

III KAPITEL

Ω-PROBLEME

§ 1. Abschätzungen von $P_k(x)$

In diesem Paragraphen sollen zwei einfache Ω -Abschätzungen von $P_k(x)$ gegeben werden, von denen die erste für alle k gilt, die zweite für $k = 4$.

SATZ 1.

$$(1) \quad P_k(x) = \Omega(x^{k/2-1}).$$

Beweis. Nach der Definition von $P_k(t)$ und (2.1.6) ist

$$\begin{aligned} P_k(n) - P_k(n + \frac{1}{2}) &= A_k(n) - A_k(n + \frac{1}{2}) + V_k(n + \frac{1}{2}) - V_k(n) \\ &= V_k(n + \frac{1}{2}) - V_k(n) \\ &= \frac{2D_k}{k} n^{k/2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{k/2} - 1 \right\} \\ &= \frac{2D_k}{k} n^{k/2} \left(\frac{k}{2} \cdot \frac{1}{2n} + \frac{B}{n^2} \right), \end{aligned}$$

d. h.

$$(2) \quad P_k(n) - P_k\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{D_k}{2} n^{k/2-1} + B n^{k/2-2}.$$

Aus (2) folgt (1); denn die zu (1) gegenteilige Annahme

$$P_k(x) = o(x^{k/2-1})$$

würde die Abschätzung

$$P_k(n) - P_k(n + \frac{1}{2}) = o(n^{k/2-1})$$

ergeben, die zu (2) in Widerspruch steht.

Eine Zusammenstellung der Sätze 2.2.2 und 1 zeigt, daß diese beiden Sätze für kein $k > 4$ bezüglich der Größenordnung in x verschärft werden können. Für jedes $k > 4$ hat $P_k(x)$ die genaue Größenordnung $x^{k/2-1}$. Für

$k = 4$ kann man dagegen die Abschätzung (1) noch etwas verbessern, wie der folgende Satz zeigt.

SATZ 2.

$$(3) \quad P_4(x) = \Omega(x \log \log x).$$

Beweis. Es möge u alle Zahlen der Gestalt

$$(4) \quad u = u_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

durchlaufen. Wegen

$$u = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ist nach der Stirlingschen Formel

$$\log u = n \log n + Bn,$$

d. h. bei wachsendem n

$$(5) \quad \log \log u \sim \log n.$$

Andererseits ist nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1)

$$(6) \quad 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \int_1^n \frac{dy}{2y-1} + B = \frac{1}{2} \log n + B.$$

Aus (1.2.1), (4), (5) und (6) folgt

$$\sigma(u) = \sum_{r|u} r \geq u + \frac{u}{3} + \dots + \frac{u}{2n-1} \sim \frac{u}{2} \log \log u,$$

also

$$(7) \quad \sigma(u) = \Omega(u \log \log u).$$

Aus (7) und (1.2.20) ergibt sich weiter

$$(8) \quad r_4(u) = \Omega(u \log \log u).$$

Wäre nun die Abschätzung (3) nicht richtig, so müßte

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + o(x \log \log x)$$

sein. Daraus folgte

$$r_4(u) = A_4(u) - A_4(u-1) = o(u \log \log u),$$

im Widerspruch zu (8).

Aus den Sätzen 2.2.2 und (1) folgt, wie schon am Ende von § 2.2 gesagt worden ist und hier wiederholt wurde, daß für $k > 4$ die Funktion

$P_k(x)$ die genaue Größenordnung $x^{k/2-1}$ besitzt. Im Falle $k = 4$ besteht aber zwischen den Sätzen 2.8.1 und 2 immer noch eine Lücke, wenn es sich auch nur um eine log-Potenz handelt. Die genaue Größenordnung von $P_k(x)$ ist nicht bekannt.

§ 2. Neue Fragestellungen

Wie wir aus dem vorigen Paragraphen wissen, hat $P_k(x)$ für $k > 4$ die genaue Größenordnung $x^{k/2-1}$, d. h. für die Funktion

$$(1) \quad \varrho_k(t) = \frac{P_k(t)}{t^{k/2-1}}$$

gilt die unverbesserliche Abschätzung

$$(2) \quad \varrho_k(x) = B \quad (k > 4).$$

Wenn dies auch ein endgültiges Ergebnis ist, so heißt das nicht, daß damit die Untersuchung der Funktion $\varrho_k(x)$ als abgeschlossen zu betrachten ist. Man kann hier einige Fragestellungen mit Erfolg behandeln, an die für $k = 4$, und erst recht für die zweite und dritte Dimension, gar nicht zu denken ist. Solchen Aufgaben sind der Rest des vorliegenden Kapitels sowie die folgenden 4 Kapitel gewidmet. Bei den meisten unserer Untersuchungen werden wir k als gerade annehmen müssen und im VI Kapitel werden wir sogar einige Resultate nur für $k \equiv 0 \pmod{8}$ bzw. für $k \equiv 4 \pmod{8}$ oder $k \equiv 2 \pmod{4}$ erhalten.

Bei Untersuchung der Funktion (1) kann t ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganzzahlig angenommen werden, d. h. es genügt die Folge

$$(3) \quad \varrho_k(1), \varrho_k(2), \dots$$

zu betrachten. In der Tat ist nach Definition von $P_k(t)$ und $V_k(t)$, vgl. die analoge Überlegung bei (1.2),

$$(4) \quad P_k(n) - P_k(n+\varepsilon) = V_k(n+\varepsilon) - V_k(n) = \varepsilon D_k n^{k/2-1} + B n^{k/2-2}.$$

Aus (1), (2) und (4) folgt, daß die Differenz $\varrho_k(n) - \varrho_k(n+\varepsilon)$ bei wachsendem n gegen den Grenzwert εD_k strebt. Da es uns aber nur um das Verhalten der Funktion (1) für große t zu tun ist, so können wir uns auf die Untersuchung der Folge (3) beschränken.

Es sollen jetzt vier Sätze über die Folge (3) formuliert werden, bei denen k als eine gerade Zahl ≥ 8 angenommen wird. Diese Sätze werden in den §§ 4-7 bewiesen, nachdem in § 3 einige Vorbereitungen getroffen werden. Dabei bezeichnet $\mathfrak{D}$ eine aus natürlichen Zahlen bestehende arithmetische Reihe, also eine Folge $n_1, n_2, \dots$ mit

$$(5) \quad n_1 < n_2 < \dots; \quad n_{r+1} - n_r = H \quad \text{von } r \text{ unabhängig.}$$

Mit $s_1(m), s_2(m), \dots$ werden geeignete positive Zahlen bezeichnet, die nur von m abhängen dürfen. Es bezeichne ferner $\mathfrak{M}(k)$ die Ableitung der Folge (3), d. h. die Menge ihrer Häufungspunkte. Dabei heißt θ Häufungspunkt einer Folge, wenn es eine gegen θ konvergente Teilfolge gibt. Analog sei $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ die Ableitung der Folge

$$(6) \quad \varrho_k(n_1), \varrho_k(n_2), \dots,$$

wenn $n_1, n_2, \dots$ die arithmetische Reihe $\mathfrak{D}$ durchlaufen.

Es gilt der folgende Satz.

SATZ 1. Jede Menge $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ ist perfekt. Insbesondere ist die Menge $\mathfrak{M}(k)$ perfekt.

Satz 1 schließt noch nicht die Möglichkeit aus, daß $\mathfrak{M}(k)$ ein abgeschlossenes Intervall sein könnte. Dies ist aber, zumindest für große k , nicht der Fall. Es gilt nämlich

SATZ 2. Zu jedem n gibt es ein solches $s_1(n)$, daß für jedes gerade $k > s_1(n)$ die Menge $\mathfrak{M}(k)$ mindestens n komplementäre Intervalle (vielleicht auch unendlich viele) besitzt.

Die beiden folgenden Sätze behandeln die Frage: Wie sind die konvergenten Teilfolgen von (3) beschaffen?

SATZ 3. Die Folge (6) ist divergent, wenn

$$(7) \quad n_1 < n_2 < \dots; \quad n_r = Br$$

ist. Sie ist insbesondere divergent, wenn

$$(8) \quad n_1 < n_2 < \dots; \quad n_{r+1} - n_r = B.$$

SATZ 4. Ist θ ein Punkt von $\mathfrak{M}(k)$ und $f(r)$ eine nicht abnehmende positive Funktion von r , mit $f(1) \geq 1$, $f(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$, so ist

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varrho_k(n_r) = \theta$$

für eine geeignete Folge $n_1, n_2, \dots$ mit

$$(10) \quad 1 = n_1 < n_2 < \dots; \quad n_{r+1} - n_r \leq f(r), \quad \text{d. h.} \quad n_r \leq rf(r).$$

Diese vier Sätze werden, wie gesagt, nur für gerade $k \geq 8$ behauptet und sollen in den §§ 4-7 bewiesen werden. In § 8 wollen wir wieder alle $k \geq 5$ zulassen. Hier werden wir aber nur den folgenden Satz beweisen können:

SATZ 5. Für jedes $k \geq 5$ hat die Folge (3) unendlich viele Häufungspunkte.

A. Walfisz: Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln

§ 3. Hilfssätze

In den §§ 3-7 ist, mit Ausnahme des Beweises von Hilfssatz 1, stets $k \geq 8$ gerade. Ferner sei dort $q > 1$. Die Funktion $C_q(n) = C_q(n; k)$ sei, unter Verwendung der Ramanujanschen Summe (1.1.27), wie folgt definiert:

$$(1) \quad C_q(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ \left(\frac{-1}{q}\right)^{k/2} q^{-k/2} \sum_{m=0}^n C(m, q) & \text{für } q \equiv 1 \pmod{2}, \\ 2^{k/2} q^{-k/2} \sum_{m=0}^n C\left(m - \frac{kq}{8}, q\right) & \text{für } q \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

HILFSSATZ 1. Es gibt ein solches nur von k abhängiges X_k , daß für $n \rightarrow \infty$

$$(2) \quad \varrho_k(n) = D_k \left(\sum_{q=2}^{\infty} C_q(n) + X_k \right) + o(1).$$

Beweis. Bei dem jetzt folgenden Beweise der Formel (13) weiter unten lassen wir die Forderung, daß $k \geq 8$ gerade sei, fallen und betrachten beliebige $k > 4$. Die o -Zeichen seien auf $n \rightarrow \infty$ bezogen. Nach Satz 1.4.1 und (1.1.1) ist

$$(3) \quad A_k(n) = D_k \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} + D_k \sum_{2 \leq q \leq n^{1/2}} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q} \right)^k \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} e\left(-\frac{mh}{q}\right) + o(n^{k/2-1}).$$

Nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1) ist hierin

$$\sum_{m=1}^n m^{k/2-1} = \frac{2}{k} n^{k/2} - \psi(n) n^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \int_0^n \psi(y) y^{k/2-2} dy.$$

Berücksichtigt man (1.3.1) und wendet auf das Integral rechts den zweiten Mittelwertsatz an, so folgt

$$(4) \quad \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} = \frac{2}{k} n^{k/2} + \frac{1}{2} n^{k/2-1} + B n^{k/2-2}.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$(5) \quad P_k(n) = D_k \left\{ \frac{1}{2} n^{k/2-1} + \sum_{2 \leq q \leq n^{1/2}} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q} \right)^k \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} e\left(-\frac{mh}{q}\right) \right\} + o(n^{k/2-1}).$$

In der m -Summe von (5) setzen wir

$$(6) \quad n = aq + b, \quad \text{wo } 0 \leq b < q.$$

Wegen $n > q$ ist $a > 0$. Es folgt

$$(7) \quad \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} e\left(-\frac{mh}{q}\right) = \sum_{m=0}^n \sum_{c=0}^{a-1} \sum_{l=0}^{q-1} (cq+l)^{k/2-1} e\left(-\frac{lh}{q}\right) + \sum_{l=0}^b (aq+l)^{k/2-1} e\left(-\frac{lh}{q}\right).$$

Hierin ist wegen (6)

$$(8) \quad \sum_{l=0}^b (aq+l)^{k/2-1} e\left(-\frac{lh}{q}\right) = n^{k/2-1} \sum_{l=0}^b e\left(-\frac{lh}{q}\right) + B n^{k/2-2} q \sum_{l=0}^b 1 = n^{k/2-1} \sum_{l=0}^b e\left(-\frac{lh}{q}\right) + B n^{k/2-2} q^2.$$

Weiter ist, sofern $1 \leq c \leq a$, $0 \leq l < q$,

$$\begin{aligned} (cq+l)^{k/2-1} &= (cq)^{k/2-1} \left(1 + \frac{l}{cq}\right)^{k/2-1} \\ &= (cq)^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2} - 1\right) l (cq)^{k/2-2} + B l^2 (cq)^{k/2-3} \\ &= (cq)^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2} - 1\right) l (cq)^{k/2-2} + B a^{k/2-3} q^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{c=1}^a (cq+l)^{k/2-1} = \sum_{c=1}^a (cq)^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2} - 1\right) l q^{k/2-2} \sum_{c=1}^a c^{k/2-2} + B a^{k/2-3} q^{k/2-1}.$$

Nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1) ist hierin

$$\sum_{c=1}^a c^{k/2-2} = \frac{a^{k/2-1}}{k/2-1} + B a^{k/2-2},$$

d. h. wegen (6)

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2} - 1\right) l q^{k/2-2} \sum_{c=1}^a c^{k/2-2} &= l q^{k/2-2} a^{k/2-1} + B a^{k/2-2} q^{k/2-1} \\ &= \frac{l}{q} n^{k/2-1} + \frac{l}{q} \{(aq)^{k/2-1} - n^{k/2-1}\} + B (aq)^{k/2-2} q \\ &= \frac{l}{q} n^{k/2-1} + B n^{k/2-2} q. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{c=1}^a \{(cq+l)^{k/2-1} - (cq)^{k/2-1}\} = \frac{l}{q} n^{k/2-1} + Bn^{k/2-2}q.$$

Läßt man hier c über das Intervall $0 \leq c \leq a-1$ statt über das Intervall $1 \leq c \leq a$ laufen, so ist der Fehler nach (6)

$$B\{(aq+l)^{k/2-1} - (aq)^{k/2-1} + l^{k/2-1}\} = Bn^{k/2-2}q.$$

Somit ist für $0 \leq l < q$

$$(9) \quad \sum_{c=0}^{a-1} (cq+l)^{k/2-1} = \sum_{c=0}^{a-1} (cq)^{k/2-1} + \frac{l}{q} n^{k/2-1} + Bn^{k/2-2}q.$$

Wegen $(h, q) = 1, q > 1$ ist ferner

$$(10) \quad \sum_{l \bmod q} e\left(-\frac{lh}{q}\right) = 0.$$

Aus (9) ergibt sich daher

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum_{c=0}^{a-1} \sum_{l=0}^{q-1} (cq+l)^{k/2-1} e\left(-\frac{lh}{q}\right) &= \sum_{l=0}^{q-1} e\left(-\frac{lh}{q}\right) \sum_{c=0}^{a-1} (cq+l)^{k/2-1} \\ &= \frac{n^{k/2-1}}{q} \sum_{l=0}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right) + Bn^{k/2-2}q^2. \end{aligned}$$

Aus (7), (8), (11), (6) und (10) folgt

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum_{m=1}^n m^{k/2-1} e\left(-\frac{mh}{q}\right) &= n^{k/2-1} \sum_{l=0}^n e\left(-\frac{lh}{q}\right) + \frac{n^{k/2-1}}{q} \sum_{l=1}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right) + Bn^{k/2-2}q^2. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt die rechte Seite von (12) in (5) ein, so ergibt das Restglied $Bn^{k/2-2}q^2$ wegen Hilfssatz 1.1.1 einen Fehler

$$\begin{aligned} Bn^{k/2-2} \sum_{q \leq n^{1/2}} q^2 \sum_{h \bmod q} q^{-k/2} &= Bn^{k/2-2} \sum_{q \leq n^{1/2}} q^{3-k/2} \\ &= Bn^{k/2-2} \sum_{q \leq n^{1/2}} q^{1/2} = Bn^{k/2-5/4} = o(n^{k/2-1}). \end{aligned}$$

Somit ist

$$(13) \quad \begin{aligned} P_k(n) &= D_k n^{k/2-1} \left\{ \sum_{2 \leq q \leq n^{1/2}} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k \sum_{l=0}^n e\left(-\frac{lh}{q}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} + \sum_{2 \leq q \leq n^{1/2}} \frac{1}{q} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k \sum_{l=1}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right) \right\} + o(n^{k/2-1}). \end{aligned}$$

Formel (13) gilt, wie gesagt, für beliebige $k > 4$. Von jetzt ab verlangen wir wieder, daß $k \geq 8$ gerade ist.

Nach Hilfssatz 1.1.1 und (10) ist das allgemeine Glied der ersten q -Reihe in (13)

$$B \sum_{h \bmod q} q^{-k/2} q = Bq^{2-k/2} = Bq^{-2},$$

und das allgemeine Glied der zweiten q -Reihe ist

$$B \frac{1}{q} \sum_{h \bmod q} q^{-k/2} q^2 = Bq^{2-k/2} = Bq^{-2}.$$

Läßt man also die q -Reihen in (13) über alle Werte $q \geq 2$ laufen, so sind die dadurch entstehenden unendlichen Reihen absolut konvergent, und es entsteht ein Fehler der erlaubten Größenordnung

$$Bn^{k/2-1} \sum_{q > n^{1/2}} q^{-2} = Bn^{k/2-3/2} = o(n^{k/2-1}).$$

Setzt man also noch zur Abkürzung

$$(14) \quad C_q(n) = \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k \sum_{l=0}^n e\left(-\frac{lh}{q}\right),$$

$$(15) \quad \frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q} \sum'_{h \bmod q} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k \sum_{l=1}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right) = X_k$$

und beachtet die Definition (2.1) von $\varrho_k(t)$, so ergibt sich die zu beweisende Abschätzung (2). Es ist aber noch zweierlei zu zeigen, nämlich:

- 1) daß die durch (14) gegebene Funktion $C_q(n)$ mit der in (1) definierten zusammenfällt;
- 2) daß die Reihe (15) reell ist (der Buchstabe X ist bei uns für reelle Zahlen vorbehalten).

Das Erste wird festgestellt, indem man in (14) für die Gaußschen Summen $S(h, q)$ den Hilfssatz 1.6 anwendet und die Definition (1.1.27) der Ramanujanschen Summe beachtet.

Zu dem Zweiten beachte man, daß sich die linke Seite von (15) nicht ändert, wenn man h durch $-h$ ersetzt, weil zugleich mit h auch $-h$ ein reduziertes Restsystem mod q durchläuft. Nach der Definition (1.1.1) der Gaußschen Summe geht aber, wenn man h durch $-h$ ersetzt, die linke Seite von (15) in die konjugierte komplexe Größe $\bar{X}_k$ über. Also ist $X_k = \bar{X}_k$, X_k reell.

Wir bemerken noch, daß auch die Funktion $C_q(n)$ reell ist. Dies folgt, auf Grund von (1) oder von (14), ebenso, wie wir die Realität von X_k festgestellt haben.

Wir setzen jetzt

$$(16) \quad \sigma_k(n) = \sum_{q=2}^{\infty} C_q(n)$$

und betrachten die Folge

$$(17) \quad \sigma_k(1), \sigma_k(2), \dots$$

Dieser Folge entsprechen die Mengen $\mathfrak{N}(k)$ und $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ genau so, wie die Mengen $\mathfrak{M}(k)$, $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ in bezug auf die Folge (2.3) definiert waren, d. h. $\mathfrak{N}(k)$ ist die Ableitung von (17) und $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ die Ableitung der Folge

$$(18) \quad \sigma_k(n_1), \sigma_k(n_2), \dots,$$

wenn $n_1, n_2, \dots$ die arithmetische Reihe $\mathfrak{D}$ (vgl. (2.5)) durchlaufen.

Aus (2) und (16) ergibt sich sofort die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes:

HILFSSATZ 2. Jede Menge $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ entsteht aus der entsprechenden Menge $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ durch eine Ähnlichkeitstransformation und eine darauf folgende Verschiebung, und zwar besteht $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ genau aus denjenigen Zahlen

$$\theta = 2D_k(\theta' + X_k),$$

für die θ' zu $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ gehört. Insbesondere entsteht auf diese Weise auch $\mathfrak{M}(k)$ aus $\mathfrak{N}(k)$.

Konvergiert ferner für eine wachsende Folge $n_1, n_2, \dots$ der Ausdruck $\sigma_k(n_r)$ gegen θ' , so konvergiert $\sigma_k(n_r)$ gegen θ , und umgekehrt.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 kann man die Beweise der Sätze 2.1-2.4 durchführen, indem man statt der Folge (2.3), ihrer Teilfolgen (2.6) und den Mengen $\mathfrak{M}(k)$, $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ die Folge (17), ihre Teilfolgen (18) und die Mengen $\mathfrak{N}(k)$, $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ betrachtet.

HILFSSATZ 3. Für $(m, q) = d$ ist

$$(19) \quad C(m, q) = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

Beweis. Beide Seiten von (19) sind multiplikativ, d. h. erfüllen die Bedingungen

$$F(q_1 q_2) = F(q_1) F(q_2) \quad \text{für} \quad (q_1, q_2) = 1.$$

Für die rechte Seite folgt es aus der Multiplikativität der Funktionen $\varphi(n)$ und $\mu(n)$. Für die linke Seite wird es, ähnlich wie Hilfssatz 1.1.5, so gezeigt: Hier ist wegen (1.1.27)

$$F(q_1) F(q_2) = \sum'_{h_1 \bmod q_1} \sum'_{h_2 \bmod q_2} e\left(\frac{m(h_1 q_2 + h_2 q_1)}{q_1 q_2}\right).$$

Durchläuft h_1 ein reduziertes Restsystem mod q_1 und h_2 ein ebensolches System mod q_2 , so durchläuft $h = h_1 q_2 + h_2 q_1$ ein reduziertes Restsystem mod $q_1 q_2$. Es ist somit

$$F(q_1) F(q_2) = \sum'_{h \bmod q_1 q_2} e\left(\frac{mh}{q_1 q_2}\right) = F(q_1 q_2).$$

Wegen der Multiplikativität beider Seiten von (19) genügt es, die Behauptung für $q = p^r$ zu beweisen, wobei wir diesmal ausnahmsweise den Wert $p = 2$ zulassen wollen. Es sei $(m, q) = p^a$, wo also $0 \leq a \leq r$. Für $a = r$ ist die Behauptung klar, da dann beide Seiten den Wert $\varphi(p^r)$ haben. Für $a < r$ setze man $m = p^{a_l}$, wo also $(l, p) = 1$. Dann ist die linke Seite von (19), da mit h auch lh ein reduziertes Restsystem mod p^{r-a} durchläuft,

$$\sum'_{h \bmod p^r} e\left(\frac{lh}{p^{r-a}}\right) = p^a \sum'_{h \bmod p^{r-a}} e\left(\frac{lh}{p^{r-a}}\right) = p^a \sum'_{h \bmod p^{r-a}} e\left(\frac{h}{p^{r-a}}\right) = p^a \mu(p^{r-a}),$$

(vgl. z. B. Winogradow [4], Aufgabe 12, a zu Kapitel III), und die rechte Seite hat denselben Wert.

Wir führen jetzt, bis zum Ende von § 7, die folgende Bezeichnung ein: Es sei

$$(20) \quad c_q = \begin{cases} 0 & \text{für } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1 & \text{für } q \equiv 1 \pmod{2}, \\ 2 & \text{für } q \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

HILFSSATZ 4. Für $n > r$ ist

$$(21) \quad C_q(n) - C_q(r) = \pm \frac{a_q^{k/2}}{q^{k/2}} \sum_{m=b}^c C(m, q),$$

wo

$$(22) \quad b = \begin{cases} r+1 - \frac{kq}{8}, & c = n - \frac{kq}{8} & \text{für } q \equiv 0 \pmod{4}, \\ r+1, & c = n & \text{für } q \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis. 1) Es sei $q \equiv 2 \pmod{4}$. Die Behauptung (21) lautet dann wegen (20)

$$C_q(n) = C_q(r).$$

Nach (1) ist dies richtig, da beide Seiten gleich Null sind.

2) Es sei $q \equiv 1 \pmod{2}$. Dann lautet (21), wegen (20) und (22),

$$C_q(n) - C_q(r) = \pm q^{-k/2} \sum_{m=r+1}^n C(m, q),$$

und das ist nach (1) richtig, wobei das Zeichen $\pm$ durch $\left(\frac{-1}{q}\right)^{k/2}$ bestimmt wird.

3) Es sei $q \equiv 0 \pmod{4}$. Dann lautet die Behauptung wegen (1.1.27)

$$\begin{aligned} C_q(n) - C_q(r) &= \pm 2^{k/2} q^{-k/2} \sum_{m=r+1}^{n-kq/8} \sum'_{h \bmod q} e\left(\frac{mh}{q}\right) \\ &= \pm 2^{k/2} q^{-k/2} \sum_{m=r+1}^n \sum'_{h \bmod q} e\left\{\left(m - \frac{kq}{8}\right) \frac{h}{q}\right\}, \end{aligned}$$

und auch das ist nach (1), mit $\pm = +$, richtig.

HILFSSATZ 5. Für $1 < l < p$, $q = lp$ ist

$$(23) \quad |C_q(n) - C_q(r)| \leq \frac{a_l^{k/2}(\log l + 1)}{p^{k/2-1}l^{k/2-1}} + \frac{a_l^{k/2}}{p^{k/2}l^{k/2-2}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > r$; denn für $n = r$ ist die linke Seite von (23) gleich Null und für $n < r$ kann man n und r miteinander vertauschen. Wir dürfen also Hilfssatz 4 anwenden.

Wir setzen in (21)

$$(m, q) = (m, lp) = d', \quad (m, l) = d.$$

Für $p|m$ ist dann $d' = pd$; für $p \nmid m$ ist $d' = d$. Nach Hilfssatz 3 ist also

$$\begin{aligned} \sum_{m=b}^c C(m, q) &= \sum_{m=b}^c \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q}{d'}\right) = \sum_{m=b}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{lp}{d'}\right)} \mu\left(\frac{lp}{d'}\right) \\ &= \sum_{\substack{m=b \\ p|m}}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) + \sum_{\substack{m=b \\ p \nmid m}}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{lp}{d}\right)} \mu\left(\frac{lp}{d}\right) \\ (24) \quad &= \sum_{\substack{m=b \\ p|m}}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) + \sum_{m=b}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{lp}{d}\right)} \mu\left(\frac{lp}{d}\right) - \sum_{\substack{m=b \\ p \nmid m}}^c \frac{\varphi(lp)}{\varphi\left(\frac{lp}{d}\right)} \mu\left(\frac{lp}{d}\right) \\ (25) \quad &= S_1 + S_2 - S_3, \end{aligned}$$

zur Abkürzung. In S_1, S_2, S_3 ist

$$(26) \quad \varphi(lp) = \varphi(p)\varphi(l), \quad \varphi\left(\frac{lp}{d}\right) = \varphi(p)\varphi\left(\frac{l}{d}\right), \quad \mu\left(\frac{lp}{d}\right) = -\mu\left(\frac{l}{d}\right).$$

Somit ist wegen (24), (25)

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 &= \varphi(p) \sum_{\substack{m=b \\ p|m}}^c \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) + \sum_{\substack{m=b \\ p \nmid m}}^c \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) \\ (27) \quad &= p \sum_{\substack{m=b \\ p|m}}^c \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) = pS_4, \end{aligned}$$

zur Abkürzung. Auf beide Glieder der Summe S_4 wenden wir Hilfssatz 3, mit l statt q , an und erhalten wegen (1.1.27)

$$S_4 = \sum_{\substack{m=b \\ p|m}}^c \sum'_{h \bmod l} e\left(\frac{mh}{l}\right).$$

Schreibt man hier pm statt m , so folgt

$$S_4 = \sum'_{h \bmod l} \sum_m e\left(\frac{m ph}{l}\right),$$

wo m eine gewisse Reihe aufeinander folgender Zahlen durchläuft. Da aber mit h auch ph ein reduziertes Restsystem mod l durchläuft, so ist

$$S_4 = \sum'_{h \bmod l} \sum_m e\left(\frac{mh}{l}\right) = \sum_{\substack{0 \leq h < l \\ (h, l) = 1}} \sum_m e\left(\frac{mh}{l}\right).$$

Nach (1.4.35) und (1.4.26), mit l statt q , ist mithin

$$|S_4| \leq \frac{1}{2} \sum_{h < l} \text{Max}\left(\frac{l}{h}, \frac{l}{l-h}\right) \leq l \sum_{h < l} \frac{1}{h},$$

d. h. nach Hilfssatz 1.3.4

$$(28) \quad |S_4| \leq l(\log l + 1).$$

Aus (24)-(26), Hilfssatz 3 und (1.1.27) folgt weiter

$$S_2 = - \sum_{\substack{m=b \\ p \nmid m}}^c \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d}\right)} \mu\left(\frac{l}{d}\right) = - \sum_{m=b}^c \sum'_{h \bmod l} e\left(\frac{mh}{l}\right) = - \sum'_{h \bmod l} \sum_{m=b}^c e\left(\frac{mh}{l}\right).$$

Da hier die m -Summe gleich Null ist, wenn m ein vollständiges Restsystem

$$\text{mod } l$$

durchläuft, ist

$$\left| \sum_{m=b}^c \right| \leq l,$$

also

$$(29) \quad |S_2| \leq l^2.$$

Nach Hilfssatz 4, (24), (25), (27), (28) und (29) ist

$$(30) \quad |C_q(n) - C_q(r)| \leq \frac{a_q^{k/2}}{q^{k/2}} \{pl(\log l + 1) + l^2\}.$$

Nach (20) ist hierin, da p ungerade ist,

$$a_q = a_{lp} = a_l.$$

(30) ist daher die zu beweisende Ungleichung (23).

HILFSSATZ 6.

$$(31) \quad |C_q(n) - C_q(r)| \leq \frac{s_2(k) \log q}{q^{k/2-1}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n > r$. Nach (21), (20) und (1.1.27) ist dann

$$(32) \quad |C_q(n) - C_q(r)| \leq 2^{k/2} q^{-k/2} \sum'_{h \bmod q} \left| \sum_{m=b}^c e\left(-\frac{mh}{q}\right) \right|.$$

Die Summe nach h wird analog behandelt, wie die Summe S_4 beim Beweise des vorigen Hilfssatzes. Es ergibt sich

$$(33) \quad \left| \sum'_{h} \right| \leq q(\log q + 1).$$

Aus (32), (33) folgt die Behauptung (31).

HILFSSATZ 7.

$$(34) \quad \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m^4 (\log m + 1)}{m^3} \leq 0,94.$$

Beweis. Nach (20) und Hilfssatz 1.3.4, mit $b \rightarrow \infty$, ist die linke Seite von (34)

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(2m+1)+1}{(2m+1)^3} + 16 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log 4m+1}{(4m)^3} \\ &\leq \frac{\log 3+1}{27} + \int_1^{\infty} \frac{\log(2y+1)+1}{(2y+1)^3} dy + \frac{\log 4+1}{4} + \frac{\log 8+1}{32} + \frac{\log 12+1}{108} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_3^{\infty} \frac{\log 4y+1}{y^3} dy \\ &= \frac{\log 3+1}{27} + \frac{2\log 3+3}{72} + \frac{\log 4+1}{4} + \frac{\log 8+1}{32} + \frac{\log 12+1}{108} + \frac{2\log 12+3}{144} \\ &= \frac{1}{864} (553 \log 2 + 76 \log 3 + 337) \leq 0,94. \end{aligned}$$

HILFSSATZ 8. Für $p > s_3(k)$ ist

$$(35) \quad \sum_{q=p^2}^{\infty} |C_q(n) - C_q(r)| + \sum_{l=2}^{p-1} |C_{lp}(n) - C_{lp}(r)| \leq \frac{0,95}{p^{k/2-1}}.$$

Beweis. Es sei p zunächst beliebig. Nach Hilfssatz 6 ist

$$\begin{aligned} \sum_{q=p^2}^{\infty} |C_q(n) - C_q(r)| &\leq s_2(k) \sum_{q=p^2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{k/2-1}} \leq s_4(k) \sum_{q=p^2}^{\infty} \frac{1}{q^{k/2-5/4}} \\ (36) \quad &\leq \frac{s_5(k)}{p^{3(k/2-9/4)}} = \frac{s_5(k)}{p^{k-9/2}} \leq \frac{s_5(k)}{p^{1/2}} \cdot \frac{1}{p^{k/2-1}}. \end{aligned}$$

Weiter ist nach (20) und den Hilfssätzen 5.7

$$\begin{aligned} (37) \quad \sum_{l=2}^{p-1} |C_{lp}(n) - C_{lp}(r)| &\leq \frac{1}{p^{k/2-1}} \sum_{l=2}^{p-1} \frac{a_l^{k/2} (\log l + 1)}{l^{k/2-1}} + \frac{1}{p^{k/2}} \sum_{l=2}^{p-1} \frac{a_l^{k/2}}{l^{k/2-2}} \\ &\leq \frac{1}{p^{k/2-1}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m^4 (\log m + 1)}{m^3} + \frac{16}{p^{k/2}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^3} \\ &\leq \left(0,94 + \frac{16}{p} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) \frac{1}{p^{k/2-1}}. \end{aligned}$$

Es sei jetzt $s_5(k)$ so groß gewählt, daß für $p > s_5(k)$

$$\frac{s_5(k)}{p^{1/2}} + \frac{16}{p} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq 0,01$$

ist. Dann folgt die Behauptung (35) aus (36) und (37).

HILFSSATZ 9. Für

$$(38) \quad n \equiv l \pmod{p}, \quad 0 \leq l < p$$

ist

$$(39) \quad C_p(n) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{k/2} \frac{p-l-1}{p^{k/2}}.$$

Beweis. Nach der zweiten Zeile von (1) und (1.1.27) ist

$$C_p(n) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{k/2} p^{-k/2} S,$$

wo

$$S = \sum_{m=0}^n \sum_{h=1}^{p-1} e\left(\frac{mh}{p}\right).$$

Hierbei ist die h -Summe gleich $p-1$ für $p \nmid m$ und gleich -1 für $p \mid m$. Ferner ist bei festem h die m -Summe Null, wenn m ein vollständiges Restsystem mod p durchläuft. Wegen (38) ist daher

$$S = \sum_{m=0}^l \sum_{h=1}^{p-1} e\left(\frac{mh}{p}\right) = p-1 - \sum_{m=1}^l 1 = p-l-1.$$

§ 4. Beweis des Satzes 2.1

Wir schicken zunächst noch einen Hilfssatz voraus.

HILFSSATZ 1. Ein beliebiges H sei vorgegeben. Dann kann man eine Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ mit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots, \varepsilon_r \rightarrow 0$, so finden, daß es zu jedem $\varepsilon = \varepsilon_r$ eine Primzahl $p = p_r$ gibt, für die

$$(1) \quad p > \text{Max}(H, s_3(k), 100),$$

$$(2) \quad \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{p^{k/2-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Beweis. Bekanntlich kann man zu jedem $s > 0$ unendlich viele Paare von Primzahlen p, p' so finden, daß

$$p' < p < p'(1+s)$$

ist (vgl. z. B. Winogradow [4], Aufgabe 9, c zu Kapitel II). Wendet man dies für $s = 2^{2/(k-2)} - 1$ an, so ergibt sich das Vorhandensein einer Folge $p'_1, p'_2, \dots$ und einer Folge $p_1, p_2, \dots$, für die

$$(3) \quad \text{Max}(H, s_3(k), 100) < p'_1 < p'_2 < \dots,$$

$$(4) \quad p'_r < p_r < 2^{2/(k-2)} p'_r \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Bestimmt man jetzt ε_r durch

$$(5) \quad \left(\frac{2}{\varepsilon_r}\right)^{2/(k-2)} = p'_r,$$

so erfüllen die Zahlen $\varepsilon = \varepsilon_r$ und die Primzahlen $p = p_r$ wegen (3)-(5) alle Forderungen des Hilfssatzes.

Wir gehen jetzt zum Beweis des Satzes 2.1 über.

Es sei $\mathfrak{D}$ die arithmetische Reihe $n_1, n_2, \dots$ mit der Differenz H , also

$$(6) \quad n_r = n_1 + (r-1)H, \quad r = 1, 2, \dots$$

ε sei eine Zahl der in Hilfssatz 1 definierten Folge; p eine Primzahl, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt; θ ein Punkt von $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$; j sei so gewählt, daß

$$(7) \quad |\theta - \sigma_k(n_j)| \leq \frac{\varepsilon}{40};$$

$\beta_1, \dots, \beta_d$ seien die von p verschiedenen Primzahlen $< p^2$; m sei eine der Zahlen $1, \dots, d$;

$$(8) \quad d_m = \left\lfloor \frac{\log p^2}{\log \beta_m} \right\rfloor,$$

$$(9) \quad M = \beta_1^{\alpha_1} \dots \beta_d^{\alpha_d}.$$

Nach (8) ist

$$\frac{\log p^2}{\log \beta_m} - 1 < a_m \leq \frac{\log p^2}{\log \beta_m},$$

also

$$\log p^2 - \log \beta_m < a_m \log \beta_m \leq \log p^2,$$

$$(10) \quad \frac{p^2}{\beta_m} < \beta_m^{a_m} \leq p^2.$$

Wegen $\beta_m \neq p$ folgt aus (10)

$$(11) \quad \beta_m^{a_m} < p^2 < \beta_m^{a_m+1}.$$

Aus der Folge (6) greifen wir zwei wachsende Teilfolgen $y_1, y_2, \dots$ und $z_1, z_2, \dots$ so heraus, daß für $a = 1, 2, \dots$

$$(12) \quad y_a \equiv 0 \pmod{p}, \quad z_a \equiv p-1 \pmod{p}, \quad y_a \equiv z_a \equiv n_j \pmod{M}$$

ist. Das ist möglich, denn man setze

$$y_a = n_j + rH, \quad z_a = n_j + r'H$$

und bestimme r, r' so, daß die Kongruenzen (12) gelten. Das gibt die Bedingungen

$$(13) \quad \begin{aligned} n_j + rH &\equiv 0 \pmod{p}, & n_j + r'H &\equiv -1 \pmod{p}, \\ rH &\equiv r'H &\equiv 0 \pmod{M}. \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $(H, p) = 1$. Die erste Kongruenz (13) ist also nach r , die zweite nach r' lösbar. Die dritte Kongruenz ist erfüllt, wenn $r \equiv r' \equiv 0 \pmod{M}$ ist. Wegen (9) ist $(M, p) = 1$. Die Kongruenzen (13) werden also befriedigt, wenn r und r' alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen, die gewissen zwei Restklassen $\pmod{pM}$ angehören. Da dabei r und r' beliebig große Werte annehmen können, so gibt es zwei wachsende Folgen $y_1, y_2, \dots$ und $z_1, z_2, \dots$ der verlangten Art.

Nach (3.14) und (3.10) ist

$$(14) \quad C_q(n) = C_q(n') \quad \text{für} \quad n \equiv n' \pmod{q}.$$

Ist nun $q < p^2$, $p \nmid q$, so ist $q \mid M$. Jedes solche q besteht nämlich aus den Primzahlen $\beta_1, \dots, \beta_d$, die in M aufgehen, und wegen (11) ist

$$\beta^{a_m+1} \mid q.$$

Nach der dritten Kongruenz (12) ist daher

$$y_a \equiv z_a \equiv n_j \pmod{q} \quad \text{für} \quad q < p^2, \quad p \nmid q.$$

In Verbindung mit (14), ergibt dies

$$(15) \quad C_q(y_a) = C_q(z_a) = C_q(n_j) \quad \text{für} \quad q < p^2, \quad p \nmid q; \quad a = 1, 2, \dots$$

Aus (3.16), (7) und (15) folgt für $a = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} |\theta - \sigma_k(y_a)| &\leq |\sigma_k(y_a) - \sigma_k(n_j)| + \frac{\varepsilon}{40} \\ &\leq |C_p(y_a) - C_p(n_j)| + \sum_{l=2}^{p-1} |C_{lp}(y_a) - C_{lp}(n_j)| + \\ &\quad + \sum_{q=p^2}^{\infty} |C_q(y_a) - C_q(n_j)| + \frac{\varepsilon}{40}. \end{aligned}$$

Wegen (1) sind hier die Hilfssätze 3.8, 3.9 anwendbar. Man bekommt daher, unter Berücksichtigung von (2),

$$|\theta - \sigma_k(y_a)| \leq \frac{1}{p^{k/2-1}} + \frac{0,95}{p^{k/2-1}} + \frac{\varepsilon}{40} \leq \left(\frac{1,95}{2} + \frac{1}{40} \right) \varepsilon = \varepsilon,$$

d. h. die erste der beiden Ungleichungen

$$(16) \quad |\theta - \sigma_k(y_a)| \leq \varepsilon, \quad |\theta - \sigma_k(z_a)| \leq \varepsilon \quad (a = 1, 2, \dots).$$

Die zweite Ungleichung wird wörtlich ebenso bewiesen.

Aus (3.16), (15), (1) und Hilfssatz 3.8 folgt für $a, b = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} |\sigma_k(y_a) - \sigma_k(z_b)| &= \left| \sum_{q=2}^{\infty} \{C_q(y_a) - C_q(z_b)\} \right| \\ &\geq |C_p(y_a) - C_p(z_b)| - \sum_{l=2}^{p-1} |C_{lp}(y_a) - C_{lp}(z_b)| - \sum_{q=p^2}^{\infty} |C_q(y_a) - C_q(z_b)| \\ &\geq |C_p(y_a) - C_p(z_b)| - \frac{0,95}{p^{k/2-1}}. \end{aligned}$$

Wegen der beiden ersten Kongruenzen (12), Hilfssatz 3.9, (1) und (2) ist somit

$$(17) \quad |\sigma_k(y_a) - \sigma_k(z_b)| \geq \frac{p-1}{p^{k/2}} - \frac{0,95}{p^{k/2-1}} = \frac{0,05-p^{-1}}{p^{k/2-1}} \geq \frac{0,04}{p^{k/2-1}} \geq 0,01\varepsilon.$$

Es sei jetzt θ' ein Häufungspunkt der Folge $\sigma_k(y_1), \sigma_k(y_2), \dots$ und θ'' ein Häufungspunkt der Folge $\sigma_k(z_1), \sigma_k(z_2), \dots$. Nach (16) und (17) ist dann

$$(18) \quad |\theta - \theta'| \leq \varepsilon, \quad |\theta - \theta''| \leq \varepsilon, \quad |\theta' - \theta''| \geq 0,01\varepsilon.$$

θ' und θ'' sind ihrer Herkunft nach Punkte von $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$. Nach (18) ist mindestens einer dieser Punkte von θ verschieden, z. B. θ' , und es ist

$$(19) \quad 0,005\varepsilon \leq |\theta - \theta'| \leq \varepsilon.$$

Zu jedem Punkt θ von $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ und jeder Zahl $\varepsilon = \varepsilon_r$ der in Hilfssatz 1 definierten Folge gibt es also einen Punkt θ' von $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$, der die Bedingung (19) erfüllt. Wegen $\varepsilon_r \rightarrow 0$ folgt hieraus, daß θ Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ ist, daß also diese Menge in sich dicht ist. Da $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ zudem als abgeleitete Menge abgeschlossen ist (vgl. z. B. Carathéodory [1], 48), so ist also $\mathfrak{N}(k, \mathfrak{D})$ perfekt. Daraus folgt nach Hilfssatz 3.2, daß auch $\mathfrak{M}(k, \mathfrak{D})$ perfekt ist. Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

§ 5. Beweis von Satz 2.3

In diesem Paragraphen bezeichne $\mathfrak{F}$ die in Satz 2.3 genannte Folge (2.7). Auch hier schicken wir einen Hilfssatz voraus.

HILFSSATZ 1. Zu jedem ε gibt es eine nur von ε und $\mathfrak{F}$ abhängige positive Zahl $s(\varepsilon; \mathfrak{F})$, so daß jede Primzahl $p > s(\varepsilon; \mathfrak{F})$ die folgende Eigenschaft besitzt.

Es seien $\beta_1, \dots, \beta_d$ die von p verschiedenen Primzahlen $< p^2$; $a_1, \dots, a_d$ seien durch (4.8), $M = M(p)$ durch (4.9) definiert.

Dann gibt es eine Zahl c und mehr als εp modulo p paarweise inkongruente Zahlen $b_1, \dots, b_j$ (also $j > \varepsilon p$), so daß jedes der j Kongruenzsysteme

$$(1) \quad n_r \equiv c \pmod{M(p)}, \quad n_r \equiv b_h \pmod{p}; \quad h = 1, \dots, j$$

für unendlich viele r erfüllt ist.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Zahl ε und eine wachsende Folge von Primzahlen $p_1, p_2, \dots$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $m > 0$ und jedem a gibt es höchstens $\varepsilon p_m \bmod p_m$ paarweise inkongruente Zahlen $b_1, \dots, b_j$, für welche das Kongruenzsystem

$$(2) \quad n_r \equiv a \pmod{M(p_m)}, \quad n_r \equiv b_h \pmod{p_m}; \quad h = 1, \dots, j$$

für unendlich viele r erfüllt ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$(3) \quad p_{m+1} > p_m^2 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Dann ist $M(p_{m+1})$ durch $p_m M(p_m)$ teilbar, also für ein gewisses ganzes $N = N_m$

$$(4) \quad M(p_{m+1}) = M(p_m) p_m^N H, \quad (H, p_m) = 1.$$

In der Tat gehen in $M(p_m)$ nach (4.9) alle Primzahlen $\beta < p_m^2$, $\beta \neq p_m$ auf, während in $M(p_{m+1})$ alle Primzahlen $\beta < p_{m+1}^2$, $\beta \neq p_{m+1}$ aufgehen. Für jedes $\beta | M(p_m)$ ist daher wegen (3) auch $\beta | M(p_{m+1})$. Jedes solche β geht ferner nach (4.8) und (4.9) in $M(p_{m+1})$ zu mindestens derselben Vielfachheit auf, wie in $M(p_m)$. Also ist $M(p_m)$ ein Teiler von $M(p_{m+1})$. Weiter ist $p_m | M(p_{m+1})$, $p_m \nmid M(p_m)$, so daß, wie behauptet, $p_m M(p_m) | M(p_{m+1})$.

Es sei l_m die Anzahl derjenigen Restklassen $\bmod M(p_m)$, die in der Folge $\mathfrak{F}$ unendlich viele Vertreter besitzen. Wenn eine Restklasse $a \bmod M(p_{m+1})$ in $\mathfrak{F}$ unendlich viele Vertreter hat, so gilt das Gleiche für die Restklasse $a \bmod M(p_m)$ und $a \bmod p_m$. Für die Klasse a gibt es also $\bmod M(p_m)$ genau l_m Möglichkeiten und für jede von diesen Möglichkeiten gibt es nach der über die Kongruenzen (2) gemachten Voraussetzung höchstens εp_m Möglichkeiten $\bmod p_m$. Es gibt also höchstens $\varepsilon l_m p_m$ Restklassen $\bmod M(p_m) p_m$, die in $\mathfrak{F}$ unendlich viele Vertreter besitzen. Jede dieser Restklassen $\bmod M(p_m) p_m$ zerfällt nach (4) in $p_m^{N-1} H$ Restklassen $\bmod M(p_{m+1})$. Daher ist

$$(5) \quad l_{m+1} \leq \varepsilon l_m p_m \cdot p_m^{N-1} H = \varepsilon l_m \frac{M(p_{m+1})}{M(p_m)}.$$

Hieraus folgt für jedes $m > 0$

$$(6) \quad l_m \leq \varepsilon^{m-1} M(p_m).$$

Für $m = 1$ ist nämlich (6) klar, weil $l_1 \leq M(p_1)$ ist, und der Übergang von m zu $m+1$ wird mittels (5) ausgeführt.

Nach (2.7) gibt es ein gewisses t , so daß

$$(7) \quad n_r < tr, \quad r = 1, 2, \dots$$

ist. Wir wählen ein festes m so groß, daß

$$(8) \quad \varepsilon^{m-1} \leq \frac{1}{2t}$$

ist. In denjenigen Restklassen $\bmod M(p_m)$, die in $\mathfrak{F}$ nicht unendlich viele Vertreter haben, mögen zusammen y_m Glieder von $\mathfrak{F}$ liegen. Die Anzahl aller Glieder n_r der Folge $\mathfrak{F}$, die $\leq xM(p_m)$ sind, wo x ganzzahlig angenommen wird, ist wegen (6) und (8) höchstens

$$y_m + x l_m \leq y_m + x \varepsilon^{m-1} M(p_m) \leq y_m + \frac{x}{2t} M(p_m).$$

Wir wählen jetzt x so groß, daß

$$y_m + \frac{x}{2t} M(p_m) < \frac{x}{t} M(p_m) - 1,$$

und setzen

$$R = \left\lfloor \frac{x}{t} M(p_m) \right\rfloor.$$

Dann gibt es also weniger als R Glieder n_r der Folge $\mathfrak{F}$, für die $n_r \leq xM(p_m)$ ist. Daraus folgt

$$n_R > xM(p_m) \geq t \left\lfloor \frac{x}{t} M(p_m) \right\rfloor = tR,$$

so daß die Ungleichung (7) für $r = R$ nicht erfüllt ist.

Wir gehen jetzt zum Beweise des Satzes 2.3 über. Es sei

$$(9) \quad p > \text{Max}\{s_3(k), s(0,995; \mathfrak{F}), 200\},$$

wo $s(0,995; \mathfrak{F})$ der Wert der Funktion $s(\varepsilon; \mathfrak{F})$ von Hilfssatz 1 für $\varepsilon = 0,995$ ist. Weiter sei $M = M(p)$ die in Hilfssatz 1 definierte Zahl. Dann gibt es eine Zahl c und mehr als $0,995p \bmod p$ paarweise inkongruente Zahlen $b_1, \dots, b_j$, so daß jedes der j Kongruenzsysteme (1) für unendlich viele r erfüllt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leq b_h < p$ für

$h = 1, \dots, j$. Wegen $j > 0,995p$ und (9) gibt es unter den Zahlen b_h eine, sagen wir b_1 , für die

$$(10) \quad 0 \leq b_1 < 0,01p,$$

und eine andere, sagen wir b_2 , für die

$$(11) \quad 0,99p \leq b_2 < p$$

ist. Denn erfüllt kein b_h die Bedingung (10), so ist

$$0,01p \leq b_h < p \quad (h = 1, \dots, j),$$

also, wenn wir uns die b_h so numeriert denken, daß $b_1 < b_2 < \dots < b_j$ ist,

$$b_1 \geq 0,01p, \quad b_2 \geq 0,01p+1, \quad \dots, \quad b_j \geq 0,01p+j-1 > 1,005p-1.$$

Nach (9) ist aber $p > 200$, also $1 < 0,005p$. Somit wäre $b_j > p$, gegen unsere Annahme. Also ist die Bedingung (10) für ein gewisses b_1 erfüllt, und ebenso zeigt man, daß sich auch die Bedingung (11) erfüllen läßt.

Nach Hilfssatz 1 gibt es in der Folge $\mathfrak{F}$ zwei Teilfolgen $y_1, y_2, \dots$ und $z_1, z_2, \dots$, so daß für jedes $a > 0$

$$(12) \quad y_a \equiv b_1 \pmod{p}, \quad z_a \equiv b_2 \pmod{p}, \quad y_a \equiv z_a \equiv c \pmod{M}$$

ist. Wegen der dritten Kongruenz (12) ergibt sich, genau wie beim Beweise von (4.15), daß

$$(13) \quad C_q(y_a) = C_q(z_a) = C_q(c) \quad \text{für} \quad q < p^2, \quad p \nmid q; \quad a = 1, 2, \dots$$

Aus (3.16) und (13) folgt für $a > 0$

$$|\sigma_k(y_a) - \sigma_k(z_a)| \geq |C_p(y_a) - C_p(z_a)| - \sum_{i=2}^{p-1} |C_{ip}(y_a) - C_{ip}(z_a)| - \sum_{q=p^2}^{\infty} |C_q(y_a) - C_q(z_a)|.$$

Wegen (9) sind hier die Hilfssätze 3.8, 3.9 anwendbar. Man bekommt dann, unter Berücksichtigung von (12), (10) und (11),

$$|\sigma_k(y_a) - \sigma_k(z_a)| \geq \frac{|b_1 - b_2|}{p^{k/2}} - \frac{0,95}{p^{k/2-1}} \geq \frac{0,98 - 0,95}{p^{k/2-1}} = \frac{0,03}{p^{k/2-1}}.$$

Daraus geht hervor, daß $\sigma_k(n_1), \sigma_k(n_2), \dots$ für alle $n_1, n_2, \dots$ mit (2.7), also auch für alle mit (2.8), divergiert. Nach Hilfssatz 3.2 ist dann auch die Folge $\varrho_k(n_1), \varrho_k(n_2), \dots$ divergent.

§ 6. Beweis von Satz 2.2

Für

$$(1) \quad q < r, \quad q \not\equiv 2, \quad r \not\equiv 2 \pmod{4},$$

ist nach (3.20)

$$(2) \quad \frac{a_q}{q} \neq \frac{a_r}{r}.$$

Wegen (1) und (3.20) ist nämlich $a_q = 1$ oder 2 , $a_r = 1$ oder 2 . Wäre also

$$\frac{a_q}{q} = \frac{a_r}{r},$$

so folgte $a_q = 1$, $a_r = 2$, $r = 2q$, $q \equiv 1 \pmod{2}$, $r \equiv 2 \pmod{4}$, was unmöglich ist.

Aus (1) und (2) ergibt sich, daß man die Zahlen

$$(3) \quad q > 1, \quad q \not\equiv 2 \pmod{4}$$

so in eine Reihe $q_1, q_2, \dots$ ordnen kann, daß

$$(4) \quad \frac{a'_1}{q_1} > \frac{a'_2}{q_2} > \dots,$$

wobei zur Abkürzung

$$(5) \quad a_{q_r} = a'_r$$

gesetzt worden ist.

Nach (3.13) und (3.1) ist

$$(6) \quad \sigma_k(n) = \sum_{r=1}^{\infty} C_{q_r}(n).$$

Die Reihe (6) konvergiert absolut und gleichmäßig in n ; auf Grund von (3.14), (1.1.2), (3.20) und (3.10) ist nämlich

$$(7) \quad |C_q(n)| \leq q \cdot 2^{k/2} q^{-k/2} q \leq \frac{a_q^{k/2}}{q^{k/2-2}}.$$

Wir nehmen jetzt eine beliebige Primzahl p und halten sie fest. Es sei $p = q_j$. Nach (4), (5) und (3.20) ist dann

$$\frac{a'_1}{q_1} > \frac{a'_2}{q_2} > \dots > \frac{a_p}{p} = \frac{1}{p} > \frac{a'_{j+1}}{q_{j+1}} > \dots,$$

also

$$(8) \quad \frac{a'_r}{q_r} \begin{cases} > 1/p & \text{für } r < j, \\ < 1/p & \text{für } r > j. \end{cases}$$

Nach (3.20) ist $a_4/4 = \frac{1}{2} > 1/p$. Nach (8) ist somit $j > 1$.

An dieser Stelle schalten wir einen Hilfssatz ein.

HILFSSATZ 1. Es gibt ein $s_6(p)$ mit folgenden Eigenschaften:

Erstens: Für alle Systeme von Zahlen $b_1, \dots, b_{j-1}$, für die

$$(9) \quad |b_1| \leq q_1^2, \quad \dots, \quad |b_{j-1}| \leq q_{j-1}^2, \quad b_1^2 + \dots + b_{j-1}^2 > 0,$$

ist

$$(10) \quad S_1 = \left| \sum_{r=1}^{j-1} b_r \left\{ \frac{a'_r}{q_r} \right\}^{k/2} \right| > \frac{10}{p^{k/2}}.$$

Zweitens:

$$(11) \quad S_2 = \sum_{r=j+1}^{\infty} q_r^2 \left\{ \frac{a'_r}{q_r} \right\}^{k/2} < \frac{1}{10p^{k/2}}.$$

Beweis. Die Zahlen $b_1, \dots, b_{j-1}$ mögen die Bedingungen (9) erfüllen. Die erste von Null verschiedene dieser Zahlen sei b_m , so daß $|b_m| \geq 1$. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$\frac{a'_{r+1}}{q_{r+1}} : \frac{a'_r}{q_r} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon'_r = \max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \quad (r = 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{r=1}^j q_r^2 = s_7(p).$$

Wegen (4) ist dann $0 < \varepsilon_r < 1$, $0 < \varepsilon'_r < 1$, wie es sich gehört. Wegen $p = q_j$ ist ferner

$$\frac{a'_{j-1}}{q_{j-1}} = \frac{1}{p\varepsilon_{j-1}}.$$

Somit ist, unter Berücksichtigung von (4) und (9),

$$\begin{aligned} S_1 &= \left| \sum_{r=m}^{j-1} b_r \left\{ \frac{a'_r}{q_r} \right\}^{k/2} \right| \geq \left\{ \frac{a'_m}{q_m} \right\}^{k/2} - \sum_{m < r < j} q_r^2 \left\{ \frac{a'_r}{q_r} \right\}^{k/2} \\ &\geq \left\{ \frac{a'_m}{q_m} \right\}^{k/2} - \left\{ \frac{a'_{m+1}}{q_{m+1}} \right\}^{k/2} \sum_{r=1}^j q_r^2 = \left\{ \frac{a'_m}{q_m} \right\}^{k/2} \{1 - \varepsilon_m^{k/2} s_7(p)\} \\ &\geq \left\{ \frac{a'_{j-1}}{q_{j-1}} \right\}^{k/2} \{1 - \varepsilon_m^{k/2} s_7(p)\} = \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{k/2} \frac{1 - \varepsilon_m^{k/2} s_7(p)}{\varepsilon_j^{k/2}} \geq \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{k/2} \frac{1 - \varepsilon_j^{k/2} s_7(p)}{\varepsilon_j^{k/2}}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$S_1 \geq \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{k/2} \left(\frac{1}{\varepsilon_j^{k/2}} - s_7(p) \right).$$

Für $k > s_8(p)$ ist

$$\frac{1}{\varepsilon_j^{k/2}} > 10p + s_7(p).$$

Für diese k ist dann die Ungleichung (10) erfüllt.

Nach (3.20), (5), (8) und Hilfssatz 1.3.4, mit $b \rightarrow \infty$, ist

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{r > j \\ 2 \nmid q_r}} q_r^2 \left\{ \frac{1}{q_r} \right\}^{k/2} + \sum_{\substack{r > j \\ 4 \nmid q_r}} q_r^2 \left\{ \frac{2}{q_r} \right\}^{k/2} \\ &\leq \sum_{q_r > p} q_r^{2-k/2} + 2^{k/2} \sum_{\substack{q_r > 2p \\ 2 \nmid q_r}} q_r^{2-k/2} \leq \sum_{m > p} m^{2-k/2} + 2^{k/2} \sum_{m > p} (2m)^{2-k/2} \\ &= 5 \sum_{m > p} m^{2-k/2} \leq 5 \int_p^{\infty} y^{2-k/2} dy = \frac{5}{k/2-3} p^{3-k/2}. \end{aligned}$$

Für $k > s_9(p)$ ist

$$\frac{5p^3}{k/2-3} < \frac{1}{10}.$$

Für diese k ist dann die Ungleichung (11) erfüllt. Für

$$k > s_8(p) + s_9(p) = s_6(p)$$

sind beide Ungleichungen (10), (11) erfüllt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen, und wir fahren mit dem Beweis von Satz 2.2 fort.

Es sei von jetzt ab $k > s_6(p)$. Nach (3.14) und (3.10) ist

$$(12) \quad C_q(n) = 0 \quad \text{für } n \equiv -1 \pmod{q}.$$

Für diese n kann nämlich die l -Summe in (3.14) über ein vollständiges Restsystem mod q erstreckt werden, ist also für jedes h gleich Null.

Da die rechte Seite von (3.19) eine ganze Zahl ist, darf nach (3.1) und (3.20) gesetzt werden:

$$C_q(n) = \left\{ \frac{a_q}{q} \right\}^{k/2} l_q, \quad l_q = l_q(n).$$

Hieraus folgt nach (5) und (7)

$$(13) \quad C_{q_r}(n) = \left\{ \frac{a'_r}{q_r} \right\}^{k/2} b_r, \quad b_r = b_r(n), \quad |b_r| \leq q_r^2.$$

Nach (4.14) hängt der Wert von $b_r = b_r(n)$ nur von der Restklasse ab, in der n nach dem Modul q_r liegt.

Wir setzen jetzt

$$(14) \quad M = M_j = q_1 q_2 \dots q_{j-1}$$

und teilen die natürlichen Zahlen n in Restklassen mod M ein. Es seien $m_1, \dots, m_d$ diejenigen Restklassen, in denen

$$(15) \quad b_1 = \dots = b_{j-1} = 0$$

ist. Wegen (12)-(14) hat z. B. die Restklasse $n \equiv -1 \pmod{M}$ diese Eigenschaft.

In den Restklassen mit (15) ist nach (13)

$$(16) \quad \sum_{r=1}^{j-1} C_{a_r}(n) = 0.$$

Ist $d < M$, so gibt es Restklassen von n nach dem Modul M , in denen die Bedingung (15) nicht erfüllt ist. Wir wollen diese $M-d$ Restklassen die komplementären Restklassen nennen. In diesen gelten wegen (13) die Bedingungen (9) des Hilfssatzes, was zur Folge hat, daß die Ungleichung (10) erfüllt ist. Wendet man nochmals (13) an, so folgt, daß in den komplementären Restklassen

$$\left| \sum_{r=1}^{j-1} C_{a_r}(n) \right| > \frac{10}{p^{k/2-1}}.$$

In Verbindung mit (6), (11), (13) und Hilfssatz 3.9, ergibt dies

$$|\sigma_k(n)| \geq \left| \sum_{r=1}^{j-1} C_{a_r}(n) \right| - |C_p(n)| - \sum_{r=j+1}^{\infty} C_{a_r}(n) > \frac{10}{p^{k/2-1}} - \frac{1}{p^{k/2-1}} - \frac{1}{10p^{k/2-1}}.$$

In den komplementären Restklassen ist somit

$$(17) \quad |\sigma_k(n)| > \frac{8}{p^{k/2-1}}.$$

Auf Grund von (8) ist $p \nmid q_1, \dots, p \nmid q_{j-1}$. Wegen (14) ist daher $p \nmid M$. Jede der Restklassen m_h ($h = 1, \dots, d$) mod M zerfällt in p Restklassen mod Mp , die wir mit m_{hl} ($l = 0, \dots, p-1$) bezeichnen wollen. Da $p \nmid M$, so durchlaufen bei festem h die Restklassen $m_{h0}, \dots, m_{h,p-1}$ alle Restklassen mod p . Wir können daher die Numerierung dieser Restklassen so gewählt denken, daß

$$(18) \quad n \equiv p-1-l \pmod{p} \quad \text{in} \quad m_{hl} \quad (l = 0, \dots, p-1).$$

Es gehöre n einer festen Restklasse $m_{hl} \pmod{Mp}$ an. In Verbindung mit Hilfssatz 3.9, wo l durch $p-1-l$ zu ersetzen ist, ergibt dann (18)

$$C_p(n) = \left(\frac{-1}{p} \right)^{k/2} \frac{l}{p^{k/2}}.$$

Hieraus folgt, nach (6) und (16),

$$\sigma_k(n) = \left(\frac{-1}{p} \right)^{k/2} \frac{l}{p^{k/2}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} C_{a_r}(n).$$

Wegen (11) und (13) ist somit

$$(19) \quad \left| \sigma_k(n) - \left(\frac{-1}{p} \right)^{k/2} \frac{l}{p^{k/2}} \right| < \frac{1}{10p^{k/2}}.$$

Wir behaupten: In jedem der p abgeschlossenen Intervalle

$$(20) \quad \left(\frac{-1}{p} \right)^{k/2} \frac{l}{p^{k/2}} - \frac{1}{10p^{k/2}} \leq y \leq \left(\frac{-1}{p} \right)^{k/2} \frac{l}{p^{k/2}} + \frac{1}{10p^{k/2}} \quad (l = 0, \dots, p-1)$$

liegt mindestens ein Punkt von $\mathfrak{N}(k)$. Im Rest des offenen Intervalls

$$(21) \quad -\frac{8}{p^{k/2-1}} < y < \frac{8}{p^{k/2-1}}$$

liegt kein Punkt von $\mathfrak{N}(k)$.

Zunächst ist zu sagen, daß die Intervalle (20) nicht übereinander greifen; denn ihre Länge beträgt $\frac{1}{5} p^{-k/2}$, die Entfernung zweier aufeinander folgenden Mittelpunkte aber beträgt $p^{-k/2}$, also das Fünffache. Daß ferner in jedem Intervall (20) ein Punkt von $\mathfrak{N}(k)$ liegt, geht aus der Ungleichung (19) und der in § 4 bewiesenen Perfektheit der Menge $\mathfrak{N}(k)$ hervor.

Das Intervall (21) enthält alle Intervalle (20); in den Intervallen (20) ist nämlich

$$y \geq -\frac{p-1}{p^{k/2}} - \frac{1}{10p^{k/2}} > -\frac{1}{p^{k/2-1}}, \quad y < \frac{1}{p^{k/2-1}}.$$

Gehört n einer der Restklassen $m_1, \dots, m_d \pmod{M}$ an, so liegt $\sigma_k(n)$ wegen (19) in einem der Intervalle (20). Gehört aber n einer der $M-d$ komplementären Restklassen an, so gilt die Ungleichung (17) und $\sigma_k(n)$ gehört nicht dem Intervall (21) an. Damit sind unsere beiden Behauptungen, die die Intervalle (20) und (21) betreffen, bewiesen. Zugleich geht hervor, daß $\mathfrak{N}(k)$ für $k > c_6(p)$ mindestens $p+1$ komplementäre Intervalle besitzt. Nach Hilfssatz 3.2 gilt das Gleiche für die Menge $\mathfrak{N}(k)$.

Zugleich ist Satz 2.2 bewiesen. Man hat nur nötig $s_1(n) = s_6(p)$ zu setzen, wo p die kleinste ungerade Primzahl mit der Eigenschaft $p \geq n$ ist.

§ 7. Beweis von Satz 2.4

Es sei θ' ein Punkt von $\mathfrak{N}(k)$ und $f(r)$ eine nicht abnehmende positive Funktion von r mit $f(1) \geq 1, f(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung gibt es zwei wachsende Folgen $j_1, j_2, \dots$ und $d_1, d_2, \dots$, für die

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_k(j_h) = \theta',$$

$$(2) \quad f(d_h) > (h+1)! \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Wir definieren jetzt durch Induktion eine wachsende Folge $n(1), n(2), \dots$ folgendermaßen: Es sei zunächst

$$(3) \quad n(1) = 1, \quad n(2) = 2, \quad \dots, \quad n(d_1) = d_1.$$

Ist weiter $n(d_h)$ bereits definiert, so sei

$$(4) \quad n(d_h) < n(d_h+1) \leq n(d_h) + (h+1)!, \quad n(d_h+1) \equiv j_{h+1} \pmod{(h+1)!},$$

$$(5) \quad n(d_h+m) = n(d_h+m-1) + (h+1)! \quad \text{für} \quad m = 2, \dots, d_{h+1} - d_h.$$

Es sei nun $r > d_1$. Dann ist $d_h < r \leq d_{h+1}$ für ein gewisses h . Somit ist, nach (4), (5) und (2), wenn $n(r) = n_r$ gesetzt wird,

$$(6) \quad 0 < n_r - n_{r-1} \leq (h+1)! < f(d_h) \leq f(r-1).$$

Nach (3) und (6) ist

$$(7) \quad 0 < n_r - n_{r-1} \leq f(r-1) \quad \text{für} \quad r = 2, 3, \dots$$

Weiter ist nach (4) und (5)

$$n_r \equiv j_{h+1} \pmod{(h+1)!} \quad \text{für} \quad d_h < r \leq d_{h+1}.$$

Wegen (4.14) ist somit

$$(8) \quad C_q(n_r) = C_q(j_{h+1}) \quad \text{für} \quad q \leq h+1, \quad d_h < r \leq d_{h+1}.$$

Aus (3.16), (3.31) und (7) folgt für $d_h < r \leq d_{h+1}$

$$|\sigma_k(n_r) - \sigma_k(j_{h+1})| \leq \sum_{q=h+2}^{\infty} |C_q(n_r) - C_q(j_{h+1})| \leq s_2(k) \sum_{q=h+2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{k/2-1}}.$$

Daher ist, mit Rücksicht auf (1),

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_k(n_r) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_k(j_h) = \theta'.$$

Dabei erfüllt die Folge $n_1, n_2, \dots$ nach (3) und (8) die Bedingungen (2.10). Ist nun ein beliebiger Punkt θ von $\mathfrak{M}(k)$ vorgegeben und wird

$$\theta = 2D_k(\theta' + X_k)$$

gesetzt, so ist nach Hilfssatz 3.2 θ' ein Punkt von $\mathfrak{N}(k)$. Nach demselben Hilfssatz ergibt sich dann aus (9) die Behauptung (2.9) des zu beweisenden Satzes.

§ 8. Beweis von Satz 2.5

Ein $k > 4$ sei vorgegeben. Zu zeigen ist, daß die Folge (2.3) unendlich viele Häufungspunkte besitzt. Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen an, daß die Folge (2.3) nur die endlich vielen Häufungspunkte

$$(1) \quad y_1, y_2, \dots, y_d$$

besitze und wir zeigen, daß dann für jeden der Werte $c = 0, 1, 2, 3$ auch die Folge

$$(2) \quad e_{k+c}(1), e_{k+c}(2), \dots$$

nur endlich viele Häufungspunkte besitzt. Setzt man jetzt $c = 3$ für $k = 5$, $c = 2$ für $k = 6$, $c = 1$ für ungerades $k \geq 7$ und $c = 0$ für gerades $k \geq 8$, so ist $k+c$ gerade und ≥ 8 . Das ergibt dann einen Widerspruch zu Satz 2.1, demzufolge die Menge der Häufungspunkte von (2) perfekt ist. Natürlich könnte man von vornherein die geraden Werte $k \geq 8$ ausschließen, denn für diese ist nach Satz 2.1 überhaupt nichts zu beweisen. Im folgenden sei stets $c = 0, 1, 2$ oder 3.

Wir wollen zunächst zeigen: Man kann ein solches $M > 1$ finden, daß die Folge

$$(3) \quad e_k(j+M), e_k(j+2M), \dots$$

bei beliebigem festen j konvergiert. Für $d = 1$ ist dies nach (1) klar, weil dann jedes $M > 1$ das Gewünschte leistet. Also sei $d > 1$. Wir setzen

$$(4) \quad \min_{1 \leq l < m \leq d} |y_l - y_m| = R.$$

Es sei $q > 1$. Wir setzen ferner

$$(5) \quad C(h, q, n) = \sum_{l=0}^n e\left(-\frac{lh}{q}\right) + \frac{1}{q} \sum_{l=1}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right).$$

Aus (3.13), (2.1) und (5) folgt

$$(6) \quad e_k(n) = \frac{D_k}{2} + D_k \sum_{2 \leq q \leq n^{1/2}} \sum_{\substack{0 < h < q \\ (h, q) = 1}} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k C(h, q, n) + o(1),$$

wobei sich das o -Zeichen auf $n \rightarrow \infty$ bezieht.

Zur Abschätzung der Funktion (5) benutzen wir (1.4.35), wobei dort s durch (1.4.26) gegeben ist, und die aus (1.4.35) durch partielle Summation (Hilfssatz 1.3.3) folgende Abschätzung

$$\sum_{l=1}^{q-1} l e\left(-\frac{lh}{q}\right) = Bqs.$$

Es ergibt sich dann

$$(7) \quad C(h, q, n) = Bs = B \max\left(\frac{q}{h}, \frac{q}{q-h}\right).$$

Aus (7) und Hilfssatz 1.1.1 ergibt sich für $n^{1/2} > x$

$$(8) \quad \begin{aligned} & \sum_{x \leq q \leq n^{1/2}} \sum_{\substack{0 < h < q \\ (h, q) = 1}} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k C(h, q, n) \\ &= B \sum_{q \geq x} q^{-k/2} \sum_{h=1}^{q-1} \max\left(\frac{q}{h}, \frac{q}{q-h}\right) = B \sum_{q \geq x} q^{1-k/2} \sum_{h=1}^q \frac{1}{h} \\ &= B \sum_{q \geq x} q^{1-k/2} \log q = B \sum_{q \geq x} q^{-3/2} \log q = Bx^{-1/2} \log x. \end{aligned}$$

Nach (6) und (8) läßt sich ein $r = r(k) > 3$ so bestimmen, daß für $n > r^2$

$$(9) \quad \left| \varrho_k(n) - \frac{D_k}{2} - D_k \sum_{q=2}^r \sum_{\substack{0 < h < q \\ (h, q) = 1}} \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^k C(h, q, n) \right| < \frac{R}{3}$$

ist. Andererseits ist, wegen (5) und (3.10),

$$C(h, q, n) = C(h, q, n') \quad \text{für} \quad n \equiv n' \pmod{q}.$$

Setzt man daher $M = r!$, so folgt, daß die q -Summe in (9) nur von der Restklasse abhängt, der $n \bmod M$ angehört. Daraus ergibt sich weiter, wegen $M > r^2$, daß für beliebige $m > 0$, $m' > 0$

$$(10) \quad |\varrho_k(j+mM) - \varrho_k(j+m'M)| < \frac{2R}{3}$$

ist. Da die Häufungspunkte der Folge (3) unter den Zahlen (1) zu suchen sind, so folgt aus (4) und (10), daß die Folge (3) konvergiert, was gezeigt werden sollte.

Zweitens wollen wir zeigen: Für jeden unserer Werte von c und beliebiges feste j konvergiert die Folge

$$(11) \quad \varrho_{k+c}(j+M), \quad \varrho_{k+c}(j+2M), \quad \dots$$

Für $c = 0$ ist das soeben bewiesen worden. Es braucht daher nur der Übergang von c zu $c+1$ ausgeführt zu werden, wo c einer der Werte $0, 1, 2$ ist.

Zunächst muß die Abschätzung (2.4.9), wo $z = x^{1/2}$, noch etwas verschärft werden. Zu dem Zwecke wende man auf die Summe links in (2.4.9) nicht, wie in § 2.4, Hilfssatz 1.3.1, sondern den Fall $r = 2$ von Hilfssatz 1.3.2 an. Es folgt dann, wenn $z = x^{1/2}$, $f(y) = (x-y^2)^{k/2}$ gesetzt wird,

$$(12) \quad \sum_{-z \leq m \leq z} (x-m^2)^{k/2} = \int_{-z}^z (x-y^2)^{k/2} dy - \frac{1}{2} \int_{-z}^z \bar{B}_2(y) f^{(2)}(y) dy.$$

Hier ist

$$f^{(2)}(y) = Bx^{k/2-1}.$$

Nach (1.3.5) ist ferner

$$\int \bar{B}_2(y) dy = B,$$

wo links über ein beliebiges Intervall integriert wird. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist demnach

$$(13) \quad \int_{-z}^z \bar{B}_2(y) f^{(2)}(y) dy = Bx^{k/2-1}.$$

Aus (12), (13) und (2.4.7) ergibt sich die gewünschte Verbesserung von (2.4.9), nämlich

$$(14) \quad \sum_{-x^{1/2} \leq m \leq x^{1/2}} (x-m^2)^{k/2} = \frac{x^{1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)} x^{(k+1)/2} + Bx^{k/2-1}.$$

Nach (2.4.1), wo $z = x^{1/2}$, und (14) ist, unter Berücksichtigung der Definition von $A_k(t)$ und $P_k(t)$, sowie von (1.4.2),

$$\begin{aligned} A_{k+1}(x) &= \sum_{|m| < x^{1/2}} A_k(x-m^2) + B \\ &= \frac{2D_k}{k} \sum_{|m| < x^{1/2}} (x-m^2)^{k/2} + \sum_{|m| < x^{1/2}} P_k(x-m^2) + B \\ &= \frac{2D_{k+1}}{k+1} x^{(k+1)/2} + \sum_{|m| < x^{1/2}} P_k(x-m^2) + Bx^{k/2-1}, \\ P_{k+1}(x) &= \sum_{|m| < x^{1/2}} P_k(x-m^2) + Bx^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Nach (2.1) ist somit, wenn k durch $k+c$ ersetzt wird,

$$(15) \quad \varrho_{k+c+1}(x) = x^{-(k+c-1)/2} \sum_{|m| < x^{1/2}} (x-m^2)^{(k+c)/2-1} \varrho_{k+c}(x-m^2) + Bx^{-1/2}.$$

Nach Annahme konvergiert die Folge (11), d. h. es kann gesetzt werden

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{k+c}(j+nM) = f(j).$$

Hierbei hat $f(j)$ die Periode M , kann also auf alle ganzen Zahlen a durch die Forderung

$$(17) \quad f(a) = f(a') \quad \text{für} \quad a \equiv a' \pmod{M}$$

ausgedehnt werden.

Wir haben zu zeigen, daß für jedes feste r die Folge

$$(18) \quad \varrho_{k+c+1}(r+M), \quad \varrho_{k+c+1}(r+2M), \quad \dots$$

konvergiert. In (15) werde jetzt $x = r+nM$ gesetzt. Die o -Zeichen weiter unten seien auf $n \rightarrow \infty$, d. h. auf $x \rightarrow \infty$ bezogen. Es sei zur Abkürzung

$$(19) \quad T(a) = \sum_{\substack{|m| < x^{1/2} \\ m \equiv a \pmod{M}}} (x-m^2)^{(k+c)/2-1}.$$

Aus (16), (17), (19) und (15) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{|m| < x^{1/2}} (x-m^2)^{(k+c)/2-1} \varrho_{k+c}(x-m^2) &= \sum_{a=0}^{M-1} \sum_{\substack{|m| < x^{1/2} \\ m \equiv a \pmod{M}}} (x-m^2)^{(k+c)/2-1} \\ &= \sum_{a=0}^{M-1} f(r-a^2) T(a) + o \sum_{|m| < x^{1/2}} (x-m^2)^{(k+c)/2-1} \\ &= \sum_{a=0}^{M-1} f(r-a^2) T(a) + o(x^{(k+c-1)/2}), \end{aligned}$$

$$(20) \quad \varrho_{k+c+1}(x) = x^{-(k+c-1)/2} \sum_{a=0}^{M-1} f(r-a^2) T(a) + o(1).$$

Zur Abschätzung der Funktion (19) werde die Eulersche Summenformel in der Gestalt von Hilfssatz 1.3.1 benutzt. Es ist, wenn

$$m = a + hM, \quad X = -\frac{x^{1/2} + a}{M}, \quad Y = \frac{x^{1/2} - a}{M}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} T(a) &= \sum_{-x^{1/2} < a+hM \leq x^{1/2}} \{x-(a+hM)^2\}^{(k+c)/2-1} = \sum_{X < h \leq Y} \\ &= \int_X^Y \{x-(a+yM)^2\}^{(k+c)/2-1} dy + \int_X^Y \psi(y) \frac{d}{dy} \{ \}^{(k+c)/2-1} dy = W_1 + W_2, \end{aligned}$$

zur Abkürzung. Hierbei ist nach (2.4.9)

$$W_1 = \frac{1}{M} \int_{-x^{1/2}}^{x^{1/2}} (x-y^2)^{(k+c)/2-1} dy = \frac{s(k, c)}{M} x^{(k+c-1)/2},$$

wo $s(k, c)$ eine nur von k und c abhängige positive Zahl ist, auf deren genauen Wert es nicht ankommt. Ferner ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$W_2 = BMx^{(k+c-3)/2}.$$

Somit ist

$$T(a) = \frac{s(k, c)}{M} x^{(k+c-1)/2} + o(x^{(k+c-1)/2}).$$

Setzt man dies in (20) ein, so folgt

$$\varrho_{k+c+1}(x) = \frac{s(k, c)}{M} \sum_{a=0}^{M-1} f(r-a^2) + o(1),$$

woraus hervorgeht, daß die Folge (18) konvergiert. Damit haben wir durch Induktion die Konvergenz der Folge (11) für jeden der Werte $c = 0, 1, 2, 3$ bewiesen.

Da der Grenzwert der Folge (11), nämlich die Funktion (16), die Periode M besitzt, so ergibt sich, daß die Folge (2) nicht mehr als M Häufungspunkte haben kann, im Widerspruch zu Satz 2.1.