

II KAPITEL

0-PROBLEME

§ 1. Elementare Abschätzung von $P_k(x)$

Bei dem folgenden elementaren Satz mag der Leser, wenn er will, sich überlegen, daß dieser Satz und sein Beweis auch noch für $k = 2$ und 3 gelten.

Satz 1.

$$(1) \quad P_k(x) = Bx^{(k-1)/2}.$$

Beweis. Wir ordnen jedem Gitterpunkt $A = (a_1, \dots, a_k)$ des k -dimensionalen Raumes den k -dimensionalen Würfel $K = K(A)$ vom Volumen 1 zu, der aus allen Punkten $(y_1, \dots, y_k)$ des Raumes besteht, für die

$$a_1 \leq y_1 \leq a_1 + 1, \quad \dots, \quad a_k \leq y_k \leq a_k + 1.$$

Diese Zuordnung zwischen Gitterpunkten A und Würfeln K ist eindeutig, und zwar ist jedes A eine Ecke von K . Wir wollen A die zugeordnete Ecke von K nennen.

Der Durchmesser von K , d. h. die größte Entfernung zweier seiner Punkte, ist $k^{1/2}$.

Im folgenden soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > 2k$ angenommen werden.

$A_k(x)$ ist die Anzahl derjenigen Würfel K , deren zugeordnete Ecke A der Kugel

$$(2) \quad y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq x$$

angehört. Bezeichnet man das aus diesen Würfeln zusammengesetzte Polyeder mit L , so ist $A_k(x)$ das Volumen von L .

Alle Würfel von L , und damit auch L selbst, gehören der Kugel

$$(3) \quad y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq (x^{1/2} + k^{1/2})^2$$

an, da kein Punkt von L weiter als um $k^{1/2}$ von der Oberfläche der Kugel (2) entfernt ist; oder auch, arithmetisch ausgedrückt, weil aus $a_1^2 + \dots + a_k^2 \leq x$, mittels der Cauchyschen Ungleichung folgt, daß

$$(|a_1| + 1)^2 + \dots + (|a_k| + 1)^2 \leq (x^{1/2} + k^{1/2})^2.$$

Andererseits gehört die Kugel

$$(4) \quad y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq (x^{1/2} - k^{1/2})^2$$

dem Polyeder L an, da die zugeordnete Ecke A eines Würfels K , der mit der Kugel (4) einen Punkt gemeinsam hat, der Kugel (2) angehört; oder arithmetisch, weil aus (4) die Ungleichung

$$(|y_1| + 1)^2 + \dots + (|y_k| + 1)^2 \leq x$$

folgt. Bezeichnet daher $V_q(s)$ das Volumen der Kugel $y_1^2 + \dots + y_q^2 \leq s$, so ist

$$(5) \quad V_k\{(x^{1/2} - k^{1/2})^2\} \leq A_k(x) \leq V_k\{(x^{1/2} + k^{1/2})^2\}.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß

$$(6) \quad V_q(s) = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}q + 1)} s^{q/2} = \frac{2D_q}{q} s^{q/2}$$

ist. In der Tat ist dies für $q = 2$ wegen (1.4.2) richtig, und der Übergang $q \rightarrow q+1$ folgt so:

$$\begin{aligned} \Gamma_{q+1}(s) &= \int_{y_1^2 + \dots + y_q^2 + y_{q+1}^2 \leq s} dy_1 \dots dy_q dy_{q+1} = \int_{-s^{1/2}}^{s^{1/2}} dy_{q+1} \int_{y_1^2 + \dots + y_q^2 \leq s - y_{q+1}^2} dy_1 \dots dy_q \\ &= \int_{-s^{1/2}}^{s^{1/2}} V_q(s - y^2) dy = \frac{2D_q}{q} \int_{-s^{1/2}}^{s^{1/2}} (s - y^2)^{q/2} dy \\ &= \frac{4D_q}{q} s^{(q+1)/2} \int_0^1 (1 - y^2)^{q/2} dy = \frac{2\pi^{q/2} s^{(q+1)/2}}{\Gamma(\frac{q}{2} + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{q}{2} + 1)}{2\Gamma(\frac{q+1}{2} + 1)} \\ &= \frac{\pi^{(q+1)/2}}{\Gamma(\frac{q+1}{2} + 1)} s^{(q+1)/2} = \frac{2D_{q+1}}{q+1} s^{(q+1)/2}. \end{aligned}$$

Es folgt jetzt aus (6)

$$V_k\{(x^{1/2} + k^{1/2})^2\} = \frac{2D_k}{k} (x^{1/2} + k^{1/2})^k = \frac{2D_k}{k} x^{k/2} + Bx^{(k-1)/2},$$

$$V_k\{(x^{1/2} - k^{1/2})^2\} = \frac{2D_k}{k} x^{k/2} + Bx^{(k-1)/2}.$$

In Verbindung mit (5), ergibt dies

$$(7) \quad A_k(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} x^{k/2} + Bx^{(k-1)/2},$$

und das ist nur ein anderer Ausdruck für die Behauptung (1) des Satzes.

§ 2. Genauere Abschätzung von $P_k(x)$

HILFSSATZ 1. Es ist

$$(1) \quad S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + Bx,$$

insbesondere

$$(2) \quad S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + Bx \log x.$$

Beweis. Nach (1.2.1), (1.2.23) und (1.3.1) ist

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq x/n} d = \sum_{d \leq x} d = \sum_{d \leq x} d \\ &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq x/n} d = \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \left(\left[\frac{x}{n} \right]^2 + \left[\frac{x}{n} \right] \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \left(\left[\frac{x}{n} \right] - \frac{x}{n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \left(\left[\frac{x}{n} \right] - \frac{x}{n} \right)^2 \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + Bx, \end{aligned}$$

woraus (1) unmittelbar folgt.

(2) ist eine Folge von (1) und der trivialen Abschätzung

$$(3) \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = B \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = B \log x.$$

SATZ 1.

$$(4) \quad P_4(x) = Bx \log x.$$

Beweis. Aus (1.2.24) und (2) folgt

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + Bx \log x,$$

und hieraus ergibt sich sofort die Behauptung (4).

SATZ 2. Für $k > 4$ ist

$$(5) \quad P_k(x) = Bx^{k/2-1}.$$

Beweis. Wir werden zunächst nur $k \geq 4$ voraussetzen.

Sondert man in (1.4.3) das Glied $q = 1$ ab, so folgt, wegen (1.1.1) und (1.1.2),

$$(6) \quad A_k(x) = D_k \sum_{n \leq x} n^{k/2-1} + B \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} q^{-k/2} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q-1} \left| \sum_{n \leq x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) \right| + Bx^{k/4} \log x.$$

Die Anwendung von Hilfssatz 1.3.1 mit $X = 0$, $Y = x$, $f(y) = y^{k/2-1}$ ergibt, wegen (1.3.1),

$$(7) \quad \sum_{n \leq x} n^{k/2-1} = \int_0^x y^{k/2-1} dy + Bx^{k/2-1} = \frac{2}{k} x^{k/2} + Bx^{k/2-1}.$$

In (6) ist nach (1.4.26) und (1.4.36)

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} &= Bx^{k/2-1} \sum_{q \leq x^{1/2}} q^{-k/2} \sum_{h=1}^{q-1} s = Bx^{k/2-1} \sum_{q \leq x^{1/2}} q^{1-k/2} \sum_{h=1}^{q-1} h^{-1} \\ (8) \quad &= Bx^{k/2-1} \sum_{q \leq x^{1/2}} q^{1-k/2} \log q. \end{aligned}$$

Für $k > 4$ ergibt sich aus (8)

$$\sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} = Bx^{k/2-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3/2} \log q = Bx^{k/2-1}.$$

In Verbindung mit (6), (7) und (1.4.2), liefert dies die Behauptung (5).

Für $k = 4$ ergibt (8)

$$\sum_{2 \leq q \leq x^{1/2}} = Bx \sum_{q \leq x^{1/2}} q^{-1} \log q = Bx \log^2 x,$$

und man bekommt nur

$$(9) \quad P_4(x) = Bx \log^2 x.$$

Das ist weniger scharf als (4), ergibt sich aber immerhin durch dasselbe Verfahren wie (5), ohne daß man nötig hat, von der Jacobischen Formel (1.2.20) Gebrauch zu machen.

Die Jacobische Formel (1.2.20) läßt sich aber wesentlich einfacher beweisen, als die Landausche Formel (1.4.3). Es fragt sich daher, ob man nicht umgekehrt, (5) mit Hilfe der Jacobischen Formel beweisen kann,

ohne von der Landauschen Gebrauch zu machen. Es wird sich in § 4 herausstellen, daß dies tatsächlich möglich ist. Dabei wird es sich zeigen, daß man die etwas weniger scharfe Abschätzung

$$(10) \quad P_k(x) = Bx^{k/2-1} \log x$$

ziemlich rasch herleiten kann. Um aber in (10) den Faktor $\log x$ loszuwerden, sind besondere Anstrengungen notwendig. Hier wird ein Satz van der Corputs benutzt (unser Hilfssatz 3.4), der im nächsten Paragraphen gebracht wird.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß

$$(11) \quad P_k(x) = O(x^{k/2-1}),$$

$$(12) \quad P_4(x) = O(x \log \log x)$$

ist (Sätze 3.1.1, 3.1.2).

Wegen (11) ist die Abschätzung (5) endgültig. Wegen (12) läßt sich in (4) jedenfalls der Faktor $\log x$ nicht mehr streichen, so daß die Abschätzung ziemlich scharf ist. Wir werden sehen (§§ 5-8), daß man mit Hilfe der Theorie trigonometrischer Summen, unter großem Müheaufwand, die Abschätzung (4) noch etwas verbessern kann (Sätze 6.1, 8.1).

§ 3. Hilfssätze van der Corputs

In diesem Paragraphen hängt B nicht von k ab, so daß die $|B|$ unterhalb von absoluten Konstanten liegen.

HILFSSATZ 1. Es sei $X < Y$, $F(y)$ im Intervall $X \leq y \leq Y$ reell und differenzierbar, $F'(y)$ dort beständig wachsend oder beständig abnehmend und $|F'(y)| \leq 1/2$. Dann ist

$$(1) \quad W = \sum_{X \leq m \leq Y} e\{F(m)\} - \int_X^Y e\{F(y)\} dy = B.$$

Beweis. Nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1) und Formel (1.3.1) ist

$$(2) \quad W = 2\pi i \int_X^Y \psi(y) e\{F(y)\} F'(y) dy + B.$$

Nun ist bekanntlich (für die hier und bei Hilfssatz 4 benutzten Eigenschaften von $\psi(y)$ vgl. z. B. Titchmarsh [1], § 1.76) für nichtganzes y

$$(3) \quad \psi(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi ny}{n},$$

wobei die Reihe in jedem abgeschlossenen, keine ganze Zahl enthaltenden, Intervall gleichmäßig konvergiert und ihre Partialsummen

$$(4) \quad s_r(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^r \frac{\sin 2\pi ny}{n}$$

auf der Gesamtheit aller y gleichmäßig beschränkt sind (zu den beiden letzten Eigenschaften vgl. auch den Beweis unseres Hilfssatzes 8.4.1). Somit folgt aus (2)

$$(5) \quad W = 2\pi i \lim_{r \rightarrow \infty} W_r + B, \quad \text{wo} \quad W_r = \int_X^Y s_r(y) e\{F(y)\} F'(y) dy.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$\begin{aligned} W_r &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^r \frac{1}{n} \int_X^Y \sin(2\pi ny) e\{F(y)\} F'(y) dy \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^r \frac{1}{n} \int_X^Y 2i \sin(2\pi ny) e\{F(y)\} F'(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^r \frac{1}{n} \left(\int_X^Y \frac{F'(y)}{F'(y)+n} de\{F(y)+ny\} - \int_X^Y \frac{F'(y)}{F'(y)-n} de\{F(y)-ny\} \right). \end{aligned}$$

Wegen $|F'(y)| \leq 1/2$ und da die Funktionen

$$\frac{F'(y)}{F'(y) \pm n} = 1 \mp \frac{n}{F'(y) \pm n}$$

monoton sind, ist nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$W_r = B \sum_{n=1}^r \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}} = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = B.$$

In Verbindung mit (5), ergibt das die Behauptung (1).

HILFSSATZ 2. Es sei $X < Y$, $F(y)$ im Intervall $X \leq y \leq Y$ reell und zweimal differenzierbar. In diesem Intervall sei $F''(y) \geq \varepsilon$, wo ε von y unabhängig ist. Dann ist

$$(6) \quad \int_X^Y e\{F(y)\} dy = B\varepsilon^{-1/2}.$$

Beweis. Da $F'(y)$ beständig zunimmt, zerfällt der Integrationsweg in höchstens zwei Teilstrecken, im Inneren derer $F'(y)$ beständig positiv

oder beständig negativ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf daher angenommen werden, daß $F'(y)$ im Inneren des ganzen Integrationsweges beständig positiv oder beständig negativ ist. Weiter sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y - X > 2\varepsilon^{-1/2}$, da sonst die Behauptung klar ist.

Ist $X \leq y_1 < y_2 \leq Y$ so gibt es ein y_3 mit $y_1 \leq y_3 \leq y_2$, so daß

$$F'(y_2) - F'(y_1) = (y_2 - y_1)F''(y_3).$$

Somit ist

$$(7) \quad F'(y_2) - F'(y_1) \geq (y_2 - y_1)\varepsilon \quad \text{für} \quad X \leq y_1 < y_2 \leq Y.$$

Sei erstens $F'(y)$ für $X < y < Y$ positiv. Aus (7) folgt dann für $X + \varepsilon^{-1/2} \leq y \leq Y$

$$F'(y) \geq F'(X) + (y - X)\varepsilon \geq \varepsilon^{-1/2}\varepsilon = \varepsilon^{1/2}.$$

Daher ist, nach dem zweiten Mittelwertsatz,

$$\int_{X+\varepsilon^{-1/2}}^Y e\{F(y)\} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{X+\varepsilon^{-1/2}}^Y \frac{de\{F(y)\}}{F'(y)} = B\varepsilon^{-1/2},$$

folglich

$$\int_X^Y e\{F(y)\} dy = \int_X^{X+\varepsilon^{-1/2}} + \int_{X+\varepsilon^{-1/2}}^Y = B\varepsilon^{-1/2} + B\varepsilon^{-1/2} = B\varepsilon^{-1/2}.$$

Ist zweitens $F'(y)$ für $X < y < Y$ negativ, so folgt aus (7) für $X \leq y \leq Y - \varepsilon^{-1/2}$

$$-F'(y) \geq -F'(Y) + (Y - y)\varepsilon \geq \varepsilon^{-1/2},$$

und ein gleicher Schluß wie oben liefert die Behauptung.

HILFSSATZ 3. Es sei $X < Y$, $f(y)$ im Intervall $X \leq y \leq Y$ reell und zweimal differenzierbar. In diesem Intervall sei beständig $f''(y) \geq \varepsilon$ oder beständig $f''(y) \leq -\varepsilon$, wo ε von y unabhängig ist. Dann ist

$$(8) \quad \sum_{X \leq m \leq Y} e\{f(m)\} = B(|f'(Y) - f'(X)| + 1)\varepsilon^{-1/2}.$$

Beweis. 1) Es sei beständig $f''(y) \geq \varepsilon$. Weiter sei $X \leq X_1 < Y_1 \leq Y$ und $h - 1/2 \leq f'(y) \leq h + 1/2$ für $X_1 \leq y \leq Y_1$. Nach den Hilfssätzen 1 und 2, angewendet auf $X = X_1$, $Y = Y_1$, $F(y) = f(y) - hy$, ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{X_1 \leq m \leq Y_1} e\{f(m)\} &= \sum_{X_1 \leq m \leq Y_1} e\{f(m) - hm\} \\ &= \int_{X_1}^{Y_1} e\{f(y) - hy\} dy + B = B\varepsilon^{-1/2} + B = B\varepsilon^{-1/2}. \end{aligned}$$

Da man das Intervall $X \leq y \leq Y$ in höchstens $f'(Y) - f'(X) + 2$ Teilintervalle $X_1 \leq y \leq Y_1$ der verlangten Art zerlegen kann, ist (8) bewiesen.

2) Es sei beständig $f''(y) \leq -\varepsilon$, also $-f''(y) \geq \varepsilon$. Wegen

$$\left| \sum_{X \leq m \leq Y} e\{-f(m)\} \right| = \left| \sum_{X \leq m \leq Y} e\{f(m)\} \right|,$$

hat man dann nur nötig, den bereits in 1) bewiesenen Teil des Hilfssatzes mit $-f(y)$ statt $f(y)$ anzuwenden.

HILFSSATZ 4. Es sei $X < Y$, $f(y)$ im Intervall $X \leq y \leq Y$ reell und zweimal differenzierbar. In diesem Intervall sei beständig $f''(y) \geq \varepsilon$ oder beständig $f''(y) \leq -\varepsilon$, wo ε von y unabhängig ist. Dann ist

$$(9) \quad \sum_{X \leq m \leq Y} \psi\{f(m)\} = B|f'(Y) - f'(X)|\varepsilon^{-2/3} + B\varepsilon^{-1/2}.$$

Beweis. Da man die Reihe (3) in endlichen Grenzen gliedweise integrieren kann, so ist

$$\begin{aligned} & t \int_0^{\pm 1/t} \psi(y + \theta) d\theta \\ (10) \quad &= -\frac{t}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\pm 1/t} (e\{n(y + \theta)\} - e\{-n(y + \theta)\}) d\theta = \sum_{a=-\infty}^{\infty} w_a e(ay), \end{aligned}$$

wo

$$w_0 = 0, \quad w_a = -\frac{t}{2\pi i a} \int_0^{\pm 1/t} e(a\theta) d\theta \quad (a \neq 0),$$

d. h.

$$(11) \quad w_0 = 0, \quad |w_a| \leq \text{Min} \left(\frac{1}{|a|}, \frac{t}{a^2} \right) \quad (a \neq 0).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} (12) \quad t \left| \sum_{X \leq m \leq Y} \int_0^{\pm 1/t} \psi\{f(m) + \theta\} d\theta \right| &\leq 2 \sum_{a=1}^{\infty} \left| \sum_{X \leq m \leq Y} e\{af(m)\} \right| \text{Min} \left(\frac{1}{a}, \frac{t}{a^2} \right) \\ &= 2 \sum_{a \leq \varepsilon^{-1}} + 2 \sum_{a > \varepsilon^{-1}} = 2S_1 + 2S_2, \end{aligned}$$

zur Abkürzung. Hierin setzen wir

$$(13) \quad t = 3\varepsilon^{-1/3},$$

so daß insbesondere $t > 3$ ist.

In S_1 ist

$$|af''(y)| \geq a\varepsilon = \varepsilon_1,$$

wo $0 < \varepsilon_1 < 1$. Wir können daher auf die m -Summe in S_1 Hilfssatz 3 mit $af(y)$ statt $f(y)$ und ε_1 statt ε anwenden. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq m \leq Y} e\{af(m)\} &= B a |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon_1^{-1/2} + B \varepsilon_1^{-1/2} \\ &= B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-1/2} a^{1/2} + B \varepsilon^{-1/2} a^{-1/2}, \end{aligned}$$

also

$$S_1 = B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-1/2} \sum_{a < \varepsilon^{-1}} a^{1/2} \text{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{t}{a^2}\right) + B \varepsilon^{-1/2} \sum_{a < \varepsilon^{-1}} a^{-1/2} \text{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{t}{a^2}\right).$$

Hierin ist, wegen (13),

$$\sum_{a < \varepsilon^{-1}} a^{1/2} \text{Min} \leq \sum_{a \leq t} a^{-1/2} + t \sum_{a > t} a^{-3/2} = B t^{1/2} = B \varepsilon^{-1/6},$$

$$\sum_{a < \varepsilon^{-1}} a^{-1/2} \text{Min} \leq \sum_{a=1}^{\infty} a^{-3/2}.$$

Somit ist

$$(14) \quad S_1 = B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-2/3} + B \varepsilon^{-1/2}.$$

Weiter ist, wenn y ein geeigneter Wert zwischen X und Y ist,

$$|f'(Y) - f'(X)| = (Y - X) |f''(y)| \geq (Y - X) \varepsilon,$$

also

$$(15) \quad Y - X \leq |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-1}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\sum_{x \leq m \leq Y} e\{af(m)\} = B \sum_{x \leq m \leq Y} 1 = B(Y - X + 1) = B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-1} + 1.$$

Andererseits ist, wegen (13),

$$\sum_{a > \varepsilon^{-1}} \text{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{t}{a^2}\right) \leq t \sum_{a > \varepsilon^{-1}} a^{-2} = B t \varepsilon = B \varepsilon^{2/3}.$$

Für S_2 hat man daher die triviale Abschätzung

$$(16) \quad S_2 = B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-1/3} + B.$$

Aus (12), (14) und (16) folgt

$$(17) \quad t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_0^{1/t} \psi\{f(m) + \theta\} d\theta = B |f'(Y) - f'(X)| \varepsilon^{-2/3} + B \varepsilon^{-1/2}.$$

Andererseits ist nach (1.3.1)

$$\psi(y_2) - \psi(y_1) = y_2 - y_1 - ([y_2] - [y_1]),$$

also

$$(18) \quad \psi(y_2) - \psi(y_1) \leq y_2 - y_1 \quad \text{für} \quad y_2 \geq y_1.$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_0^{1/t} (\psi\{f(m) + \theta\} - \psi\{f(m)\}) d\theta &\leq t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_0^{1/t} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2t} \sum_{x \leq m \leq Y} 1 \leq \frac{Y - X + 1}{2t}, \end{aligned}$$

$$t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_{-1/t}^0 (\psi\{f(m)\} - \psi\{f(m) + \theta\}) d\theta \leq \frac{Y - X + 1}{2t},$$

und daher

$$\begin{aligned} -\frac{Y - X + 1}{2t} + t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_0^{1/t} \psi\{f(m) + \theta\} d\theta &\leq \sum_{x \leq m \leq Y} \psi\{f(m)\} \\ &\leq \frac{Y - X + 1}{2t} + t \sum_{x \leq m \leq Y} \int_{-1/t}^0 \psi\{f(m) + \theta\} d\theta. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (13), (15) und (17), ergibt sich daraus die Behauptung (9).

§ 4. Zweiter Beweis von Satz 2.2

In diesem Paragraphen soll Satz 2.2 mit Hilfe der Jacobischen Formel (1.2.20) und des van der Corputschen Hilfssatzes 3.4 bewiesen werden, ohne daß von der Landauschen Abschätzung (1.4.3) Gebrauch gemacht wird. Es sei zunächst nur $k \geq 4$. Ferner werde in diesem Paragraphen $z = x^{1/2}$ gesetzt.

Es ist, nach Definition von $A_k(t)$,

$$A_{k+1}(x) = \sum_{0 \leq a_1^2 + \dots + a_k^2 + m^2 \leq x} 1 = \sum_{-x \leq m \leq x} \sum_{0 \leq a_1^2 + \dots + a_k^2 \leq x - m^2} 1,$$

also

$$(1) \quad A_{k+1}(x) = \sum_{-x < m < x} A_k(x - m^2) + B.$$

Dies schreiben wir zunächst für $k = 4$ auf

$$(2) \quad A_5(x) = \sum_{-x < m < x} A_4(x - m^2) + B.$$

Wird zur Abkürzung

$$(3) \quad F(y) = \sum_{n \leq y} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{y}{n}\right)$$

gesetzt, so folgt aus (1.2.23) und (2.1)

$$(4) \quad S(t) = \frac{\pi^2}{12} t^2 - tF(t) + Bt.$$

Aus (1.2.24) (wir erinnern daran daß (1.2.24) in § 1.2 unmittelbar aus der Jacobischen Formel (1.2.20) hergeleitet wurde) und (4) folgt

$$A_4(t) = \frac{\pi^2}{2} t^2 - 8tF(t) + 8tF\left(\frac{t}{4}\right) + 1 + Bt.$$

Wegen

$$\sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2) = Bx \sum_{-x \leq m \leq x} 1 = Bx^3/2$$

ergibt sich hieraus, in Verbindung mit (2),

$$(5) \quad A_5(x) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2)^2 - 8 \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2) F(x - m^2) + 8 \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2) F\left(\frac{x - m^2}{4}\right) + Bx^{3/2}.$$

Nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1) ist

$$(6) \quad \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2)^{k/2} = \int_{-x}^x (x - y^2)^{k/2} dy - k \int_{-x}^x \psi(y) y (x - y^2)^{k/2-1} dy.$$

Hierin ist

$$(7) \quad \int_{-x}^x (x - y^2)^{k/2} dy = 2x^{(k+1)/2} \int_0^1 (1 - y^2)^{k/2} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)} x^{(k+1)/2}$$

und, nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung,

$$(8) \quad k \int_{-x}^x \psi(y) y (x - y^2)^{k/2-1} dy = Bx^{1/2+k/2-1} = Bx^{(k-1)/2}.$$

Aus (6)-(8) folgt

$$(9) \quad \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2)^{k/2} = \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)} x^{(k+1)/2} + Bx^{(k-1)/2}.$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(10) \quad G(x) = \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2) F(x - m^2),$$

$$(11) \quad H(x) = \sum_{-x \leq m \leq x} (x - m^2) F\left(\frac{x - m^2}{4}\right),$$

so folgt aus (5), (9) (mit $k = 4$) und (1.4.2)

$$(12) \quad A_5(x) = \frac{2}{5} D_5 x^{5/2} - 8G(x) + 8H(x) + Bx^{3/2}.$$

Wegen (1.3.1) und (3) ist augenscheinlich

$$(13) \quad F(x) = B \log x.$$

Aus (10) folgt daher

$$(14) \quad \begin{aligned} G(x) &= 2 \sum_{n \leq x} (x - n^2) F(x - n^2) + xF(x) \\ &= 2 \sum_{n \leq x} (x - n^2) F(x - n^2) + Bx \log x. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$(15) \quad \sum_{r=1}^n F(x - r^2) = R_1(n)$$

ein und wenden auf (14) die Abelsche Formel (1.3.7) an. Das ergibt

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \sum_{n \leq x} \{(x - n^2) - (x - (n+1)^2)\} R_1(n) + \\ &\quad + 2R_1([x])(x - [x+1]^2) + Bx \log x. \end{aligned}$$

Aus (13) und (15) folgt

$$R_1(n) = Bn \log x.$$

Mithin wird

$$G(x) = 4 \sum_{n \leq x} n R_1(n) + B \log(x) \sum_{n \leq x} n + Bx^{1/2} \log(x) x^{1/2} + Bx \log x,$$

d. h. umsomehr

$$(16) \quad G(x) = 4 \sum_{n \leq x} n R_1(n) + Bx^{3/2}.$$

Ebenso ergibt sich aus (11), wenn man die Funktion

$$(17) \quad \sum_{r=1}^n F\left(\frac{x - r^2}{4}\right) = R_2(n)$$

eingführt,

$$(18) \quad H(x) = 4 \sum_{n \leq x} n R_2(n) + Bx^{3/2}.$$

Aus (15), (17) und (3) folgt

$$\begin{aligned}
 R_1(n) &= \sum_{r \leq n} \sum_{q \leq x-r^2} \frac{1}{q} \psi\left(\frac{x-r^2}{q}\right) \\
 (19) \quad &= \sum_{q \leq x-1} \frac{1}{q} \sum_{r \leq \min\{n, (x-q)^{1/2}\}} \psi\left(\frac{x-r^2}{q}\right), \\
 R_2(n) &= \sum_{r \leq n} \sum_{q \leq \frac{1}{4}(x-r^2)} \frac{1}{q} \psi\left(\frac{x-r^2}{4q}\right) \\
 (20) \quad &= \sum_{q \leq \frac{1}{4}(x-1)} \frac{1}{q} \sum_{r \leq \min\{n, (x-4q)^{1/2}\}} \psi\left(\frac{x-r^2}{4q}\right).
 \end{aligned}$$

Auf die r -Summe in (19) werde jetzt Hilfssatz 3.4 angewendet, indem dort

$$X = 1, \quad Y = \min\{n, (x-q)^{1/2}\}, \quad f(y) = \frac{x-y^2}{q}$$

gesetzt wird. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 f'(y) &= -\frac{2y}{q}, \quad f''(y) = -\frac{2}{q} = -\varepsilon, \\
 |f'(Y) - f'(X)| &= \frac{2}{q} (Y - X) \leq \frac{2z}{q}.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit für $q > 2$

$$(21) \quad \sum_{r \leq \min\{n, (x-q)^{1/2}\}} \psi\left(\frac{x-r^2}{q}\right) = Bzq^{-1/3} + Bq^{1/2},$$

und diese Abschätzung ist auch für $q = 1$ und $q = 2$ richtig.

Analog bekommt man durch Anwendung von Hilfssatz 3.4 auf die r -Summe in (20)

$$(22) \quad \sum_{r \leq \min\{n, (x-4q)^{1/2}\}} \psi\left(\frac{x-r^2}{4q}\right) = Bzq^{-1/3} + Bq^{1/2}$$

(man kann auch (22) unmittelbar aus (21) herleiten, indem dort q durch $4q$ ersetzt wird).

Aus (19)-(22) folgt

$$R_1(n) = B \sum_{q \leq x} q^{-1} (zq^{-1/3} + q^{1/2}) = Bz, \quad R_2(n) = Bz.$$

(16) und (18) ergeben jetzt

$$G(x) = Bz \sum_{n \leq x} n = Bz^3 = Bx^{3/2}, \quad H(x) = Bx^{3/2}.$$

Setzt man dies in (12) ein, so folgt

$$A_5(x) = \frac{2}{5} D_5 x^{5/2} + Bx^{3/2},$$

d. h. wegen (1.4.2)

$$P_5(x) = Bx^{3/2}.$$

Damit ist die zu beweisende Abschätzung (2.5) für $k = 5$ bestätigt. Aus ihrer Richtigkeit für k folgt aber die für $k+1$; denn, auf Grund von (1), (9) und (1.4.2), ist

$$\begin{aligned}
 A_{k+1}(x) &= \frac{2D_k}{k} \sum_{-z \leq m \leq z} (x-m^2)^{k/2} + Bx^{k/2-1} \sum_{-z \leq m \leq z} 1 \\
 &= \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \cdot \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)} x^{(k+1)/2} + Bx^{(k-1)/2} \\
 &= \frac{2D_{k+1}}{k+1} x^{(k+1)/2} + Bx^{(k-1)/2}.
 \end{aligned}$$

Damit ist (2.5) durch Induktion bewiesen. Der Beweis der schwächeren Abschätzung (2.10) ist sehr viel einfacher. Wegen (2.4) ist nämlich (2.10) für $k = 4$ richtig, und der Übergang $k \rightarrow k+1$ wird wie soeben ausgeführt. Man hat nur nötig, in jedem B -Glieder den Faktor $\log x$ anzubringen.

§ 5. Weylsche Abschätzungen

Im Rest dieses Kapitels ist $k = 4$ und die B -Schranken von k unabhängig. Im nächsten Paragraphen soll die Abschätzung

$$(1) \quad P_4(x) = B \frac{x \log x}{\log \log x},$$

die etwas schärfer als (2.4) ist, bewiesen werden. Das wird erreicht, indem die Abschätzung (2.2) auf entsprechende Weise verschärft wird. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Hilfssätze. In ihnen ist

$$(2) \quad f(y) = \theta_0 y^r + \theta_1 y^{r-1} + \dots + \theta_r, \quad R = 2^{r-1}.$$

HILFSSATZ 1. Es ist, falls $f(y)$ das Polynom (2) bedeutet,

$$(3) \quad \left| \sum_{m=0}^{n-1} e\{f(m)\} \right|^R < 4^R \left(n^{R-1} + n^{R-r} \sum_{h_1, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \{n, |\text{cosec}(\pi \theta r! h_1 \dots h_{r-1})| \} \right).$$

Für $r=1$ ist dabei das Summenzeichen rechts zu streichen und das leere Produkt $h_1 \dots h_{r-1}$ durch 1 zu ersetzen.

Beweis. Wir beweisen die Ungleichung (3) durch Induktion. Dabei werde zur Abkürzung

$$(4) \quad S = \sum_{m=0}^{n-1} e\{f(m)\}$$

gesetzt.

Es sei zunächst $r=1$. Dann ist

$$|S| = \left| \sum_{m=0}^{n-1} e(\theta m + \theta_1) \right| = \left| \sum_{m=0}^{n-1} e(\theta m) \right|.$$

Für alle θ ist demnach $|S| \leq n$, und für nichtganze θ ist

$$|S| = \left| \frac{1-e(\theta n)}{1-e(\theta)} \right| \leq \frac{2}{|1-e(\theta)|} = |\text{cosec} \pi \theta|.$$

Jedenfalls ist also

$$|S| \leq \text{Min}(n, |\text{cosec} \pi \theta|),$$

d. h. die Ungleichung (3) für $r=1$ richtig.

Es sei zweitens $r > 1$ und die Behauptung für $r-1$ schon bewiesen. Hier ist nach (4)

$$|S|^2 = S \bar{S} = \sum_{h, b=0}^{n-1} e\{f(h) - f(b)\}.$$

Statt h werde ein neuer Summationsbuchstabe h_1 durch $h = b + h_1$ eingeführt. Dann laufen b und h_1 durch alle Wertepaare mit

$$0 \leq b \leq n-1, \quad 0 \leq b + h_1 \leq n-1;$$

d. h. h_1 läuft von $-(n-1)$ bis $n-1$, b für jedes dieser h_1

von 0 bis $n-1-h_1$, falls $h_1 \geq 0$,

von $-h_1$ bis $n-1$, falls $h_1 \leq 0$.

Jedenfalls läuft also b bei festem h_1 über $n' = n - |h_1| \leq n$ aufeinander folgende Werte, die dem Intervall $0 \leq b \leq n-1$ angehören. Zugleich wird

$$|S|^2 = \sum_{h_1=-(n-1)}^{n-1} \sum_b e\{f(b+h_1) - f(b)\}.$$

Bei festem h_1 sei hier c der kleinste Wert, den b annimmt (also $c=0$ oder $-h_1$). Dann ist, wenn man b durch $b+c$ ersetzt,

$$(5) \quad |S|^2 = \sum_{h_1=-(n-1)}^{n-1} \sum_{b=0}^{n'-1} e\{g(b)\}, \quad g(b) = f(b+c+h_1) - f(b+c).$$

Hierin ist wegen (2)

$$g(y) = f(y+c+h_1) - f(y+c) = \theta r h_1 y^{r-1} + \theta'_1 y^{r-2} + \dots + \theta'_{r-1}.$$

Nach dem als bewiesen Angenommenen, kann man auf die b -Summe in (5) die Ungleichung (3) mit $r-1$, $\theta r h_1$, n' statt r , θ , n anwenden. Auf der rechten Seite darf man dann wieder n statt n' schreiben, da diese rechte Seite bei wachsendem n nicht abnimmt. Auf diese Weise ergibt sich, wenn noch zur Abkürzung

$$(6) \quad \text{Min} = \text{Min} \{n, |\text{cosec}(\pi \theta r! h_1 \dots h_{r-1})| \}$$

gesetzt wird,

$$(7) \quad |S|^2 < 4 \sum_{h_1=-(n-1)}^{n-1} \left(n^{2^{r-2}-1} + n^{2^{r-2}-r+1} \sum_{h_2, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right)^{1/2^{r-2}}.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\left(\sum_{h=-(n-1)}^{n-1} s_h \right)^{2^{r-2}} \leq (2n-1)^{2^{r-2}-1} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} s_h^{2^{r-2}}.$$

Aus (7) folgt somit

$$\begin{aligned} |S|^{2^{r-1}} &= (|S|^2)^{2^{r-2}} \\ &< 4^{2^{r-2}} (2n)^{2^{r-2}-1} \sum_{h_1=-(n-1)}^{n-1} \left(n^{2^{r-2}-1} + n^{2^{r-2}-r+1} \sum_{h_2, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right) \\ &< 4^{2^{r-2}} (2n)^{2^{r-2}-1} \left(2n \cdot n^{2^{r-2}-1} + n^{2^{r-2}-r+1} \sum_{h_1=-(n-1)}^{n-1} \sum_{h_2, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right). \end{aligned}$$

Da Min wegen (6) eine gerade Funktion von h_1 ist und für $h_1 = 0$ den Wert n hat, ist also

$$|S|^{2^{r-1}} < 4^{2^{r-2}} 2^{2^{r-2}-1} n^{2^{r-2}-1} \left(2n^{2^{r-2}} + n^{2^{r-2}-r+1+1+r-2} + \right. \\ \left. + 2n^{2^{r-2}-r+1} \sum_{h_1, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right) \\ < 4 \cdot 4^{2^{r-2}} 2^{2^{r-2}-1} \left(n^{2^{r-1}-1} + n^{2^{r-1}-r} \sum_{h_1, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right).$$

Wegen

$$4 \cdot 4^{2^{r-2}} 2^{2^{r-2}-1} = 4^{2^{r-2}} 2^{2^{r-2}+1} \leq 4^{2^{r-2}} 2^{2^{r-1}} = 4^{2^{r-2}} 4^{2^{r-2}} = 4^{2^{r-1}}$$

ist somit

$$|S|^{2^{r-1}} < 4^{2^{r-1}} \left(n^{2^{r-1}-1} + n^{2^{r-1}-r} \sum_{h_1, \dots, h_{r-1}=1}^n \text{Min} \right).$$

Wegen (4) und (6) ist dies die zu beweisende Ungleichung (3).

HILFSSATZ 2. Es ist, falls $f(y)$ das Polynom (2) bedeutet,

$$(8) \quad \sum_{m=0}^{n-1} e\{f(m)\} m^a = B n^{1-1/R+a} + B n^{1-r/R+a} \left(\sum_{(h)=1}^n \text{Min}\{n, |\text{cosec}(\pi \theta r! H)|\} \right)^{1/R}.$$

Hierbei ist das Summenzeichen rechts für $r = 1$ zu streichen; $H = h_1 \dots h_{r-1}$; (h) steht zur Abkürzung für $h_1, \dots, h_{r-1}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} e\{f(m)\} \right| < 4 n^{1-1/R} + 4 n^{1-r/R} \left(\sum_{(h)=1}^n \text{Min}\{n, |\text{cosec}(\pi \theta r! H)|\} \right)^{1/R}.$$

Hieraus folgt die Behauptung (8) durch Anwendung des Abelschen Hilfssatzes 1.3.3.

§ 6. Verbesserung der Abschätzung (2.4)

In diesem Paragraphen soll, gestützt auf Hilfssatz 5.2, die Abschätzung (5.1) bewiesen werden. Zuvor bringen wir 4 Hilfssätze, von denen der erste nur für $s = 1$ benutzt wird. Hilfssatz 4 liefert die entsprechende Verschärfung von (2.2).

HILFSSATZ 1. Es sei $R = 2^{r-1}$, $R_1 = R(r+1)$, $0 < s \leq 1$,

$$(1) \quad t \geq 2^{r+3},$$

$$(2) \quad t^{1/(r+2)} \leq M \leq M' \leq 2M \leq 2t^{2/(r+3)}.$$

Dann ist

$$(3) \quad \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right) = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1} \log t.$$

Beweis. Wir setzen

$$(4) \quad n = [M^{(r+2)/(r+1)} t^{-1/(r+1)}], \quad l = \left[\frac{M' - M}{n} \right].$$

Dies ist erlaubt, denn wegen (2) ist

$$M^{(r+2)/(r+1)} t^{-1/(r+1)} \geq t^{1/(r+1)-1/(r+1)} = 1,$$

also $n > 0$, wie es sich gehört. Aus der Definition von R und R_1 ergibt sich

$$\frac{2}{r+3} \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) - \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{R_1} \right) = -\frac{1}{r+3} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \leq 0.$$

In Verbindung mit (1), (2) und (4), ergibt dies

$$M^{1/(r+1)+1/R+1/R_1} t^{-1/(r+1)-1/R_1} = B,$$

$$n = B M^{(r+2)/(r+1)} t^{-1/(r+1)} = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1} M^{1/(r+1)+1/R+1/R_1} t^{-1/(r+1)-1/R_1},$$

$$(5) \quad n = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1}.$$

Für $l \leq 1$ ist (3) erfüllt, denn alsdann gilt nach (4) und (5)

$$\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right) = B (M' - M + 1) = B \left(n \frac{M' - M}{n} + 1 \right) \\ = B n = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1}.$$

Sei also fortan $l \geq 2$. Wegen (4) ist

$$M' - (M + ln - 1) < M' - M - n \left(\frac{M' - M}{n} - 1 \right) + 1 = n + 1 = B n.$$

Wegen (4) und (5) ist somit

$$(6) \quad M + ln \leq M + \frac{M' - M}{n} n = M',$$

$$(7) \quad \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right) - \sum_{m=M}^{M+ln-1} e\left(\frac{t}{m+s}\right) = B n = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1}.$$

a bedeute, falls es nicht eingeschränkt wird, eine beliebige Zahl aus der Reihe $0 \leq a \leq l-1$. Wir setzen

$$(8) \quad X_a = M + s + a n.$$

Dann ist

$$(9) \quad \sum_{m=M}^{M+l-1} e\left(\frac{t}{m+s}\right) = \sum_{a=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a+m}\right).$$

Nunmehr sei für $|y| < X_a$

$$(10) \quad \frac{1}{X_a+y} = \frac{1}{X_a} \{P(y) + y^{r+1}T(y)\},$$

$$(11) \quad P(y) = P_{r,a}(y) = \sum_{c=0}^r (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c,$$

$$(12) \quad T(y) = T_{r,a}(y) = (-1)^{r+1} X_a^{-r-1} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c,$$

$$(13) \quad G(y) = G_{r,a}(y) = e\left\{\frac{t}{X_a} y^{r+1} T(y)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty} w_{r,a,h} y^h = \sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h.$$

Aus (13), (12), (8), (4), (2) und (1) folgt

$$(14) \quad \sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h = e\left\{(-1)^{r+1} t X_a^{-r-2} y^{r+1} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c\right\},$$

$$(15) \quad \frac{n}{X_a} \leq \frac{n}{M} \leq \left(\frac{M}{t}\right)^{1/(r+1)} \leq (t^{2/(r+3)-1})^{1/(r+1)} = t^{-1/(r+3)} \leq \frac{1}{2}.$$

Aus (14), (15), (8) und (4) ergibt sich, mittels des üblichen Majorantenkunstgriffs (vgl. Pólya-Szegő [1], 9)

$$(16) \quad \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \leq \exp(2\pi t X_a^{-r-2} n^{r+1} \cdot 2) \leq \exp(4\pi t M^{-r-2} M^{r+2} t^{-1}) = B.$$

Aus (10) und (13) folgt

$$(17) \quad \sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a+m}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{t}{X_a} P(m)\right\} \sum_{h=0}^{\infty} w_h m^h = \sum_{h=0}^{\infty} w_h \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{t}{X_a} P(m)\right\} m^h.$$

Nach (11) ist

$$f(y) = \frac{t}{X_a} P(y) = (-1)^r t X_a^{-r-1} y^r + \theta_1 y^{r-1} + \dots + \theta_r.$$

Auf die innere Summe in (17) wenden wir jetzt Hilfssatz 5.2 mit diesem $f(y)$ an. Aus (5.2), (5.8), (17) und (16) ergibt sich dann, wenn noch zur Abkürzung

$$(18) \quad Y_a = Y_{r,a} = \frac{\pi t r! H}{X_a^{r+1}}$$

gesetzt wird,

$$(19) \quad \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a+m}\right) \\ &= B \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \left(n^{1-1/R} + n^{1-r/R} \left\{ \sum_{(h)=1}^n \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) \right\}^{1/R} \right) \\ &= B n^{1-1/R} + B n^{1-r/R} \left\{ \sum_{(h)=1}^n \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) \right\}^{1/R}. \end{aligned}$$

Aus (9) und (19) folgt, wenn man die Höldersche Ungleichung ähnlich, wie im Anschluß an (5.7) anwendet,

$$(20) \quad \begin{aligned} & \sum_{m=M}^{M+l-1} e\left(\frac{t}{m+s}\right) \\ &= B l n^{1-1/R} + B n^{1-r/R} \sum_{a=0}^{l-1} \left\{ \sum_{(h)=1}^n \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) \right\}^{1/R} \\ &= B l n^{1-1/R} + B l^{1-1/R} n^{1-r/R} \left\{ \sum_{(h)=1}^n \sum_{a=0}^{l-1} \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) \right\}^{1/R}. \end{aligned}$$

Hier ist nach (4) und (2)

$$(21) \quad l n^{1-1/R} = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1},$$

$$(22) \quad l^{1-1/R} n^{1-r/R} = B M^{1-r/R-(r-1)/R_1} t^{(r-1)/R_1}.$$

Nunmehr soll die geschweifte Klammer auf der rechten Seite von (20) abgeschätzt werden. Für $0 \leq a \leq l-2$ ist, nach (18), (8), (6) und (2),

$$(23) \quad \begin{aligned} Y_a - Y_{a+1} &= \pi t r! H \left(\frac{1}{X_a^{r+1}} - \frac{1}{X_{a+1}^{r+1}} \right) \\ &= \pi t r! H \frac{(X_a + n)^{r+1} - X_a^{r+1}}{X_a^{r+1} X_{a+1}^{r+1}} \geq \pi t r! H \frac{(r+1)n}{X_a^{r+2}} \\ &\geq \frac{\pi t (r+1)! H n}{2^{r+2} M^{r+2}} \geq \frac{t H n}{2 M^{r+2}}. \end{aligned}$$

Es sei J_b ein Intervall der Gestalt

$$\frac{\pi}{2}b < y \leq \frac{\pi}{2}(b+1).$$

Wir betrachten dann die Summe

$$(24) \quad S_b = \sum_{\substack{a=0 \\ Y_a \text{ in } J_b}}^{-1} \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|),$$

welche als nichtleer vorausgesetzt wird. Ist b^* die ganze unter den Zahlen $b/2$, $(b+1)/2$ und a dasjenige a in (24), wofür $|Y_a - \pi b^*|$ am kleinsten wird, so ersetzen wir bei der Abschätzung von S_b nach oben dies Glied durch n . Auf die übrigen Glieder, falls solche vorkommen, wenden wir aber (23) an. So kommt

$$(25) \quad S_b \leq n + \sum_d \text{cosec} \frac{tHnd}{2M^{r+2}},$$

wo nur über diejenigen d zu summieren ist, für die

$$(26) \quad 1 \leq d \leq l, \quad \frac{tHnd}{2M^{r+2}} \leq \frac{\pi}{2}$$

ist. Aus (25), (26), (4) und (2) folgt

$$(27) \quad S_b \leq n + \sum_{d=1}^l \frac{\pi M^{r+2}}{tHnd} = Bn + B \frac{M^{r+2}}{tHn} \log l = Bn + B \frac{M^{r+2}}{tHn} \log t.$$

Nach (8) und (18) ist ferner

$$Y_a \leq \frac{\pi tr!H}{M^{r+1}}.$$

Die Anzahl der von Y_a betroffenen Intervalle J_b ist also

$$= B \frac{tr!H}{M^{r+1}} + B.$$

Daher ergeben (24), (27), (4) und (2)

$$(28) \quad \begin{aligned} \sum_{(h)=1}^n \sum_{a=0}^{l-1} \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) &= B \sum_{(h)=1}^n \left(\frac{tr!H}{M^{r+1}} + 1 \right) \left(n + \frac{M^{r+2}}{tHn} \log t \right) \\ &= B \left(\frac{tr!n^{2r-1}}{M^{r+1}} + n^r + r!n^{r-2}M \log t + \frac{M^{r+2}}{tn} \log t \log^{r-1}(n+1) \right) \\ &= Br! \log^r(t) \left(\frac{tn^{2r-1}}{M^{r+1}} + n^r + n^{r-2}M + \frac{M^{r+2}}{tn} \right). \end{aligned}$$

Hierin ist nach (4) und (2)

$$\frac{tn^{2r-1}}{M^{r+1}} = B M^{r+2} (2r-1)/(r+1) - (r+1) t^{1-(2r-1)/(r+1)} = B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)},$$

$$\begin{aligned} n^r &= B M^{r(r+2)/(r+1)} t^{-r/(r+1)} = B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)} (M t^{-2/(r+3)})^{(r+3)/(r+1)} \\ &= B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)}, \end{aligned}$$

$$n^{r-2}M = B M^{r+2} (r-2)/(r+1) + 1 t^{-(r-2)/(r+1)} = B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)},$$

$$\begin{aligned} \frac{M^{r+2}}{tn} &= B M^{r+2} - (r+2)/(r+1) t^{-1+1/(r+1)} = B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)} (M t^{-2/(r+3)})^{(r+3)/(r+1)} \\ &= B M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)}. \end{aligned}$$

Es ist somit nach (28)

$$\sum_{(h)=1}^n \sum_{a=0}^{l-1} \text{Min}(n, |\text{cosec } Y_a|) = Br! M^{r-3/(r+1)} t^{-1+3/(r+1)} \log^r t.$$

Wegen $r \leq R$ und $(r!)^{1/R} = B$ folgt hieraus

$$\left\{ \sum_{(h)=1}^n \sum_{a=0}^{l-1} \right\}^{1/R} = B M^{r/R-3/R_1} t^{-1/R+3/R_1} \log t,$$

also, wegen (22),

$$(29) \quad l^{1-1/R} n^{1-r/R} \left\{ \sum_{(h)=1}^n \sum_{a=0}^{l-1} \right\}^{1/R} = B M^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1} \log t.$$

Die Behauptung (3) folgt nunmehr aus (7), (20), (21), (29) und (1).

HILFSSATZ 2. Für $R = 2^{r-1}$ ist

$$(30) \quad \sum_{x^{2/(r+4)} < m \leq x^{2/(r+3)}} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = B x^{-1/20Rr} \log^3 x.$$

Beweis. Der Übergang von Hilfssatz 1 zu Hilfssatz 2 vollzieht sich auf ähnliche Weise, wie der von Hilfssatz 3.3 zu Hilfssatz 3.4. Zunächst sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(31) \quad x \geq 2^{r+3},$$

da sonst die Behauptung klar ist. Ferner sei

$$(32) \quad x^{2/(r+4)} < M \leq M' \leq 2M \leq 2x^{2/(r+3)},$$

$$(33) \quad z = \frac{M^{r+2}}{x}.$$

Aus (3.10) und (3.11) folgt für $s \geq 3$

$$(34) \quad s \left| \sum_{m=M}^{M'} \int_0^{1/s} \psi \left(\frac{x}{m} + \theta \right) d\theta \right| \leq 2 \sum_{a \leq s} \left| \sum_{m=M}^{M'} e \left(\frac{ax}{m} \right) \right| \text{Min} \left(\frac{1}{a}, \frac{s}{a^2} \right) \\ = 2 \sum_{a \leq s} + 2 \sum_{a > s} = 2S_1 + 2S_2,$$

zur Abkürzung. In S_1 nehmen wir

$$(35) \quad ax = t.$$

Nach (35) und (31) ist (1) erfüllt. Nach (35) und (33) besagt die Ungleichung $a \leq s$, daß $t^{1/(r+2)} \leq M$ ist. Aus (32) und (35) folgt ferner

$$M \leq x^{2/(r+3)} \leq t^{2/(r+3)}.$$

Es sind also auch die Bedingungen (2) erfüllt. Wir dürfen daher die Abschätzung (3) mit dem t aus (35), $s = 1$, $R_1 = R(r+1)$ anwenden und erhalten

$$(36) \quad \sum_{m=M}^{M'} e \left(\frac{ax}{m} \right) = \sum_{m=M}^{M'} e \left(\frac{ax}{m+1} \right) + B = BM^{1-1/R-1/R_1} t^{1/R_1} \log t.$$

Aus (34), (35), (36), (33) und (32) folgt

$$(37) \quad S_1 = BM^{1-1/R-1/R_1} x^{1/R_1} \sum_{a \leq s} a^{1/R_1} \log(ax) \text{Min} \left(\frac{1}{a}, \frac{s}{a^2} \right) \\ = BM^{1-1/R-1/R_1} x^{1/R_1} \log(x) \sum_{a \leq s} a^{1/R_1} \text{Min} \left(\frac{1}{a}, \frac{s}{a^2} \right) \\ = BM^{1-1/R-1/R_1} x^{1/R_1} \log(x) \left(\sum_{a \leq s} a^{1/R_1-1} + s \sum_{a > s} a^{1/R_1-2} \right) \\ = BM^{1-1/R-1/R_1} x^{1/R_1} \log(x) \left(s^{1/R_1} \sum_{a \leq s} a^{-1} + s \sum_{a > s} a^{1/R_1-2} \right) \\ = BM^{1-1/R-1/R_1} (sx)^{1/R_1} \log x \log s.$$

In S_2 ist wegen (34) und (32) die innere Summe

$$= B(M' - M + 1) = BM.$$

Wegen (33) ist somit

$$(38) \quad S_2 = BMs \sum_{a > s} \frac{1}{a^2} = B \frac{Ms}{s} = BM^{-r-1} sx.$$

Aus (34), (37) und (38) folgt

$$(39) \quad s \sum_{m=M}^{M'} \int_0^{1/s} \psi \left(\frac{x}{m} + \theta \right) d\theta = B(M^{1-1/R-1/R_1} s^{1/R_1} x^{1/R_1} + M^{-r-1} sx) \log x \log s.$$

Andererseits ist nach (3.18)

$$(40) \quad -\frac{M' - M + 1}{2s} + s \sum_{m=M}^{M'} \int_0^{1/s} \psi \left(\frac{x}{m} + \theta \right) d\theta \leq \sum_{m=M}^{M'} \psi \left(\frac{x}{m} \right) \\ \leq \frac{M' - M + 1}{2s} + s \sum_{m=M}^{M'} \int_{-1/s}^0 \psi \left(\frac{x}{m} + \theta \right) d\theta.$$

In Verbindung mit (39) ergibt dies, wegen $M' - M + 1 \leq 2M$,

$$\sum_{m=M}^{M'} \psi \left(\frac{x}{m} \right) = B(M^{1-1/R-1/R_1} s^{1/R_1} x^{1/R_1} + M^{-r-1} sx + Ms^{-1}) \log x \log s.$$

Durch partielle Summation (Hilfssatz 1.3.3) folgt hieraus

$$(41) \quad \sum_{m=M}^{M'} \frac{1}{m} \psi \left(\frac{x}{m} \right) = B(M^{-1/R-1/R_1} s^{1/R_1} x^{1/R_1} + M^{-r-2} sx + s^{-1}) \log x \log s.$$

Das Summationsintervall für m in (30) zerfällt in $\log x$ Teilintervalle der Gestalt $M \leq m \leq M'$, wobei M und M' den Bedingungen (32) genügen. Aus (41) ergibt sich daher, mit $s = 3x^{1/10}$,

$$\sum_{x^{1/(r+4)} < m \leq x^{2/(r+3)}} \frac{1}{m} \psi \left(\frac{x}{m} \right) \\ = B(x^{-2(1/R+1/R_1)/(r+4)+11/10R_1} + x^{-2(r+2)/(r+4)+11/10} + x^{-1/10}) \log^3 x,$$

und hierin ist

$$-\frac{2}{r+4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{11}{10R_1} = \frac{1}{R_1} \left(-\frac{r}{r+4} + \frac{1}{10} \right) \\ \leq \frac{1}{2Rr} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) = -\frac{1}{20Rr}, \\ -\frac{2(r+2)}{r+4} + \frac{11}{10} = -\frac{r}{r+4} + \frac{1}{10} \leq -\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} \leq -\frac{1}{20Rr}.$$

HILFSSATZ 3.

$$(42) \quad \sum_{x^{1/2} < m \leq x} \frac{1}{m} \psi \left(\frac{x}{m} \right) = B.$$

Beweis. Der Kürze wegen setzen wir $z = x^{1/2}$, wie schon in § 4. Nach (1.3.1) ist

$$(43) \quad \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = x \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2} \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} - \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} \left[\frac{x}{m} \right].$$

Hierin ist nach der Eulerschen Summenformel (Hilfssatz 1.3.1)

$$(44) \quad x \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m^2} = x \int_z^x \frac{dy}{y^2} + B = z + B,$$

$$(45) \quad \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} = \int_z^x \frac{dy}{y} + B = \frac{1}{2} \log x + B.$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} \left[\frac{x}{m} \right] &= \sum_{z < m \leq x} \frac{1}{m} \sum_{n \leq x/m} 1 \\ &= \sum_{n < z} \sum_{z < m \leq x/n} \frac{1}{m} = \sum_{n < z} \left(\int_z^{x/n} \frac{dy}{y} + \frac{B}{z} \right) \\ &= \sum_{n < z} \left(\frac{1}{2} \log x - \log n \right) + B \\ &= \frac{1}{2} \log(x) \sum_{n < z} 1 - \sum_{n < z} \log n + B \\ &= \frac{1}{2} \log(x) \sum_{n < z} 1 - \sum_{1 < n \leq z} \log n + B \\ &= \frac{1}{2} [z] \log x - \int_1^z \log y dy + \frac{1}{2} \psi(z) \log x + B \\ &= \frac{1}{2} (z - \frac{1}{2}) \log x - \int_1^z \log y dy + B \\ &= \frac{1}{2} (z - \frac{1}{2}) \log x - \frac{1}{2} z \log x + z + B \\ (46) \quad &= z - \frac{1}{2} \log x + B. \end{aligned}$$

Die Behauptung (42) folgt aus (43)-(46).

HILFSSATZ 4.

$$(47) \quad S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + B \frac{x \log x}{\log \log x}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x so groß, daß

$$(48) \quad X = 4 \left[\frac{1}{2} \log \log x \right] \geq 4.$$

(Man könnte hier einfacher $X = [\log \log x]$ annehmen; für den Beweis von Hilfssatz 8.3 ist es aber wünschenswert, daß X durch 4 teilbar ist.) Dann setzen wir

$$(49) \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x^{2/(X+4)}} + \sum_{x^{2/(X+4)} < n \leq x^{1/2}} + \sum_{x^{1/2} < n \leq x} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Für S_1 ergibt eine triviale Abschätzung, wegen (48) und (1.3.1),

$$(50) \quad S_1 = B \sum_{n \leq x^{2/(X+4)}} \frac{1}{n} = B \frac{\log x}{X} = B \frac{\log x}{\log \log x}.$$

Für $R = 2^{r-1}$, $r \leq X$ wird ferner

$$\begin{aligned} x^{-1/20Rr} &= \exp\left(-\frac{\log x}{20Rr}\right) \leq \exp\left(-\frac{\log x}{20 \cdot 2^{X-1} X}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\log x}{10 \cdot 2^{\log \log x} \log \log x}\right) = \exp\left\{-\frac{(\log x)^{1-\log 2}}{10 \log \log x}\right\} \\ &= \frac{B}{\log^3 x \log \log x}. \end{aligned}$$

Somit ist nach Hilfssatz 2 für $r \leq X$

$$\sigma_r = \sum_{x^{2/(r+4)} < n \leq x^{2/(r+3)}} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{B}{\log \log x} = \frac{B}{X}.$$

Für S_2 ergibt sich daraus

$$(51) \quad S_2 = \sum_{r=1}^X \sigma_r = B.$$

Nach Hilfssatz 3 ist weiter

$$(52) \quad S_3 = B.$$

Aus (49)-(52) ergibt sich

$$(53) \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = B \frac{\log x}{\log \log x}.$$

In Verbindung mit (2.1) liefert dies die Behauptung (47).

SATZ 1.

$$(54) \quad P_4(x) = B \frac{x \log x}{\log \log x}.$$

Beweis. (54) folgt aus (47) genau so, wie (2.4) aus (2.2) folgte.

§ 7. Hilfssätze von L. K. Hua

Im nächsten Paragraphen soll die Abschätzung (6.54) weiter verschärft werden, indem gezeigt wird, daß

$$(1) \quad P_4(x) = Bx \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

Das wird erreicht, indem Hilfssatz 6.4 auf entsprechende Weise verschärft wird. Ein Blick auf den Beweis dieses Hilfssatzes zeigt, daß hierzu nötig ist, die triviale Abschätzung (6.50) zu verbessern. Mit anderen Worten, wir werden für den Beweis von (1) den ganzen Inhalt der §§ 5-6 nötig haben. Weiter wird es aber nötig sein, noch einige Abschätzungen trigonometrischer Summen zu beweisen. Das soll im vorliegenden Paragraphen geschehen.

Wenn im folgenden von einem Intervall die Rede ist, so sind, falls nichts anderes gesagt wird, stets Intervalle gemeint, die links offen und rechts geschlossen sind, also die Gestalt $y_1 < \theta \leq y_2$ haben.

HILFSSATZ 1. Es sei

$$(2) \quad X > 1, \quad Y > 1, \quad Z = XY,$$

$$(3) \quad 1 = a_0 < a_1 < \dots < a_r \leq Y,$$

$$(4) \quad a_n - a_{n-1} > 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq n \leq r,$$

$$(5) \quad 0 \leq w \leq Z,$$

$$(6) \quad -w + (a_n - 1)X < b_n \leq -w + a_n X \quad \text{für} \quad n \leq r,$$

$c_1, \dots, c_r$ seien vorgegebene Zahlen, die nur die Werte 1 und -1 annehmen können.

Dann ist die Anzahl der Zahlensysteme $b_1, \dots, b_r$, für die die Ausdrücke

$$(7) \quad c_1 b_1^h + \dots + c_r b_r^h \quad (1 \leq h \leq r)$$

in gegebenen Intervallen der Längen $\leq Z^{h-1}$ liegen, höchstens gleich

$$(8) \quad (2rY)^{r(r-1)/2}.$$

Beweis. Für $r = 1$ ist der Hilfssatz richtig. Also sei $r > 1$ und der Hilfssatz für $r-1$ schon bewiesen.

Es sei $1 \leq h \leq r$. Es seien $b_1, \dots, b_r$ und $b'_1, \dots, b'_r$ zwei Systeme von Zahlen, die beide den Bedingungen des Hilfssatzes genügen. Dann gelten die Ungleichungen

$$\left| \sum_{n=1}^r c_n b_n^h - \sum_{n=1}^r c_n (b'_n)^h \right| \leq Z^{h-1} \quad (1 \leq h \leq r).$$

In denjenigen Gliedern der Summen links, bei denen $c_n = -1$ ist (falls es solche gibt), sollen b_n und b'_n miteinander vertauscht werden, ohne daß, der Einfachheit wegen, die Bezeichnungsweise geändert wird. Die Ungleichungen nehmen dann die Gestalt an:

$$\left| \sum_{n=1}^r b_n^h - \sum_{n=1}^r (b'_n)^h \right| \leq Z^{h-1} \quad (1 \leq h \leq r).$$

Mit anderen Worten, setzt man zur Abkürzung

$$(9) \quad z_h = \sum_{n=1}^r b_n^h, \quad z'_h = \sum_{n=1}^r (b'_n)^h,$$

so gelten die Ungleichungen

$$(10) \quad |z_h - z'_h| \leq Z^{h-1} \quad (1 \leq h \leq r).$$

Die jetzigen Werte der Zahlen b_n, b'_n brauchen zwar mit den vorgegebenen Werten nicht übereinzustimmen, sie genügen aber immer noch den Ungleichungen (6). Bis auf weiteres sollen, wenn von b_n, b'_n die Rede ist, stets die neuen Werte gemeint sein.

Es bezeichne σ_h die h -te elementarsymmetrische Funktion von $b_1, \dots, b_r$ und σ'_h die h -te elementarsymmetrische Funktion von $b'_1, \dots, b'_r$.

Nach (2), (3), (5), (6) und (9) ist

$$(11) \quad |z_h| \leq \sum_{n=1}^r |b_n|^h \leq rZ^h, \quad |z'_h| \leq rZ^h,$$

$$(12) \quad |\sigma_h| \leq \binom{r}{h} Z^h, \quad |\sigma'_h| \leq \binom{r}{h} Z^h.$$

Es soll jetzt mit Hilfe von (10) gezeigt werden, daß

$$(13) \quad |\sigma_h - \sigma'_h| \leq \frac{3}{4} (2rZ)^{h-1} \quad (2 \leq h \leq r)$$

ist. Wegen

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2), \quad \sigma'_2 = \frac{1}{2}(z_1'^2 - z_2')$$

ist, nach (11) und (10),

$$(14) \quad |\sigma_2 - \sigma'_2| \leq \frac{1}{2} \{ |z_1 - z'_1| (|z_1| + |z'_1|) + |z_2 - z'_2| \} \leq \frac{1}{2} (2r+1)Z \leq \frac{3}{4} (2rZ).$$

Mithin ist (13) für $h = 2$ erfüllt.

Wir nehmen jetzt an, (13) sei für $2 \leq h \leq q-1$ ($< r$) richtig, und wollen die Richtigkeit für $h = q$ beweisen. Es ist dann

$$(15) \quad |\sigma_n - \sigma'_n| \leq (2rZ)^{n-1} \quad (1 \leq n \leq q-1).$$

Für $n = 1$ ist dies nämlich wegen (9) und (10) erfüllt, da $\sigma_1 = z_1$, $\sigma'_1 = z'_1$ ist. Für $2 \leq n \leq q-1$ gilt dies aber reichlich nach der Induktionsannahme (13). Aus (10), (11), (12) und (15) ergibt sich jetzt für $1 \leq n \leq q-1$

$$(16) \quad |\sigma_n z_{q-n} - \sigma'_n z'_{q-n}| = |(c_n - \sigma'_n) z_{q-n} + \sigma'_n (z_{q-n} - z'_{q-n})| \\ \leq |\sigma_n - \sigma'_n| |z_{q-n}| + |\sigma'_n| |z_{q-n} - z'_{q-n}| \\ \leq \left\{ (2r)^{n-1} r + \binom{r}{n} \right\} Z^{q-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n!} \right) (2r)^{n-1} r Z^{q-1}.$$

Andererseits ist nach den Newtonschen Formeln

$$z_q - \sigma_1 z_{q-1} + \sigma_2 z_{q-2} - \dots + (-1)^{q-1} \sigma_{q-1} z_1 + (-1)^q q \sigma_q = 0,$$

$$z'_q - \sigma'_1 z'_{q-1} + \sigma'_2 z'_{q-2} - \dots + (-1)^{q-1} \sigma'_{q-1} z'_1 + (-1)^q q \sigma'_q = 0.$$

In Verbindung mit (10) und (16), ergibt dies

$$|\sigma_q - \sigma'_q| \leq \frac{1}{q} \left\{ |z_q - z'_q| + \sum_{n=1}^{q-1} |\sigma_n z_{q-n} - \sigma'_n z'_{q-n}| \right\} \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{q-1} \left(1 + \frac{1}{n!} \right) (2r)^{n-1} r \right\} Z^{q-1} \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 + 2r + \frac{3}{2} r \sum_{n=2}^{q-1} (2r)^{n-1} \right\} Z^{q-1} \\ = \frac{1}{2} \left\{ 1 + 2r + \frac{3}{2} r \frac{(2r)^{q-1} - 2r}{2r-1} \right\} Z^{q-1} \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ r + \frac{3}{2} r \frac{(2r)^{q-1}}{2r-1} \right\} Z^{q-1}.$$

Da hier $2 \leq q-1 < r$, so ist $q \geq 3$, $r \geq 3$, also

$$r + \frac{3}{2} r \frac{(2r)^{q-1}}{2r-1} \leq r + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} (2r)^{q-1} \leq \frac{3}{2} (2r)^{q-1}.$$

Mithin ist

$$|\sigma_q - \sigma'_q| \leq \frac{3}{4} (2rZ)^{q-1},$$

also (13) für $h = q$ richtig.

Für $|W| \leq Z$ ist

$$(17) \quad |(W - b_1) \dots (W - b_r) - (W - b'_1) \dots (W - b'_r)| \\ = \left| \sum_{h=1}^r (-1)^h (\sigma_h - \sigma'_h) W^{r-h} \right| \leq \sum_{h=1}^r |\sigma_h - \sigma'_h| Z^{r-h}.$$

Hierin verwenden wir für $h = 1$ und $h = 2$ die aus (10) und (14) folgenden Ungleichungen

$$|\sigma_1 - \sigma'_1| = |z_1 - z'_1| \leq 1, \quad |\sigma_2 - \sigma'_2| \leq \frac{1}{2} (2r+1)Z.$$

Für $3 \leq h \leq r$ benutzen wir (13). Wegen

$$\frac{3}{4} \cdot 2r - \frac{1}{2} (2r+1) = \frac{r-1}{2}$$

folgt dann

$$(18) \quad \sum_{h=1}^r |\sigma_h - \sigma'_h| Z^{r-h} \leq \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{h=2}^r (2r)^{h-1} - \frac{r-1}{2} \right) Z^{r-1} \\ = \left(1 + \frac{3r}{2(2r-1)} \{ (2r)^{r-1} - 1 \} - \frac{r-1}{2} \right) Z^{r-1} \\ \leq \left(1 + \{ (2r)^{r-1} - 1 \} - \frac{1}{2} \right) Z^{r-1} = (2rZ)^{r-1} - \frac{1}{2} Z^{r-1}.$$

Da $|b_r| \leq Z$, was schon bei (12) benutzt wurde, so darf in (17) $W = b$ gesetzt werden. Es ergibt sich dann wegen (18)

$$|(b'_r - b_1) \dots (b'_r - b_{r-1}) (b'_r - b_r)| \leq (2rZ)^{r-1} - \frac{1}{2} Z^{r-1}.$$

Andererseits folgt aus den Ungleichungen (6) für die b_n und b'_n , wegen (4),

$$|b'_r - b_1| \geq X, \dots, |b'_r - b_{r-1}| \geq X.$$

Somit ist

$$X^{r-1} |b'_r - b_r| \leq (2rZ)^{r-1} - \frac{1}{2} Z^{r-1}.$$

Dividiert man beiderseits durch X^{r-1} , so folgt wegen (2) und (3)

$$(19) \quad |b'_r - b_r| \leq (2rY)^{r-1} - \frac{1}{2} Y \leq (2rY)^{r-1} - 1.$$

Wir kehren jetzt von den neuen Werten für die b_n , b'_n zu den alten vorgegebenen zurück. Dann gilt die Ungleichung (19) immer noch, da die neuen Werte für b_r , b'_r entweder mit den alten übereinstimmen, oder aus ihnen durch Vertauschung hervorgehen. Aus der Ungleichung (19) ergibt sich, daß b_r nicht mehr als $(2rY)^{r-1}$ Werte annehmen kann.

Bei festem b_r liegen die Zahlen

$$c_1 b_1^h + \dots + c_{r-1} b_{r-1}^h \quad (1 \leq h \leq r-1)$$

in gegebenen Intervallen der Längen $\leq Z^{h-1}$. Da der Hilfssatz für $r-1$ als bewiesen angenommen wird, so ist nach (8), mit $r-1$ statt r , die Anzahl der Zahlensysteme $b_1, \dots, b_{r-1}$ höchstens

$$\{2(r-1)Y\}^{(r-1)(r-2)/2}.$$

Die Anzahl der Zahlensysteme $b_1, \dots, b_{r-1}, b_r$, welche den Bedingungen des Hilfssatzes genügen, ist daher

$$\leq (2rY)^{r-1} \{2(r-1)Y\}^{(r-1)(r-2)/2} \leq (2rY)^{r(r-1)/2},$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 2. Es sei $r > 1$, $c > r$, $Y > 1$. Ein Zahlensystem $a_1, \dots, a_c$ mit $1 \leq a_1 \leq Y, \dots, 1 \leq a_c \leq Y$ heiße regulär in bezug auf Y , wenn man unter den Zahlen $a_1, \dots, a_c$ solche r Zahlen $a'_1, \dots, a'_r$ finden kann, daß, falls $a'_0 = 1$ gesetzt wird,

$$(20) \quad a'_n - a'_{n-1} > 1 \quad (1 \leq n \leq r).$$

Behauptet wird, daß die Anzahl der nichtregulären Systeme $a_1, \dots, a_c$ höchstens gleich

$$(21) \quad c! 3^c Y^{r-1}$$

ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen: wird dem System $a_1, \dots, a_c$ noch die weitere Bedingung

$$(22) \quad 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_c$$

auferlegt, so ist die Anzahl der nicht regulären solchen Systeme höchstens $3^c Y^{r-1}$. Denn aus jedem System $a_1, \dots, a_c$, das der zusätzlichen Bedingung (22) genügt, entstehen durch Umformung nicht mehr als $c!$ Systeme der allgemeinen Art.

Es sei also die Bedingung (22) erfüllt. Wir setzen $a_0 = 1$,

$$a_n - a_{n-1} = m_n \quad (1 \leq n \leq c).$$

Ist ein System nicht regulär, so gibt es bei ihm höchstens $r-1$ Zahlen $m_n > 1$. Solche Systeme teilen wir in r Klassen ein, wobei zu der h -ten Klasse diejenigen gerechnet werden, bei denen es genau h Zahlen $m_n > 1$ gibt ($0 \leq h \leq r-1$).

Unter den Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_c$ können h Zahlen auf $\binom{c}{h}$ Arten untergebracht werden. Wir teilen daher jede der h Klassen in $\binom{c}{h}$ Teil-

klassen, wobei in einer Teilklasse diejenigen Zahlensysteme untergebracht werden, bei denen die h Werte n mit $m_n > 1$ an fester Stelle stehen, etwa die Werte $n = n_1, n_2, \dots, n_h$ annehmen.

Nach Voraussetzung ist $a_0 = 1$. Ist ferner $n \neq n_j$, so kann a_n bei festem a_{n-1} nicht mehr als 2 Werte annehmen, da hier

$$a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n-1} + 1$$

ist. Ist aber $n = n_j$, so kann a_n bei festem a_{n-1} nicht mehr als Y Werte annehmen, da hier

$$a_{n-1} + 2 \leq a_n \leq Y.$$

In einer zu der h -ten Klasse gehörigen Teilklasse liegen daher höchstens $2^{c-h} Y^h$ Zahlensysteme. Die h -te Klasse enthält somit höchstens

$$\binom{c}{h} 2^{c-h} Y^h$$

Systeme. Die Gesamtzahl der nichtregulären Systeme, die der Bedingung (22) genügen, ist somit höchstens

$$\sum_{h=0}^{r-1} \binom{c}{h} 2^{c-h} Y^h \leq Y^{r-1} \sum_{h=0}^c \binom{c}{h} 2^{c-h} = (1+2)^c Y^{r-1} = 3^c Y^{r-1},$$

was zu beweisen war.

Im Rest dieses Paragraphen sei

$$(23) \quad f(z) = y_r z^r + \dots + y_1 z,$$

$$(24) \quad C_r(t) = \sum_{n \leq t} e\{f(n)\}.$$

HILFSSATZ 3. Es sei $r > 3$,

$$(25) \quad c = [\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2)],$$

$$(26) \quad r \leq a \leq r^3,$$

$$(27) \quad Z_1 \geq (a-1)^{r(a-1/r)^{1-a}},$$

$$(28) \quad Z_j = Z_1^{(1-1/r)^{j-1}} \quad (1 \leq j \leq a),$$

$$(29) \quad 0 < w_j \leq Z_j \quad (1 \leq j \leq a),$$

$$(30) \quad -w_j < l_{jq}, \quad m_{jq} \leq Z_j - w_j \quad (1 \leq j \leq a, \quad 1 \leq q \leq c),$$

$\sigma(w) = \sigma(w_1, \dots, w_a)$ sei die Lösungszahl des Systems diophantischer Gleichungen

$$(31) \quad \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c l_{jq}^h = \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c m_{jq}^h \quad (1 \leq h \leq r),$$

wo die l_{j_a} und m_{j_a} den angegebenen Bedingungen genügen. Schließlich sei

$$(32) \quad \sigma = \text{Max } \sigma(w),$$

wenn die Zahlen $w_1, \dots, w_a$ die Intervalle (29) durchlaufen.

Behauptet wird, daß

$$(33) \quad \int_0^1 |C_r(Z_1)|^{2ac} dy_1 \dots dy_r \leq (3Z_1)^{2ac} (Z_1 \dots Z_a)^{-2c} \sigma.$$

Beweis. Wir teilen das Summationsintervall $0 < n \leq Z_1$ der Summe $C_r(Z_1)$ in $q_2 = [Z_1/Z_2] + 1$ gleiche Teile der Gestalt

$$\theta_2 < n \leq \theta_2 + Z'_2, \quad \text{wo} \quad 0 < Z'_2 = \frac{Z_1}{q_2} \leq Z_2.$$

Jedes der Teilintervalle werde weiter in $q_3 = [Z'_2/Z_3] + 1$ gleiche Teile der Gestalt

$$\theta_3 < n \leq \theta_3 + Z'_3, \quad \text{wo} \quad 0 < Z'_3 = \frac{Z'_2}{q_3} \leq Z_3$$

eingeteilt u. s. w. Im ganzen werde das Teilungsverfahren $a-1$ mal ausgeführt.

Es bezeichne C_j ($1 \leq j \leq a$) die Summe

$$C_j = \sum_n e\{f(n)\},$$

wo n ein aus der $(j-1)$ -ten Teilung hervorgehendes Intervall durchläuft. Dann ist

$$(34) \quad C_1 = C_r(Z_1)$$

und

$$C_j = \sum_{i=1}^{q_{j+1}} C_{i+1} \quad (1 \leq j \leq a),$$

wobei $\sum^N$ eine Summe von höchstens N Gliedern bezeichnet. Insbesondere ist

$$C_1 = \sum_{i=1}^{q_2} C_2.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt hieraus

$$\begin{aligned} |C_1|^{2ac} &= |C_1|^{2c} |C_1|^{2(a-1)c} \leq |C_1|^{2c} \left(\sum_{i=1}^{q_2} |C_2| \right)^{2(a-1)c} \\ &\leq |C_1|^{2c} q_2^{2(a-1)c-1} \sum_{i=1}^{q_2} |C_2|^{2(a-1)c}. \end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned} |C_2|^{2(a-1)c} &\leq |C_2|^{2c} q_3^{2(a-2)c-1} \sum_{i=1}^{q_3} |C_3|^{2(a-2)c}, \quad \dots, \\ |C_{a-1}|^{2-2c} &\leq |C_{a-1}|^{2c} q_a^{2c-1} \sum_{i=1}^{q_a} |C_a|^{2c}. \end{aligned}$$

Das gibt zusammenfassend

$$(35) \quad |C_1|^{2ac} \leq q_2^{2(a-1)c-1} q_3^{2(a-2)c-1} \dots q_a^{2c-1} \sum_{i=1}^{q_2 \dots q_a} |C_1 C_2 \dots C_a|^{2c}.$$

Es mögen $I_1, I_2, \dots, I_a$ die Summationsintervalle von $C_1, C_2, \dots, C_a$ in einem Gliede der Summe rechts sein. Dann ist

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_a.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß in I_a eine ganze Zahl a enthalten ist; andernfalls ist das betreffende Glied der Summe leer. Nach Definition ist

$$C_j = \sum_{n_j \in I_j} e\{f(n_j)\},$$

also

$$C_1 C_2 \dots C_a = \sum_{n_1 \in I_1, \dots, n_a \in I_a} e\{f(n_1) + \dots + f(n_a)\}.$$

Wegen (23) folgt hieraus

$$|C_1 C_2 \dots C_a|^2 = \sum_{\substack{n_1 \in I_1, \dots, n_a \in I_a \\ n'_1 \in I_1, \dots, n'_a \in I_a}} e\{f(n_1) + \dots + f(n_a) - f(n'_1) - \dots - f(n'_a)\},$$

d. h., unter abermaliger Benutzung von (23),

$$\begin{aligned} |C_1 C_2 \dots C_a|^{2c} &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq a, 1 \leq q \leq c \\ n_{jq} \in I_j, n'_{jq} \in I_j}} e \left(\sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c \{f(n_{jq}) - f(n'_{jq})\} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq a, 1 \leq q \leq c \\ n_{jq} \in I_j, n'_{jq} \in I_j}} e \left(\sum_{h=1}^r y_h \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c \{n_{jq}^h - n'_{jq}^h\} \right) \\ &= \prod_{h=1}^r \sum_{\substack{1 \leq j \leq a, 1 \leq q \leq c \\ n_{jq} \in I_j, n'_{jq} \in I_j}} e \left(y_h \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c \{n_{jq}^h - n'_{jq}^h\} \right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_0^1 |C_1 C_2 \dots C_a|^{2c} dy_1 \dots dy_r = \prod_{h=1}^r \sum_{\substack{1 \leq j \leq a, 1 \leq q \leq c \\ n_{jq} \in I_j, n'_{jq} \in I_j}} \int_0^1 e \left(y_h \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c \{n_{jq}^h - n'_{jq}^h\} \right) dy_h.$$

Rechts ist das Integral gleich 1, wenn die Doppelsumme gleich Null ist, und das Integral ist gleich Null, wenn die Doppelsumme von Null verschieden ist. Bezeichnet daher σ' die Lösungszahl des Systems diophantischer Gleichungen

$$(36) \quad \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c n_{jq}^h = \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c n_{jq}'^h, \quad h = 1, \dots, r; \quad n_{jq} \in I_j, \quad n_{jq}' \in I_j,$$

so ist

$$(37) \quad \int_0^1 |C_1 C_2 \dots C_a|^{2c} dy_1 \dots dy_r \leq \sigma'.$$

Nach Definition hat das Intervall I_j die Gestalt

$$(38) \quad \theta_j < n \leq \theta_j + Z_j', \quad \text{wo} \quad 0 < Z_j' \leq Z_j.$$

Die Ungleichung (37) bleibt daher bestehen, wenn in (36) das Intervall I_j von der Gestalt

$$(39) \quad \theta_j < n \leq \theta_j + Z_j \quad (1 \leq j \leq a)$$

angenommen wird.

Nach Voraussetzung ist eine gewisse Zahl a in allen Intervallen (38) enthalten; diese Zahl a liegt daher auch in allen Intervallen (39).

Setzt man

$$(40) \quad n_{jq} = l_{jq} + a, \quad n_{jq}' = m_{jq} + a,$$

so gehen die Gleichungen (36) über in

$$(41) \quad \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c (l_{jq} + a)^h = \sum_{j=1}^a \sum_{q=1}^c (m_{jq} + a)^h \quad (1 \leq h \leq r).$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den Gleichungen (31). Denn aus der ersten Gleichung (41) folgt die erste Gleichung (31). In Verbindung mit der zweiten Gleichung (41), folgt hieraus die zweite Gleichung (31) u. s. w. Umgekehrt ist klar, daß die Gleichungen (41) aus den Gleichungen (31) folgen.

Setzt man noch $\theta_j - a = -w_j$, so ergibt sich aus (39) und (40), daß die Zahlen l_{jq} , m_{jq} den Bedingungen (29) und (30) genügen. Daher ist $\sigma' = \sigma(w)$, und aus (37) nebst (32) folgt

$$(42) \quad \int_0^1 |C_1 C_2 \dots C_r|^{2c} dy_1 \dots dy_r \leq \sigma.$$

Aus (34), (35) und (42) folgt

$$(43) \quad \int_0^1 |C_r(Z_1)|^{2ac} dy_1 \dots dy_r \leq q_2^{2(a-1)c-1} q_3^{2(a-2)c-1} \dots q_a^{2c-1} \sum_{q=1}^{q_2 \dots q_a} \int_0^1 |C_1 C_2 \dots C_a|^{2c} dy_1 \dots dy_r \leq (q_2^{a-1} q_3^{a-2} \dots q_a)^{2c} \sigma.$$

Für $2 \leq j \leq a$ ist nach (28)

$$\frac{Z_{j-1}}{Z_j} = Z_j^{1/r}.$$

Ferner ist nach Definition der q_j

$$q_j \leq 1 + \frac{Z_{j-1}}{Z_j}.$$

Somit ist

$$(44) \quad \begin{aligned} q_2^{a-1} q_3^{a-2} \dots q_a &\leq \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)^{a-1} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right)^{a-2} \dots \left(1 + \frac{Z_{a-1}}{Z_a}\right) \\ &= \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{a-1} \left(\frac{Z_2}{Z_3}\right)^{a-2} \dots \frac{Z_{a-1}}{Z_a} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)^{a-1} \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right)^{a-2} \dots \left(1 + \frac{Z_a}{Z_{a-1}}\right) \\ &\leq Z_1^a (Z_1 Z_2 \dots Z_a)^{-1} (1 + Z_1^{-1/r})^{a-1} (1 + Z_2^{-1/r})^{a-2} \dots (1 + Z_{a-1}^{-1/r}). \end{aligned}$$

Andererseits ist nach (27) und (28)

$$Z_{a-1}^{-1/r} = Z_1^{-1/(1/r)(1-1/r)^{a-2}} \leq (a-1)^{-(1-1/r)^{-1}} \leq (a-1)^{-1},$$

also

$$\begin{aligned} (a-1) \log(1 + Z_1^{-1/r}) + (a-2) \log(1 + Z_2^{-1/r}) + \dots + \log(1 + Z_{a-1}^{-1/r}) \\ \leq (a-1) Z_1^{-1/r} + (a-2) Z_2^{-1/r} + \dots + Z_{a-1}^{-1/r} \\ \leq a(a-1) Z_{a-1}^{-1/r} \leq a, \end{aligned}$$

d. h.

$$(45) \quad (1 + Z_1^{-1/r})^{a-1} (1 + Z_2^{-1/r})^{a-2} \dots (1 + Z_{a-1}^{-1/r}) \leq e^a \leq 3^a.$$

Die Behauptung (33) des Hilfssatzes ergibt sich aus (43)-(45).

HILFSSATZ 4. Unter den Bedingungen von Hilfssatz 3 ist

$$(46) \quad \int_0^1 |C_r(Z_1)|^{2ac} dy_1 \dots dy_r = (B_1^3)^{2ac} Z_1^{2ac - \frac{1}{2}r(r+1) + \frac{1}{2}r(r+1)(1-1/r)^a}.$$

Beweis. Es seien die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt. Wir setzen

$$(47) \quad \sum_{q=1}^c l_{jq}^h = X_{jh}, \quad \sum_{q=1}^c m_{jq}^h = Y_{jh}.$$

Dann nimmt das Gleichungssystem (31) die Gestalt

$$(48) \quad \sum_{j=1}^a X_{jh} = \sum_{j=1}^a Y_{jh} \quad (1 \leq h \leq r)$$

76

II. O-Probleme

an. Nach (29) und (30) ist für gerade h

$$0 \leq l_{jq}^h, \quad m_{jq}^h \leq Z_j^h$$

und für ungerade h

$$-w_j^h \leq l_{jq}^h, \quad m_{jq}^h \leq (Z_j - w_j)^h.$$

Weiter zeigt man durch Induktion nach h , daß

$$(Z_j - w_j)^h + w_j^h \leq Z_j^h$$

ist. Es ist also, mag h gerade oder ungerade sein,

$$|l_{jq}^h - m_{jq}^h| \leq Z_j^h.$$

Daraus folgt nach (47)

$$(49) \quad |X_{jh} - Y_{jh}| \leq cZ_j^h \quad (1 \leq j \leq a, \quad 1 \leq h \leq r).$$

Für $1 \leq j \leq a-1$ ist nach (48), (49) und (28)

$$\begin{aligned} |X_{1h} - Y_{1h} + \dots + X_{j-1,h} - Y_{j-1,h} + X_{jh} - Y_{jh}| \\ = |X_{j+1,h} - Y_{j+1,h} + \dots + X_{ah} - Y_{ah}| \leq c(Z_{j+1}^h + \dots + Z_a^h) \\ < acZ_{j+1}^h = acZ_j^{h(1-1/r)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $1 \leq j \leq a$

$$(50) \quad |X_{1h} - Y_{1h} + \dots + X_{j-1,h} - Y_{j-1,h} + X_{jh} - Y_{jh}| < acZ_j^{h(1-1/r)};$$

für $j = a$ ist nämlich die linke Seite dieser Ungleichung gleich Null.

Es sei $1 \leq h \leq r$. Für $j = 1$ folgt dann aus (50), daß die Differenzen $X_{1h} - Y_{1h}$ in Intervallen der Länge

$$acZ_1^{h(1-1/r)}$$

liegen. Sind X_{1h}, Y_{1h} fest, so liegen nach (50) die Differenzen $X_{2h} - Y_{2h}$ in gewissen Intervallen der Länge

$$acZ_2^{h(1-1/r)}$$

u. s. w. Schließlich liegen die Differenzen $X_{ah} - Y_{ah}$ in Intervallen der Länge

$$acZ_a^{h(1-1/r)},$$

wenn alle X_{jh}, Y_{jh} ($1 \leq j \leq a-1$) fest sind.

Berücksichtigt man die Definition der Funktion $\sigma(w)$ in Hilfssatz 3 sowie die der Zahlen X_{jh}, Y_{jh} durch (47), so ergibt sich, daß

$$(51) \quad \sigma(w) \leq \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_a,$$

wobei Φ_j ($1 \leq j \leq a$) die Anzahl derjenigen Zahlen l_{jq}, m_{jq} in (47) ist, für welche die Bedingungen (30) erfüllt sind und die Differenzen $X_{jh} - Y_{jh}$ in gewissen Intervallen der Länge

$$acZ_j^{h(1-1/r)}$$

liegen.

Es wird sich jetzt darum handeln, jedes Φ_j nach oben abzuschätzen. Dabei soll, um die Schreibweise zu vereinfachen, der Index j zeitweise weggelassen werden. Wir schreiben also

$$\Phi, Z, w, l_q, m_q, X_h, Y_h \quad \text{statt} \quad \Phi_j, Z_j, w_j, l_{jq}, m_{jq}, X_{jh}, Y_{jh}.$$

Es ist somit Φ nicht größer als die Lösungszahl des Gleichungssystems

$$(52) \quad \sum_{q=1}^c l_q^h - \sum_{q=1}^c m_q^h = X_h - Y_h \quad (1 \leq h \leq r),$$

wobei

$$0 < w \leq Z, \quad -w < l_q, \quad m_q \leq Z - w,$$

 $X - Y_h$ liegen in Intervallen der Länge $acZ^{h(1-1/r)}$.

Schließlich soll noch $m_q = l_{c+q}$ gesetzt werden, so daß das Gleichungssystem (52) die Gestalt

$$(53) \quad \sum_{q=1}^c l_q^h - \sum_{q=c+1}^{2c} l_q^h = X_h - Y_h \quad (1 \leq h \leq r)$$

annimmt und jetzt

$$(54) \quad -w < l_q \leq Z - w \quad (1 \leq q \leq 2c)$$

ist.

Es werde nunmehr

$$(55) \quad M_0 = \left[\frac{\log Z}{r \log 2} \right] + 1,$$

$$(56) \quad R_M = Z2^{-M} \quad (1 \leq M \leq M_0)$$

gesetzt. Aus (55), (56) und (26)-(28) folgt dann

$$\begin{aligned} (57) \quad R_M &\geq Z2^{-M_0} \geq Z \exp \left\{ - \left(\frac{\log Z}{r \log 2} + 1 \right) \log 2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} Z^{1-1/r} \geq \frac{1}{2} Z_a^{1-1/r} = \frac{1}{2} Z_1^{(1-1/r)a} \\ &\geq \frac{1}{2} (a-1)^{r-1} \geq \frac{1}{2} \cdot 3^3 > 10. \end{aligned}$$

Jedes der $2c$ Intervalle (54) werde jetzt in 2^M gleiche Teile der Länge R_M geteilt. Diese Teilung soll die M -te Teilung heißen. Ein Intervall der M -ten Teilung hat die Gestalt

$$(58) \quad -w + (a_n - 1)R_M < l_q^{(n)} \leq -w + a_n R_M \quad (1 \leq n \leq 2c, 1 \leq a_n \leq 2^M).$$

Aus den $2c$ Intervallen (54) entstehen nach der M -ten Teilung 2^{2cM} Systeme von Teilintervallen. Jedem solchen System entspricht eine Reihe von Zahlen

$$(59) \quad a_1, \dots, a_{2c}, \quad 1 \leq a_n \leq 2^M.$$

Nach Hilfssatz 2 mit $2c$ statt c und $Y = 2^M$ ist die Anzahl der in bezug auf 2^M nicht regulären Systeme (59)

$$(60) \quad \leq (2c)! 3^{2c} 2^{M(r-1)}.$$

Die Ungleichung $2c > r$ ist wegen (25) erfüllt.

Wir wollen ein System von Teilintervallen (58) als regulär oder nicht-regulär bezeichnen, je nachdem die zugehörigen Zahlenreihen (59) regulär oder nichtregulär sind. Nach der ersten Teilung entstehen insgesamt 2^{2c} Systeme von Intervallen. Unter diesen gibt es also höchstens 2^{2c} reguläre Systeme in bezug auf $Y = 2^1$. Die Anzahl der nichtregulären Systeme ist nach (60) höchstens $(2c)! 3^{2c} 2^{r-1}$.

Die Intervalle eines in bezug auf $Y = 2^1$ nichtregulären Systems werden nun in zwei gleiche Teile geteilt. Es entstehen auf diese Weise höchstens $(2c)! 3^{2c} 2^{r-1+2c}$ Systeme von Intervallen der zweiten Teilung. Unter diesen ist die Anzahl der in bezug auf $Y = 2^2$ regulären Systeme höchstens gleich der eben genannten Zahl. Die Anzahl der nichtregulären Systeme ist nach (60) höchstens gleich $(2c)! 3^{2c} 2^{2(r-1)}$. Jedes Intervall eines nichtregulären Systems werde nun in zwei gleiche Teile geteilt u. s. w.

Die Anzahl der dabei in bezug auf $Y = 2^{M-1}$ ($2 \leq M \leq M_0$) entstehenden unregelmäßigen Systeme von Intervallen der $(M-1)$ -ten Teilung ist nach (60) höchstens $(2c)! 3^{2c} 2^{(M-1)(r-1)}$. Jedes Intervall eines solchen Systems werde wieder in zwei gleiche Teile zerlegt. Dadurch entstehen höchstens

$$(61) \quad (2c)! 3^{2c} 2^{(M-1)(r-1)+2c}$$

in bezug auf 2^M reguläre Systeme der M -ten Teilung. Diese Systeme sollen mit J_M bezeichnet werden. J_1 bedeutet das aus der ersten Teilung entstehende reguläre Intervallsystem.

Es möge jetzt $\Phi(M)$ die Anzahl derjenigen in Φ eingehenden Lösungen l_q der Gleichungen (53) bezeichnen, bei denen die $l_q^{(n)}$ in (58) die Intervallsysteme J_M durchlaufen. Schließlich bezeichne $\Psi(M_0)$ die ent-

sprechende Anzahl, wobei die nichtregulären Systeme der M_0 -ten Teilung durchlaufen werden. Dann ist

$$(62) \quad \Phi \leq \sum_{M=1}^{M_0} \Phi(M) + \Psi(M_0).$$

Ist nun (59) ein zu J_M gehöriges in bezug auf 2^M reguläres Zahlensystem, so kann man aus ihm, indem nötigenfalls die Bezeichnungsweise geändert wird, ein Zahlensystem $a_1, \dots, a_r$ herausgreifen, das den Bedingungen von Hilfssatz 1 mit $X = R_M$, $Y = 2^M$ genügt. Die Ungleichung $X > 1$ ist dabei nach (57) erfüllt; auch ist $Z = XY$ wegen (56). Bedenkt man noch, daß ein Intervall (58) nicht mehr als $[R_M] + 1$ ganze Zahlen enthält, so ergibt sich aus Hilfssatz 1: Die Anzahl der zu J_M gehörigen Zahlensysteme l_q , für die die Ausdrücke (53) in gegebenen Intervallen der Länge $\leq Z^{h-1}$ liegen, ist höchstens gleich

$$(2r \cdot 2^M)^{r(r-1)/2} ([R_M] + 1)^{2c-r} \leq (2^{M+1})^{r(r-1)/2} 2^{2c-r} R_M^{2c-r}.$$

Wegen (56) und (25) ist diese Anzahl

$$\begin{aligned} &\leq (2^{M+1})^{r(r-1)/2} 2^{2c} Z^{2c-r} 2^{-M(2c-r)}, \\ &\leq 2^{4c} r^{r(r-1)/2} 2^{M\{r(r+1)-2c\}} Z^{2c-r}. \end{aligned}$$

Ein Intervall der Länge $acZ^{h(1-1/r)}$ kann in

$$\left[\frac{acZ^{h(1-1/r)}}{Z^{h-1}} \right] + 1 \leq \frac{2acZ^{h(1-1/r)}}{Z^{h-1}}$$

Teilintervalle der Länge $\leq Z^{h-1}$ geteilt werden ($1 \leq h \leq r$).

Ein System von r Intervallen der Länge

$$acZ^{h(1-1/r)} \quad (1 \leq h \leq r)$$

kann also in höchstens

$$(2ac)^r Z^{(1+2+\dots+r)(1-1/r)-(1+2+\dots+r-1)} = (2ac)^r Z^{r(r-1)/2}$$

Systeme von r Intervallen der Länge $\leq Z^{h-1}$ ($1 \leq h \leq r$) zerlegt werden.

Die Anzahl der zu J_M gehörigen Zahlensysteme l_q , für die die Ausdrücke (53) in gegebenen Intervallen der Länge $acZ^{h(1-1/r)}$ liegen, ist also höchstens gleich

$$(2ac)^r 2^{4c} r^{r(r-1)/2} 2^{M\{r(r+1)-2c\}} Z^{2c-(r+1)/2}.$$

Hieraus ergibt sich, da die Anzahl der J_M höchstens gleich (61) ist, die Ungleichung

$$\begin{aligned} \Phi(M) &\leq (2c)! 3^{2c} 2^{(M-1)(r-1)+2c} (2ac)^r 2^{4c} r^{r(r-1)/2} \cdot 2^{M\{r(r+1)-2c\}} Z^{2c-(r+1)/2} \\ (63) \quad &= 2(2c)! 2^{4c} r^{r(r-1)/2} (ac)^r 2^{M\{r(r+1)+r-1-2c\}} Z^{2c-(r+1)/2}. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach (25)

$$\frac{1}{2}r(r+1)+r-1-2c < \frac{1}{2}r(r+1)+r-1-2\left\{\frac{1}{4}(r+1)(r+2)-1\right\} = 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{2}r(r+1)+r-1-2c \leq -1, \quad \sum_{M=1}^{\infty} 2^M \left\{ \frac{1}{2}r(r+1)+r-1-2c \right\} \leq 1.$$

Wegen (63) ist daher

$$(64) \quad \sum_{M=1}^{M_0} \Phi(M) \leq 2(2c)! 2^{2c} r^{r(r-1)/2} (ac)^r Z^{2c-(r+1)/2}.$$

Die Anzahl der in $\Psi(M_0)$ eingehenden nichtregulären Intervallsysteme (58) ist nach (60) höchstens

$$(2c)! 3^{2c} 2^{M_0(r-1)}.$$

In einem der Intervalle (58) mit $M = M_0$ liegen nicht mehr als $[R_{M_0}] + 1 \leq 2R_{M_0}$ ganze Zahlen l_a . Mithin ist

$$\Psi(M_0) \leq (2c)! 3^{2c} 2^{2c} 2^{M_0(r-1)} R_{M_0}^{2c}.$$

Hierin ist nach (55), (56) und (25)

$$2^{M_0(r-1)} R_{M_0}^{2c} = Z^{2c} 2^{-M_0(2c-r+1)} \leq Z^{2c-(2c-r+1)/r},$$

also

$$2c-r+1 \geq \frac{1}{2}(r+1)(r+2)-2-r+1 = \frac{1}{2}r(r+1),$$

$$2^{M_0(r-1)} R_{M_0}^{2c} \leq Z^{2c-(r+1)/2}.$$

Somit ist

$$(65) \quad \Psi(M_0) \leq (2c)! 6^{2c} Z^{2c-(r+1)/2}.$$

Aus (62), (64) und (65) ergibt sich, wenn man den Parameter j wieder in die Bezeichnung aufnimmt,

$$(66) \quad \Phi_j \leq 3(2c)! 2^{2c} r^{r(r-1)/2} (ac)^r Z_j^{2c-(r+1)/2} \quad (1 \leq j \leq \alpha).$$

Aus (32), (51) und (66) folgt

$$(67) \quad \sigma \leq \{3(2c)! 2^{2c} r^{r(r-1)/2} (ac)^r\}^{\alpha} (Z_1 \dots Z_{\alpha})^{2c-(r+1)/2}.$$

Aus (33) und (67) folgt

$$\int_0^1 |C_r(Z_1)|^{2ac} dy_1 \dots dy_r \leq \{3(2c)! 2^{2c} r^{r(r-1)/2} (ac)^r\}^{\alpha} (3Z_1)^{2ac} (Z_1 \dots Z_{\alpha})^{-(r+1)/2}.$$

Hierin ist nach (28), (25) und (26)

$$Z_1^{2ac} (Z_1 \dots Z_{\alpha})^{-(r+1)/2} = Z_1^{2ac - \frac{1}{2}r(r+1) + \frac{1}{2}r(r+1)(1-1/r)^{\alpha}},$$

$$\{(2c)!\}^{\alpha} \leq (2c)^{2ac} \leq \left\{\frac{1}{2}(r+1)(r+2)\right\}^{2ac} \leq r^{4ac},$$

$$r^{r(r-1)\alpha/2} = (r^{r(r-1)/4c})^{2ac} \leq r^{2ac},$$

$$(ac)^{ra} = \{(ac)^{r/2c}\}^{2ac} \leq \{(r^5)^{2r/2}\}^{2ac} = (r^{10/r})^{2ac} \leq (4^5)^{2ac}.$$

Damit ist die Behauptung (46) des Hilfssatzes bewiesen.

HILFSSATZ 5. Es sei $r > 3$, $R = r^3 \log r$,

$$(68) \quad f(z) = \theta z^{r+1} + \theta_1 z^r + \dots + \theta_r,$$

$$(69) \quad S = \sum_{m=1}^M e\{f(m)\},$$

$$(70) \quad 0 < 2(r+1)|\theta|M \leq 1.$$

Dann ist

$$(71) \quad S = Br^3 M^{1-1/6R} + B|\theta|^{-1/r}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$(72) \quad M \geq 6, \quad |\theta|^{-1/r} \leq M-3,$$

da sonst die Behauptung klar ist. Es werde

$$(73) \quad \alpha = 2[r \log(r+1)] + 2$$

gesetzt. Dann ist

$$(74) \quad 2r \log(r+1) \leq \alpha \leq 2r \log(r+1) + 2 \leq 2r \left(\log r + \frac{1}{r} \right) + 2 \leq 3r \log r.$$

Weiter sei

$$(75) \quad N = (\alpha-1)^{r(1-1/r)^{1-\alpha}}.$$

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß

$$(76) \quad M^{1-1/6R} < N+1$$

ist. Dann werde für die Summe (69) die triviale Abschätzung

$$(77) \quad |S| \leq M = M^{1/6R} M^{1-1/6R} \leq (N+1)^{1/(6R-1)} M^{1-1/6R} \leq 2N^{1/6R} M^{1-1/6R}$$

benutzt. Wegen (73) ist

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{1-a} \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-2r \log(r+1) - 2} = \exp \left\{ -(2r \log(r+1) + 2) \log \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\} \\ \leq \exp \left\{ \left(2r \log r + \frac{2r}{r} + 2\right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \right\} = Br_2.$$

Wegen (74) und (75) ist also

$$N \leq (3r \log r)^{Br^3} = \exp(Br^3 \log r) = \exp(BR).$$

In Verbindung mit (77), ergibt dies

$$S = BM^{1-1/6R},$$

womit die Abschätzung (71) bewiesen ist.

Es sei jetzt die Ungleichung (76) nicht erfüllt, also

$$(78) \quad M^{1-1/6R} \geq N+1.$$

Dann setzen wir

$$(79) \quad H = \begin{cases} \lceil |\theta|^{-1/r} \rceil + 3 & \text{für } |\theta|^{-1/r} \geq N, \\ \lceil M^{1-1/6R} \rceil & \text{für } |\theta|^{-1/r} < N. \end{cases}$$

Es soll jetzt erstens gezeigt werden, daß

$$(80) \quad 3 \leq H \leq M$$

ist. Für

$$(81) \quad |\theta|^{1/r} \geq N$$

folgt (80) aus (72) und der ersten Zeile von (79). Es sei also

$$(82) \quad |\theta|^{-1/r} < N.$$

Aus der zweiten Zeile von (79) folgt dann $H \leq M$. Ferner ist hier wegen (72)

$$H \geq 6^{1-1/(6 \cdot 4)^3} - 1 \geq 3.$$

Also ist (80) ebenfalls erfüllt.

Zweitens wollen wir zeigen, daß

$$(83) \quad H^r |\theta| \geq 1$$

ist. Im Falle (81) folgt (83) sofort aus der ersten Zeile von (79). Im Falle (82) folgt aus (78) und der zweiten Zeile von (79), daß $H \geq N$ ist. Wird jetzt nochmals (82) benutzt, so ergibt sich

$$H^r |\theta| \geq (HN^{-1})^r \geq 1,$$

so daß auch hier die Ungleichung (83) erfüllt ist.

Bedeutet $f(z)$ das Polynom (68), so werde gesetzt

$$(84) \quad S_0(w) = \sum_{h=1}^H e\{f(h+w)\},$$

$$(85) \quad f(z+w) = W(w)z^{r+1} + W_r(w)z^r + \dots + W_0(w).$$

Nach (68) und (85) ist

$$(86) \quad W(w) = \theta, \quad W_r(w) = \theta_1 + (r+1)\theta w.$$

Nach (69) ist

$$S = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{m=1}^M e\{f(m)\} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{a=1-H}^{M-h} e\{f(h+a)\}.$$

In Verbindung mit (84), ergibt dies

$$(87) \quad \left| S - \frac{1}{H} \sum_{m=0}^M S_0(m) \right| \leq 2H.$$

Für beliebiges n ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$(88) \quad \left| \sum_{m=1}^M S_0(m) \right|^{2n} \leq M^{2n-1} \sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n},$$

und hierin ist, mit Rücksicht auf (84)-(86),

$$\sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n} = \sum_{m=1}^M \sum_{h_1, \dots, h_n=1}^H \sum_{h'_1, \dots, h'_n=1}^H e(F),$$

wo

$$F = f(h_1+m) + \dots + f(h_n+m) - f(h'_1+m) - \dots - f(h'_n+m) \\ = \theta \left(\sum_{a=1}^n h_a^{r+1} - \sum_{a=1}^n h_a'^{r+1} \right) + W_r(m) \left(\sum_{a=1}^n h_a^r - \sum_{a=1}^n h_a'^r \right) + \dots + \\ + W_1(m) \left(\sum_{a=1}^n h_a - \sum_{a=1}^n h_a' \right).$$

Somit ist

$$(89) \quad \sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n} \leq \sum_{h_1, \dots, h_n=1}^H \sum_{h'_1, \dots, h'_n=1}^H \left| \sum_{m=1}^M e\{W_r(m) \left(\sum_{a=1}^n h_a^r - \sum_{a=1}^n h_a'^r \right) + \dots + W_1(m) \left(\sum_{a=1}^n h_a - \sum_{a=1}^n h_a' \right)\} \right|.$$

Für irgend welche $a_r, \dots, a_1$ bezeichne $\varphi(a_r, \dots, a_1)$ die Anzahl der Lösungen $h_1, \dots, h_n, h'_1, \dots, h'_n$ des Gleichungssystems

$$(90) \quad h_1^j + \dots + h_n^j - h_1^{j'} - \dots - h_n^{j'} = a_j \quad (1 \leq j \leq r),$$

wenn die h, h' unabhängig voneinander die Zahlen von 1 bis H durchlaufen.

Nach (89) und (90) ist

$$(91) \quad \begin{aligned} \sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n} &\leq \sum_{|a_r| < H^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \varphi(a_r, \dots, a_1) \times \\ &\quad \times \left| \sum_{m=1}^M e\{W_r(m)a_r + \dots + W_1(m)a_1\} \right|, \\ \left(\sum_{m=1}^M |S'_0(m)|^{2n} \right) &\leq \sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \varphi^2(a_r, \dots, a_1) \times \\ &\quad \times \sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \left| \sum_{m=1}^M e\{W_r(m)a_r + \dots + W_1(m)a_1\} \right|^2. \end{aligned}$$

Da $\varphi(a_r, \dots, a_1)$ gleich der Lösungszahl des Gleichungssystems (90) ist, wenn die h, h' alle Zahlen von 1 bis H durchlaufen, so ist $\varphi^2(a_r, \dots, a_1)$ gleich der Lösungszahl des Gleichungssystems

$$h_1^j + \dots + h_n^j - h_1^{j'} - \dots - h_n^{j'} = l_1^j + \dots + l_n^j - l_1^{j'} - \dots - l_n^{j'} = a_j \quad (1 \leq j \leq r),$$

wenn die h, h', l, l' die Zahlen von 1 bis H durchlaufen. Summiert man jetzt über die a_j , wie in (91) angegeben, so folgt, daß der erste Faktor rechts in (91) gleich der Lösungszahl des Gleichungssystems

$$h_1^j + \dots + h_n^j - h_1^{j'} - \dots - h_n^{j'} = l_1^j + \dots + l_n^j - l_1^{j'} - \dots - l_n^{j'} \quad (1 \leq j \leq r)$$

ist, wenn $1 \leq h, h', l, l' \leq H$. Schließt man jetzt ähnlich, wie beim Beweise der Ungleichung (37), so folgt, daß diese Lösungszahl, d. h. der erste Faktor rechts in (91), gleich dem Integral

$$\int_0^1 \left| \sum_{h=1}^H e(y_r h^r + \dots + y_1 h) \right|^{4n} dy_1 \dots dy_r$$

ist. Dies Integral hat nach (23) und (24) die Gestalt

$$(92) \quad \int_0^1 |C_r(H)|^{4n} dy_1 \dots dy_r.$$

Auf das Integral (92) wenden wir Hilfssatz 4 an mit $Z_1 = H$, dem durch (73) definierten a und $4n = 2ac$. Das ist gestattet, denn zunächst

ist a gerade, also wegen (25) ist n positiv ganz. Die Ungleichung (26) ist wegen (74) erfüllt. Die Ungleichung (27) hat wegen (75) die Gestalt $H \geq N$. Diese letzte Ungleichung folgt im Falle (81) direkt aus (79); im Falle (82) ergibt sie sich aus (78) und (79). Die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 sind also erfüllt, und aus (46) folgt

$$(93) \quad \sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \varphi^2(a_r, \dots, a_1) = (Br^3)^{2ac} H^{2ac - \frac{1}{2}r(r+1) + \frac{1}{2}r(r+1)(1-1/r)^a}$$

Nun soll der zweite Faktor auf der rechten Seite von (91) betrachtet werden. Dieser ist

$$(94) \quad \begin{aligned} &\sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \left| \sum_{m=1}^M e\{W_r(m)a_r + \dots + W_1(m)a_1\} \right|^2 \\ &= \sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \sum_{m, m'=1}^M e\{(W_r(m) - W_r(m'))a_r + \dots + (W_1(m) - W_1(m'))a_1\} \\ &= \sum_{m, m'=1}^M \sum_{|a_1| < nH} e\{(W_1(m) - W_1(m'))a_1\} \dots \times \\ &\quad \times \sum_{|a_{r-1}| < nH^{r-1}} e\{(W_{r-1}(m) - W_{r-1}(m'))a_{r-1}\} \sum_{|a_r| < nH^r} e\{(W_r(m) - W_r(m'))a_r\} \\ &\leq \sum_{m, m'=1}^M \sum_{|a_1| < nH} 1 \dots \sum_{|a_{r-1}| < nH^{r-1}} 1 \left| \sum_{|a_r| < nH^r} e\{(W_r(m) - W_r(m'))a_r\} \right|. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich wegen (86), daß der Ausdruck (94)

$$\begin{aligned} &\leq (2n)^{r-1} H^{1+2+\dots+(r-1)} \sum_{m, m'=1}^M \left| \sum_{|a_r| < nH^r} e\{(r+1)\theta(m-m')a_r\} \right| \\ &\leq (2n)^{r-1} H^{r(r-1)/2} \sum_{m, m'=1}^M \text{Min}(2nH^r, |\text{cosec}\{\pi(r+1)\theta(m-m')\}|). \end{aligned}$$

Wegen (70) ist also der Ausdruck (94)

$$(95) \quad \begin{aligned} &\leq (2n)^{r-1} H^{r(r-1)/2} \sum_{m, m'=1}^M \text{Min}\left(2nH^r, \frac{1}{2(r+1)|\theta(m-m')|}\right) \\ &\leq (2n)^{r-1} H^{r(r-1)/2} M \sum_{m=-M}^M \text{Min}\left(2nH^r, \frac{1}{2(r+1)|\theta m|}\right). \end{aligned}$$

In (95) ist, unter Berücksichtigung von (83) und (72),

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^M \text{Min} &\leq 2nH^r + \frac{1}{(r+1)|\theta|} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} = 2nH^r \left(1 + \frac{1}{2n(r+1)H^r|\theta|} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) \\ (96) \quad &\leq 2nH^r \left(1 + \frac{\log M + 1}{2n(r+1)} \right) \leq 4nH^r \log M. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck (94) nicht größer als (95) und $2n = ac$ ist, folgt also wegen (96)

$$(97) \quad \sum_{|a_r| < nH^r} \dots \sum_{|a_1| < nH} \left| \sum_{m=1}^M e\{W_r(m)a_r + \dots + W_1(m)a_1\} \right|^2 \leq 2(ac)^r H^{r(r+1)/2} M \log M.$$

Aus (91), (93) und (97) folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n} \right)^2 &= (Br^3)^{2ac} (ac)^r H^{2ac + \frac{1}{2}r(r+1)(1-1/r)^a} M \log M, \\ \sum_{m=1}^M |S_0(m)|^{2n} &= (Br^3)^{ac} (ac)^{r/2} H^{ac + \frac{1}{4}r(r+1)(1-1/r)^a} M^{1/2} \log^{1/2} M. \end{aligned}$$

Wegen (88) folgt hieraus

$$\left| \sum_{m=1}^M S_0(m) \right|^{2n} = (Br^3)^{ac} (ac)^{r/2} H^{ac + \frac{1}{4}r(r+1)(1-1/r)^a} M^{2n-1/2} \log^{1/2} M$$

und daraus ergibt sich weiter, wegen $2n = ac$,

$$\sum_{m=1}^M S_0(m) = Br^3 (ac)^{r/2ac} H^{1+r(r+1)(1-1/r)^a/4ac} M^{1-1/2ac} \log^{1/2ac} M.$$

Nach (87) und (80) ist somit

$$(98) \quad S = Br^3 (ac)^{r/2ac} M^{1+(1/4ac)r(r+1)(1-1/r)^a-1/2ac} \log^{1/2ac} M + BH.$$

Aus (25) und (73) folgt weiter

$$\begin{aligned} (ac)^{r/2ac} &= \exp \left(\frac{r \log ac}{2ac} \right) = B, \\ \left(1 - \frac{1}{r} \right)^a &\leq \left(1 - \frac{1}{r} \right)^{2r \log(r+1)} = \exp \left\{ 2r \log(r+1) \log \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -2r \log(r+1) \frac{1}{r} \right\} = (r+1)^{-2}, \quad r(r+1) \left(1 - \frac{1}{r} \right)^a \leq 1. \end{aligned}$$

Wegen (98) und (72) ist somit

$$S = Br^3 M^{1-1/4ac} \log^{1/2ac} M + BH = Br^3 M^{1-0,99/4ac} + BH.$$

Nach (25) und (74) ist weiter, wenn von der Abkürzung $R = r^3 \log r$ Gebrauch gemacht wird,

$$4ac \leq 3r(r+1)(r+2) \log r \leq 3r \cdot \frac{5}{4} r \cdot \frac{3}{2} r \log r = \frac{45}{8} R.$$

Somit ist

$$S = Br^3 M^{1-1/6R} + BH.$$

Damit ist die Abschätzung (71) bewiesen. Im Falle (81) ist nämlich nach (79) und (70)

$$H = B|\theta|^{-1/r}$$

und im Falle (82) ist nach (79)

$$H \leq M^{1-1/6R}.$$

§ 8. Verbesserung der Abschätzung (6.54)

In diesem Paragraphen soll, gestützt auf Hilfssatz 7.5, die Abschätzung (7.1) bewiesen werden. Wir schicken drei Hilfssätze voraus, die den Hilfssätzen 6.1, 6.2 und 6.4 analog sind. Wie in Hilfssatz 6.1, werde hier der Parameter $0 < s \leq 1$ eingeführt, obwohl später nur der Fall $s = 1$ benutzt wird.

HILFSSATZ 1. Es sei $r \geq 37$, $R = r^3 \log r$, $0 < s \leq 1$, $t \geq 1$, $M \leq M' \leq 2M$,

$$(1) \quad t^{11/10r} \leq M \leq t^{9/5r}.$$

Dann ist

$$(2) \quad S = \sum_{m=M}^{M'} e \left(\frac{t}{m+s} \right) = Br^3 M^{1-1/66R}.$$

Beweis. Wir setzen

$$(3) \quad n = \left[\frac{M^{(r+3)/(r+2)} t^{-1/(r+2)}}{l} \right], \quad l = \left[\frac{M' - M}{n} \right].$$

Wegen (1) ist dann

$$M^{(r+3)/(r+2)} t^{-1/(r+2)} \geq M^{(r+3)/(r+2)-r/(r+2)} \geq 1,$$

also $n > 0$, wie es sich gehört. Es sei $l \geq 2$; denn für $l \leq 1$ ist $M' - M < 2n$, also

$$|S| \leq M' - M + 1 \leq 2n \leq 2M^{(r+3)/(r+2)-5r/9(r+2)} = 2M^{1-(5r-9)/(9r+18)} \leq 2M^{1/2},$$

d. h. (2) erfüllt. Ferner sei $M \geq 2(r+1)$. Denn für $M < 2(r+1)$ ist (2) klar.

a bedeute, falls es nicht eingeschränkt wird, eine beliebige Zahl aus der Reihe $0 \leq a \leq l-1$. Wir setzen noch

$$(4) \quad X_a = M + s + an.$$

Aus (1), (3) und (4) ergibt sich erstens

$$(5) \quad \frac{n}{X_a} \leq \frac{n}{M} \leq \left(\frac{M}{t}\right)^{1/(r+2)} \leq M^{-(sr-9)/9(r+2)} \leq M^{-1/2} \leq \{2(r+1)\}^{-1/2} \leq \frac{1}{8},$$

zweitens

$$X_{l-1} + n = M + s + ln > M + \left(\frac{M' - M}{n} - 1\right)n = M' - n,$$

$$(6) \quad X_{l-1} + n \leq M + 1 + \frac{M' - M}{n}n = M' + 1,$$

also

$$(7) \quad S = \sum_{a=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a + m}\right) + Bn.$$

Nunmehr sei für $|y| < X_a$

$$(8) \quad \frac{1}{X_a + y} = \frac{1}{X_a} \{P(y) + y^{r+2}T(y)\},$$

$$P(y) = \sum_{c=0}^{r+1} (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c,$$

$$T(y) = (-1)^{r+2} X_a^{-r-2} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c,$$

$$e\left\{\frac{t}{X_a} y^{r+2} T(y)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h.$$

Es wird dann

$$\sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h = e\left\{(-1)^{r+2} t X_a^{-r-2} y^{r+2} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \left(\frac{y}{X_a}\right)^c\right\}.$$

Aus (3)-(5) ergibt sich daher, mittels des üblichen Majorantenkunstgriffs (vgl. Pólya-Szegő [1], 9)

$$(9) \quad \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \leq \exp\left\{\frac{2\pi i n^{r+2}}{M^{r+3}} \cdot \sum_{c=0}^{\infty} \left(\frac{n}{M}\right)^c\right\} \leq \exp\left(\frac{16\pi t M^{r+3}}{7t M^{r+3}}\right) = B.$$

Andererseits bekommt man für die m -Summe in (7)

$$\sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a + m}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{tP(m)}{X_a}\right\} \sum_{h=0}^{\infty} w_h m^h$$

$$= B \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| \left| \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{tP(m)}{X_a}\right\} m^h \right|.$$

Wendet man hier auf die m -Summe den Abelschen Hilfssatz 1.3.3 an und berücksichtigt (9), so folgt

$$\sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a + m}\right) = B \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \mathbf{M}_{M'' \leq n} \mathbf{M}_{\mathbb{A} \times} \left| \sum_{m=0}^{M''-1} e\left\{\frac{tP(m)}{X_a}\right\} \right|$$

$$(10) \quad = B \mathbf{M}_{\mathbb{A} \times} \left| \sum_{m=1}^{M''} e\left\{\frac{tP(m-1)}{X_a}\right\} \right|.$$

Hierbei ist nach (8)

$$\frac{tP(m-1)}{X_a} = \theta m^{r+1} + \theta_1 m^r + \dots + \theta_r,$$

wo

$$(11) \quad \theta = \frac{(-1)^{r+1} t}{X_a^{r+2}}.$$

Da $M \geq 2(r+1)$, so folgt aus (11), (4), (3) und (1)

$$0 < 2(r+1) |\theta| M'' \leq \frac{2(r+1) t n}{M^{r+2}} \leq 2(r+1) M^{(r+3)/(r+2) - r - 2} t^{(r+1)/(r+2)}$$

$$\leq M^{(r+3)/(r+2) - r - 1 + r(r+1)/(r+2)} = M^{-(r-1)/(r+2)} \leq 1.$$

Auf die m -Summe in (10) darf daher Hilfssatz 7.5 mit $M = M''$ und dem Wert (11) von θ angewendet werden. Es folgt, wegen $M'' \leq n$ und nach Definition von R ,

$$\sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{t}{X_a + m}\right) = B r^3 n^{1-1/6R} + B t^{-1/r} X_a^{(r+2)/r}.$$

In Verbindung mit (7), (4) und (6), ergibt sich hieraus

$$S = B r^3 n^{1-1/6R} + B t^{-1/r} M^{(r+2)/r} + B n.$$

Hierbei ist nach (1) und (3)

$$\begin{aligned} b_n^{1-1/6R} &= BM^{n-1/6R} = BM^{1-(r+3)/6(r+2)R} t^{1/6(r+2)R} \\ &= BM^{1-(r+3)/6(r+2)R+10r/66(r+2)R} = BM^{1-(r+33)/66(r+2)R} = BM^{1-1/66R}, \\ u^{-1/r} M^{(r+2)/r} &= BM^{n-1} t^{-1/r} M^{(r+2)/r} = BM^{1-(r+3)/(r+2)+(r+2)/r} t^{1/(r+2)-1/r} \\ &= BM^{1+(r+4)/(r+2)r-2/(r+2)r} = BM^{1+(r+4)/(r+2)r-10r/9(r+2)r} \\ &= BM^{1-(r-36)/9(r+2)r} = BM^{1-1/9(r+2)r} = BM^{1-1/9R}. \end{aligned}$$

Nach (5) ist weiter $n \leq M^{1/2}$. Damit ist die Behauptung (2) bewiesen.

HILFSSATZ 2. Für $r \geq 37$, $R = r^3 \log r$ ist

$$(12) \quad \sum_{x^{3/2r} < m \leq x^{3/2(r-1)}} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = Br^3 x^{-1/44rR} \log^2 x.$$

Beweis. Der Übergang von Hilfssatz 1 zu Hilfssatz 2 vollzieht sich auf ähnliche Weise, wie der von Hilfssatz 3.3 zu Hilfssatz 3.4 und von Hilfssatz 6.1 zu Hilfssatz 6.2. Es sei

$$(13) \quad x^{3/2r} < M \leq M' \leq 2M \leq 2x^{3/2(r-1)},$$

$$(14) \quad z = \frac{M^{10r/11}}{x}.$$

Aus (3.10) und (3.11) folgt für $s \geq 3$

$$(15) \quad s \left| \sum_{m=M}^{M' \pm 1/s} \int_0^{\pm 1/s} \psi\left(\frac{x}{m} + \theta\right) d\theta \right| \leq 2 \sum_{a=1}^{\infty} \left| \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{ax}{m}\right) \right| \text{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{s}{a^2}\right) \\ = 2 \sum_{a \leq z} + 2 \sum_{a > z} = 2S_1 + 2S_2,$$

zur Abkürzung. In S_1 nehmen wir

$$(16) \quad ax = t.$$

Nach (13), (14) und (16) ist dann

$$\begin{aligned} M^r &= (zx)^{11/10} \geq (ax)^{11/10} = t^{11/10}, \\ t^{9/5r} &\geq x^{9/5r} \geq x^{3/2(r-1)} \geq M, \end{aligned}$$

so daß die Bedingung (1) von Hilfssatz 1 erfüllt ist. Nach (2), mit dem t aus (16) und $s = 1$, ist somit

$$\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{ax}{m}\right) = \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{ax}{m+1}\right) + B = Br^3 M^{1-1/66R}.$$

Ferner ist

$$\sum_{a \leq x} \text{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{s}{a^2}\right) = B \sum_{a \leq x} \frac{1}{a} + B_s \sum_{a > x} \frac{1}{a^2} = B \log s.$$

Wegen (15) ist daher

$$(17) \quad S_1 = Br^3 M^{1-1/66R} \log s.$$

In S_2 benutzen wir für die m -Summe die triviale Abschätzung BM und erhalten, wegen (14),

$$(18) \quad S_2 = BM s \sum_{a > z} \frac{1}{a^2} = B \frac{Ms}{z} = BM^{1-10r/11} s x.$$

Aus (15), (17) und (18) folgt

$$s \sum_{m=M}^{M' \pm 1/s} \int_0^{\pm 1/s} \psi\left(\frac{x}{m} + \theta\right) d\theta = B \{r^3 M^{1-1/66R} + M^{1-10r/11} s x\} \log s.$$

In Verbindung mit (6.40) ergibt dies, wegen $M' - M + 1 \leq 2M$,

$$\sum_{m=M}^{M'} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = B \{r^3 M^{1-1/66R} + M^{1-10r/11} s x + Ms^{-1}\} \log s.$$

Durch partielle Summation (Hilfssatz 1.3.3) folgt hieraus

$$\sum_{m=M}^{M'} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = B \{r^3 M^{-1/66R} + M^{-10r/11} s x + s^{-1}\} \log s.$$

Hierin darf

$$s = 3M^{5r/11} x^{-1/2}$$

angenommen werden, denn nach (13) ist dann

$$s \geq 3x^{(5r/11)(3/2r)-1/2} = 3x^{2/11} \geq 3.$$

Es ergibt sich jetzt, da $\log s = B \log x$ und

$$M^{-10r/11} s x = 3M^{-5r/11} x^{1/2} \leq 3x^{(-3/2r)(5r/11)+1/2} = 3x^{-2/11}$$

ist,

$$(19) \quad \sum_{m=M}^{M'} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = B \{r^3 M^{-1/66R} + x^{-2/11}\} \log x.$$

Da die Summe (12) in $B \log x$ Summen der Gestalt (19) zerfällt, so ist, wegen (13),

$$\sum_{x^{3/2r} < m \leq x^{3/2(r-1)}} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = B \{r^3 x^{-1/44rR} + x^{-2/11}\} \log^2 x,$$

woraus die Behauptung (12) unmittelbar folgt.

92

II. O-Probleme

HILFSSATZ 3.

$$(20) \quad S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + Bx \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

Beweis. Wir setzen

$$(21) \quad r_0 = \left\lceil \frac{\log^{1/4} x}{3(\log \log x)^{1/2}} \right\rceil, \quad R_0 = r_0^3 \log r_0, \quad r_1 = 3 \left\lceil \frac{1}{4} \log \log x \right\rceil + 4$$

und nehmen von vornherein x so groß an, daß nicht nur die Bedingung (6.48) erfüllt ist, sondern sogar $r_1 \geq 37$, $r_0 > r_1$ ist. Sodann führen wir S_1, S_2, S_3 durch (6.49) ein. Für S_2, S_3 haben wir dann die Abschätzungen (6.51), (6.52). S_1 soll jetzt auf Grund von Hilfssatz 2 von neuem abgeschätzt werden.

Nach (6.48) und (21) ist

$$\frac{2}{X+4} = \frac{3}{2(r_1-1)}.$$

Wegen (6.49) ist somit

$$(22) \quad S_1 = \sum_{n \leq x^{2/(X+4)}} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x^{3/2r_0}} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{r=r_1}^{r_0} \sigma_r,$$

wo

$$(23) \quad \sigma_r = \sum_{x^{3/2r} < n \leq x^{3/2(r-1)}} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Wegen (21) liefert eine triviale, zu (6.50) analoge Abschätzung

$$(24) \quad \sum_{n \leq x^{3/2r_0}} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = B \sum_{n \leq x^{3/2r_0}} \frac{1}{n} = B \frac{\log x}{r_0} = B \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

Für die Summe (23) gilt die Abschätzung (12). Somit ist, unter Berücksichtigung von (21),

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{r_0} \sigma_r &= B r_0^4 x^{-1/44r_0 R_0} \log^2 x \\ &= B \exp \left(4 \log r_0 - \frac{\log x}{44 r_0^4 \log r_0} + 2 \log \log x \right) \\ &= B \exp \left(4 \cdot \frac{1}{4} \log \log x - \frac{81 \log x (\log \log x)^2}{44 \log x \cdot \frac{1}{4} \log \log x} + 2 \log \log x \right) \\ &= B \exp \left(3 \log \log x - \frac{81}{11} \log \log x \right), \end{aligned}$$

d. h.

$$(25) \quad \sum_{r=1}^{r_0} \sigma_r = B.$$

Aus (22), (24) und (25) folgt

$$S_1 = B \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

In Verbindung mit (6.49), (6.51) und (6.52), ergibt das die folgende Verbesserung von (6.53):

$$(26) \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = B \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

Aus (2.1) und (26) ergibt sich die Behauptung (20).

SATZ 1.

$$(27) \quad P_4(x) = B x \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}.$$

Beweis. (27) folgt aus (20) genau so, wie (2.4) aus (2.2) und (6.54) aus (6.47) folgte.