IV KAPITEL

PETERSSONSCHE SÄTZE

§ 1. Der erste Peterssonsche Satz

In diesem Kapitel setzen wir

$$\sum_{n\leqslant x}{}' z_n = \begin{cases} \sum_{n\leqslant x} z_n, & \text{wenn } x \text{ keine ganze Zahl ist,} \\ \sum_{n<x} z_n + \tfrac{1}{2} z_x, & \text{wenn } x \text{ eine ganze Zahl ist.} \end{cases} \tag{1}$$

Ferner werde $k > 4$ angenommen.

HILFSSATZ 1. *Die Funktion $f(y)$ sei auf der Halbgeraden $0 \leqslant y < \infty$ definiert, ihr Real- und Imaginärteil dort von beschränkter Variation, $\lim_{y=\infty} f(y) = 0$. Dann ist*

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f(y)\cos(2n\pi y)\,dy = \lim_{M=\infty}\Big(\tfrac{1}{2}f(0+0)+\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\{f(m-0)+f(m+0)\}-\int_0^{M+1/2} f(y)\,dy\Big). \tag{2}$$

Ist insbesondere das Integral $\int_0^{\infty} f(y)\,dy$ vorhanden, so gilt

$$\int_0^{\infty} f(y)\,dy + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f(y)\cos(2n\pi y)\,dy = \tfrac{1}{2}f(0+0)+\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m-0)+f(m+0)\}. \tag{3}$$

Beweis. Es genügt, die Gleichung (2) zu beweisen, da (3) daraus unmittelbar folgt. Aus der Richtigkeit von (2) für zwei reelle Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(y)$ ergibt sich die Richtigkeit für $f(y) = f_1(y)+if_2(y)$. Also darf die Funktion $f(y)$ selbst als reell angenommen werden. Schließlich darf angenommen werden, daß die Funktion $f(y)$ nicht zunimmt, da man jede gegen Null strebende Funktion von beschränkter Variation als

Differenz von zwei gegen Null strebenden nicht zunehmenden Funktionen darstellen kann.

Setzt man

$$F(r, y) = \frac{\sin(2r+1)\pi y}{2\sin \pi y}, \tag{4}$$

so ist bekanntlich (was man ohne Schwierigkeit durch Induktion nachprüfen kann)

$$\sum_{n=1}^{r}\cos 2n\pi y = F(r, y)-\tfrac{1}{2}. \tag{5}$$

Daraus folgt insbesondere

$$\int_{a/2}^{(a+1)/2} F(r, y)\,dy = \tfrac{1}{4}. \tag{6}$$

Wegen $f(y) \to 0$ sind die Integrale links in (2) vorhanden. Man hat daher, auf Grund von (5) und (6),

$$2\sum_{n=1}^{r}\int_0^{\infty} f(y)\cos(2n\pi y)\,dy = 2\int_0^{\infty} f(y)\{F(r, y)-\tfrac{1}{2}\}\,dy = \lim_{M=\infty}(S_1-S_2-S_3+S_4), \tag{7}$$

wobei

$$S_1 = \tfrac{1}{2}f(0+0)+\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\{f(m-0)+f(m+0)\}, \tag{8}$$

$$S_2 = \int_0^{M+1/2} f(y)\,dy, \tag{9}$$

$$S_3 = 2\sum_{m=0}^{M}\int_m^{m+1/2}\{f(m+0)-f(y)\}F(r, y)\,dy, \tag{10}$$

$$S_4 = 2\sum_{m=1}^{M}\int_{m-1/2}^{m}\{f(y)-f(m-0)\}F(r, y)\,dy. \tag{11}$$

Da die Funktion (4) in y die Periode 1 hat, so ist in (10)

$$\int_m^{m+1/2} = \int_0^{1/2}\{f(m+0)-f(m+y)\}F(r, y)\,dy. \tag{12}$$

Hieraus folgt nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_m^{m+1/2} = \{f(m+0)-f(m+\tfrac{1}{2}-0)\}\int_\theta^{1/2} F(r, y)\,dy, \tag{13}$$

wo θ eine gewisse Zahl im Intervall $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$ ist.

Nun ist für $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$, $r > 0$ wegen (4)

$$\int_\theta^{1/2} F(r,y)\,dy = \tfrac{1}{2}\int_\theta^{1/2} \sin\{(2r+1)\pi y\}\left(\frac{1}{\sin \pi y} - \frac{1}{\pi y}\right)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{(2r+1)\pi\theta}^{(2r+1)\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,dy$$

$$= B\int_\theta^{1/2} \left|\frac{1}{\sin \pi y} - \frac{1}{\pi y}\right| dy + B,$$

also

$$\int_\theta^{1/2} F(r,y)\,dy = B \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2},\ r > 0). \tag{14}$$

Es sei jetzt $0 < s < \frac{1}{2}$. Rechts in (12) ist dann nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_0^{1/2} = \int_0^s + \int_s^{1/2} = \{f(m+0) - f(m+s)\}\int_{\theta_1}^s F(r,y)\,dy +$$

$$+ \{f(m+0) - f(m+\tfrac{1}{2})\}\int_{\theta_2}^{1/2} F(r,y)\,dy,$$

wobei $0 \leqslant \theta_1 \leqslant s \leqslant \theta_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Hierin ist, wenn man noch einmal den zweiten Mittelwertsatz anwendet, wegen (4),

$$\int_{\theta_2}^{1/2} F(r,y)\,dy = \frac{1}{2\sin \pi\theta_2}\int \sin\{(2r+1)\pi y\}\,dy = \frac{B}{r\sin \pi\theta_2} = \frac{B}{rs}.$$

Somit ist nach (14) in (12)

$$\int_0^{1/2} = B\{f(m+0) - f(m+s)\} + \frac{Bf(0+0)}{rs}.$$

Ist ein beliebiges ε vorgegeben, so wähle man s so klein, daß

$$f(m+0) - f(m+s) \leqslant \varepsilon,$$

und hernach r_0 so groß, daß

$$f(0+0) \leqslant \varepsilon rs \quad \text{für} \quad r \geqslant r_0.$$

Für $r \geqslant r_0$ ist dann $\int_0^{1/2} = B\varepsilon$, und das bedeutet wegen (12), daß in (10)

$$\lim_{r=\infty} \int_m^{m+1/2} = 0 \tag{15}$$

ist. Andererseits ist nach (13) und (14) in (10)

$$\int_m^{m+1/2} = B\{f(m+0) - f(m+\tfrac{1}{2}-0)\}.$$

Wegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{f(m+0) - f(m+\tfrac{1}{2}-0)\} \leqslant f(0+0)$$

ist also die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1/2}$$

absolut und gleichmäßig konvergent. Jedes Glied strebt mit wachsendem r nach (15) gegen Null. Wegen (10) ist daher

$$\lim_{r=\infty}\ (\lim_{M=\infty} S_3) = 0. \tag{16}$$

Auf analoge Weise ergibt sich für die Summe (11)

$$\lim_{r=\infty} (\lim_{M=\infty} S_4) = 0. \tag{17}$$

S_1 und S_2 hängen nach (8) und (9) nicht von r ab. Daher folgt die Behauptung (2) des Hilfssatzes aus (7), (16), (17), (8) und (9).

Hilfssatz 2.

$$\sum_{n\leqslant x}{}' n^{k/2-1} e(-\theta n) = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{M} \int_0^x y^{k/2-1} e\{-(\theta+m)y\}\,dy. \tag{18}$$

Beweis. Setzt man in (3)

$$f(y) = \begin{cases} y^{k/2-1}e(-\theta y) & \text{für} \quad 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 & \text{für} \quad y > x, \end{cases}$$

so folgt, wegen (1),

$$\int_0^x y^{k/2-1}e(-\theta y)\,dy + 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^x y^{k/2-1}e(-\theta y)\frac{e(my)+e(-my)}{2}\,dy$$

$$= \sum_{n\leqslant x}{}' n^{k/2-1}e(-\theta n),$$

also (18).

Wir führen jetzt für das vorliegende Kapitel die folgende Bezeichnung ein. Es sei

$$\mathfrak{R}_k(x,q,r) = \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=-M \\ m\neq -h/q}}^{M} \frac{e\left\{-\left(\frac{h}{q}+m\right)x\right\}}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^r}. \tag{19}$$

Ausführlich geschrieben, lautet dies:

$$(20)\quad \mathfrak{R}_k(x,q,r)=\begin{cases} -2i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi x}{m^r} & \text{für } q=1,\ 2\nmid r,\\ 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi x}{m^r} & \text{für } q=1,\ 2\mid r,\\ \sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{hx}{q}\right)\left\{\frac{q}{h}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{e(-mx)}{\left(\frac{h}{q}+m\right)}+\right.\right. & \\ \qquad\left.\left.+\frac{e(mx)}{\frac{h}{q}-m}\right)\right\} & \text{für } q>1,\ r=1,\\ \sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{hx}{q}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e(-mx)}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^r} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } q>1,\ r>1. \end{cases}$$

Wir brauchen die folgenden einfachen Abschätzungen:

Hilfssatz 3. *Für $0\leqslant h<q$, $(h,q)=1$ ist*

$$(21)\quad S=\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{m=-M\\ m\neq -h/q}}^{M}\frac{e(-my)}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^r}=\begin{cases} B & \text{für } q=1,\\ B\ \mathrm{Max}^r\left(\frac{q}{h},\frac{q}{q-h}\right) & \text{für } q>1. \end{cases}$$

Außerdem ist

$$(22)\qquad \mathfrak{R}_k(x,q,r)=Bq^{r-k/2}\log 3q.$$

Beweis. Für $q=1$, $r=1$ ist nach (2.3.3) und (1.3.1)

$$(23)\qquad S=-2i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi y}{m}=2\pi i\psi(y)\quad\text{oder}\quad 0=B.$$

Für $q=1$, $r>1$ ist

$$(24)\qquad S=B\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^r}=B.$$

Es sei jetzt $q>1$, $r=1$. Wegen

$$\frac{e(-ny)}{\varepsilon+n}+\frac{e(ny)}{\varepsilon-n}=2\varepsilon\frac{\cos 2n\pi y}{n^2-\varepsilon^2}+2i\frac{\sin 2n\pi y}{n}+2i\varepsilon^2\frac{\sin 2n\pi y}{n(n^2-\varepsilon^2)}$$

und (23) ist

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{e(-my)}{\frac{h}{q}+m}+\frac{e(my)}{\frac{h}{q}-m}\right)\right|$$
$$\leqslant 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2-1}+2\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi y}{m}\right|+2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m^2-1)}=B.$$

Somit ist

$$(25)\qquad S=\frac{q}{h}+\frac{e(-y)}{\frac{h}{q}+1}+\frac{e(y)}{\frac{h}{q}-1}+B=B\,\mathrm{Max}\left(\frac{q}{h},\frac{q}{q-h}\right).$$

Für $q>1$, $r>1$ ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^r}=B\left(\frac{q^r}{h^r}+\frac{q^r}{(q-h)^r}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)^r}\right)$$

$$(26)\qquad =B\,\mathrm{Max}^r\left(\frac{q}{h},\frac{q}{q-h}\right),$$

also

$$(27)\qquad S=\mathrm{Max}^r\left(\frac{q}{h},\frac{q}{q-h}\right).$$

Wegen (23), (24), (25) und (27) ist (21) erfüllt.

Für $q=1$ folgt (22) unmittelbar aus (19), (21) und (1.1.1). Für $q>1$, $r=1$ ergibt sich aus (19), (21) und (1.1.2)

$$\mathfrak{R}_k(x,q,1)=Bq^{-k/2}\sum_{h=1}^{q-1}\frac{q}{h}=Bq^{1-k/2}\log q,$$

so daß (7) auch in diesem Fall zutrifft.

Ist endlich $q>1$, $r>1$, so folgt aus (26)

$$q^{-k/2}\sum_{h \bmod q}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^r}=q^{-k/2}\sum_{\substack{0<h<q\\ (h,q)=1}}$$

$$(28)\qquad =Bq^{-k/2}\sum_{h=1}^{q-1}\frac{q^r}{h^r}=Bq^{r-k/2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^r}=Bq^{r-k/2}.$$

Nach (19), (1.1.2) und (28) ist hier

$$\mathfrak{R}_k(x, q, r) = Bq^{r-k/2},$$

so daß (22) erfüllt ist.

Wir setzen jetzt

$$\mathfrak{R}_k(x, r) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathfrak{R}_k(x, q, r) \qquad (r < k/2-1). \tag{29}$$

Nach Hilfssatz 3 konvergiert die Reihe rechts absolut und gleichmäßig in x. Genauer ist

$$\mathfrak{R}_k(x, r) = B \qquad (r < k/2-1). \tag{30}$$

Satz 1.

$$\frac{P_k(x+0)+P_k(x-0)}{2} = -\sum_{r\leqslant(k-1)/4} \frac{1}{(2\pi i)^r} \cdot \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)} x^{k/2-r}\mathfrak{R}_k(x, r)+Bx^{k/4}\log x. \tag{31}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geqslant 9$. Wegen $r \leqslant (k-1)/4$ ist $r < k/2-1$, so daß die Funktionen $\mathfrak{R}_k(x, r)$ in (31) definiert sind.

Es sei jetzt $j \leqslant k/2-1$. Dann ergibt j-fache partielle Integration, sofern $\theta+m \neq 0$ ist,

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^x y^{k/2-1} e\{-(\theta+m)y\}\, dy \tag{32}$$

$$= -e\{-(\theta+m)x\} \sum_{r=1} \frac{x^{k/2-r}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)(2\pi i)^r(\theta+m)^r} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-j\right)(2\pi i)^j(\theta+m)^j} \int_0^x y^{k/2-1-j} e\{-(\theta+m)y\}\, dy.$$

Dabei ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_0^x y^{k/2-1-j} e\{-(\theta+m)y\}\, dy = B\frac{x^{k/2-1-j}}{\theta+m}. \tag{33}$$

Aus der Landauschen Formel (1.4.3) ergibt sich

$$\frac{A_k(x+0)+A_k(x-0)}{2} = \frac{D_k}{2} \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \sideset{}{'}\sum_{h \bmod q} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n\leqslant x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + \frac{D_k}{2} \sum_{q<x^{1/2}} \sideset{}{'}\sum_{h \bmod q} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n<x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bx^{k/4}\log x$$

$$= S_1+S_2+Bx^{k/4}\log x,$$

zur Abkürzung. Läßt man q in S_2 über das Intervall $q \leqslant x^{1/2}$ laufen, so ist der Fehler, wegen (1.4.26) und (1.4.36), gleich

$$Bx^{-k/4} \sum_{h\leqslant x^{1/2}} x^{k/2-1} \frac{x^{1/2}}{h} = Bx^{k/4}.$$

Somit ergibt sich wegen (1)

$$\frac{A_k(x+0)+A_k(x-0)}{2} = D_k \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \sum_{\substack{0\leqslant h<q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n\leqslant x}' n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bx^{k/4}\log x. \tag{34}$$

Auf die n-Summe in (34) werde jetzt Hilfssatz 2 mit $\theta = h/q$ angewendet. Das Integral $\int_0^x$ werde dabei nach (32) mit

$$j = \left[\frac{k-1}{4}\right] \tag{35}$$

berechnet. Da $\theta+m$ nur für $h = 0$, $q = 1$, $m = 0$ gleich Null ist, ergibt sich

$$\frac{A_k(x+0)+A_k(x-0)}{2} = S_3+S_4+S_5+Bx^{k/4}\log x, \tag{36}$$

wobei

$$S_3 = D_k \int_0^x y^{k/2-1} dy, \tag{37}$$

$$S_4 = -D_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \sum_{\substack{0\leqslant h<q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{hx}{q}\right) \times \sum_{r=1}^{j} \frac{x^{k/2-r}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)(2\pi i)^r} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=-M \\ m\neq -h/q}}^{M} \frac{e(-mx)}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^r}, \tag{38}$$

$$(39)\quad S_5 = D_k \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \sum_{\substack{0\leqslant h<q\\(h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-j\right)(2\pi i)^j} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=-M\\ m\neq -h/q}}^{M} \frac{1}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^j} \int_0^x y^{k/2-1-j} e\left\{-\left(\frac{h}{q}+m\right)y\right\} dy.$$

Hierbei ist zu beachten, daß aus dem über die Funktion (19) Gesagten die Existenz des Grenzwertes in (38) folgt. Daher ist auch der Grenzwert in (39) vorhanden, so daß S_4 und S_5 getrennt behandelt werden können.

Aus (37), (1.4.2) und der Definition von $A_k(x)$, $P_k(x)$ ergibt sich

$$(40)\quad \frac{A_k(x+0)+A_k(x-0)}{2} - S_3 = \frac{P_k(x+0)+P_k(x-0)}{2}.$$

In (38) kann h wegen (1.1.1) ein beliebiges reduziertes Restsystem mod q durchlaufen, und es folgt, wegen (1.4.2), (19) und (35),

$$(41)\quad S_4 = -\sum_{r\leqslant(k-1)/4} \frac{1}{(2\pi i)^r} \cdot \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)} x^{k/2-r} \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \mathfrak{R}_k(x,q,r).$$

Läßt man hier q über alle positiven ganzen Zahlen laufen, so ist nach (22) der Fehler

$$B \sum_{r\leqslant(k-1)/4} x^{k/2-r} \sum_{q>x^{1/2}} q^{r-k/2}\log q = B \sum_{r\leqslant(k-1)/4} x^{k/2-r+(r+1-k/2)/2}\log x = Bx^{k/4}\log x.$$

Aus (41) und (29) folgt daher

$$(42)\quad S_4 = -\sum_{r\leqslant(k-1)/4} \frac{1}{(2\pi i)^r} \cdot \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)} x^{k/2-r}\mathfrak{R}_k(x,r) + Bx^{k/4}\log x.$$

Nach (39), (1.1.2) und (33) ist

$$(43)\quad S_5 = Bx^{k/2-1-j} \sum_{q\leqslant x^{1/2}} q^{-k/2} \sum_{\substack{0\leqslant h<q\\(h,q)=1}} \sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq -h/q}}^{\infty} \frac{1}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^{j+1}}$$

$$(44)\quad = S_6 + S_7,$$

wobei S_6 derjenige Teil der rechten Seite in (43) ist, der dem Wert $q=1$ entspricht, während in S_7 der Buchstabe q über das Intervall $2\leqslant q\leqslant x^{1/2}$ läuft. Aus (35) folgt

$$(45)\quad \frac{k}{2}-1-j = \frac{k}{2}-1-\left[\frac{k-1}{4}\right] \leqslant \frac{k}{2}-1-\frac{k-4}{4} = \frac{k}{4}.$$

Aus (43)-(45) und (28) ergibt sich

$$(46)\quad S_6 = Bx^{k/4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{j+1}} = Bx^{k/4},$$

$$(47)\quad S_7 = Bx^{k/2-1-j} \sum_{q\leqslant x^{1/2}} q^{j+1-k/2}.$$

Für $k\geqslant 8$ ist nach (35)

$$j+1-\frac{k}{2} \leqslant \frac{k-1}{4}+1-\frac{k}{2} = -\frac{k-3}{4} < -1,$$

also nach (47) und (45)

$$(48)\quad S_7 = Bx^{k/4}.$$

Für $k=7$ ist $j=1$, also auch $j+1-k/2<-1$ und (48) erfüllt. Für $k=5$ ist $j=1$, und (47) ergibt

$$S_7 = Bx^{1/2} \sum_{q\leqslant x^{1/2}} q^{-1/2} = Bx^{3/4} = Bx^{5/4}.$$

Für $k=6$ ergibt sich analog

$$S_7 = Bx \sum_{q\leqslant x^{1/2}} q^{-1} = Bx\log x = Bx^{3/2}.$$

(48) gilt also auch für $k=5$ und $k=6$. Aus (43), (44), (46) und (48) folgt

$$(49)\quad S_5 = Bx^{k/4}.$$

Die Behauptung (31) des Satzes folgt aus (36), (40), (42) und (49).

§ 2. Die Hardysche Identität

Wir werden im nächsten Paragraphen den zweiten Peterssonschen Satz beweisen, der eine Verschärfung des ersten Satzes 1.1 für die 4 Werte $k=5,6,7,8$ ergibt. Dieser zweite Satz kann nicht mehr aus der Landauschen Formel (1.4.3) hergeleitet werden, da diese nicht scharf genug ist. An ihre Stelle tritt eine wichtige Hardysche Identität, die wir in diesem Paragraphen bringen. Diese Identität ist eine Verschärfung der Hardyschen asymptotischen Formel (1.4.40) für die genannten Werte von k.

In diesem Paragraphen ist k eine der Zahlen 5, 6, 7, 8. Wir bezeichnen ferner mit w eine komplexe Zahl mit positivem Realteil und definieren

$$(1)\quad w^y = \exp(y\log w), \quad \text{wo} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(\log w) < \frac{\pi}{2}.$$

Insbesondere ist

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Re}(w^{-1/2}) > 0, \quad w^{-k/2} = (w^{-1/2})^k = \frac{1}{w^{k/2}}.$$

Für beliebiges z sei $\bar{z}$, wie üblich, die konjugiert komplexe Zahl.

Sodann führen wir die drei Thetanullwerte ein:

$$\text{(3)} \qquad \vartheta_3(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 w),$$

$$\text{(4)} \qquad \vartheta_4(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(-\pi m^2 w),$$

$$\text{(5)} \qquad \vartheta_2(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi(m+\tfrac{1}{2})^2 w\}.$$

Die übliche Bezeichnungsweise für diese Funktionen ist $\vartheta_3(0|\tau)$, $\vartheta_4(0|\tau)$, $\vartheta_2(0|\tau)$, wo der Modul $\tau = iw$ positiven Imaginärteil besitzt. Mit der Funktion $\vartheta_3(w)$ hatten wir schon in § 1.4 zu tun; sie hieß dort $\vartheta(z)$.

Wir schicken dem Beweise der Hardyschen Identität drei Hilfssätze voraus, von denen der erste nur wohlbekannte Eigenschaften der Thetafunktionen bringt, der zweite der Haupthilfssatz ist. Der Buchstabe a bedeute in diesem Paragraphen eine der Zahlen 2, 3, 4.

Hilfssatz 1.

$$\text{(6)} \qquad \vartheta_4(w) = \vartheta_3(w+i) = \vartheta_3(w-i),$$

$$\text{(7)} \qquad \vartheta_3(w) = w^{-1/2}\vartheta_3\left(\frac{1}{w}\right),$$

$$\text{(8)} \qquad \vartheta_2(w) = w^{-1/2}\vartheta_4\left(\frac{1}{w}\right),$$

$$\text{(9)} \qquad \vartheta_a(w) \neq 0.$$

Beweis. (6) folgt unmittelbar aus (3) und (4).

(7) und (8) ergeben sich aus Hilfssatz 1.4.1 mit $y = 0$ und $y = \frac{1}{2}$, (2), (3), (4) und (5).

(9) ergibt sich aus der Produktdarstellung der Funktionen $\vartheta_a(w)$; vgl. z. B. Pólya-Szegö [1], 8, Aufgabe 53.

Hilfssatz 2. *Die reelle Funktion $R_k(n)$ sei so beschaffen, daß*

1) $R_k(n) = Bn^k$, *also die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} R_k(n) z^n$ *für* $|z| < 1$ *konvergiert*;
2) *die Funktion*

$$\text{(10)} \qquad \Phi_3(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_k(n) \exp(-\pi n w)$$

die Bedingung

$$\text{(11)} \qquad \Phi_3(w) = w^{-k/2}\Phi_3\left(\frac{1}{w}\right)$$

erfüllt;

3) *für $k = 8$ die Funktion*

$$\text{(12)} \qquad \Phi_2(w) = w^{-4}\Phi_3\left(i + \frac{1}{w}\right)$$

die Bedingung

$$\text{(13)} \qquad \lim_{s=\infty} \Phi_2(s+yi) = 0,$$

gleichmäßig für $-\frac{1}{2} < y \leqslant \frac{1}{2}$ erfüllt.

Dann ist

$$\text{(14)} \qquad R_k(n) = r_k(n).$$

Beweis. Es sei

$$\text{(15)} \qquad \Phi_4(w) = \Phi_3(w+i),$$

$$\text{(16)} \qquad \Phi_2(w) = w^{-k/2}\Phi_4\left(\frac{1}{w}\right),$$

$$\text{(17)} \qquad g_a(w) = \Phi_a(w)\vartheta_a^{-k}(w).$$

Wegen (15) fällt die Funktion (16) für $k = 8$ mit der Funktion (12) zusammen. Nach ihrer Definition sind die Funktionen $\Phi_a(w)$ für alle w regulär. Wegen (9), (17) sind auch die Funktionen $g_a(w)$ für alle w regulär.

Aus (17), (15), (6) und (10) folgt

$$\text{(18)} \qquad g_4(w) = g_3(w+i) = g_3(w-i).$$

Aus (17), (2), (7) und (11) folgt

$$\text{(19)} \qquad g_3(w) = g_3\left(\frac{1}{w}\right).$$

Analog ergibt sich, mit Hilfe von (8) und (16),

$$\text{(20)} \qquad g_2(w) = g_4\left(\frac{1}{w}\right)$$

und, indem man hier w mit $1/w$ vertauscht,

$$\text{(21)} \qquad g_4(w) = g_2\left(\frac{1}{w}\right).$$

Aus (20), (18) und (19) ergibt sich

$$g_2(w+i) = g_4\left(\frac{1}{w+i}\right) = g_3\left(\frac{1}{w+i}+i\right) = g_3\left(\frac{wi}{w+i}\right)$$
$$= g_3\left(\frac{w+i}{wi}\right) = g_3\left(\frac{1}{w}-i\right) = g_4\left(\frac{1}{w}\right),$$

also

$$g_2(w+i) = g_2(w). \tag{22}$$

Endlich folgt aus (18)

$$g_4(w+i) = g_3(w). \tag{23}$$

Wir setzen jetzt

$$\begin{cases} F_2(w) = g_2(w)+g_3(w)+g_4(w), \\ F_3(w) = g_2(w)\,g_3(w)+g_2(w)\,g_4(w)+g_3(w)\,g_4(w), \\ F_4(w) = g_2(w)\,g_3(w)\,g_4(w). \end{cases} \tag{24}$$

Die Funktionen $F_a(w)$ sind für jedes w regulär, und aus (18)-(24) folgt

$$F_a(w) = F_a(w+i), \tag{25}$$

$$F_a(w) = F_a\left(\frac{1}{w}\right). \tag{26}$$

Wir setzen jetzt

$$G_a(z) = F_a\left(-\frac{\log z}{2\pi}\right). \tag{27}$$

Da die Funktionen $F_a(w)$ in der Halbebene $\mathrm{Re}(w) > 0$ regulär sind und nach (25) die Periode i besitzen, so sind die Funktionen $G_a(z)$ im ausgearteten Kreisring $0 < |z| < 1$ eindeutig und regulär. Wir zeigen, daß diese Funktionen auch im Punkte $z = 0$ regulär sind. Dazu reicht es hin nachzuweisen, daß

$$\lim_{z=0}\{z\,G_a(z)\} = 0 \tag{28}$$

ist. Alsdann sind nämlich die Funktionen $zG_a(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt, also im Nullpunkt regulär. Die Funktionen $G_a(z)$ sind somit in diesem Punkt regulär, oder haben einen Pol erster Ordnung; letzteres ist aber nach (28) unmöglich. Aus (27) und (25) folgt, daß es genügt, statt (28) zu zeigen, daß

$$\lim_{s=\infty}\left(\exp\{-2\pi(s+iy)\}\,F_a(s+iy)\right) = 0, \tag{29}$$

gleichmäßig für $-\frac{1}{2} < y \leqslant \frac{1}{2}$. Wir verabreden, daß auch die folgenden Beziehungen (30)-(32) gleichmäßig in diesem Sinn zu gelten haben.

Aus (17), der Bedingung 1) des Hilfssatzes, (10), (15), (3) und (4) folgt

$$\lim_{s=\infty} g_3(s+iy) = \lim_{s=\infty} g_4(s+iy) = 1. \tag{30}$$

Nach (5) ist weiter

$$\exp\left(\frac{\pi w}{4}\right)\vartheta_2(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi m(m+1)w\} = 2\sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-\pi m(m+1)w\},$$

also

$$\lim_{s=\infty}\left(\exp\left\{\frac{\pi}{4}(s+iy)\right\}\vartheta_2(s+iy)\right) = 2. \tag{31}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß

$$\lim_{s=\infty}\left(\exp\left\{\left(\frac{k}{4}-2\right)\pi s\right\}\Phi_2(s+iy)\right) = 0. \tag{32}$$

In der Tat ist nach (16), (15), (10) und Bedingung 1) des Hilfssatzes für $|y| \leqslant \frac{1}{2} \leqslant s$

$$|\Phi_2(s+iy)| = (s^2+y^2)^{-k/4}\left|\Phi_4\left(\frac{1}{s+iy}\right)\right|$$
$$= (s^2+y^2)^{-k/4}\left|\Phi_3\left(\frac{1}{s+iy}+i\right)\right|$$
$$\leqslant (s^2+y^2)^{-k/4}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}|R_k(n)|\exp\left\{-\frac{\pi n s}{s^2+y^2}\right\}\right)$$
$$= B\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} n^k \exp\left\{-\frac{n}{s}\right\}\right) = Bs^{k+1}.$$

Damit ist (32) für $k = 5, 6, 7$ bewiesen, und für $k = 8$ ist (32) wegen (13) ebenfalls erfüllt.

Die Beziehung (29), gleichmäßig für $-\frac{1}{2} < y \leqslant \frac{1}{2}$, folgt jetzt aus (24), (17), (30), (31) und (32). Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $G_a(z)$ für $z = 0$ regulär sind, wenn man, wie üblich,

$$G_a(0) = \lim_{z=0} G_a(z)$$

setzt. Diese Funktionen sind also im Kreise $|z| < 1$ regulär.

Für die Funktion $\log z$ in (27) nehmen wir denjenigen Zweig, für den $-\pi < \mathrm{Im}(z) \leqslant \pi$ (welchen Zweig wir nehmen, ist wegen (25) gleich-

gültig). Es sei K die geschlossene Kurve $|\log z| = 2\pi$, wo $|z| < 1$. Sie enthält den Punkt $z = 0$ im Inneren, genauer ist für jeden Punkt z auf K

$$e^{-2\pi} \leqslant |z| \leqslant e^{-\pi}.$$

Setzt man

$$w = -\frac{\log z}{2\pi},$$

so ist nach (27)

$$G_a(z) = F_a(w). \tag{33}$$

Auf der Kurve K ist $|w| = 1$, also $1/w = \overline{w}$, und daher, nach (26),

$$F_a(w) = F_a(\overline{w}). \tag{34}$$

Für beliebiges w ergibt sich aus (1), (10), (15) und (16)

$$\Phi_a(\overline{w}) = \overline{\Phi_a(w)}.$$

In Verbindung mit (3), (4), (5) und (17), folgt daraus

$$g_a(\overline{w}) = \overline{g_a(w)}.$$

Wegen (24) ist somit

$$F_a(\overline{w}) = \overline{F_a(w)}. \tag{35}$$

Nach (34) und (35) sind auf K die Funktionen $F_a(w)$ reell. Wegen (33) sind also die Funktionen $G_a(z)$ reell. Da sie zudem auf K und im Inneren von K analytisch sind, so muß jede der Funktionen $G_a(z)$ eine reelle Konstante sein. Daraus folgt weiter, auf Grund von (27), daß jede der Funktionen $F_a(w)$ in der Halbebene $\mathrm{Re}(w) > 0$ konstant ist.

Nach (24) ist $g_3(w) = W$ Wurzel der kubischen Gleichung

$$W^3 - F_2(w)W^2 + F_3(w)W - F_4(w) = 0,$$

nimmt also höchstens drei verschiedene Werte an, ist also auch konstant. Wegen (30) ist somit

$$g_3(w) = 1,$$

und daher nach (17) und (10)

$$\vartheta_3^k(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_k(n)\exp(-\pi n w).$$

Andererseits ist nach (3) und der Definition von $r_k(n)$

$$\vartheta_3^k(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n)\exp(-\pi n w).$$

Somit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_k(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) z^n \quad (|z| < 1),$$

woraus die Behauptung (14) des Hilfssatzes folgt.

Unsere Aufgabe wird jetzt sein, eine geeignete Funktion $\Phi_3(w)$ zu finden, die den Bedingungen von Hilfssatz 2 genügt. Hierzu brauchen wir noch die folgende Formel:

HILFSSATZ 3.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w+2mi)^{k/2}} = D_k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1}\exp(-\pi n w). \tag{36}$$

Beweis. Es sei $w > 0$ fest. Nach (1.3), mit

$$f(y) = y^{k/2-1}\exp(-\pi w y),$$

ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1}\exp(-\pi n w) &= \int_0^{\infty} y^{k/2-1}\exp(-\pi w y)\,dy + \\ &+ 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^{k/2-1}\exp(-\pi w y)\cos(2\pi m y)\,dy \\ &= \lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{M}\int_0^{\infty} y^{k/2-1}\exp\{-\pi(w+2mi)y\}\,dy.\end{aligned} \tag{37}$$

Nun ist wegen (1.4.2)

$$\int_0^{\infty} y^{k/2-1}\exp(-\pi w y)\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\pi^{k/2}w^{k/2}} = \frac{1}{D_k w^{k/2}}.$$

Durch analytische Fortsetzung, unter Berücksichtigung von (1), ergibt sich hieraus

$$\int_0^{\infty} y^{k/2-1}\exp\{-\pi(w+2mi)y\}\,dy = \frac{1}{D_k(w+2mi)^{k/2}}. \tag{38}$$

Aus (37) und (38) folgt für $w > 0$

$$D_k\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1}\exp(-\pi n w) = \lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(w+2mi)^{k/2}}. \tag{39}$$

In (39) konvergiert die Reihe rechts absolut; nach (1) ist nämlich

$$|(w+2mi)^{k/2}| = |w+2mi|^{k/2} \geqslant |m|^{k/2}.$$

(36) gilt somit für $w>0$. Von hieraus ergibt sich (36) für jedes unserer w durch analytische Fortsetzung. Setzt man nämlich $w=s+iy$, so konvergiert die Reihe rechts, wie man sofort sieht, in jeder Halbebene $s\geqq\varepsilon$ absolut und gleichmäßig. Die Reihe links konvergiert aber absolut und gleichmäßig in jedem Halbstreifen $s>0$, $|y|\leqq H$. Es ist nämlich

$$\sum_{|m|>H}\frac{1}{|w+2mi|^{k/2}}\leqq\sum_{|m|>H}\frac{1}{(2|m|-H)^{k/2}}\leqq 2\sum_{m>H}\frac{1}{m^{k/2}}.$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Hardysche Identität zu beweisen, nämlich den folgenden Hilfssatz.

HILFSSATZ 4. *Für $k=5,6,7$ und 8 ist*

$$r_k(n)=D_k n^{k/2-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right). \tag{40}$$

Beweis. Es sei

$$\Psi_1(w)=\sum_{u=1}^{\infty} i^{\{(u-1)/2\}^2 k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{m}{u}\right)^k(uw+2mi)^{-k/2}. \tag{41}$$

Diese Doppelreihe konvergiert absolut. Setzt man nämlich $w=s+2yi$, wo s und y als fest anzusehen sind, so hat man die Majorante

$$X=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|uw+2mi|^{-k/2}=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|us+2(m+uy)i|^{-k/2}$$

$$=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{u^2s^2+4(m+uy)^2\}^{-k/4}.$$

Bei festem u ist höchstens für zwei Glieder der m-Summe die Ungleichung $|m+uy|<1$ erfüllt. Bezeichnet $\sum'$, daß diese Glieder fortzulassen sind, so folgt weiter

$$X\leqq 2\sum_{u=1}^{\infty}u^{-k/2}s^{-k/2}+\sum_{u=1}^{\infty}\sum{}'\{u^2s^2+4(m+uy)^2\}^{-k/4}=X_1+X_2.$$

Über X_1 ist weiter nichts zu sagen, da diese Reihe konvergiert. In X_2 ist

$$u^2s^2+4(m+y)^2\geqq us|m+y|.$$

Also ist

$$X_2\leqq\sum_{u=1}^{\infty}u^{-k/4}s^{-k/4}\sum{}'|m+uy|^{-k/4}\leqq 2s^{-k/4}\sum_{u=1}^{\infty}u^{-k/4}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-k/4},$$

wo die beiden Reihen rechts konvergieren.

Wir setzen weiter

$$\Psi_2(w)=w^{-k/2}\Psi_1\left(\frac{1}{w}\right), \tag{42}$$

$$\Phi_3(w)=\Psi_1(w)+\Psi_2(w). \tag{43}$$

Ersetzt man in (42) w durch $1/w$ und beachtet (2), so folgt

$$\Psi_1(w)=w^{-k/2}\Psi_2\left(\frac{1}{w}\right). \tag{44}$$

Aus (42)-(44) ergibt sich daß die Bedingung (11) des Hilfssatzes 2 erfüllt ist.

Weiter ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{m}{u}\right)^k(uw+2mi)^{-k/2}=\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\equiv h(\mathrm{mod}\,u)}}^{\infty}(uw+2mi)^{-k/2}$$

$$=\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k\sum_{m=-\infty}^{\infty}(uw+2hi+2umi)^{-k/2}$$

$$=\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k u^{-k/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(w+\frac{2hi}{u}+2mi\right)^{-k/2},$$

nach (1). Auf die m-Summe kann man hier Hilfssatz 3, mit $w+2hi/u$ statt w, anwenden und bekommt

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{m}{u}\right)^k(uw+2mi)^{-k/2}$$

$$=D_k\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k u^{-k/2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k/2-1}\exp\left\{-\pi n\left(w+\frac{2hi}{u}\right)\right\}.$$

Wegen (41) ist somit

$$\Psi_1(w)=D_k\sum_{u=1}^{\infty}i^{\{(u-1)/2\}^2 k}u^{-k/2}\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k/2-1}\exp\left\{-\pi n\left(w+\frac{2hi}{u}\right)\right\}. \tag{45}$$

Wir setzen jetzt

$$R_{k1}(n)=D_k n^{k/2-1}\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{S(h,u)}{u}\right)^k e\left(-\frac{nh}{u}\right). \tag{46}$$

Nach Hilfssatz 1.1.8 ist dann

$$R_{k1}(n)=D_k n^{k/2-1}\sum_{u=1}^{\infty}i^{\{(u-1)/2\}^2 k}u^{-k/2}\sum_{h \bmod u}{}'\left(\frac{h}{u}\right)^k e\left(-\frac{nh}{u}\right). \tag{47}$$

Aus (45) und (47) folgt

$$\Psi_1(w) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{k1}(n)\exp(-\pi n w). \tag{48}$$

Um $\Psi_2(w)$ behandeln zu können, definieren wir, in Verallgemeinerung von (1), für $z \neq 0$

$$z^y = \exp(y\log z), \quad \text{wo} \quad -\pi < \operatorname{Im}(\log z) \leqslant \pi. \tag{49}$$

Es ist dann

$$w^{-k/2}\left(\frac{u}{w}+2mi\right)^{-k/2} = (u+2mwi)^{-k/2}. \tag{50}$$

Aus (42), (41) und (50) ergibt sich

$$\Psi_2(w) = \sum_{u=1}^{\infty} i^{\{(u-1)/2\}^2 k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{u}\right)^k (u+2mwi)^{-k/2}. \tag{51}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, da die Reihe (41) absolut konvergiert. In (51) ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \left(\frac{0}{u}\right)^k u^{-k/2} + \sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{q}{u}\right)^k (u+2qwi)^{-k/2} + \sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{-q}{u}\right)^k (u-2qwi)^{-k/2}.$$

Dabei ist

$$\left(\frac{0}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{0}{u}\right) = 0 \quad \text{für} \quad u > 1,$$

$$\left(\frac{-q}{u}\right) = \left(\frac{-1}{u}\right)\left(\frac{q}{u}\right) = i^{u-1}\left(\frac{q}{u}\right).$$

Wegen (49) ist ferner

$$(u+2qwi)^{-k/2} = i^{-k/2}(2qw-ui)^{-k/2} = e\left(-\frac{k}{8}\right)(2qw-ui)^{-k/2},$$

$$(u-2qwi)^{-k/2} = (-i)^{-k/2}(2qw+ui)^{-k/2} = e\left(\frac{k}{8}\right)(2qw+ui)^{-k/2}.$$

Somit ist

$$\Psi_2(w) = 1 + e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{u=1}^{\infty} i^{\{(u-1)/2\}^2 k}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{q}{u}\right)^k (2qw-ui)^{-k/2} + e\left(\frac{k}{8}\right)\sum_{u=1}^{\infty} i^{\{(u-1)/2\}^2 k+(u-1)k}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{q}{u}\right)^k (2qw+ui)^{-k/2}.$$

In der ersten u-Summe setzen wir $u = -l$ und lassen l die negativen ungeraden Zahlen durchlaufen; in der zweiten u-Summe setzen wir $u = l$ und lassen l die positiven ungeraden Zahlen durchlaufen. In der zweiten Summe wird dann

$$e\left(\frac{k}{8}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2 k+(u-1)k} = e\left(\frac{k}{8}\right) i^{\{(l-1)/2\}^2 k+(l-1)k} = e\left(-\frac{k}{8}\right) i^{\{(l+1)/2\}^2 k}.$$

Daher ist

$$\Psi_2(w) = 1 + e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} i^{\{(l+1)/2\}^2 k}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{q}{|l|}\right)^k (2qw+li)^{-k/2}.$$

Hieraus folgt, da die Doppelreihe absolut konvergiert,

$$\Psi_2(w) = 1 + e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} i^{\{(l+1)/2\}^2 k}\left(\frac{q}{|l|}\right)^k (2qw+li)^{-k/2} \tag{52}$$

$$= 1 + e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<4q \\ (h,4q)=1}}\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv h (\mathrm{mod}\, 4q)}}^{\infty} i^{\{(l+1)/2\}^2 k}\left(\frac{q}{|l|}\right)^k (2qw+li)^{-k/2}.$$

In (52) ist

$$i^{\{(l+1)/2\}^2 k} = i^{\{(h+1)/2\}^2 k}. \tag{53}$$

Ferner ist, wie wir jetzt zeigen wollen,

$$\left(\frac{q}{|l|}\right) = \left(\frac{q}{h}\right). \tag{54}$$

Beim Beweise genügt es anzunehmen, daß q ungerade oder eine Potenz von 2 ist, da der allgemeine Fall durch Verknüpfung dieser beiden Spezialfälle folgt. Es sei q ungerade. Dann ist nach den Eigenschaften des Jacobischen Symbols

$$\left(\frac{q}{|l|}\right) = \left(\frac{l}{q}\right)(-1)^{(l-1)(q-1)/4}, \quad \left(\frac{q}{h}\right) = \left(\frac{h}{q}\right)(-1)^{(h-1)(q-1)/4}, \quad \left(\frac{l}{q}\right) = \left(\frac{h}{q}\right).$$

Ferner ist $l \equiv h (\mathrm{mod}\, 4)$, also $(l-1)(q-1) \equiv (h-1)(q-1) (\mathrm{mod}\, 8)$, d. h.

$$(-1)^{(l-1)(q-1)/4} = (-1)^{(h-1)(q-1)/4},$$

woraus die Richtigkeit von (54) folgt.

Ist zweitens $q = 2^r$, so ist $l \equiv h \pmod 8$, also $|l| \equiv \pm h \pmod 8$, und daher

$$\left(\frac{2}{|l|}\right) = \left(\frac{2}{h}\right),$$

woraus (54) ebenfalls folgt.

Aus (52)-(54) ergibt sich

$$\Psi_2(w) = 1 + e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<4q\\(h,4q)=1}} i^{\{(h+1)/2\}^2 k}\left(\frac{q}{h}\right)^k \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\equiv h \pmod{4q}}}^{\infty} (2qw+li)^{-k/2}.$$

Hierin bekommt man, durch Anwendung von Hilfssatz 3,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2qw+hi+4mqi)^{-k/2} = (2q)^{-k/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(w+\frac{hi}{2q}+2mi\right)^{-k/2}$$

$$= D_k(2q)^{-k/2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1}\exp\left\{-\pi n\left(w+\frac{hi}{2q}\right)\right\}.$$

Es ist daher

$$\Psi_2(w) = 1 + D_k e\left(-\frac{k}{8}\right)\sum_{q=1}^{\infty}(2q)^{-k/2}\sum_{\substack{0<h<4q\\(h,4q)=1}} i^{\{(h+1)/2\}^2 k}\left(\frac{q}{h}\right)^k \times \tag{55}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1}\exp\left\{-\pi n\left(w+\frac{hi}{2q}\right)\right\}.$$

Wir setzen jetzt

$$R_{k2}(n) = D_k n^{k/2-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<4q\\(h,4q)=1}}\left(\frac{S(h,4q)}{4q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{4q}\right). \tag{56}$$

Hierin ist nach Hilfssatz 1.1.9, mit $4q$ statt q,

$$\left(\frac{S(h,4q)}{4q}\right)^k = (2q)^{-k/2}\left(\frac{q}{h}\right)^k\left(\frac{2}{h}\right)^k e\left(\frac{hk}{8}\right). \tag{57}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{2}{h}\right)^k e\left(\frac{hk}{8}\right) = e\left(-\frac{k}{8}\right) i^{\{(h+1)/2\}^2 k}, \tag{58}$$

wie man nachprüft, wenn man beiderseits $h = 1, 3, 5, 7$ einsetzt.

Aus (55)-(58) folgt

$$\Psi_2(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{k2}(n)\exp(-\pi n w). \tag{59}$$

Setzt man jetzt

$$R_k(n) = R_{k1}(n) + R_{k2}(n), \tag{60}$$

so ergibt sich aus (43), (48) und (59), daß $\Phi_3(w)$ durch (10) gegeben ist. Daß die Bedingung (11) erfüllt ist, wurde schon im Anschluß an (44) gesagt. Damit ist gezeigt, daß die Bedingung 2) von Hilfssatz 2 erfüllt ist.

Die Funktion $R_{k1}(n)$ ist reell. In (46) durchläuft nämlich $-h$ zugleich mit h ein reduziertes Restsystem mod u. Die rechte Seite von (46) ändert sich daher nicht, wenn man h durch $-h$ ersetzt. Wegen (1.1.1) geht aber dabei die rechte Seite in die konjugiert komplexe Zahl über. Also ist

$$R_{k1}(n) = \overline{R_{k1}(n)},$$

d. h. $R_{k1}(n)$ reell. Analog zeigt man, daß $R_{k2}(n)$ reell ist, denn in (56) kann h ein beliebiges reduziertes Restsystem mod $4q$ durchlaufen. Wegen (60) ist somit die Funktion $R_k(n)$ reell.

Weiter ergibt sich aus (46), (56) und Hilfssatz 1.1.1, daß

$$R_{k1}(n) = Bn^{k/2-1}, \qquad R_{k2}(n) = Bn^{k/2-1}.$$

Wegen (60) ist also gewiß

$$R_k(n) = Bn^k.$$

Also ist auch die Bedingung 1) von Hilfssatz 2 erfüllt.

Es soll jetzt die Bedingung 3) nachgeprüft werden. Wir nehmen daher an, daß $k = 8$ ist. Nach (41) ist dann

$$\Psi_1(w) = \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\(m,u)=1}}^{\infty}(uw+2mi)^{-4}.$$

Da hier $-m$ dieselben Zahlen wie m durchläuft, so ist

$$\Psi_1(w) = \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\(m,u)=1}}^{\infty}(uw-2mi)^{-4} = \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\(m,u)=1}}^{\infty}(-uw+2mi)^{-4}.$$

Durch Addition der beiden letzten Formeln ergibt sich

$$2\Psi_1(w) = \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\(m,l)=1}}^{\infty}(lw+2mi)^{-4}$$

$$= \sum_{\substack{l,m=-\infty\\(l,2m)=1}}^{\infty}(lw+2mi)^{-4} = \sum_{\substack{l,m=-\infty\\(l,m)=1,\,2\nmid m}}^{\infty}(lw+mi)^{-4}. \tag{61}$$

Aus (61) und (42) folgt

$$2\Psi_2(w) = 2w^{-4}\Psi_1\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|m}}^{\infty} (l+mwi)^{-4}$$

$$= \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|l}}^{\infty} (m+lwi)^{-4} = \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|l}}^{\infty} (lw+mi)^{-4}. \tag{62}$$

Aus (43), (61) und (62) folgt

$$2\Phi_3(w) = \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|m}}^{\infty} (lw+mi)^{-4}. \tag{63}$$

Aus (63) und (12) ergibt sich ferner

$$2\Phi_2(w) = w^{-4} \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|lm}}^{\infty} \left\{\frac{l}{w}+(l+m)i\right\}^{-4} = \sum_{\substack{l,m=-\infty \\ (l,m)=1,\,2|lm}}^{\infty} \{l+(l+m)wi\}^{-4}.$$

In jedem Gliede dieser Summen sind die Zahlen l, m von verschiedener Parität. Setzt man also $l+m=h$, so ist h ungerade. Umgekehrt, ist h ungerade, so sind l, m von verschiedener Parität. Daher ist

$$2\Phi_2(w) = \sum_{\substack{l,h=-\infty \\ (l,h)=1,\,2\nmid h}}^{\infty} (l+hwi)^{-4} = \sum_{\substack{l,h=-\infty \\ (l,h)=1,\,2\nmid h}}^{\infty} (hw+li)^{-4} = 2\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (l,u)=1}}^{\infty} (uw+li)^{-4},$$

$$|\Phi_2(s+yi)| \leqslant \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |us+(l+uy)i|^{-4}. \tag{64}$$

Für $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, $s \geqslant 1$ ist in (64)

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} = \sum_{|l|\leqslant[3us]} + \sum_{|l|>[3us]} \leqslant (us)^{-4} \sum_{|l|\leqslant[3us]} 1 + \sum_{|l|>[3us]} \left(|l|-\frac{u}{2}\right)^{-4}$$

$$\leqslant (6us+1)(us)^{-4} + 2\sum_{l>[3us]} (l-u)^{-4}.$$

Nach Hilfssatz 1.3.4 mit $b \to \infty$ ist somit

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \leqslant 7us(us)^{-4} + 2([3us]+1-u)^{-4} + 2\int_{[3us]+1}^{\infty} (t-u)^{-4}dt$$

$$\leqslant 7(us)^{-3} + 2(2us)^{-4} + 2\int_{2us}^{\infty} t^{-4}dt$$

$$\leqslant 7(us)^{-3} + (us)^{-3} + (us)^{-3} = 9(us)^{-3}.$$

Wegen (64) ist also für $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, $s \geqslant 1$

$$|\Phi_2(s+yi)| \leqslant 9s^{-3} \sum_{u=1}^{\infty} u^{-3},$$

woraus hervorgeht, daß auch die Bedingung 3) von Hilfssatz 2 erfüllt ist. Es gilt daher die Identität (14), wobei $R_k(n)$ durch (60), (46) und (56) definiert ist. Bezeichnet man die rechte Seite von (40) abgekürzt mit S, so folgt aus (60), (46) und (56)

$$S - R_k(n) = D_k n^{k/2-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} {\sum_{h \bmod q}}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right).$$

Nach (1.1.2) ist hier die Gaußsche Summe $S(h,q)$ gleich Null. Somit ist $S = R_k(n)$, und (14) ergibt $r_k(n) = S$, was zu beweisen war.

§ 3. Der zweite Peterssonsche Satz

Der folgende zweite Peterssonsche Satz ist eine Verschärfung seines ersten Satzes 1.1 für die 4 Werte $k = 5, 6, 7, 8$.

Satz 1.

$$(1)\quad \frac{1}{2}\{P_5(x+0)+P_5(x-0)\} = -\frac{D_5}{2\pi i} x^{3/2}\mathfrak{N}_5(x,1)+Bx,$$

$$(2)\quad \frac{1}{2}\{P_6(x+0)+P_6(x-0)\} = -\frac{D_6}{2\pi i} x^2\mathfrak{N}_6(x,1)+Bx\log x,$$

$$(3)\quad \frac{1}{2}\{P_7(x+0)+P_7(x-0)\} = -\frac{D_7}{2\pi i} x^{5/2}\mathfrak{N}_7(x,1) - \frac{5D_7}{2(2\pi i)^2} x^{3/2}\mathfrak{N}_7(x,2)+Bx,$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}\{P_8(x+0)+P_8(x-0)\} = -\frac{D_8}{2\pi i} x^3\mathfrak{N}_8(x,1) - \frac{3D_8}{(2\pi i)^2} x^2\mathfrak{N}_8(x,2)+Bx\log x.$$

Beweis. Es habe k einen der Werte 5, 6, 7, 8. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geqslant 4$. Aus (2.40) und (1.1) ergibt sich, an Stelle von (1.34),

$$(5)\quad \tfrac{1}{2}\{A_k(x+0)+A_k(x-0)\}-1 = D_k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0\leqslant h<q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k {\sum_{n\leqslant x}}' n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right).$$

Auf die n-Summe in (5) werde jetzt Hilfssatz 1.1 mit $\theta = h/q$ angewendet. Das Integral $\int_0^x$ werde dabei nach (1.32) mit

(6) $j = 1$ für $k = 5$ und 6; $j = 2$ für $k = 7$ und 8

berechnet. Es ergibt sich dann, an Stelle von (1.36),

$$\tfrac{1}{2}\{A_k(x+0)+A_k(x-0)\}-1 = S_3+S_4'+S_5'. \tag{7}$$

Hierbei ist S_3 durch (1.37) gegeben. S_4' unterscheidet sich von dem durch (1.38) gegebenen S_4 nur dadurch, daß q über alle ganzen Zahlen läuft, und ebenso unterscheidet sich S_5' von dem durch (1.39) gegebenen S_5.

(1.40) bleibt in Kraft. In (1.38) kann h ein beliebiges reduziertes Restsystem mod q durchlaufen, und es folgt wegen (1.4.2) und (1.19), an Stelle von (1.41),

$$S_4' = -\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{(2\pi i)^r}\cdot\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)}x^{k/2-r}\sum_{q=1}^{\infty}\mathfrak{R}_k(x,q,r). \tag{8}$$

Hierbei ist die q-Reihe nach (1.22) und (6) absolut konvergent. Auf sie kann die Beziehung (1.29) angewendet werden, denn die Bedingung $r < k/2-1$ ist wegen (6) erfüllt. Aus (8) ergibt sich daher, an Stelle von (1.42),

$$S_4' = -\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{(2\pi i)^r}\cdot\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-r+1\right)}x^{k/2-r}\mathfrak{N}_k(x,r). \tag{9}$$

Aus (7) und (1.40) folgt

$$\tfrac{1}{2}\{P_k(x+0)+P_k(x-0)\} = S_4'+S_5'+1.$$

Hierbei ergibt sich aus (9) und (1.4.2), daß S_4' die Hauptglieder auf den rechten Seiten von (1)-(4) liefert. Der Satz wird daher bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß

(10) $S_5' = Bx$ für $k = 5$ und 7; $S_5' = Bx\log x$ für $k = 6$ und 8.

Die Summe S_5' spalten wir in die beiden Bestandteile

$$S_5' = D_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{q=1}^{\infty} = D_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{q\leqq x}+D_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{q>x} = S_6'+S_7', \tag{11}$$

wobei das Glied der q-Summe dasselbe wie in (1.39) ist.

Aus (1.39), (11), (1.1.2), (1.33) und (1.28) folgt

$$S_6' = B\sum_{q\leqq x}q^{-k/2}\sum_{\substack{0\leqq h<q\\(h,q)=1}}\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq -h/q}}^{\infty}\frac{x^{k/2-1-j}}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^{j+1}}$$

$$= Bx^{k/2-1-j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{j+1}}+Bx^{k/2-1-j}\sum_{2\leqq q\leqq x}q^{-k/2}\sum_{\substack{0<h<q\\(h,q)=1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^{j+1}}$$

$$= Bx^{k/2-1-j}+Bx^{k/2-1-j}\sum_{q\leqq x}q^{j+1-k/2}. \tag{12}$$

Aus (6) und (12) ergibt sich

$$S_6' = Bx^{1/2}+Bx^{1/2}\sum_{q\leqq x}q^{-1/2} = Bx \quad \text{für } k = 5 \text{ und } 7, \tag{13}$$

$$S_6' = Bx+Bx\sum_{q\leqq x}q^{-1} = Bx\log x \quad \text{für } k = 6 \text{ und } 8. \tag{14}$$

Weiter ergibt sich aus (1.39), (11), (1.1.2) und (1.21)

$$S_7' = B\sum_{q>x}q^{-k/2}\sum_{\substack{0<h<q\\(h,q)=1}}\int_0^x y^{k/2-1-j}\left|\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{e\left\{-\left(\frac{h}{q}+m\right)y\right\}}{\left(\frac{h}{q}+m\right)^j}\right|dy \tag{15}$$

$$= B\sum_{q>x}q^{-k/2}\sum_{h=1}^{q}x^{k/2-j}\frac{q^j}{h^j} = Bx^{k/2-j}\sum_{q>x}q^{j-k/2}\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{h^j}.$$

Aus (6) und (15) folgt

$$S_7' = \begin{cases} Bx^{3/2}\sum_{q>x}q^{-3/2}\log q = Bx\log x & \text{für } k = 5,\\ Bx^2\sum_{q>x}q^{-2}\log q = Bx\log x & \text{für } k = 6,\\ Bx^{3/2}\sum_{q>x}q^{-3/2} = Bx & \text{für } k = 7,\\ Bx^2\sum_{q>x}q^{-2} = Bx & \text{für } k = 8. \end{cases} \tag{16}$$

Aus (11), (13), (14) und (16) bekommt man die Behauptung (10) für $k = 6, 7$ und 8, während für $k = 5$ nur $S_5' = Bx\log x$ herauskommt. In diesem Fall muß die Abschätzung (16) verbessert werden, und das gelingt folgendermaßen.

Es sei $k=5$, also $j=1$. Die Summe S_7' werde dann noch weiter eingeteilt, und zwar sei

$$S_7' = D_5\Gamma(\tfrac{5}{2})\sum_{q>x}\Big\{\sum_{\substack{h\leqq q/x\\(h,q)=1}} + \sum_{\substack{q/x<h<q(1-1/x)\\(h,q)=1}} + \sum_{\substack{q(1-1/x)\leqq h<q\\(h,q)=1}}\Big\}$$

$$= S_8'+S_9'+S_{10}'. \tag{17}$$

Die Summen S_8' und S_{10}' werden genau so, wie oben die Summe S_7', behandelt. Es ergibt sich dann, unter Berücksichtigung von Hilfssatz 1.3.4,

$$S_8'+S_{10}' = B\sum_{q>x} q^{-5/2}\sum_{h\leqq q/x} x^{3/2}\frac{q}{h} + B\sum_{q>x} q^{-5/2}\sum_{q(1-1/x)\leqq h<q} x^{3/2}\frac{q}{h}$$

$$= Bx^{3/2}\sum_{q>x} q^{-3/2}\sum_{h\leqq q/x}\frac{1}{h} = Bx^{3/2}\sum_{q>x} q^{-3/2}\log\frac{3q}{x}$$

$$= Bx^{3/2}\Big(x^{-3/2}+\int_x^\infty y^{-3/2}\log\frac{3y}{x}\,dy\Big)$$

$$= Bx^{3/2}\Big(x^{-3/2}+x^{-1/2}\int_1^\infty y^{-3/2}\log(3y)\,dy\Big) = Bx. \tag{18}$$

Für die Summe S_9' ergibt sich aus (17), (1.39), (1.1.2), (1.33) und (1.26)

$$S_9' = B\sum_{q>x} q^{-5/2}\sum_{q/x<h<q(1-1/x)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{x^{1/2}}{\left|\frac{h}{q}+m\right|^2}$$

$$= Bx^{1/2}\sum_{q>x} q^{-5/2}\sum_{q/x<h<q(1-1/x)}\mathrm{Max}\Big(\frac{q^2}{h^2},\frac{q^2}{(q-h)^2}\Big)$$

$$= Bx^{1/2}\sum_{q>x} q^{-5/2}\sum_{q/x<h<q(1-1/x)}\frac{q^2}{h^2}$$

$$= Bx^{1/2}\sum_{q>x} q^{-1/2}\sum_{h>q/x}\frac{1}{h^2} = Bx^{1/2}\sum_{q>x} q^{-1/2}\frac{x}{q}$$

$$= Bx^{3/2}\sum_{q>x} q^{-3/2} = Bx. \tag{19}$$

Aus (17)-(19) folgt

$$S_7' = Bx.$$

In Verbindung mit (11) und (13), ergibt dies die Behauptung (10) für $k=5$.

§ 4. Der dritte Peterssonsche Satz und seine Anwendungen

In diesem Paragraphen sei $k\geqq 7$ (mit Ausnahme von Satz 9), $n\geqq 3$, $q>1$, $u>1$. Aus (1.31), (1.30) und (1.4.2) folgt

$$P_k\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = -\frac{D_k}{2\pi i}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^{k/2-1}\mathfrak{N}_k\Big(n+\frac{1}{2},1\Big)+B n^{k/2-2}+B n^{k/4}\log n$$

$$= -\frac{D_k}{2\pi i}\,n^{k/2-1}\mathfrak{N}_k\Big(n+\frac{1}{2},1\Big)+B n^{(k-3)/2}\log n. \tag{1}$$

Im folgenden soll die Abschätzung (1) dazu benutzt werden, um das Verhalten von $P_k(n+\frac{1}{2})$ für gewisse ins Unendliche wachsende Folgen von n-Werten zu untersuchen.

Hilfssatz 1. *Es ist*

$$-\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{N}_k\Big(n+\frac{1}{2},1\Big) = \sum_{q=3}^{\infty}\frac{F_k(n,q)}{q^{k/2}}, \tag{2}$$

wobei für $q\equiv 2\pmod 4$

$$F_k(n,q) = 0; \tag{3}$$

für $q\equiv 1\pmod 2$

$$F_k(n,q) = e\Big\{\frac{(q-1)k}{8}\Big\}\Big(\frac{-2}{q}\Big)^k\sum_{h<q/2}\Big(\frac{h}{q}\Big)^k\frac{e\Big(-\frac{nh}{q}\Big)}{1-e\Big(\frac{h}{q}\Big)}\Big(1-\Big(\frac{-1}{q}\Big)^k e\Big\{(2n+1)\frac{h}{q}\Big\}\Big); \tag{4}$$

für $q\equiv 0\pmod 4$

$$F_k(n,q) = 2^{k/2}\sum_{\substack{h<q/2\\ h\equiv 1\pmod 2}}\Big(\frac{2q}{h}\Big)^k\frac{e\Big\{-\Big(n-\frac{qk}{8}\Big)\frac{h}{q}\Big\}}{1-e\Big(\frac{h}{q}\Big)}\Big(1-e\Big\{\Big(2n+1-\frac{qk}{4}\Big)\frac{h}{q}\Big\}\Big). \tag{5}$$

Die linke Seite von (2) *und jedes Glied der rechten Seite sind reell.*

Beweis. Wegen (1.20) ist

$$\mathfrak{N}_k(n+\tfrac{1}{2},1,1) = 0. \tag{6}$$

Wegen (1.19) oder (1.20) und (1.1.2) ist

$$\mathfrak{N}_k(n+\tfrac{1}{2},q,1) = 0 \quad \text{für} \quad q\equiv 2\pmod 4. \tag{7}$$

Es sei jetzt q ungerade. Nach (1.20) ist

$$(8)\quad \mathfrak{R}_k(n+\tfrac{1}{2}, q, 1) = \sum_{\substack{0<h<q\\(h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\left(\frac{q}{h} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{\frac{1}{\frac{h}{q}+m} + \frac{1}{\frac{h}{q}-m}\right\}\right).$$

Hierin ist nach der Partialbruchzerlegung des Cosecans

$$(9)\quad \frac{q}{h} + \sum_{m=1}^{\infty} = \frac{q}{h} + 2\frac{h}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\left(\frac{h}{q}\right)^2 - m^2} = \pi\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q}.$$

Weiter ist

$$(10)\quad i^{\frac{1}{2}(q-1)/2)^2} = e\left(\frac{q-1}{8}\right)\left(\frac{-2}{q}\right),$$

wie man nachprüft, indem man für q die Werte 3, 5, 7 und 9 einsetzt. Aus (1.1.21) und (10) ergibt sich

$$(11)\quad S(h,q) = e\left(\frac{q-1}{8}\right)\left(\frac{-2h}{q}\right)q^{1/2}.$$

Aus (8), (9) und (11) folgt

$$(12)\quad \mathfrak{R}_k(n+\tfrac{1}{2}, q, 1) = \pi q^{-k/2} e\left\{\frac{(q-1)k}{8}\right\}\left(\frac{-2}{q}\right)^k \sum_{h<q}\left(\frac{h}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q}.$$

Die h-Summe in (12) formen wir um nach dem Schema

$$(13)\quad \sum_{h<q} f(h) = \sum_{h<q/2}\{f(h)+f(q-h)\}.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} f(h)+f(q-h) &= \left(\frac{h}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} \\ &= +\left(\frac{q-h}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{q-h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi(q-h)}{q} \\ &= \left(\frac{h}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} - \left(\frac{-1}{q}\right)^k\left(\frac{h}{q}\right)^k e\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} \\ &= \left(\frac{h}{q}\right)^k e\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q}\left(1-\left(\frac{-1}{q}\right)^k e\left\{(2n+1)\frac{h}{q}\right\}\right). \end{aligned}$$

In (12) ist daher

$$(14)\quad \sum_{h<q} = -2i\sum_{h<q/2}\left(\frac{h}{q}\right)^k \frac{e\left(-\frac{nh}{q}\right)}{1-e\left(\frac{h}{q}\right)}\left(1-\left(\frac{-1}{q}\right)^k e\left\{(2n+1)\frac{h}{q}\right\}\right).$$

Aus (4), (12) und (14) folgt für $q \equiv 1 \pmod 2$

$$(15)\quad F_k(n,q) = -\frac{q^{k/2}}{2\pi i}\,\mathfrak{R}_k(n+\tfrac{1}{2}, q, 1).$$

Es sei weiter $q \equiv 0 \pmod 4$. Dann bleiben (8) und (9) in Kraft, während (11) durch (1.1.23) zu ersetzen ist. Aus (8), (9) und (1.1.23) folgt

$$(16)\quad \mathfrak{R}_k(n+\tfrac{1}{2}, q, 1) = \pi 2^{k/2} q^{-k/2} \sum_{\substack{h<q\\ h\equiv 1 \pmod 2}}\left(\frac{2q}{h}\right)^k e\left\{-\left(n-\frac{qk}{8}+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q}.$$

Hierin werde die h-Summe wieder nach dem Schema (13) umgeformt. Zunächst ist

$$(17)\quad \left(\frac{2q}{q-h}\right) = \left(\frac{2q}{h}\right)(-1)^{q/4}.$$

Um dies nachzuprüfen, wenden wir (1.1.1) und (1.1.23) an. Es folgt dann einerseits

$$S(q-h, q) = \left(\frac{2q}{q-h}\right)e\left(\frac{q-h}{8}\right)(2q)^{1/2},$$

andererseits

$$\begin{aligned} S(q-h,q) &= \sum_{a \bmod q} e\left\{\frac{(q-h)a^2}{q}\right\} = \sum_{a \bmod q} e\left(-\frac{ha^2}{q}\right) \\ &= \overline{S(h,q)} = \left(\frac{2q}{h}\right)e\left(-\frac{h}{8}\right)(2q)^{1/2}, \end{aligned}$$

so daß (17) erfüllt ist. Aus (16) und (17) folgt

$$\begin{aligned} f(h)+f(q-h) &= \left(\frac{2q}{h}\right)^k e\left\{-\left(n-\frac{qk}{8}+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} + \\ &\quad + \left(\frac{2q}{h}\right)^k e\left(-\frac{qk}{8}\right)e\left\{-\left(n-\frac{qk}{8}+\frac{1}{2}\right)\frac{q-h}{q}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} \\ &= \left(\frac{2q}{h}\right)^k \operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q}\left(e\left\{-\left(n-\frac{qk}{8}\right)\frac{h}{q}\right\}e\left(-\frac{h}{2q}\right) - e\left\{\left(n-\frac{qk}{8}\right)\frac{h}{q}\right\}e\left(\frac{h}{2q}\right)\right). \end{aligned}$$

In (16) ist daher

$$(18)\qquad \sum_{h<q} = -2i \sum_{\substack{h<q/2\\ h\equiv 1 (\mathrm{mod}\,2)}} \left(\frac{2q}{h}\right)^k \frac{e\left\{-\left(n-\frac{qk}{8}\right)\frac{h}{q}\right\}}{1-e\left(\frac{h}{q}\right)} \left(1-e\left\{\left(2n+1-\frac{qk}{4}\right)\frac{h}{q}\right\}\right).$$

Nach (5), (16) und (18) bleibt (15) in Kraft.

Die Behauptung (2) des Hilfssatzes folgt aus (1.29), (6), (7), (3) und (15).

Weiter ergibt sich aus der dritten Zeile von (1.20), daß $\mathfrak{R}_k(n+\frac{1}{2}, q, 1)$ rein imaginär ist. Mit h durchläuft nämlich auch $-h$ ein reduziertes Restsystem mod q. Ersetzt man aber h durch $-h$, so geht der vor der geschweiften Klammer stehende Ausdruck in den konjugiert komplexen Wert über. Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist für $x = n+\frac{1}{2}$ reell und wegen

$$e(mx) = e(-mx) = (-1)^m$$

ändert dieser Ausdruck sein Vorzeichen, wenn man h durch $-h$ ersetzt. Also ist in der Tat $\mathfrak{R}_k(n+\frac{1}{2}, q, 1)$ rein imaginär. Nach (15) ist mithin $F_k(n, q)$ für ungerade q reell. Da aber (15), wie oben gezeigt worden ist, auch für $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\,4)$ gilt, so ist $F_k(n, q)$ selbst für diese q reell. In Verbindung mit (2) und (3), ergibt sich jetzt die letzte Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *Es ist* $F_k(n, u) = 0$, *wenn entweder*

$$(19)\qquad k \text{ gerade}, \quad n \equiv \frac{u-1}{2} (\mathrm{mod}\,u),$$

oder wenn

$$(20)\qquad k \text{ ungerade}, \quad n \equiv \frac{u-1}{2} (\mathrm{mod}\,u), \quad u \equiv 1 (\mathrm{mod}\,4).$$

Beweis. Unter den angegebenen Bedingungen ist in (4) für $q = u$

$$1-\left(\frac{-1}{q}\right)^k e\left\{(2n+1)\frac{h}{q}\right\} = 1-e(1) = 0.$$

Hilfssatz 3.

$$(21)\qquad F_k(n, 3) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{für gerade } k,\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\,3),\\ (-1)^{k/2+1} & \text{für gerade } k,\ n \equiv 2 (\mathrm{mod}\,3),\\ \frac{2}{3^{1/2}}\left(\frac{-1}{k}\right) & \text{für ungerade } k,\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\,3),\\ -\frac{1}{3^{1/2}}\left(\frac{-1}{k}\right) & \text{für ungerade } k,\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\,3); \end{cases}$$

$$(22)\qquad F_k(n, 4) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{für gerade } k,\ n \equiv \frac{k}{2} \text{ oder } \frac{k+2}{2} (\mathrm{mod}\,4),\\ -2^{k/2} & \text{für gerade } k,\ n \equiv \frac{k+4}{2} \text{ oder } \frac{k+6}{2} (\mathrm{mod}\,4),\\ 2^{(k+1)/2} & \text{für ungerade } k,\ n \equiv \frac{k+1}{2} (\mathrm{mod}\,4),\\ -2^{(k+1)/2} & \text{für ungerade } k,\ n \equiv \frac{k+5}{2} (\mathrm{mod}\,4); \end{cases}$$

$$(23)\qquad F_k(n, 8) = \begin{cases} 2^{k/2+1} & \text{für } n-k \equiv 0, 1, 2, 3 (\mathrm{mod}\,8),\\ -2^{k/2+1} & \text{für } n-k \equiv 4, 5, 6, 7 (\mathrm{mod}\,8). \end{cases}$$

Beweis. Nach (4) ist

$$F_k(n, 3) = i^k \frac{e\left(-\frac{n}{3}\right)}{1-e\left(\frac{1}{3}\right)} \left(1-(-1)^k e\left(\frac{2n+1}{3}\right)\right).$$

Für gerade k ist somit

$$F_k(n, 3) = (-1)^{k/2} \frac{e\left(-\frac{n}{3}\right)}{1-e\left(\frac{1}{3}\right)} \left(1-e\left(\frac{2n+1}{3}\right)\right),$$

woraus die beiden ersten Zeilen von (21) folgen. Für ungerade k ist

$$F_k(n, 3) = i\left(\frac{-1}{k}\right) \frac{e\left(-\frac{n}{3}\right)}{1-e\left(\frac{1}{3}\right)} \left(1+e\left(\frac{2n+1}{3}\right)\right).$$

Für $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\,3)$ ist also

$$\left(\frac{-1}{k}\right) F_k(n, 3) = 2i \frac{e\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-e\left(\frac{1}{3}\right)} = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3^{1/2}};$$

für $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\,3)$ ist

$$\left(\frac{-1}{k}\right) F_k(n, 3) = i \frac{1+e\left(\frac{1}{3}\right)}{1-e\left(\frac{1}{3}\right)} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{3^{1/2}}.$$

Weiter ist nach (5)

$$S = 2^{-k/2} F_k(n, 4) = \frac{e\left\{-\frac{1}{4}\left(n-\frac{k}{2}\right)\right\}}{1-e\left(\frac{1}{4}\right)} \left(1-e\left\{\tfrac{1}{4}(2n-k+1)\right\}\right).$$

Da die rechte Seite ihr Vorzeichen ändert, wenn man n durch $n+2$ ersetzt, so genügt es, die erste und dritte Zeile von (22) zu beweisen. Für gerade k ist

$$S = \frac{i^{-(n-k/2)}}{1-i}\left(1-(-1)^{n-k/2}i\right),$$

woraus die Richtigkeit der ersten Zeile von (22) folgt. Für ungerade k und $n \equiv (k+1)/2 \pmod 4$ ist

$$S = 2\frac{e(-\frac{1}{8})}{1-e(\frac{1}{4})} = \sec\frac{\pi}{4} = 2^{1/2},$$

also die dritte Zeile von (22) erfüllt.

Endlich ist nach (5)

$$2^{-k/2}F_k(n,8) = \frac{e\left(\frac{k-n}{8}\right)}{1-e(\frac{1}{8})}\left(1-e\left(\frac{2n+1-2k}{8}\right)\right)+ \\ + \frac{e\left(\frac{3k-3n}{8}\right)}{1-e(\frac{3}{8})}\left(1-e\left(\frac{6n+3-6k}{8}\right)\right).$$

Wird also

$$e(\tfrac{1}{8}) = z, \quad f_m(z) = \frac{z^{-m}}{1-z}(1-z^{2m+1}), \quad g_m(z) = f_m(z)+f_m(z^3)$$

gesetzt, so soll gezeigt werden, daß

$$(24) \qquad g_m(z) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad m = 0,1,2,3, \\ -2 & \text{für} \quad m = 4,5,6,7. \end{cases}$$

Da hierbei $f_m(z)$ und $g_m(z)$ ihr Vorzeichen wechseln, wenn man m durch $m+4$ ersetzt, so genügt es, die erste Zeile von (24) nachzuprüfen. Dies geht z. B. so: Es ist

$$f_0(z) = 1, \quad \text{also} \quad f_0(z^3) = 1, \quad g_0(z) = 2,$$
$$f_1(z) = z^{-1}\frac{1-z^3}{1-z} = z^{-1}(1+z+z^2) = 1+z+z^{-1},$$
$$f_1(z^3) = 1+z^3+z^{-3} = 1-z^{-1}-z, \quad g_1(z) = 2,$$
$$f_2(z) = 1+z+z^{-1}+z^2+z^{-2}, \quad f_2(z^3) = 1-z^{-1}-z-z^2-z^{-2}, \quad g_2(z) = 2,$$
$$f_3(z) = 1+z+z^{-1}+z^2+z^{-2}+z^3+z^{-3} = 1+z^2+z^{-2},$$
$$f_3(z^3) = 1-z^2-z^{-2}, \quad g_3(z) = 2.$$

Hilfssatz 4.

$$(25) \qquad |F_k(n,u)| \leqslant \sum_{\substack{h<u/2 \\ (h,u)=1}} \operatorname{cosec}\frac{\pi h}{u},$$

$$(26) \qquad |F_k(n,u)| \leqslant \frac{u}{2}\left(1+\log\frac{u-1}{2}\right),$$

$$(27) \qquad |F_k(n,4q)| \leqslant 2^{k/2}\sum_{\substack{h<2q \\ (h,q)=1}} \operatorname{cosec}\frac{\pi h}{4q},$$

$$(28) \qquad |F_k(n,4q)| \leqslant 2^{k/2+1}q\{1+\tfrac{1}{2}\log(2q-1)\}.$$

Beweis. Nach (4) ist

$$|F_k(n,u)| \leqslant 2\sum_{\substack{h<u/2 \\ (h,u)=1}} \left|1-e\left(\frac{h}{u}\right)\right|^{-1} = \sum_{\substack{h<u/2 \\ (h,u)=1}} \operatorname{cosec}\frac{\pi h}{u}.$$

Das ist (25). Genau so ergibt sich (27), mit Hilfe von (5).

Aus (25) folgt, nach Hilfssatz 1.3.4,

$$|F_k(n,u)| \leqslant \sum_{h=1}^{(u-1)/2}\frac{u}{2h} \leqslant \frac{u}{2}\left(1+\int_1^{(u-1)/2}\frac{dy}{y}\right),$$

also (26). Analog ergibt sich aus (27)

$$2^{-k/2}|F_k(n,4q)| \leqslant \sum_{v<2q}\operatorname{cosec}\frac{\pi v}{4q} \leqslant 2q\sum_{v<2q}\frac{1}{v} \\ = 2q\sum_{m=0}^{q-1}\frac{1}{2m+1} \leqslant 2q\left(1+\int_0^{q-1}\frac{dy}{2y+1}\right),$$

also (28).

Hilfssatz 5.

$$(29) \qquad |F_k(n,12)| \leqslant 4{,}9\cdot 2^{k/2};$$

$$(30) \qquad \sum_{q=4}^{\infty}\frac{|F_k(n,4q)|}{(4q)^{k/2}} \leqslant \begin{cases} 66{,}41\cdot 8^{-k/2} & \text{für} \quad k \geqslant 7, \\ 52{,}43\cdot 8^{-k/2} & \text{für} \quad k \geqslant 8; \end{cases}$$

$$(31) \qquad \sum_{u=27}^{\infty}\frac{|F_k(n,u)|}{u^{k/2}} \leqslant \begin{cases} 0{,}78\cdot 27^{2-k/2} & \text{für} \quad k \geqslant 7, \\ 0{,}58\cdot 27^{2-k/2} & \text{für} \quad k \geqslant 8. \end{cases}$$

Beweis. Nach (27) ist

$$2^{-k/2}|F_k(n,12)| \leqslant \operatorname{cosec}\frac{\pi}{12}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{12} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{24} \leqslant 4{,}9.$$

Nach (28) und Hilfssatz 1.3.4 ist

$$\sum_{q=4}^{\infty}\frac{|F_k(n,4q)|}{(4q)^{k/2}}\leqslant 2^{1-k/2}\sum_{q=4}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\log(2q-1)}{q^{k/2-1}}$$

$$\leqslant 2^{1-k/2}\left(\frac{1+\frac{1}{2}\log 7}{4^{k/2-1}}+\int_4^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\log 2y}{y^{k/2-1}}\,dy\right)$$

$$=8^{1-k/2}\left(1+\frac{1}{2}\log 7+\frac{8+4\log 8}{k-4}+\frac{8}{(k-4)^2}\right).$$

Für $k\geqslant 7$ ist also

$$\sum_{q=4}^{\infty}\leqslant 8^{1-k/2}(1+\tfrac{1}{2}\log 7+\tfrac{8}{3}+\log 16+\tfrac{8}{9})\leqslant 8^{1-k/2}\cdot 8{,}3012$$

$$\leqslant 66{,}41\cdot 8^{-k/2}$$

und für $k\geqslant 8$ ist

$$\sum_{q=4}^{\infty}\leqslant 8^{1-k/2}(1+\tfrac{1}{2}\log 7+2+\log 8+\tfrac{1}{2})\leqslant 8^{1-k/2}\cdot 6{,}553\leqslant 52{,}43\cdot 8^{-k/2}.$$

Analog ist nach (26)

$$\sum_{u=27}^{\infty}\frac{|F_k(n,u)|}{u^{k/2}}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{m=13}^{\infty}\frac{1+\log m}{(2m+1)^{k/2-1}}$$

$$\leqslant\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+\log 13}{27^{k/2-1}}+\int_{13}^{\infty}\frac{1+\log y}{(2y+1)^{k/2-1}}\,dy\right)$$

$$\leqslant 27^{2-k/2}\left(\frac{1+\log 13}{54}+\frac{1+\log\frac{27}{2}}{2(k-4)}+\frac{1}{(k-4)^2}\right).$$

Für $k\geqslant 7$ ist also

$$27^{k/2-2}\sum_{u=27}^{\infty}\leqslant\frac{1+\log 13}{54}+\frac{1+\log\frac{27}{2}}{6}+\tfrac{1}{9}\leqslant 0{,}78$$

und für $k\geqslant 8$ ist

$$27^{k/2-2}\sum_{u=27}^{\infty}\leqslant\frac{1+\log 13}{54}+\frac{1+\log\frac{27}{2}}{8}+\tfrac{1}{16}\leqslant 0{,}58.$$

Wir haben jetzt die nötigen Hilfsmittel beisammen, um den Fall eines geraden k behandeln zu können. Für die ungeraden k ist aber noch der folgende Hilfssatz nötig.

Hilfssatz 6. *Für ungerade k ist*

$$F_k(n,7)=0 \quad \text{für} \quad n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,7); \tag{32}$$

$$F_k(n,9)=\begin{cases}3 & \text{für} \quad n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,9),\\ -3 & \text{für} \quad n\equiv 6\,(\mathrm{mod}\,9);\end{cases} \tag{33}$$

$$F_k(n,11)=0 \quad \text{für} \quad n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,11). \tag{34}$$

Beweis. Es sei k ungerade. Für $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,7)$ ist nach (4)

$$|F_k(n,7)|=2\left|\sum_{h=1}^{3}\left(\frac{h}{7}\right)\frac{e\left(-\frac{3h}{7}\right)}{1-e\left(\frac{h}{7}\right)}\right|.$$

Setzt man also $e(\frac{1}{7})=z$, so genügt es zu zeigen, daß

$$S=\frac{z^4}{1-z}+\frac{z}{1-z^2}-\frac{z^5}{1-z^3}=0.$$

In der Tat ist

$$\frac{1}{z}(1-z^2)(1-z^3)S=(z^3+z^4)(1-z^3)+1-z^3-z^4(1-z^2)$$

$$=z^3+z^4-z^6-1+1-z^3-z^4+z^6=0,$$

also $S=0$.

Weiter ist nach (4)

$$F_k(n,9)=\sum_{h=1,2,4}\frac{e\left(-\frac{nh}{9}\right)}{1-e\left(\frac{h}{9}\right)}\left\{1-e\left((2n+1)\frac{h}{9}\right)\right\}.$$

Daraus folgt sofort die erste Zeile von (33). Um die zweite Zeile zu beweisen, setze man $z=e(\frac{1}{9})$. Dann genügt es zu zeigen, daß

$$S=\frac{z^3}{1-z}(1-z^4)+\frac{z^6}{1-z^2}(1-z^8)+\frac{z^3}{1-z^4}(1-z^{16})=-3.$$

In der Tat ist

$$S=z^3(1+z+z^2+z^3)+z^6(1+z^2+z^4+z^6)+z^3(1+z^4+z^8+z^{12})$$

$$=z^3+z^4+z^5+z^6+z^6+z^8+z+z^3+z^3+z^7+z^2+z^6$$

$$=z+z^2+3z^3+z^4+z^5+3z^6+z^7+z^8$$

$$=-1+2z^3+2z^6=-3+2(1+z^3+z^6)=-3.$$

Damit ist (33) bewiesen. (Der Leser wird bemerkt haben, daß diese Formel und ihr Beweis auch für gerade k gelten.)

Schließlich ist für $n \equiv 1 \pmod{11}$ nach (4)

$$|F_k(n,11)| = \Big| \sum_{h=1}^{5} \left(\frac{h}{11}\right) \frac{e\left(-\frac{h}{11}\right)}{1-e\left(\frac{h}{11}\right)} \left(1+e\left(\frac{3h}{11}\right)\right) \Big|.$$

Es genügt daher zu zeigen: Für $z = e(\frac{1}{11})$ ist

$$(35)\quad \frac{z^{10}}{1-z}(1+z^3)-\frac{z^9}{1-z^2}(1+z^6)+\frac{z^8}{1-z^3}(1+z^9)+\frac{z^7}{1-z^4}(1+z)+ \\ +\frac{z^6}{1-z^5}(1+z^4) = S_1-S_2+S_3+S_4+S_5 = 0.$$

In der Tat ist

$$(1-z^2)(S_1-S_2) = z^{10}(1+z)(1+z^3)-z^9(1+z^6) = z^{10}+1+z^2+z^3-z^9-z^4,$$

$$(1-z^4)(S_1-S_2+S_4) = z^{10}+1+z^2+z^3-z^9-z^4+z+z^2+z^4+z^5-1-z^6+z^7+z^8 \\ = z+2z^2+z^3+z^5-z^6+z^7+z^8-z^9+z^{10} \\ = -1+z^2-z^4-2z^6-2z^9,$$

$$(1-z^4)(1-z^6)(S_1-S_2+S_4) = -1+z^2-z^4-2z^6-2z^9+z^6-z^8+z^{10}+2z+2z^4 \\ = -1+2z+z^2+z^4-z^6-z^8-2z^9+z^{10};$$

$$\frac{z^6}{1-z^5} = \frac{z^6}{1-z^{-6}} = -\frac{z}{1-z^6},$$

$$(1-z^6)(S_3+S_5) = z^8(1+z^3)(1+z^9)-z(1+z^4) = z^8+1+z^6+z^9-z-z^5,$$

$$(1-z^4)(1-z^6)(S_3+S_5) = z^8+1+z^6+z^9-z-z^5-z-z^4-z^{10}-z^2+z^5+z^9 \\ = -(-1+2z+z^2+z^4-z^6-z^8-2z^9+z^{10}),$$

also (35) erfüllt.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Paragraphen, dem dritten Peterssonschen Satz, der so ausgedrückt werden kann:

Satz 1. *Es sei $k \geqslant 7$. Dann gibt es eine von k unabhängige Zahl M und drei von k abhängige Zahlen a_k, b_k, s_k, so daß*

$$(36)\quad -\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{N}_k\left(n+\frac{1}{2},1\right)\begin{cases} \geqslant s_k & \text{für} \quad n \equiv a_k \pmod{M}, \\ \leqslant -s_k & \text{für} \quad n \equiv b_k \pmod{M}. \end{cases}$$

Diesen Satz hat Petersson auch für $k = 6$ ausgesprochen und bewiesen. Der Fall $k = 6$ erfordert aber noch die Berechnung von $F_6(n, 16)$ und eine bessere Abschätzung als (29) für $F_6(n, 12)$. Zudem bekommt man für s_6 einen weit ungünstigeren Wert, als er durch (38) geliefert wird. Wir wollen daher den Fall $k = 6$ hier nicht aufnehmen.

Die Peterssonsche Methode ergibt für M, a_k, b_k, s_k konkrete Werte, die es sich lohnt, mit in die Formulierung des Satzes aufzunehmen. Dies soll im folgenden geschehen, wobei der Fall eines geraden k (Satz 2) und eines ungeraden k (Satz 3) getrennt behandelt werden. Es wird sich dabei herausstellen, daß man für M den Wert

$$(37)\quad M = 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 21\cdot 23\cdot 25 = 1405485081000$$

nehmen kann; daß die a_k, b_k nur von dem Restcharakter von k nach dem Modul 8 abhängen, und für s_k der Wert

$$(38)\quad s_k = 2^{-k/2}+0{,}001\cdot 3^{-k/2}$$

zulässig ist.

Satz 2. *Es sei k gerade, $k \geqslant 8$,*

$$(39)\quad n \equiv \frac{u-1}{2} \pmod{u} \quad \textit{für } u = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.$$

Ferner möge n entweder den Bedingungen

$$(40)\quad \begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3 & \text{für} \quad k \equiv 0,4 \pmod 8; \\ n \equiv 2 \pmod 3 & \text{für} \quad k \equiv 2,6 \pmod 8, \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} n \equiv 1 \textit{ für } k \equiv 0, \quad n \equiv 2 \textit{ für } k \equiv 2, \\ n \equiv 6 \textit{ für } k \equiv 4, \quad n \equiv 0 \textit{ für } k \equiv 6 \pmod 8, \end{cases}$$

oder den Bedingungen

$$(42)\quad \begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 & \text{für} \quad k \equiv 0,4 \pmod 8; \\ n \equiv 0 \pmod 3 & \text{für} \quad k \equiv 2,6 \pmod 8, \end{cases}$$

$$(43)\quad \begin{cases} n \equiv 7 \textit{ für } k \equiv 0, \quad n \equiv 0 \textit{ für } k \equiv 2, \\ n \equiv 0 \textit{ für } k \equiv 4, \quad n \equiv 2 \textit{ für } k \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

genügen. Es sei

$$(44)\quad l = \begin{cases} 1, & \textit{wenn } n \textit{ die Bedingungen } (40), (41) \textit{ erfüllt}, \\ -1, & \textit{wenn } n \textit{ die Bedingungen } (42), (43) \textit{ erfüllt}. \end{cases}$$

Dann ist

$$(45)\quad -\frac{l}{2\pi i}\mathfrak{N}_k(n+\tfrac{1}{2},1) \geqslant 2^{-k/2}+0{,}001\cdot 3^{-k/2}.$$

Beweis. Aus (40)-(44) und (21)-(23) folgt

$$lF_k(n,3)=1,\quad lF_k(n,4)=2^{k/2},\quad lF_k(n,8)=2^{k/2+1}. \tag{46}$$

Nach Hilfssatz 1, (46), (39) und Hilfssatz 2 ist

$$\begin{aligned}-\frac{l}{2\pi i}\mathfrak{N}_k(n+\tfrac12,1) \geqslant{}& \frac{1}{3^{k/2}}+\frac{1}{2^{k/2}}+\frac{2}{4^{k/2}}-\frac{|F_k(n,12)|}{12^{k/2}}-\\ &-\frac{|F_k(n,9)|}{9^{k/2}}-\frac{|F_k(n,15)|}{15^{k/2}}-\frac{|F_k(n,21)|}{21^{k/2}}-\\ &-\sum_{q=4}^{\infty}\frac{|F_k(n,4q)|}{(4q)^{k/2}}-\sum_{u=27}^{\infty}\frac{|F_k(n,u)|}{u^{k/2}}.\end{aligned} \tag{47}$$

Hierin ist nach Hilfssatz 5

$$\begin{aligned}4^{k/2}\left\{\frac{|F_k(n,12)|}{12^{k/2}}+\sum_{q=4}^{\infty}+\sum_{u=27}^{\infty}\right\} &\leqslant 4{,}9\left(\frac23\right)^{k/2}+52{,}43\left(\frac12\right)^{k/2}+0{,}58\cdot27^2\left(\frac{4}{27}\right)^{k/2}\\ &\leqslant 4{,}9\left(\frac23\right)^{4}+52{,}43\left(\frac12\right)^{4}+0{,}58\cdot27^2\left(\frac{4}{27}\right)^{4}\\ &=\frac{78{,}4}{81}+\frac{52{,}43}{16}+\frac{148{,}48}{729}\leqslant 4{,}45,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{2}{4^{k/2}}-\frac{|F_k(n,12)|}{12^{k/2}}-\sum_{q=4}^{\infty}-\sum_{u=27}^{\infty} &\geqslant -\frac{2{,}45}{4^{k/2}}\\ &=-\frac{2{,}45}{3^{k/2}}\left(\frac34\right)^{k/2}\geqslant-\frac{2{,}45}{3^{k/2}}\left(\frac34\right)^{4}\geqslant-\frac{0{,}78}{3^{k/2}}.\end{aligned} \tag{48}$$

Schließlich ist nach (26)

$$\begin{aligned}2\cdot3^{k/2-1}\left\{\frac{|F_k(n,9)|}{9^{k/2}}+\frac{|F_k(n,15)|}{15^{k/2}}+\frac{|F_k(n,21)|}{21^{k/2}}\right\} &\leqslant \frac{1+\log4}{3^{k/2-1}}+\frac{1+\log7}{5^{k/2-1}}+\frac{1+\log10}{7^{k/2-1}}\\ &\leqslant \frac{1+\log4}{3^{3}}+\frac{1+\log7}{5^{3}}+\frac{1+\log10}{7^{3}}\leqslant 0{,}122.\end{aligned} \tag{49}$$

Aus (47)-(49) ergibt sich

$$-\frac{l}{2\pi i}\mathfrak{N}_k\left(n+\frac12,1\right)\geqslant\frac{1}{2^{k/2}}+(1-0{,}78-0{,}19)\frac{1}{3^{k/2}},$$

womit (45) nachgewiesen ist.

Satz 3. *Es sei k ungerade, $k\geqslant7$,*

$$n\equiv1\pmod{11}. \tag{50}$$

Ferner möge n entweder den Bedingungen

$$n\equiv\frac{u-1}{2}\pmod u \quad \textit{für}\quad k\equiv1,5\pmod8,\quad u=3,5,7,9,13,17,21,25, \tag{51}$$

$$n\equiv0\pmod9;\quad n\equiv\frac{u-1}{2}\pmod u \quad \textit{für}\quad k\equiv3,7\pmod8,\quad u=5,7,13,17,25, \tag{52}$$

$$\begin{cases}n\equiv1 \textit{ für } k\equiv1, & n\equiv7 \textit{ für } k\equiv5,\\ n\equiv6 \textit{ für } k\equiv3, & n\equiv0 \textit{ für } k\equiv7\pmod8,\end{cases} \tag{53}$$

oder den Bedingungen

$$n\equiv\frac{u-1}{2}\pmod u \quad \textit{für}\quad k\equiv3,7\pmod8,\quad u=3,5,7,9,13,17,21,25, \tag{54}$$

$$n\equiv6\pmod9;\quad n\equiv\frac{u-1}{2}\pmod u \quad \textit{für}\quad k\equiv1,5\pmod8,\quad u=5,7,13,17,25, \tag{55}$$

$$\begin{cases}n\equiv7 \textit{ für } k\equiv1, & n\equiv1 \textit{ für } k=5,\\ n\equiv0 \textit{ für } k\equiv3, & n\equiv6 \textit{ für } k\equiv7\pmod8\end{cases} \tag{56}$$

genügen. Es sei

$$m=\begin{cases}1, & \textit{wenn } n \textit{ die Bedingungen } (51)\text{-}(53) \textit{ erfüllt},\\ -1, & \textit{wenn } n \textit{ die Bedingungen } (54)\text{-}(56) \textit{ erfüllt}.\end{cases} \tag{57}$$

Dann ist

$$-\frac{m}{2\pi i}\mathfrak{N}_k(n+\tfrac12,1)\geqslant2^{-k/2}+0{,}001\cdot3^{-k/2}. \tag{58}$$

Beweis. Aus (51)-(57) und (21)-(23) folgt

$$mF_k(n,3)\geqslant3^{-1/2},\quad mF_k(n,4)=2^{(k+1)/2},\quad mF_k(n,8)=2^{k/2+1}. \tag{59}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

1) *Es genüge n entweder den Bedingungen* (51) *und den beiden ersten Bedingungen* (53), *oder den Bedingungen* (54) *und den beiden letzten Bedin-*

gungen (56). Nach (2), (3), (59), (57), Hilfssatz 2, (32), (50) und (34) ist dann

$$(60)\qquad -\frac{m}{2\pi i}\mathfrak{N}_k(n+\tfrac{1}{2},1)\geqslant \frac{2^{1/2}}{2^{k/2}}+\frac{3^{-1/2}}{3^{k/2}}+\frac{2}{4^{k/2}}-$$
$$-\frac{|F_k(n,12)|}{12^{k/2}}-\frac{|F_k(n,15)|}{15^{k/2}}-\frac{|F_k(n,19)|}{19^{k/2}}-\frac{|F_k(n,23)|}{23^{k/2}}-$$
$$-\sum_{q=4}^{\infty}\frac{|F_k(n,4q)|}{(4q)^{k/2}}-\sum_{u=27}^{\infty}\frac{|F_k(n,u)|}{u^{k/2}}.$$

Hierin ist nach (26) und Hilfssatz 5

$$4^{k/2}\left(\frac{|F_k(n,12)|}{12^{k/2}}+\frac{|F_k(n,15)|}{15^{k/2}}+\frac{|F_k(n,19)|}{19^{k/2}}+\frac{|F_k(n,23)|}{23^{k/2}}+\sum_{q=4}^{\infty}+\sum_{u=27}^{\infty}\right)$$
$$\leqslant 4{,}9\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k/2}+\tfrac{15}{2}(1+\log 7)\left(\tfrac{4}{15}\right)^{k/2}+\tfrac{19}{2}(1+\log 9)\left(\tfrac{4}{19}\right)^{k/2}+$$
$$+\tfrac{23}{2}(1+\log 11)\left(\tfrac{4}{23}\right)^{k/2}+66{,}41\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k/2}+0{,}78\cdot 27^2\left(\tfrac{4}{27}\right)^{k/2}$$
$$\leqslant 4{,}9\left(\tfrac{2}{3}\right)^{7/2}+\tfrac{15}{2}(1+\log 7)\left(\tfrac{4}{15}\right)^{7/2}+\tfrac{19}{2}(1+\log 9)\left(\tfrac{4}{19}\right)^{7/2}+$$
$$+\tfrac{23}{2}(1+\log 11)\left(\tfrac{4}{23}\right)^{7/2}+66{,}41\left(\tfrac{1}{2}\right)^{7/2}+0{,}78\cdot 27^2\left(\tfrac{4}{27}\right)^{7/2}$$
$$\leqslant 1{,}186+0{,}217+0{,}131+0{,}086+5{,}870+0{,}712\leqslant 8{,}21.$$

Also ist in (60)

$$\frac{2}{4^{k/2}}-\ldots-\sum_{u=27}^{\infty}\geqslant\frac{2-8{,}21}{4^{k/2}}=-\frac{6{,}21}{4^{k/2}},$$

$$3^{k/2}\left(\frac{2}{4^{k/2}}-\ldots-\sum_{u=27}^{\infty}\right)\geqslant -6{,}21\left(\frac{3}{4}\right)^{k/2}\geqslant -6{,}21\left(\frac{3}{4}\right)^{7/2}\geqslant -2{,}27,$$

$$\frac{3^{-1/2}}{3^{k/2}}+\frac{2}{4^{k/2}}-\ldots-\sum_{u=27}^{\infty}\geqslant\frac{3^{-1/2}-2{,}27}{3^{k/2}}\geqslant-\frac{1{,}7}{3^{k/2}},$$

$$2^{k/2}\left(\frac{3^{-1/2}}{3^{k/2}}+\ldots-\sum_{u=27}^{\infty}\right)\geqslant -1{,}7\left(\frac{2}{3}\right)^{7/2}\geqslant -0{,}412,$$

$$\frac{2^{1/2}}{2^{k/2}}+\frac{3^{-1/2}}{3^{k/2}}+\ldots-\sum_{u=27}^{\infty}\geqslant\frac{2^{1/2}-0{,}412}{2^{k/2}}\geqslant\frac{1{,}001}{2^{k/2}}.$$

Damit ist die Ungleichung (58) im ersten Fall bewiesen.

2) *Es genüge n entweder den Bedingungen* (52) *und den beiden letzten Bedingungen,* oder den Bedingungen (55) und beiden ersten Bedingungen (56). Es bezeichne zur Abkürzung V die rechte Seite der Ungleichung (60). Nach (2), (3), (59), (57), Hilfssatz 2, (32), (50) und (34) ist dann

$$-\frac{m}{2\pi i}\mathfrak{N}_k(n+\tfrac{1}{2},1)\geqslant V+\frac{mF_k(n,9)}{9^{k/2}}-\frac{|F_k(n,21)|}{21^{k/2}}.$$

Der im vorigen Fall gegebene Beweis von

$$V\geqslant 2^{-k/2}+0{,}001\cdot 3^{-k/2}$$

bleibt in Kraft, weil dabei die Bedingungen (51)-(56) nicht benutzt wurden. Ferner ist nach (33) und (26)

$$\frac{mF_k(n,9)}{9^{k/2}}-\frac{|F_k(n,21)|}{21^{k/2}}\geqslant\frac{3}{9^{k/2}}-\frac{21}{2}\cdot\frac{1+\log 10}{21^{k/2}}$$
$$\geqslant\frac{3}{9^{k/2}}\left(1-\frac{7}{2}(1+\log 10)\left(\frac{3}{7}\right)^3\right)>0.$$

Die Ungleichung (58) ist also auch im zweiten Fall erfüllt.

Satz 1, und auch seine präziseren Formulierungen, die in den Sätzen 2-3 gegeben werden, sind deswegen von Belang, weil sie Anwendungen auf das im III Kapitel behandelte Ω-Problem zulassen.

Aus (1) und Satz 1 ergibt sich sofort der folgende

Satz 4. *Es sei $k\geqslant 7$. Dann gibt es eine von k unabhängige Zahl M und drei von k abhängige Zahlen a_k, b_k, t_k, so daß*

$$(61)\qquad P_k(n+\tfrac{1}{2})\geqslant D_k t_k n^{k/2-1}$$

für alle hinreichend großen n, die der Restklasse $n\equiv a_k \pmod M$ angehören, und

$$(62)\qquad P_k(n+\tfrac{1}{2})\leqslant -D_k t_k n^{k/2-1}$$

für alle hinreichend großen n, die der Restklasse $n\equiv b_k \pmod M$ angehören.

Dabei kann man als t_k jede nur von k abhängige positive Zahl nehmen, die kleiner ist als das s_k von Satz 1. Z. B. bekommt man, auf Grund der Sätze 2-3, den folgenden

Satz 5. *Es sei $k\geqslant 7$. Dann ist*

$$(63)\qquad P_k(n+\tfrac{1}{2})\geqslant 2^{-k/2}D_k n^{k/2-1}$$

für alle hinreichend großen n, die bei geradem k den Bedingungen (39), (40), (41) *und bei ungeradem k den Bedingungen* (50), (51), (52), (53) *genü-*

gen. Ferner ist

$$P_k(n+\tfrac{1}{2}) \leqslant -2^{-k/2}D_k n^{k/2-1} \tag{64}$$

für alle hinreichend großen n, die bei geradem k den Bedingungen (39), (42), (43), *und bei ungeradem k den Bedingungen* (50), (54), (55), (56) *genügen.*

Von $P_k(n+\frac{1}{2})$ kann man, auf Grund von (3.1.2), zu $P_k(n)$ übergehen. Ferner bekommt man, durch denselben Schluß wie bei (3.1.2), die analoge Beziehung

$$P_k(n+\tfrac{1}{2})-P_k(n+1-0) = \tfrac{1}{2}D_k n^{k/2-1}+Bn^{k/2-2}, \tag{65}$$

mit Hilfe der man von $P_k(n+\frac{1}{2})$ zu $P_k(n+1-0)$ übergehen kann. Auf diese Weise ergibt sich, statt Satz 4,

Satz 6. *Es sei $k \geqslant 7$. Dann gibt es eine von k unabhängige Zahl M und drei von k abhängige Zahlen a_k, b_k, ε_k, so daß*

$$P_k(n) \geqslant \tfrac{1}{2}D_k(1+\varepsilon_k)n^{k/2-1} \tag{66}$$

für alle hinreichend großen n, die der Restklasse $n \equiv a_k \pmod M$ angehören, und

$$P_k(n+1-0) \leqslant -\tfrac{1}{2}D_k(1+\varepsilon_k)n^{k/2-1} \tag{67}$$

für alle hinreichend großen n, die der Restklasse $n \equiv b_k \pmod M$ angehören.

Hier kann man für ε_k jede nur von k abhängige positive Zahl nehmen, die kleiner als 1 und kleiner als das Doppelte der Zahl s_k von Satz 1 ist. Z. B. bekommt man, statt des Satzes 5, den folgenden

Satz 7. *Es sei $k \geqslant 7$. Dann ist*

$$P_k(n) \geqslant \tfrac{1}{2}D_k(1+2^{1-k/2})n^{k/2-1} \tag{68}$$

für alle hinreichend großen n, die bei geradem k den Bedingungen (39), (40), (41) *und bei ungeradem k den Bedingungen* (50), (51), (52), (53) *genügen. Ferner ist*

$$P_k(n+1-0) \leqslant \tfrac{1}{2}D_k(1+2^{1-k/2})n^{k/2-1} \tag{69}$$

für alle hinreichend großen n, die bei ungeradem k den Bedingungen (39), (42), (43) *und bei ungeradem k den Bedingungen* (50), (54) (55), (56) *genügen.*

Aus Satz 7 ergibt sich für $k \geqslant 7$ die folgende Verbesserung von Satz 3.1.1:

Satz 8. *Für $k \geqslant 7$ ist*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} \geqslant 1+2^{1-k/2}, \tag{70}$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} \leqslant -(1+2^{1-k/2}). \tag{71}$$

Insbesondere ist

$$P_k(x) = \Omega_+(x^{k/2-1}), \quad P_k(x) = \Omega_-(x^{k/2-1}). \tag{72}$$

Für $k = 4, 5$ und 6 ergibt sich aus Satz 8 der folgende

Satz 9. *Für $k = 4, 5$ und 6 ist*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} \geqslant 1+2^{-5/2}, \tag{73}$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{2P_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} \leqslant -(1+2^{-5/2}). \tag{74}$$

Insbesondere ist

$$P_k(x) = \Omega_+(x^{k/2-1}), \quad P_k(x) = \Omega_-(x^{k/2-1}). \tag{75}$$

Beweis. Es sei $k = 4$, 5 oder 6; $a = 1$ oder -1; $s = 1+2^{-5/2}$. Wegen (70) und (71) gilt die Ungleichung

$$\limsup_{x=\infty} \frac{2aP_{k+1}(x)}{D_{k+1}x^{(k+1)/2-1}} \geqslant s \tag{76}$$

für $k = 6$. Es genügt daher zu zeigen, daß aus (76) die Ungleichung

$$\limsup_{x=\infty} \frac{2aP_k(x)}{D_k x^{k/2-1}} \geqslant s \tag{77}$$

folgt.

Um den Übergang von (76) zu (77) auszuführen, brauchen wir die Abschätzungen

$$\sum_{-x^{1/2}\leqslant m\leqslant x^{1/2}} (x-m^2)^{r/2-1} = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} x^{(r-1)/2}+Bx^{(r-3)/2} \quad (r=4,5,6), \tag{78}$$

$$P_{k+1}(x) = \sum_{-x^{1/2}<m<x^{1/2}} P_k(x-m^2)+Bx^{k/2-1}. \tag{79}$$

(78) ist bereits für $r = k+2 \geqslant 6$ bewiesen worden; vgl. (2.4.6)-(2.4.9). Der Beweis bleibt auch für $r = 4$ und 5 in Kraft. (79) ist in § 3.8 für $k > 4$ bewiesen worden, doch gilt der Beweis auch für $k = 4$.

Es sei

$$aP_k(x) \leqslant tx^{k/2-1} \quad \text{für} \quad x \geqslant B \geqslant 3. \tag{80}$$

Dann ist nach (79) und (78)

$$aP_{k+1}(x) \leqslant t \sum_{-x^{1/2} \leqslant m \leqslant x^{1/2}} (x-m^2)^{k/2-1} + Bx^{k/2-1} = \frac{t\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} x^{(k-1)/2} + Bx^{k/2-1}.$$

Zusammen mit (76) ergibt dies

$$\frac{D_{k+1}}{2} s \leqslant \frac{t\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Hieraus folgt wegen (1.4.2)

$$t \geqslant \frac{D_k}{2} s. \tag{81}$$

(77) folgt aus (80) und (81).

Damit ist Satz 9 bewiesen. Für $k = 4$ gilt nach (75)

$$P_4(x) = \Omega_+(x), \quad P_4(x) = \Omega_-(x). \tag{82}$$

Aus (3.1.3) geht hervor, daß *eine* der beiden Abschätzungen (82) verschärft werden kann; man weiß aber nicht, welche.

V KAPITEL

LURSMANASCHWILISCHE SÄTZE

§ 1. Hilfssätze

In den §§ 1-3 dieses Kapitels ist die Dimension der Kugel gerade und $\geqslant 8$. Aus technischen Gründen, um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, soll diese Dimension durch $2k$ bezeichnet werden (wobei unsere Annahme $k \geqslant 4$ also immer noch in Kraft bleibt). Es sei stets

$$r \leqslant j \leqslant \frac{k}{2} - 1. \tag{1}$$

Unsere Aufgabe wird sein, Näherungsausdrücke für $P_{2k}(x)$ zu finden, die ein Restglied von der Größenordnung $Bx^{k-j-1}\log x$ besitzen. Für gerade k wird dies in § 2 geleistet, für ungerade k in § 3. Im vorliegenden § 1 wird eine Reihe von Hilfssätzen bewiesen.

Es sei

$$\sigma_q(n) = \sum_{d|n} d^q \tag{2}$$

die Summe der q-ten Potenzen der Teiler von n.

Hilfssatz 1.

$$\sigma_q(n) = Bn^q \log 2n. \tag{3}$$

Beweis. Nach (2) ist, da n/d zugleich mit d alle Teiler von n durchläuft,

$$\sigma_q(n) = \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^q = n^q \sum_{d|n} \frac{1}{d^q} \leqslant n^q \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leqslant n^q \sum_{d \leqslant n} \frac{1}{d},$$

woraus die Behauptung (3) folgt.