1.17), nach (1.1.9),

$$(23) \quad \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} = \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{h \bmod u} e\left(-\frac{nh}{u}\right) + \\ + (2i)^k \sum_{\substack{4 \leq q \leq x^{1/2} \\ q \equiv 0 \pmod{4}}} q^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{\substack{u=1 \\ (u,q)=1}}^q \left(\frac{-1}{u}\right) e\left(-\frac{nu}{q}\right) = S_1 + (2i)^k S_2,$$

zur Abkürzung. Für die n -Summe in S_1 gilt nach (1.1.27), (1.19) und (1.6)

$$\sum_{n \leq x} = \sum_{n \leq x} n^{k-1} C(n, u) = \sum_{n \leq x} n^{k-1} \sum_{d|(n,u)} d \mu\left(\frac{u}{d}\right) = S_u(x).$$

Somit ist

$$(24) \quad S_1 = \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{-k} S_u(x).$$

In S_2 ersetze man q durch $4q$ und wende (1) an. Es folgt

$$(25) \quad S_2 = 4^{-k} \sum_{q \leq \frac{x^{1/2}}{4}} q^{-k} \sum_{n \leq x} n^{k-1} T(-n, q).$$

In (24) werde $S_u(x)$ mit Hilfe von (1.13) ausgedrückt. Es ergibt sich dann, da nach (1.1) die Reihe

$$\sum_{u=3}^{\infty} u^{j+1-k} \log^3 u$$

konvergiert,

$$S_1 = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{3 \leq u \leq x^{1/2}} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{-k} \sum_{d|u} \mu\left(\frac{u}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + Bx^{k-j-1}.$$

Läßt man hier u alle ungeraden Zahlen $u \geq 3$ durchlaufen, so ist der Fehler, wie die zu (2.5) führende Rechnung zeigt, $Bx^{k-j-1} \log x$. Daher ist

$$(26) \quad S_1 = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{u=3}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right) u^{-k} \sum_{d|u} \mu\left(\frac{u}{d}\right) d^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Nach (1) ist ferner $T(-n, q)$ die zu $T(n, q)$ konjugiert komplexe Zahl. Wegen (2), (3) ist daher

$$T(-n, 2^a H) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 2^a M,$$

$$T(-2^a M, 2^a H) = -2^{a+1} \left(\frac{-1}{MH}\right) i \sum_{u|(M,H)} u \mu\left(\frac{H}{u}\right).$$

Zusammen mit (25), ergibt dies

$$S_2 = -4^{-k} i \sum_{2^a H \leq \frac{x^{1/2}}{4}} (2^a H)^{-k} \sum_{M \leq x^{1/2^a}} (2^a M)^{k-1} 2^{a+1} \left(\frac{-1}{MH}\right) \sum_{u|(M,H)} u \mu\left(\frac{H}{u}\right).$$

Wegen

$$-(2i)^k \cdot i \cdot 2^{1-2k} = (-1)^{(k-1)/2} 2^{1-k}$$

ist somit

$$(27) \quad (2i)^k S_2 = (-1)^{(k-1)/2} 2^{1-k} \sum_{2^a H \leq \frac{x^{1/2}}{4}} \left(\frac{-1}{H}\right) H^{-k} \sum_{M \leq x^{1/2^a}} \left(\frac{-1}{M}\right) M^{k-1} \sum_{u|(M,H)} u \mu\left(\frac{H}{u}\right).$$

Hierin ist nach (9)

$$(28) \quad \sum_M = T_H\left(\frac{x}{2^a}\right).$$

Da aber in (27)

$$\frac{x}{2^a} \geq \frac{x^{1/2}}{2^a} \geq 4H,$$

so darf auf die rechte Seite von (28) Hilfssatz 4 angewendet werden. Es folgt

$$(29) \quad (2i)^k S_2 = (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \sum_{\substack{2^a H \leq \frac{x^{1/2}}{4}}} \left(\frac{-1}{H}\right) H^{-k} \times \\ \times \sum_{n|H} \left(\frac{-1}{n}\right) \mu\left(\frac{H}{n}\right) n^r G_r\left(\frac{x}{2^a}, n\right) \left(\frac{x}{2^a}\right)^{k-r} + \\ + B \sum_{2^a H \leq x^{1/2}} \left(\frac{x}{2^a}\right)^{k-j-1} H^{-k+j+1} \log^3 2H.$$

Hierin ist das Restglied, wenn man $2^a H = n$ setzt, wegen (1.1.),

$$Bx^{k-j-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{j+1-k} \log^3 2n = Bx^{k-j-1}.$$

Läßt man ferner im Hauptglied von (29), a alle nichtnegativen ganzen Zahlen und H alle positiven ungeraden Zahlen durchlaufen, so ist der Fehler, nach (12), (1.3.3), (1.1), (1.2) und (1.3),

$$B \sum_{r=1}^j \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{\substack{H > \frac{x^{1/2}}{2^{a+2}}}} H^{-k} \sum_{n|H} n^r \left(\frac{x}{2^a}\right)^{k-r} \\ = B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \sum_{a=0}^{\infty} 2^{a(r-k)} \sum_{\substack{H > \frac{x^{1/2}}{2^{a+2}}}} H^{-k} \sigma_r(H) \\ = B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \sum_{a=0}^{\infty} 2^{a(r-k)} \sum_{\substack{n > \frac{x^{1/2}}{2^{a+2}}}} n^r k \log 2n \\ = B \sum_{r=1}^j x^{k-r} \sum_{a=0}^{\infty} 2^{a(r-k)} x^{(r-k+1)/2} 2^{(a+2)(k-r-1)/2} \log x \\ = B \sum_{r=1}^j x^{(k-r+1)/2} \log(x) \sum_{a=0}^{\infty} 2^{-a} = Bx^{k/2} \log x \\ = Bx^{k-j-1} \log x.$$

Somit ist

$$(30) \quad (2i)^k S_2 = (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \frac{1}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2^a}\right)^{k-r} \times \\ \times \sum_{H=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{H}\right) H^{-k} \sum_{n|H} \left(\frac{-1}{n}\right) \mu\left(\frac{H}{n}\right) n^r G_r\left(\frac{x}{2^a}, n\right) + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Auf der rechten Seite von (30) ist n ungerade, so daß $n = u$ gesetzt werden kann. Nach (12) ist ferner

$$G_r\left(\frac{x}{2^a}, n\right) = G_r(x, 2^a n).$$

Mithin ist in (30), wenn man die Reihenfolge der Summationen nach H, n vertauscht und (20) beachtet,

$$\sum_{H=1}^{\infty} = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right) u^r G_r(x, 2^a u) \sum_{\substack{H=1 \\ u|H}}^{\infty} \left(\frac{-1}{H}\right) H^{-k} \mu\left(\frac{H}{u}\right) \\ = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right) u^r G_r(x, 2^a u) \sum_{H=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{uH}\right) (uH)^{-k} \mu(H) \\ = \{L(k)\}^{-1} \sum_{u=1}^{\infty} u^{r-k} G_r(x, 2^a u).$$

In (30) ist also

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{H=1}^{\infty} = \{L(k)\}^{-1} x^{k-r} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (2^a u)^{r-k} G_r(x, 2^a u) \\ = \{L(k)\}^{-1} x^{k-r} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} G_r(x, d).$$

Das gibt

$$(31) \quad (2i)^k S_2 = (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \{L(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \times \\ \times \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} G_r(x, d) + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Aus (1.17), (23), (26) und (31) folgt

$$(32) \quad P_{2k}(x) = \frac{D_{2k}}{k} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{-k} \sum_{v|u} \mu \left(\frac{u}{v} \right) v^r \bar{B}_r \left(\frac{x}{v} \right) + \\ + D_{2k} (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \{kL(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} x^{k-r} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} G_r(x, d) + \\ + Bx^{k-j-1} \log x.$$

In (32) ist, wenn man die Reihenfolge der Summationen nach u, v vertauscht und (20) beachtet,

$$(33) \quad \sum_{u=1}^{\infty} = \sum_{v=1}^{\infty} v^r \bar{B}_r \left(\frac{x}{v} \right) \sum_{\substack{u=1 \\ v|u}}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{-k} \mu \left(\frac{u}{v} \right) \\ = \sum_{v=1}^{\infty} v^r \bar{B}_r \left(\frac{x}{v} \right) \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{uv} \right) (uv)^{-k} \mu(u) \\ = \{L(k)\}^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{v} \right) v^{r-k} \bar{B}_r \left(\frac{x}{v} \right).$$

Die Behauptung (22) des Satzes folgt aus (32), (33) und (21).

Der Spezialfall $j = 1$ von Satz 1 soll, mit Rücksicht auf die Anwendungen im nächsten Kapitel, als besonderer Satz formuliert werden.

Satz 2. Es sei k ungerade, $k \geq 5$. Dann ist

$$(34) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{L(k)\}^{-1} \left(- \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \psi \left(\frac{x}{u} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{(k-1)/2} 2^{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-k} \left\{ \psi \left(\frac{x}{n} \right) - \psi \left(\frac{x}{2n} \right) - 2\psi \left(\frac{x-n}{4n} \right) \right\} \right) x^{k-1} + \\ + Bx^{k-2} \log x.$$

Beweis. Es sei k ungerade, $k \geq 5$. Dann folgt für $j = 1$ aus (22), (21) und (12)

$$(35) \quad P_{2k}(x) = -D_{2k} \{L(k)\}^{-1} \Phi_{k,1}(x) x^{k-1} + Bx^{k-2} \log x, \\ \Phi_{k,1}(x) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{1-k} \bar{B}_1 \left(\frac{x}{u} \right) + \\ + (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-k} \left\{ \bar{B}_1 \left(\frac{x}{n} \right) - \bar{B}_1 \left(\frac{x}{2n} \right) - 2\bar{B}_1 \left(\frac{x-n}{4n} \right) \right\}.$$

Zusammen mit (1.3.6) ergibt sich hieraus die Behauptung (34).

§ 4. Der dritte Lursmanaschwilische Satz

In diesem Paragraphen ist die Dimension der Kugel ungerade und ≥ 9 . Aus technischen Gründen, um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, soll diese Dimension mit $2k+1$ bezeichnet werden (wobei unsere Annahme $k \geq 4$ also immer noch in Kraft bleibt). r und j mögen nach wie vor der Ungleichung (1.1) genügen, d. h. es sei

$$(1) \quad r \leq j \leq \frac{k}{2} - 1.$$

Aus den Sätzen 2.1 und 3.1 soll jetzt ein entsprechender Satz für $P_{2k+1}(x)$ hergeleitet werden. Wir setzen

$$(2) \quad Z(k) = \begin{cases} (1-2^{-k}) \zeta(k) & \text{für gerade } k, \\ L(k) & \text{für ungerade } k, \end{cases}$$

wobei $\zeta(k)$ durch (2.1) und $L(k)$ durch (3.18) definiert ist. Ferner setzen wir

$$(3) \quad \Omega_{k,r}(y) = \begin{cases} \Psi_{k,r}(y) & \text{für gerade } k, \\ \Phi_{k,r}(y) & \text{für ungerade } k, \end{cases}$$

wobei $\Psi_{k,r}(y)$ durch (2.3) und $\Phi_{k,r}(y)$ durch (3.21) und (3.12) definiert ist.

Aus der Definition der Funktion $\Omega_{k,r}(y)$ und der Ungleichung (1) folgt

$$(4) \quad \Omega_{k,r}(y) = B.$$

Die Sätze 2.1, 3.1 lassen sich jetzt gemeinsam so ausdrücken:

Für $k \geq 2j+2$ ist

$$(5) \quad P_{2k}(x) = D_{2k} \{kZ(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \binom{k}{r} \Omega_{k,r}(y) x^{k-r} + Bx^{k-j-1} \log x.$$

Wir setzen ferner, wie in § 2.4, zur Abkürzung $z = x^{1/2}$. Weiter sei

$$f(y) = (x-y^2)^k \quad \text{für} \quad -z \leq y \leq z.$$

Dann ist

$$f(z) = f'(z) = \dots = f^{(k-1)}(z) = 0.$$

Daher ergibt eine Anwendung von Hilfssatz 1.3.2 mit $r = k$

$$(6) \quad \sum_{-z \leq m \leq z} (x-m^2)^k = \int_{-z}^z (x-y^2)^k dy + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_{-z}^z \bar{B}_k(y) f^{(k)}(y) dy.$$

Hierin ist nach (2.4.7)

$$(7) \quad \int_{-z}^z (x-y^2)^k dy = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} x^{k+1/2}.$$

Weite ist

$$f(y) = Bx^k, \quad f'(y) = Bx^k \frac{z}{x}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(y) = Bx^k \left(\frac{z}{x}\right)^k = Bx^{k/2}$$

und nach (1.3.5) ist

$$\int \bar{B}_k(y) dy = B,$$

wenn links über ein beliebiges Intervall integriert wird. Da sich das Intervall $-z \leq y \leq z$ in B Intervalle zerlegen läßt, in deren jedem $f^{(k)}(y)$ monoton ist, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$(8) \quad \int_{-z}^z \bar{B}_k(y) f^{(k)}(y) dy = Bx^{k/2}.$$

Aus (6)-(8) folgt

$$(9) \quad \sum_{-z \leq m \leq z} (x-m^2)^k = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} x^{k+1/2} + Bx^{k/2}.$$

Benutzt man (9) statt (3.8.14), so ergibt sich, genau wie in § 3.8,

$$(10) \quad P_{2k+1}(x) = \sum_{-z \leq m \leq z} P_{2k}(x-m^2) + Bx^{k/2}.$$

Aus (10), (5) und (4) ergibt sich

$$(11) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \sum_{-z \leq m \leq z} \Omega_{k,r}(x-m^2)(x-m^2)^{k-r} + Bx^{k-j-1/2} \log x.$$

Wir setzen

$$(12) \quad H_r(y) = \begin{cases} (-1)^{k/2+1} 2^{r-k} \left\{ \bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2^r \bar{B}_r\left(\frac{y}{4}\right) \right\} & \text{für gerade } k, \\ (-1)^{(k+1)/2} 2^{1-k} \left\{ \bar{B}_r(y) - 2^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2^{2r-1} \bar{B}_r\left(\frac{y-1}{4}\right) \right\} & \text{für ungerade } k; \end{cases}$$

$$(13) \quad S_1 = \sum_{-z \leq m \leq z} \bar{B}_r\left(\frac{x-m^2}{u}\right) (x-m^2)^{k-r},$$

$$(14) \quad S_2 = \sum_{-z \leq m \leq z} H_r\left(\frac{x-m^2}{d}\right) (x-m^2)^{k-r}.$$

Aus (11), (3), (2.3), (3.21), (12), (13) und (14) folgt

$$(15) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} \left\{ \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{r-k} S_1 + \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} S_2 \right\} + Bx^{k-j-1/2} \log x.$$

Wegen (1.3.3) hat die Funktion $\bar{B}_r(y)$ die Periode 1. Also ist

$$(16) \quad S_1 = \sum_{h=1}^u \bar{B}_r\left(\frac{x-h^2}{u}\right) \sum_{\substack{-z \leq m \leq z \\ m \equiv h \pmod{u}}} (x-m^2)^{k-r} \\ = \sum_{h=1}^u \bar{B}_r\left(\frac{x-h^2}{u}\right) \sum_{(-z-h)/u < l < (z-h)/u} \{x-(h+ul)^2\}^{k-r}.$$

Nach (1) ist hierbei $k-r \geq 3$.

Auf die l -Summe in (16) wenden wir Hilfssatz 1.3.2 an mit

$$f(y) = \{x-(h+uy)^2\}^{k-r}, \quad X = \frac{-z-h}{u}, \quad Y = \frac{z-h}{u}$$

und $k-r$ statt r . Dann ist die Summe nach n in (1.3.4) gleich Null. Das erste Integral in (1.3.4) ist wegen (2.4.7)

$$\int_{(-z-h)/u}^{(z-h)/u} \{x-(h+uy)^2\}^{k-r} dy = \frac{1}{u} \int_{-z}^z (x-y^2)^{k-r} dy \\ = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{u \Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2}.$$

Weiter ist

$$f(y) = Bx^{k-r} \frac{u}{z}, \quad f'(y) = Bx^{k-r} \left(\frac{u}{z}\right)^2, \quad \dots, \\ f^{(k-r)}(y) = Bx^{k-r} \left(\frac{u}{z}\right)^{k-r} = Bx^{(k-r)/2} u^{k-r}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist daher das zweite Integral in (1.3.4) auch

$$Bx^{(k-r)/2} u^{k-r}.$$

Mithin ist in (16)

$$(17) \quad \sum_l = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{u \Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2} + Bx^{(k-r)/2} u^{k-r}.$$

Aus (16) und (17) ergibt sich

$$(18) \quad S_1 = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{u \Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2} \sum_{h=1}^u \bar{B}_r \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + Bx^{(k-r)/2} u^{k-r+1}.$$

Unmittelbar aus (13) folgt

$$(19) \quad S_1 = Bx^{k-r+1/2}.$$

Wir benutzen die Abschätzung (18) für $u \leq z$ und die Abschätzung (19) für $u > z$. Dann kommt

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^{-1/2} \Gamma(k-r+\frac{3}{2})}{\Gamma(k-r+1)} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right)^k u^{r-k} S_1 \\ &= x^{k-r+1/2} \sum_{u \leq z} \left(\frac{-1}{u} \right)^k u^{r-k-1} \sum_{h=1}^u \bar{B}_r \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + \\ &+ Bx^{(k-r)/2} \sum_{u \leq z} u + Bx^{k-r+1/2} \sum_{u > z} u^{r-k} \\ &= x^{k-r+1/2} \sum_{u=1}^{\infty} + Bx^{k-r+1/2} \sum_{u > z} u^{r-k} + Bx^{(k-r)/2} \sum_{u \leq z} u. \end{aligned}$$

Die Restglieder sind hier

$$Bx^{(k-r)/2+1} = Bx^{(k+1)/2}.$$

Also ist

$$(20) \quad \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right)^k u^{r-k} S_1 = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right)^k u^{r-k-1} \sum_{h=1}^u \bar{B}_r \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + Bx^{(k+1)/2}.$$

Wegen (12) und (1.3.3) hat die Funktion $H_r(y)$ die Periode 4. Nach (14) ist daher

$$(21) \quad \begin{aligned} S_2 &= \sum_{h=1}^{4d} H_r \left(\frac{x-h^2}{d} \right) \sum_{\substack{-s < m \leq s \\ m \equiv h \pmod{4d}}} (x-m^2)^{k-r} \\ &= \sum_{h=1}^{4d} H_r \left(\frac{x-h^2}{d} \right) \sum_{(-s-h)/4d < l \leq (s-h)/4d} \{x-(h+4dl)^2\}^{k-r}. \end{aligned}$$

Die l -Summe in (21) unterscheidet sich von der l -Summe in (16) nur dadurch, daß u durch $4d$ ersetzt wird. Da aber beim Beweise von (17) nicht davon Gebrauch gemacht wurde, daß u ungerade war, so gilt (17) auch für die l -Summe in (21), sofern man rechts u durch $4d$ ersetzt. Auf diese Weise ergibt sich

$$(22) \quad S_2 = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{4d \Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2} \sum_{h=1}^{4d} H_r \left(\frac{x-h^2}{d} \right) + Bx^{(k-r)/2} d^{k-r+1}.$$

Unmittelbar aus (12) und (14) folgt

$$(23) \quad S_2 = Bx^{k-r+1/2}.$$

Indem man mit (22) und (23) genau so verfährt, wie oben mit (18) und (19), bekommt man die zu (20) analoge Formel

$$(24) \quad \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} S_2 = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(k-r+1)}{4 \Gamma(k-r+\frac{3}{2})} x^{k-r+1/2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{h=1}^{4d} H_r \left(\frac{x-h^2}{d} \right) + Bx^{(k+1)/2}.$$

Aus (1.4.2) folgt

$$D_{2k} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \pi^{1/2} \Gamma(k-r+1) = \frac{\pi^{k+1/2}}{r!}.$$

Nach (1) ist ferner

$$k-j-\frac{1}{2} \geq \frac{k+1}{2}.$$

Setzt man daher (20) und (24) in (15) ein, so ergibt sich der folgende

SATZ 1. Für $k \geq 2j+2$ ist

$$(25) \quad \begin{aligned} P_{2k+1}(x) &= \pi^{k+1/2} \{Z(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \frac{x^{k-r+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})} \times \\ &\times \left\{ \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right)^k u^{r-k-1} \sum_{h=1}^u \bar{B}_r \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{h=1}^{4d} H_r \left(\frac{x-h^2}{d} \right) \right\} + Bx^{k-j-1/2} \log x, \end{aligned}$$

wobei die Funktion $Z(k)$ durch (2) und die Funktion $H_r(y)$ durch (12) definiert ist.

Speziell für $j=1$ ergeben sich aus Satz 1, wegen (2), (12), (1.3.6) und (1.4.2), die beiden folgenden Sätze:

SATZ 2. Es sei k gerade, $k \geq 4$. Dann ist

$$(26) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k+1} \{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \}^{-1} \left(- \sum_{u=1}^{\infty} u^{-k} \sum_{h=1}^u \psi \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{k/2} 2^{-1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} \sum_{h=1}^{4d} \left\{ \psi \left(\frac{x-h^2}{2d} \right) - 2 \psi \left(\frac{x-h^2}{4d} \right) \right\} \right) x^{k-1/2} + \\ + B x^{k-3/2} \log x.$$

SATZ 3. Es sei k ungerade, $k \geq 5$. Dann ist

$$(27) \quad P_{2k+1}(x) = D_{2k+1} \{ L(k) \}^{-1} \left(- \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u} \right) u^{-k} \sum_{h=1}^u \psi \left(\frac{x-h^2}{u} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{(k-1)/2} 2^{-1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} \sum_{h=1}^{4d} \left\{ \psi \left(\frac{x-h^2}{d} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi \left(\frac{x-h^2}{2d} \right) - 2 \psi \left(\frac{x-h^2}{4d} \right) \right\} \right) x^{k-1/2} + B x^{k-3/2} \log x.$$

VI KAPITEL

DIE FUNKTIONEN P_{2k} UND ϱ_{2k}

§ 1. Problemstellung. P_{2n} und ϱ_{2n}

Nach Satz 2.2.2 ist die Funktion

$$x^{1-k/2} P_k(x)$$

für jedes $k > 4$ beschränkt und nach den Sätzen 4.4.8 und 4.4.9 hat sie einen oszillierenden Charakter, der durch die Eigenschaften des Symbols $\Omega_{\pm}$ beschrieben wird. Es erscheint daher angebracht, für $k > 4$ die Funktionen von k

$$(1) \quad \limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = P_k^*, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = \varrho_k^*$$

einzuführen. Die Normierung durch den Faktor $2/D_k$ erweist sich dabei als bequem; sie tritt schon in (4.4.68) und (4.4.69) auf.

Der folgende einfache Hilfssatz zeigt, daß es genügt, statt der Funktionen (1) die Funktionen

$$(2) \quad \limsup_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = P_k, \quad \liminf_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = \varrho_k$$

zu betrachten.

HILFSSATZ 1. Für $k > 4$ ist

$$(3) \quad P_k^* = P_k, \quad \varrho_k^* = \varrho_k - 2.$$

Beweis. In jedem Intervall $n \leq x < n+1$, wo $n \geq 3$, nimmt die Funktion $P_k(x)$ ihrer Definition nach ab. Daher nimmt in einem solchen Intervall auch die Funktion $x^{1-k/2} P_k(x)$ ab, so daß auf Grund von (1) und (2)

$$P_k^* = \limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} = \limsup_{n=\infty} \frac{2P_k(n)}{D_k n^{k/2-1}} = P_k,$$