I KAPITEL

VORBEREITENDE HILFSMITTEL

§ 1. Gaußsche Summen

Die Gaußschen Summen $S(h, q)$ sind durch

$$S(h,q) = \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right) \tag{1}$$

definiert.

Hilfssatz 1. *Sei $(h, q) = 1$. Dann ist*

$$|S(h,q)| = \begin{cases} q^{1/2} & \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 2, \\ 0 & \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4, \\ (2q)^{1/2} & \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases} \tag{2}$$

Beweis. Sei $(h, q) = 1$. Nach (1) ist

$$|S(h,q)|^2 = S(h,q)S(-h,q) = \sum_{a \bmod q} \sum_{c \bmod q} e\left(\frac{h(c^2-a^2)}{q}\right),$$

also, wenn $c = a+l$ gesetzt wird,

$$|S(h,q)|^2 = \sum_{a \bmod q} \sum_{l \bmod q} e\left(\frac{hl(2a+l)}{q}\right) = \sum_{l \bmod q} e\left(\frac{hl^2}{q}\right) \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{2hla}{q}\right).$$

Hierin ist die a-Summe nur dann von Null verschieden, und zwar gleich q, wenn $q|2hl$, also $q|2l$. Diese Bedingung ist bei ungeradem q nur für $l \equiv 0 \pmod q$, und bei geradem q nur für $l \equiv 0$ oder $\frac{1}{2}q \pmod q$ erfüllt. Damit ist die erste Zeile von (2) bewiesen, und für gerades q bekommt man

$$|S(h,q)|^2 = q\left\{1 + e\left(\frac{hq}{4}\right)\right\} = q\{1+(-1)^{hq/2}\},$$

also die zweite und dritte Zeile der Behauptung.

Hilfssatz 2. *Bei ungeradem h ist*

$$S(h, 2^r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r = 1, \\ (1+i^h)2^{r/2} & \text{für} \quad \text{gerade } r, \\ e\left(\frac{h}{8}\right)2^{(r+1)/2} & \text{für} \quad \text{ungerade } r > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Beweis. Für $r = 1$ folgt (3) aus (2). Für $r = 2$ oder 3 kann man (3) direkt mit Hilfe von (1) nachprüfen. Es sei daher $r > 3$. Dann ist $2(r-2) \geqslant r$, folglich

$$S(h, 2^r) = \sum_{a \bmod 2^r} e\left(\frac{ha^2}{2^r}\right) = \sum_{c \bmod 2^{r-2}} \sum_{b \bmod 4} e\left(\frac{h(2^{r-2}b+c)^2}{2^r}\right)$$

$$= \sum_{c \bmod 2^{r-2}} e\left(\frac{hc^2}{2^r}\right) \sum_{b \bmod 4} e\left(\frac{hcb}{2}\right)$$

$$= 4 \sum_{\substack{c \bmod 2^{r-2} \\ 2|c}} e\left(\frac{hc^2}{2^r}\right) = 4 \sum_{c \bmod 2^{r-3}} e\left(\frac{hc^2}{2^{r-2}}\right)$$

(die letzte Summe ergibt sich aus der vorletzten, wenn man c durch $2c$ ersetzt)

$$= 4 \sum_{c \bmod 2^{r-3}} \frac{1}{2}\left\{e\left(\frac{hc^2}{2^{r-2}}\right) + e\left(\frac{h(c+2^{r-3})^2}{2^{r-2}}\right)\right\}$$

$$= 2 \sum_{c \bmod 2^{r-2}} e\left(\frac{hc^2}{2^{r-2}}\right) = 2S(h, 2^{r-2}),$$

d. h.

$$S(h, 2^r) = 2S(h, 2^{r-2}).$$

Von hieraus ergibt sich durch Induktion

$$S(h, 2^r) = \begin{cases} 2^{(r-2)/2} S(h, 4) & \text{für gerade } r, \\ 2^{(r-3)/2} S(h, 8) & \text{für ungerade } r > 1. \end{cases}$$

Setzt man hier für $S(h, 4)$ und $S(h, 8)$ die sich aus (3) für $r = 2$ und 3 ergebenden Ausdrücke, so bekommt man den Hilfssatz für $r > 3$.

Hilfssatz 3. *Bei $p \nmid h$ ist*

$$S(h, p^r) = \begin{cases} p^{r/2} & \text{für gerade } r, \\ p^{(r-1)/2} S(h, p) & \text{für ungerade } r. \end{cases} \tag{4}$$

Beweis. Es sei $r > 1$, da für $r = 1$ die Behauptung klar ist. Dann ist

$$S(h, p^r) = \sum_{a \bmod p^r} e\left(\frac{ha^2}{p^r}\right) = \sum_{c \bmod p^{r-1}} \sum_{b \bmod p} e\left(\frac{h(p^{r-1}b+c)^2}{p^r}\right)$$

$$= \sum_{c \bmod p^{r-1}} e\left(\frac{hc^2}{p^r}\right) \sum_{b \bmod p} e\left(\frac{2hcb}{p}\right).$$

Hier ist die b-Summe gleich p für $p|c$ und gleich Null für $p \nmid c$. Daher ist

$$S(h, p^r) = p \sum_{\substack{c \bmod p^{r-1} \\ p|c}} e\left(\frac{hc^2}{p^r}\right) = p \sum_{c \bmod p^{r-2}} e\left(\frac{hc^2}{p^{r-2}}\right),$$

folglich

$$S(h, p^r) = pS(h, p^{r-2}).$$

Hieraus ergibt sich der Hilfssatz durch Induktion, wegen $S(h, p^0) = S(h, 1) = 1$.

Hilfssatz 4. *Für* $p \nmid h$ *ist*

(5) $$S(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) S(1, p),$$

Außerdem ist

(6) $$S^2(1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) p.$$

Beweis. Nach (1) ist

(7) $$S(h, p) = \sum_{a \bmod p} e\left(\frac{ha^2}{p}\right) = 1 + \sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{ha^2}{p}\right).$$

Es durchlaufe a ein reduziertes Restsystem nach dem Modul p. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem h quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist.

Falls h quadratischer Rest von p, d. h. $\left(\frac{h}{p}\right) = 1$ ist, so durchläuft ha^2 dieselben Restklassen nach p wie a^2, so daß

$$S(h, p) = 1 + \sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{a^2}{p}\right) = S(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) S(1, p).$$

Ist dagegen h quadratischer Nichtrest von p, d. h. $\left(\frac{h}{p}\right) = -1$, so durchläuft ha^2 alle quadratischen Nichtreste, jeden zweimal, und a^2

durchläuft alle quadratischen Reste, auch jeden zweimal. Das gibt

$$\sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{ha^2}{p}\right) + \sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{a^2}{p}\right) = 2 \sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{a}{p}\right) = -2,$$

woraus, nach (7),

$$S(h, p) = -1 - \sum_{a \bmod p}{}' e\left(\frac{a^2}{p}\right) = -S(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) S(1, p).$$

Damit ist (5) in beiden Fällen bewiesen. Nimmt man darin $h = -1$, so folgt

$$S(-1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) S(1, p).$$

Andererseits ist nach (1) und (2)

$$S(1, p) S(-1, p) = |S(1, p)|^2 = p.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich (6).

Hilfssatz 5. *Für* $(q_1, q_2) = 1$ *ist*

(8) $$S(h, q_1 q_2) = S(hq_2, q_1) S(hq_1, q_2).$$

Beweis. Nach (1) ist

$$S(hq_2, q_1) S(hq_1, q_2) = \sum_{a_1 \bmod q_1} \sum_{a_2 \bmod q_2} e\left(\frac{hq_2 a_1^2}{q_1} + \frac{hq_1 a_2^2}{q_2}\right)$$

$$= \sum_{a_1} \sum_{a_2} e\left(\frac{h(a_1^2 q_2^2 + a_2^2 q_1^2)}{q_1 q_2}\right) = \sum_{a_1} \sum_{a_2} e\left(\frac{h(a_1 q_2 + a_2 q_1)^2}{q_1 q_2}\right).$$

Durchläuft a_1 ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q_1 und a_2 ein ebensolches System nach dem Modul q_2, so durchläuft $a = a_1 q_2 + a_2 q_1$ ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $q_1 q_2$. Daher ist

$$S(hq_2, q_1) S(hq_1, q_2) = \sum_{a \bmod q_1 q_2} e\left(\frac{ha^2}{q_1 q_2}\right) = S(h, q_1 q_2).$$

Hilfssatz 6. *Es sei* $(h, q) = 1$. *Dann ist*

(9) $$S^2(h, q) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{q}\right) q & \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 2, \\ 0 & \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4, \\ 2i^h q & \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Beweis. Es sei zunächst q ungerade. Für $q = 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus (1). Für $q = p^r$ ergibt sie sich aus (4)-(6). Sei weiter $q = q_1 q_2$, $q_1 > 1$, $q_2 > 1$, $(q_1, q_2) = 1$ und die Behauptung für $q = q_1$, $q = q_2$ richtig, d. h.

$$S^2(hq_2, q_1) = \left(\frac{-1}{q_1}\right) q_1, \qquad S^2(hq_1, q_2) = \left(\frac{-1}{q_2}\right) q_2.$$

Wegen (8) ist dann

$$S^2(h, q_1 q_2) = \left(\frac{-1}{q_1}\right) q_1 \left(\frac{-1}{q_2}\right) q_2 = \left(\frac{-1}{q_1 q_2}\right) q_1 q_2,$$

so daß die Behauptung auch für $q = q_1 q_2$ richtig ist. Damit ist die erste Zeile von (9) für jedes ungerade q durch Induktion bewiesen.

Die zweite Zeile ist wegen (2) richtig.

Für $q = 2^r$, $r > 1$ ist die dritte Zeile von (9) wegen (3) richtig. Für $q = 2^r u$, $r > 1$ ist aber nach dem bereits Bewiesenen und (8)

$$S^2(h, q) = S^2(hu, 2^r)\, S^2(h2^r, u) = 2^{r+1} i^{hu} \left(\frac{-1}{u}\right) u = 2 i^h q.$$

Hilfssatz 7. *Für $p \nmid h$ ist*

$$S(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\{(p-1)/2\}^2} p^{1/2}, \tag{10}$$

insbesondere

$$S(1, p) = i^{\{(p-1)/2\}^2} p^{1/2}. \tag{11}$$

Beweis. Wegen (5) genügt es (11) zu beweisen. Es werde zur Abkürzung $S(1, p) = S$ gesetzt. Wegen

$$\left\{\tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i)\right\}^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)$$

und (6) ist

$$\tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i)\, S = \pm p^{1/2}. \tag{12}$$

Andererseits ist

$$S - 1 = \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{a^2}{p}\right) = \sum_{a=1}^{(p-1)/2} \left\{ e\left(\frac{a^2}{p}\right) + e\left(\frac{(p-a)^2}{p}\right) \right\} = 2 \sum_{a=1}^{(p-1)/2} e\left(\frac{a^2}{p}\right). \tag{13}$$

Ist weiter $f(t)$ eine beliebige Funktion, die für alle positiven t bestimmt ist, so folgt

$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2} f(a) + \sum_{a=1}^{(p-1)/2} f\left(\frac{p}{2} - a\right) = \sum_{a=1}^{p-1} f\left(\frac{a}{2}\right).$$

Denn die erste Summe links enthält diejenigen Summanden der rechten Seite, die geraden a entsprechen, während die zweite Summe links die

Summanden der rechten Seite mit ungeraden a enthält. Setzt man hierin insbesondere $f(t) = e(t^2/p)$, woraus

$$f\left(\frac{p}{2} - a\right) = i^p e\left(\frac{a^2}{p}\right),$$

so ergibt sich wegen (13)

$$\tfrac{1}{2}(1+i^p)(S-1) = \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{a^2}{4p}\right) = W + Z, \tag{14}$$

wobei

$$W = \sum_{a \leq p^{1/2}} e\left(\frac{a^2}{4p}\right), \qquad Z = \sum_{p^{1/2} < a \leq p-1} e\left(\frac{a^2}{4p}\right). \tag{15}$$

Nach (14) ist

$$\tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i)\, S - \tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i) = (1-i)(W+Z).$$

Hieraus folgt, da

$$\mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i)\right\} = 1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

daß

$$\mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{2}(1+i^p)(1-i)S\right\} \geq \mathrm{Re}\left\{(1-i)(W+Z)\right\} \geq \mathrm{Re}\left\{(1-i)W\right\} - 2^{1/2}|Z|. \tag{16}$$

Nach (15) ist

$$\mathrm{Re}\left\{(1-i)W\right\} = \sum_{a \leq p^{1/2}} \left(\cos\frac{\pi a^2}{2p} + \sin\frac{\pi a^2}{2p}\right) \geq [p^{1/2}] \geq \tfrac{1}{2} p^{1/2}, \tag{17}$$

da $\cos\theta + \sin\theta \geq 1$ für $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Um die Summe Z zu behandeln, setzen wir

$$w_a = e\left(\frac{a(a+1)}{4p}\right), \qquad z_a = \operatorname{cosec}\frac{\pi a}{2p}, \qquad q = [p^{1/2}]. \tag{18}$$

Dann ist

$$(w_a - w_{a-1})\, z_a = 2ie\left(\frac{a^2}{4p}\right),$$

also, nach (15) und (18),

$$2iZ = \sum_{a=q+1}^{p-1} (w_a - w_{a-1})\, z_a. \tag{19}$$

Andererseits gilt für beliebige w_a und z_a die Identität

$$\sum_{a=q+1}^{p-1} (w_a - w_{a-1})\, z_a = \sum_{a=q+1}^{p-1} w_a (z_a - z_{a+1}) + w_{p-1} z_p - w_q z_{q+1}. \tag{20}$$

Nach (18) ist $|w_a| = 1$, während z_a positiv ist und mit zunehmendem a abnimmt. Daher folgt aus (19), (20) und (18)

$$|Z| \leqslant \tfrac12\Big\{\sum_{a=q+1}^{p-1}(z_a - z_{a+1}) + z_p + z_{q+1}\Big\} = z_{q+1} \leqslant \frac{p}{q+1} \leqslant p^{1/2}.$$

In Verbindung mit (16) und (17) ergibt dies

$$\operatorname{Re}\{\tfrac12(1+i^p)(1-i)S\} \geqslant (\tfrac12 - 2^{1/2})p^{1/2} > -p^{1/2}.$$

Wegen (12) folgt hieraus

$$\tfrac12(1+i^p)(1-i)S = p^{1/2},$$

und das besagt genau dasselbe, wie (11).

HILFSSATZ 8. *Für ungerades q und $(h, q) = 1$ ist*

(21) $$S(h, q) = \left(\frac{h}{q}\right) i^{\{(q-1)/2\}^2} q^{1/2},$$

d. h.

(22) $$S(h, q) = \begin{cases} \left(\frac{h}{q}\right) q^{1/2} & \textit{für} \quad q \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\frac{h}{q}\right) i q^{1/2} & \textit{für} \quad q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Beweis. Für $q = 1$ ist die Behauptung nach (1) klar; für $q = p^r$ folgt sie aus (4) und (10).

Ist endlich $q = q_1 q_2$, $q_1 > 1$, $q_2 > 1$, $(q_1, q_2) = 1$ und die Behauptung (21) für $q = q_1$ und $q = q_2$ richtig, so folgt nach (8) und dem Reziprozitätsgesetz für das Jacobische Symbol

$$\begin{aligned} S(h, q_1 q_2) &= \left(\frac{h q_2}{q_1}\right)\left(\frac{h q_1}{q_2}\right) i^{\frac14(q_1-1)^2+\frac14(q_2-1)^2} (q_1 q_2)^{1/2} \\ &= \left(\frac{h}{q_1 q_2}\right)(-1)^{\frac14(q_1-1)(q_2-1)} i^{\frac14(q_1-1)^2+\frac14(q_2-1)^2} (q_1 q_2)^{1/2} \\ &= \left(\frac{h}{q_1 q_2}\right) i^{\frac14(q_1 q_2-1)^2} (q_1 q_2)^{1/2}, \end{aligned}$$

so daß (21) auch für $q = q_1 q_2$ richtig ist.

HILFSSATZ 9. *Für $q \equiv 0 \pmod 4$, $h > 0$, $(h, q) = 1$ ist*

(23) $$S(h, q) = \left(\frac{2q}{h}\right) e\left(\frac{h}{8}\right) (2q)^{1/2}.$$

Beweis. Setzt man $q = 2^r u$, so ist nach (8) und (21)

$$S(h, q) = S(2^r h, u) S(hu, 2^r) = \left(\frac{2^r h}{u}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2} u^{1/2} S(hu, 2^r).$$

In Verbindung mit (3), ergibt dies

(24) $$S(h, q) = \begin{cases} \left(\frac{h}{u}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2} (1 + i^{hu}) q^{1/2} & \text{für gerade } r, \\ \left(\frac{2h}{u}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2} e\left(\frac{hu}{8}\right) (2q)^{1/2} & \text{für ungerade } r. \end{cases}$$

Ein Vergleich von (23) und (24) zeigt, daß es genügt, die beiden folgenden Ungleichungen nachzuprüfen:

$$\left(\frac{h}{u}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2} (1 + i^{hu}) = \left(\frac{2u}{h}\right) e\left(\frac{h}{8}\right) 2^{1/2},$$

$$\left(\frac{2h}{u}\right) i^{\{(u-1)/2\}^2} e\left(\frac{h(u-1)}{8}\right) = \left(\frac{u}{h}\right).$$

Dies wird bequem mittels des Reziprozitätsgesetzes ausgeführt, indem man die Fälle $h, u \equiv 1,1; 1,3; 3,1; 3,3 \pmod 4$ einzeln betrachtet.

Neben der Summe (1) wird noch eine Abart von ihr, nämlich die Summe

(25) $$S(h, b, q) = \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2 + ba}{q}\right),$$

vorkommen. Für sie brauchen wir nur die triviale Abschätzung, welche durch den folgenden Hilfssatz geliefert wird.

HILFSSATZ 10. *Für $(h, q) = 1$ ist*

(26) $$|S(h, b, q)| \leqslant 2 q^{1/2}.$$

Beweis. Wie beim Beweise von Hilfssatz 1, bekommt man

$$|S(h, b, q)|^2 = \sum_{l \bmod q} e\left(\frac{hl^2 + bl}{q}\right) \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{2hla}{q}\right),$$

und hierin ist die a-Summe für höchstens zwei l-Werte von 0 verschieden.

Ferner werden wir im folgenden vielfach auch die sogenannte Ramanujansche Summe

(27) $$C(h, q) = \sideset{}{'}\sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha}{q}\right) = \sideset{}{'}\sum_{a \bmod q} e\left(-\frac{ha}{q}\right)$$

verwenden. Die von ihr benötigten Eigenschaften werden wir an geeigneter Stelle entwickeln (Hilfssätze 3.3.3 und 5.1.7).

§ 2. Über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten

Es sei

(1) $$\sigma(t)=\sum_{d|t} d$$

die Teilersumme von t; diese Funktion ist Null zu setzen, wenn t keine ganze Zahl ist.

Ferner sei im vorliegenden Paragraphen $|w|<1$, und es mögen folgende Abkürzungen, auch nur für den vorliegenden Paragraphen, gelten:

(2) $$W_r=\frac{w^r}{1-w^r}=\sum_{m=1}^{\infty} w^{mr},$$

(3) $$S=S(w;\theta)=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+W_1\sin\theta+W_2\sin 2\theta+\ldots,$$

(4) $$Z_1=Z_1(w,\theta)=\left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2+W_1(1+W_1)\cos\theta+W_2(1+W_2)\cos 2\theta+\ldots,$$

(5) $$Z_2=Z_2(w,\theta)=W_1(1-\cos\theta)+2W_2(1-\cos 2\theta)+3W_3(1-\cos 3\theta)+\ldots$$

Hilfssatz 1.

(6) $$W_r(1+W_r)=\frac{w^r}{(1-w^r)^2}=\sum_{m=1}^{\infty} m w^{mr},$$

(7) $$W_r W_{q-r}=W_q(1+W_r+W_{q-r}) \qquad (q>r),$$

(8) $$W_{q+r}+W_r W_{q+r}=W_q(W_r-W_{q+r}).$$

Beweis. Die Richtigkeit des Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus (2).

Hilfssatz 2.

(9) $$\sum_{m=1}^{\infty} W_m(1+W_m)=\sum_{n=1}^{\infty} nW_n,$$

(10) $$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}W_{2m}(1+W_{2m})=\sum_{u=1}^{\infty} uW_{2u}.$$

Beweis. Wegen (6) und (2) ist die linke Seite von (9) gleich

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{(1-w^m)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n w^{mn}=\sum_{n=1}^{\infty} n\sum_{m=1}^{\infty} w^{mn}=\sum_{n=1}^{\infty} nW_n,$$

und die linke Seite von (10) ist gleich

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}w^{2m}}{(1-w^{2m})^2}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\sum_{r=1}^{\infty} r w^{2mr}$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty} r\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}w^{2mr}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rw^{2r}}{1+w^{2r}}$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{rw^{2r}}{1-w^{2r}}-\frac{2rw^{4r}}{1-w^{4r}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)w^{4n-2}}{1-w^{4n-2}}=\sum_{u=1}^{\infty} uW_{2u}.$$

Hilfssatz 3.

(11) $$S^2(w;\theta)=Z_1(w,\theta)+\tfrac{1}{2}Z_2(w,\theta).$$

Beweis. Nach (3) ist

(12) $$S^2=\left\{\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} W_n\sin n\theta\right\}^2=\left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2+S_1+S_2,$$

wobei

$$S_1=\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} W_n\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin n\theta,\qquad S_2=\sum_{m,n=1}^{\infty} W_m W_n\sin m\theta\sin n\theta.$$

Benutzt man hier die beiden Identitäten

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin n\theta=\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos(n-1)\theta+\frac{1}{2}\cos n\theta,$$

$$2\sin m\theta\sin n\theta=\cos(m-n)\theta-\cos(m+n)\theta,$$

von denen die erste ohne Schwierigkeit durch Induktion nachgeprüft werden kann, so folgt

(13) $$S_1=\sum_{n=1}^{\infty} W_n\{\tfrac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos(n-1)\theta+\tfrac{1}{2}\cos n\theta\},$$

(14) $$S_2=\tfrac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty} W_m W_n\{\cos(m-n)\theta-\cos(m+n)\theta\}.$$

Schreibt man jetzt (13), (14) als einfache Kosinusreihen, so folgt

(15) $$S_1+S_2=C_0+\sum_{q=1}^{\infty} C_q\cos q\theta,$$

wobei die Koeffizienten C_h nicht von θ abhängen.

Wir betrachten zunächst C_0. Zu dieser Konstanten liefert die Reihe (13) den Beitrag $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} W_n$, die Reihe (14) den Beitrag $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} W_n^2$, welchen die Glieder mit $m = n$ ergeben. Im Hinblick auf (9) folgt also

$$C_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(W_n+W_n^2) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nW_n. \tag{16}$$

Der Beitrag zu C_q von (13) ist

$$\tfrac{1}{2}W_q+W_{q+1}+W_{q+2}+\ldots = \tfrac{1}{2}W_q+\sum_{r=1}^{\infty} W_{q+r};$$

von (14) ist er

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(W_1W_{q+1}+W_2W_{q+2}+\ldots)+\tfrac{1}{2}(W_{q+1}W_1+W_{q+2}W_2+\ldots)-\\ -\tfrac{1}{2}(W_1W_{q-1}+W_2W_{q-2}+\ldots+W_{q-1}W_1)\\ =\sum_{r=1}^{\infty} W_rW_{q+r}-\tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{q-1} W_rW_{q-r}.\end{aligned}$$

Somit ist, mit Rücksicht auf (7) und (8),

$$\begin{aligned}C_q &= \tfrac{1}{2}W_q+W_q\sum_{r=1}^{\infty}(W_r-W_{q+r})-\tfrac{1}{2}W_q\sum_{r=1}^{q-1}(1+W_r+W_{q-r})\\ &= W_q\{\tfrac{1}{2}+W_1+W_2+\ldots+W_q-\tfrac{1}{2}(q-1)-W_1-W_2-\ldots-W_{q-1}\}\\ &= W_q(1+W_q-\tfrac{1}{2}q).\end{aligned} \tag{17}$$

Aus (12), (15), (16), (17), (4) und (5) ergibt sich

$$\begin{aligned}S^2 &= \left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} qW_q+\sum_{q=1}^{\infty} W_q(1+W_q-\tfrac{1}{2}q)\cos q\theta\\ &= \left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2+\sum_{q=1}^{\infty} W_q(1+W_q)\cos q\theta+\tfrac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} qW_q(1-\cos q\theta)\\ &= Z_1+\tfrac{1}{2}Z_2.\end{aligned}$$

HILFSSATZ 4.

$$r_2(n) = 4\sum_{u|n}\left(\frac{-1}{u}\right). \tag{18}$$

Beweis. Sei $f(n)$ die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz

$$m^2 \equiv -1 \pmod{n}.$$

$\varrho(n)$ bezeichne die Lösungsanzahl der Gleichung

$$a^2+b^2 = n$$

in teilerfremden Zahlen a, b. Dann ist

$$\varrho(n) = 4f(n)$$

(Winogradow [4], Aufgabe 9,a zu Kapitel V). Andererseits ist

$$r_2(n) = \sum_{a^2+b^2=n} 1 = \sum_{d^2|n}\ \sum_{\substack{a^2+b^2=n\\(a,b)=d}} 1.$$

Ersetzt man hier a, b durch da, db, so folgt

$$r_2(n) = \sum_{d^2|n}\ \sum_{\substack{a^2+b^2=n/d^2\\(a,b)=1}} 1 = \sum_{d^2|n}\varrho\left(\frac{n}{d^2}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{4}r_2(n) = \sum_{d^2|n} f\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Die Funktion $f(n)$ ist multiplikativ, d. h. es ist

$$f(n_1n_2) = f(n_1)f(n_2) \quad \text{für} \quad (n_1, n_2) = 1$$

(Winogradow [4], IV Kap., § 5). Also ist auch die Funktion $\frac{1}{4}r_2(n)$ multiplikativ, denn man hat zunächst

$$\frac{1}{4}r_2(n_1n_2) = \sum_{d^2|n_1n_2} f\left(\frac{n_1n_2}{d^2}\right).$$

Wegen $(n_1, n_2) = 1$ ist hier $d = d_1d_2$, wobei d_1 alle Zahlen mit $d_1^2|n_1$, d_2 alle Zahlen mit $d_2^2|n_2$ durchläuft. Daher ist

$$f\left(\frac{n_1n_2}{d^2}\right) = f\left(\frac{n_1}{d_1^2}\cdot\frac{n_2}{d_2^2}\right) = f\left(\frac{n_1}{d_1^2}\right)f\left(\frac{n_2}{d_2^2}\right),$$

und somit

$$\tfrac{1}{4}r_2(n_1n_2) = \sum_{d_1^2|n_1} f\left(\frac{n_1}{d_1^2}\right)\sum_{d_2^2|n_2} f\left(\frac{n_2}{d_2^2}\right) = \tfrac{1}{4}r_2(n_1)\,\tfrac{1}{4}r_2(n_2).$$

Da auch die Funktion $\sum_{u|n}\left(\frac{-1}{u}\right)$ multiplikativ ist, so genügt es, die Behauptung (18) für $n = 1$ und $n = q^r$, q Primzahl, zu beweisen.

Der Fall $n = 1$ ist klar, denn (18) besagt dann, daß $4 = 4 \cdot 1$ ist. Also sei $n = q^r$. Wegen $f(1) = 1$ ist dann

$$\tfrac{1}{4} r_2(q^r) = \sum_{d^2 | q^r} f\left(\frac{q^r}{d^2}\right) = \begin{cases} 1+f(q^2)+\ldots+f(q^r) & \text{für gerade } r, \\ f(q)+f(q^3)+\ldots+f(q^r) & \text{für ungerade } r. \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt gesondert die Fälle $q = 2$ und $q = p$.

1) Es sei $q = 2$. Dann ist $f(q) = 1, f(q^{j+1}) = 0$ (Winogradow [4], Kap. V, § 4), also $\tfrac{1}{4} r_2(2^r) = 1$, in Übereinstimmung mit (18).

2) Es sei $q = p$. Dann ist

$$f(q^j) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{für} \quad q \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

(Winogradow [4], Kap. V, § 4), mithin

$$\tfrac{1}{4} r_2(p^r) = \begin{cases} 1+2\cdot\dfrac{r}{2} = r+1 & \text{für gerade } r, \ p \equiv 1 \pmod 4, \\ 2\dfrac{r+1}{2} = r+1 & \text{für ungerade } r, \ p \equiv 1 \pmod 4, \\ 1 & \text{für gerade } r, \ p \equiv 3 \pmod 4, \\ 0 & \text{für ungerade } r, \ p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Dasselbe liefert auch (18), denn hier ist

$$\sum_{u|n} \left(\frac{-1}{u}\right) = 1 + \left(\frac{-1}{p}\right) + \left(\frac{-1}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{-1}{p}\right)^r.$$

Hilfssatz 5.

(19) $$16 S^2\left(w; \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} r_4(m) w^m.$$

Beweis. Einerseits folgt aus (2), (3) und (18)

$$\begin{aligned} 4S\left(w; \frac{\pi}{2}\right) &= 1+4W_1-4W_3+4W_5-4W_7+\ldots \\ &= 1+4\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\sum_{m=1}^{\infty} w^{mu} \\ &= 1+4\sum_{n=1}^{\infty} w^n \sum_{u|n}\left(\frac{-1}{u}\right) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) w^n = \sum_{m=0}^{\infty} r_2(m) w^m. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus der Definition von $r_2(m)$ und $r_4(m)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_2(m) w^m = \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} w^{m^2}\Big\}^2,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_4(m) w^m = \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} w^{m^2}\Big\}^4,$$

also

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_4(m) w^m = \Big\{\sum_{m=0}^{\infty} r_2(m) w^m\Big\}^2.$$

Hilfssatz 6.

(20) $$r_4(2^a v) = \begin{cases} 8\sigma(v) & \textit{für} \quad a = 0, \\ 24\sigma(v) & \textit{für} \quad a > 0. \end{cases}$$

Beweis. Nach (4) und (10) ist

$$Z_1\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m W_{2m}(1+W_{2m}) = \frac{1}{16} - \sum_{u=1}^{\infty} u W_{2u}.$$

Nach (5) ist

$$Z_2\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{u=1}^{\infty} u W_u + 4\sum_{u=1}^{\infty} u W_{2u}.$$

Somit ist

$$Z_1\left(w, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} Z_2\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{\infty} u W_u + \sum_{u=1}^{\infty} u W_{2u},$$

und hierin hat man nach (2)

$$\sum_{u=1}^{\infty} u W_u = \sum_{u=1}^{\infty} u \sum_{m=1}^{\infty} w^{mu} = \sum_{n=1}^{\infty} w^n \sum_{u|n} u,$$

$$\sum_{u=1}^{\infty} u W_{2u} = \sum_{u=1}^{\infty} u \sum_{m=1}^{\infty} w^{2mu} = \sum_{n=1}^{\infty} w^{2n} \sum_{u|n} u = \sum_{n=1}^{\infty} w^n \sum_{u|\frac{n}{2}} u.$$

Folglich ist

(21) $$16\left\{Z_1\left(w, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} Z_2\left(w, \frac{\pi}{2}\right)\right\} = 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty} w^n \sum_{u|n} u + 16\sum_{n=1}^{\infty} w^n \sum_{u|\frac{n}{2}} u.$$

Nach den Hilfssätzen 3 und 5 ist $r_4(n)$ der Koeffizient von w^n auf der rechten Seite von (21). Das gibt

(22) $$r_4(n) = 8\sum_{u|n} u + 16\sum_{u|\frac{n}{2}} u.$$

Für $n = v$ ist die zweite Summe in (22) gleich Null, und es ergibt sich wegen (1)

$$r_4(v) = 8\sum_{u|v} u = 8\sum_{d|v} d = 8\sigma(v).$$

Für $n = 2^a v,\ a > 0$ erhält man analog

$$r_4(2^a v) = 8\sum_{u|v} u + 16\sum_{u|v} u = 24\sum_{d|v} d = 24\sigma(v).$$

Es sei

(23)
$$S(t) = \sum_{n \leqslant t} \sigma(n).$$

Hilfssatz 7.

(24)
$$A_4(t) = 1 + 8S(t) - 32S\left(\frac{t}{4}\right).$$

Beweis. Nach (1), (20) und der Definition von $A_4(t)$ ist

(25)
$$A_4(t) = 1 + \sum_{n \leqslant t} r_4(n) = 1 + 8\sum_{u \leqslant t}\sum_{d|u} d + 24\sum_{2n \leqslant t}\sum_{v|n} v.$$

Hierin ist wegen (1) und (23)

$$\sum_{2n \leqslant t}\sum_{v|n} v = \sum_{n \leqslant t/2}\Big(\sum_{d|n} d - \sum_{2d|n} 2d\Big)$$

$$= \sum_{n \leqslant t/2}\sigma(n) - 2\sum_{2n \leqslant t/2}\sum_{2d|2n} d = \sum_{n \leqslant t/2}\sigma(n) - 2\sum_{n \leqslant t/4}\sigma(n)$$

(26)
$$= S\left(\frac{t}{2}\right) - 2S\left(\frac{t}{4}\right),$$

folglich

$$\sum_{u \leqslant t}\sum_{d|u} d = \sum_{n \leqslant t}\sum_{d|n} d - \sum_{2n \leqslant t}\sum_{d|2n} d$$

$$= S(t) - \sum_{2n \leqslant t}\Big(\sum_{2d|2n} 2d + \sum_{v|n} v\Big)$$

$$= S(t) - 2\sum_{n \leqslant t/2}\sigma(n) - \sum_{2n \leqslant t}\sum_{v|n} v$$

$$= S(t) - 2S\left(\frac{t}{2}\right) - \left\{S\left(\frac{t}{2}\right) - 2S\left(\frac{t}{4}\right)\right\}$$

(27)
$$= S(t) - 3S\left(\frac{t}{2}\right) + 2S\left(\frac{t}{4}\right).$$

Die Behauptung (24) des Hilfssatzes folgt aus (25)-(27).

§ 3. Eulersche Summenformel

Es sei, in diesem ganzen Buch,

(1)
$$\psi(y) = y - [y] - \tfrac{1}{2}.$$

Für uns wird in den meisten Fällen die folgende einfache Gestalt der Eulerschen Summenformel genügen:

Hilfssatz 1. *Die, nicht notwendig reelle, Funktion $f(y)$ habe eine stetige Ableitung im Intervall $X \leqslant y \leqslant Y$, wo $X < Y$.*
Dann ist

(2)
$$\sum_{X < m \leqslant Y} f(m) = \int_X^Y f(y)\,dy + \psi(X)f(X) - \psi(Y)f(Y) + \int_X^Y \psi(y)f'(y)\,dy.$$

Beweis. Ist $X < Y_1 < Y$ und die Formel (2) für jede der Summen

$$\sum_{X < m \leqslant Y_1} f(m) \quad \text{und} \quad \sum_{Y_1 < m \leqslant Y} f(m)$$

richtig, so bekommt man durch Addition der beiden betreffenden Formeln die zu beweisende Formel (2). Daher darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß auf der Strecke $X < m \leqslant Y$ höchstens eine ganze Zahl m gelegen ist. Wir betrachten jetzt drei Fälle.

1) Auf der Strecke $X < m \leqslant Y$ gebe es keine ganze Zahl. Dann liefert partielle Integration, unter Berücksichtigung von (1),

$$\int_X^Y \psi(y)f'(y)\,dy = \psi(Y)f(Y) - \psi(X)f(X) - \int_X^Y f(y)\,dy,$$

und das ist die Formel (2), da die links in (2) stehende Summe verschwindet.

2) Auf der Strecke $X < m \leqslant Y$ gebe es genau eine ganze Zahl m, und zwar sei dies m kleiner als Y. Dann liefert partielle Integration wegen (1)

$$\int_X^Y \psi(y)f'(y)\,dy = \int_X^m + \int_m^Y = \int_X^{m-0} + \int_m^Y$$

$$= \psi(m-0)f(m) - \psi(X)f(X) - \int_X^m f(y)\,dy$$

$$+ \psi(Y)f(Y) - \psi(m)f(m) - \int_m^Y f(y)\,dy$$

$$= f(m) + \psi(Y)f(Y) - \psi(X)f(X) - \int_X^Y f(y)\,dy,$$

womit (2) auch für diesen Fall bewiesen ist, da hier die linke Seite gleich $f(m)$ ist.

3) Es sei $m = Y$ die einzige ganze Zahl auf der Strecke $X < m \leqslant Y$. Dann ist

$$\int_X^Y \psi(y) f'(y)\,dy = \int_X^{Y-0} = \psi(Y-0) f(Y) - \psi(X) f(X) - \int_X^Y f(y)\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2} f(Y) - \psi(X) f(X) - \int_X^Y f(y)\,dy$$

$$= f(Y) + \psi(Y) f(Y) - \psi(X) f(X) - \int_X^Y f(y)\,dy,$$

was zu beweisen war.

Für den folgenden Hilfssatz, der Hilfssatz 1 als Spezialfall enthält, und auch für das V Kapitel, brauchen wir einige Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen B_a und der Bernoullischen Polynome $B_a(y)$, bezüglich deren auf das Buch von Nörlund [1] verwiesen sei. Es werde noch gesetzt

(3) $$\bar{B}_a(y) = B_a(y - [y]).$$

Hilfssatz 2. *Die, nicht notwendig reelle, Funktion $f(y)$ habe eine stetige r-te Ableitung im Intervall $X \leqslant y \leqslant Y$, wo $X < Y$. Dann ist*

(4) $$\sum_{X<m\leqslant Y} f(m) = \int_X^Y f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{r} \frac{(-1)^n}{n!} \{\bar{B}_n(Y) f^{(n-1)}(Y) - \bar{B}_n(X) f^{(n-1)}(X)\} + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_X^Y \bar{B}_r(y) f^{(r)}(y)\,dy.$$

Beweis. Wegen $B_{r+1}(1) = B_{r+1}(0)$ ist die Funktion $\bar{B}_{r+1}(y)$ im Punkt $y = 1$, und folglich für alle Werte von y, stetig. Aus der Differentiationsformel

$$B'_r(y) = r B_{r-1}(y)$$

der Bernoullischen Polynome ergibt sich daher

(5) $$\frac{d}{dy} \bar{B}_{r+1}(y) = (r+1) \bar{B}_r(y).$$

Wegen $B_1(y) = y - \frac{1}{2}$ folgt aus (1) und (3)

(6) $$\bar{B}_1(y) = \psi(y).$$

Für $r = 1$ ist daher (4) nach (2) erfüllt.

Hat nun $f(y)$ im Intervall $X \leqslant y \leqslant Y$ eine stetige $(r+1)$-te Ableitung, so liefert partielle Integration, wegen (5),

$$\int_X^Y \bar{B}_{r+1}(y) f^{(r+1)}(y)\,dy = \bar{B}_{r+1}(Y) f^{(r)}(Y) - \bar{B}_{r+1}(X) f^{(r)}(X) - (r+1) \int_X^Y \bar{B}_r(y) f^{(r)}(y)\,dy,$$

d. h.

$$\frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_X^Y \bar{B}_r(y) f^{(r)}(y)\,dy$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \{\bar{B}_{r+1}(Y) f^{(r)}(Y) - \bar{B}_{r+1}(X) f^{(r)}(X)\} + \frac{(-1)^{r+2}}{(r+1)!} \int_X^Y \bar{B}_{r+1}(y) f^{(r+1)}(y)\,dy.$$

Aus der Richtigkeit von (4) folgt also die Richtigkeit der entsprechenden Formel für $r+1$.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit zwei Hilfssätzen, die bei mancher Gelegenheit nützlich sind. Der erste ist als Abelsches Lemma, oder Abelsche Transformation, oder partielle Summation bekannt.

Hilfssatz 3. *Für $a \leqslant b$ ist identisch*

(7) $$\sum_{m=a}^{b} w_m z_m = \sum_{m=a}^{b} W_m (z_m - z_{m+1}) + W_b z_{b+1}, \quad \text{wo} \quad W_m = \sum_{h=a}^{m} w_h.$$

Beweis. Für $a \leqslant m \leqslant b$ ist der Koeffizient von z_m auf der rechten Seite von (7) gleich $W_m - W_{m-1} = w_m$. Für $m = b+1$ ist er gleich $W_b - W_b = 0$.

Hilfssatz 4. *Es sei $a < b$, die Funktion $f(y)$ im Intervall $a \leqslant y \leqslant b$ nicht zunehmend. Dann ist*

(8) $$\int_a^b f(y)\,dy \leqslant \sum_{m=a}^{b} f(m) \leqslant f(a) + \int_a^b f(y)\,dy.$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{m=a}^{b} f(m) = f(a) + \sum_{m=a+1}^{b} f(m) \leqslant f(a) + \sum_{m=a+1}^{b} \int_{m-1}^{m} f(y)\,dy = f(a) + \int_a^b f(y)\,dy,$$

$$\sum_{m=a}^{b} f(m) \geqslant \sum_{m=a}^{b-1} \int_m^{m+1} f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy.$$

Hilfssatz 4 wird oft zur Abschätzung einfacher Summen benutzt, und wir werden uns in den meisten Fällen nicht auf ihn berufen.

§ 4. Eine Formel Landaus

HILFSSATZ 1. *Für* $\operatorname{Re}(w) > 0$ *ist*

$$(1)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 w - 2\pi m y w) = w^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pi w \left(y - \frac{mi}{w}\right)^2\right\},$$

wo $\operatorname{Re}(w^{-1/2}) > 0$.

Beweis. Es genügt $w > 0$ anzunehmen, da hieraus der allgemeine Fall mittels analytischer Fortsetzung folgt. Die Funktion

$$f(y) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi(h+y)^2 w\}$$

ist differenzierbar und hat die Periode 1. Daher ist sie in eine Fourierreihe

$$f(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e(my)$$

entwickelbar, wo

$$\begin{aligned} z_m &= \int_0^1 f(y) e(-my)\, dy = \int_0^1 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi(h+y)^2 w - 2\pi i m y\}\, dy \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp\{-\pi(h+y)^2 w - 2\pi i m (h+y)\}\, dy \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_h^{h+1} \exp(-\pi y^2 w - 2\pi i m y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi y^2 w - 2\pi i m y)\, dy \\ &= \exp\left(-\frac{\pi m^2}{w}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\pi w \left(y + \frac{mi}{w}\right)^2\right\} dy. \end{aligned}$$

Hier ist nach dem Cauchyschen Satze

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty+mi/w}^{\infty+mi/w} \exp(-\pi w z^2)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi w y^2)\, dy = w^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi y^2)\, dy.$$

Somit ist

$$z_m = C \exp\left(-\frac{\pi m^2}{w}\right) w^{-1/2}, \qquad \text{wo} \qquad C = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi \theta^2)\, d\theta,$$

folglich

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi(h+y)^2 w\} = C w^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{w}\right) e(my).$$

Nimmt man hier speziell $y = 0$, $w = 1$, so bekommt man $C = 1$. Also ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi(m+y)^2 w\} = w^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{w}\right) e(my),$$

woraus die Behauptung (1) des Hilfssatzes unmittelbar folgt.

Es erscheint hier zweckmässig, für dauernd, d. h. bis Ende des Buches, die folgende Abkürzung

$$(2)\qquad D_r = \frac{\pi^{r/2}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}$$

einzuführen.

SATZ 1.

$$(3)\qquad A_k(x) = D_k \sum_{q \leqslant x^{1/2}} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n \leqslant x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + B x^{k/4} \log x.$$

Beweis. Es sei $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$(4)\qquad \vartheta(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 z).$$

Dann ist nach Definition von $r_k(m)$

$$(4')\qquad \vartheta^k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) e^{-\pi m z},$$

woraus

$$e^{\pi n z} \int_0^1 \vartheta^k(z - 2yi) e(-ny)\, dy = e^{\pi n z} \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) e^{-\pi m z} e\{(m-n)y\}\, dy$$

$$(5)\qquad = e^{\pi n z} \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) e^{-\pi m z} \int_0^1 e\{(m-n)y\}\, dy = r_k(n).$$

Nimmt man hier $z = 1/x$ und summiert über $n \leqslant x$, so folgt

$$(6)\qquad A_k(x) - 1 = \int_0^1 \vartheta^k\left(\frac{1}{x} - 2yi\right) \sum_{n \leqslant x} \exp\left(\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n y\right) dy.$$

Es mögen die Brüche $\theta = h/q$, wo $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, eine Fareyreihe mit der Schwelle $x^{1/2}$ (Winogradow [4], Aufgabe 4 zu Kapitel I) durchlaufen. Zu diesen Zahlen fügen wir noch die sogenannten Medianen $(h+h')/(q+q')$ hinzu, wobei h/q und h'/q' zwei benachbarte Fareybrüche sind. Jeder Punkt

$$(7)\qquad \theta = \frac{h}{q}, \qquad 0 \leqslant h \leqslant q \leqslant x^{1/2}, \qquad (h, q) = 1$$

bestimmt dann auf der Geraden $-\infty < y < \infty$ ein gewisses Intervall (θ), das von θ bis zu den beiden nächstgelegenen Medianen reicht; dabei sind $\theta = \frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ als *ein* Punkt aufzufassen.

Wird das Intervall (θ) so verschoben, daß θ in $y = 0$ hineinfällt, so mag das dabei entstehende neue Intervall (θ_0) heißen. Dann ist (Winogradow [4], Aufgabe 4 zu Kapitel I)

$$(8)\qquad \begin{cases} |y| \leqslant q^{-1}x^{-1/2}, & \text{wenn } y \text{ dem Intervall } (\theta_0) \text{ angehört,} \\ |y| \geqslant 2^{-1}q^{-1}x^{-1/2}, & \text{wenn } y \text{ nicht dem Intervall } (\theta_0) \text{ angehört.} \end{cases}$$

Wird zur Abkürzung

$$(9)\qquad w = \frac{1}{x} - 2yi$$

gesetzt, so ist nach (6)

$$A_k(x) - 1 = \sum_{\theta} \int_{(\theta)} \vartheta^k(w) \sum_{n \leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n y\right\} dy$$

$$(10)\qquad = \sum_{\theta} \int_{(\theta_0)} \vartheta^k(w - 2\theta i) \sum_{n \leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n (y + \theta)\right\} dy.$$

Nach (4) und (7) ist

$$\vartheta(w - 2\theta i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi m^2 (w - 2\theta i)\}$$

$$= \sum_{a \bmod q} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi (a + bq)^2 (w - 2\theta i)\}$$

$$(11)\qquad = \sum_{a \bmod q} \exp\{-\pi (w - 2\theta i) a^2\} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi b^2 q^2 w - 2\pi a b q w).$$

Hier ist nach Hilfssatz 1, mit $q^2 w$ statt w und $y = a/q$,

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} = q^{-1} w^{-1/2} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pi q^2 w \left(\frac{a}{q} - \frac{bi}{q^2 w}\right)^2\right\}$$

$$= q^{-1} w^{-1/2} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pi w \left(a - \frac{bi}{qw}\right)^2\right\}$$

$$(12)\qquad = q^{-1} w^{-1/2} \exp(\pi a^2 w) \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi b^2}{q^2 w} - \frac{2\pi a b i}{q}\right),$$

wobei $\operatorname{Re}(w^{-1/2}) > 0$.

Nach (11), (12), (7) und (1.25) ist

$$\vartheta(w - 2\theta i) = q^{-1} w^{-1/2} \sum_{a \bmod q} e(\theta a^2) \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi b^2}{q^2 w} - \frac{2\pi a b i}{q}\right)$$

$$= q^{-1} w^{-1/2} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi b^2}{q^2 w}\right) \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{h a^2 - b a}{q}\right)$$

$$= q^{-1} w^{-1/2} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi b^2}{q^2 w}\right) S(h, b, q).$$

Setzt man also

$$w^{-k/2} = (w^{-1/2})^k$$

und schreibt zur Abkürzung

$$(13)\qquad S(b) = S(h, b, q),$$

so folgt

$$\vartheta^k(w - 2\theta i) = q^{-k} w^{-k/2} \sum_{b_1, \ldots, b_k = -\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi (b_1^2 + \ldots + b_k^2)}{q^2 w}\right) S(b_1) \ldots S(b_k).$$

Hierin ist, nach (13), (1.25) und (1.1),

$$\sum_{b_1, \ldots, b_k = -\infty}^{\infty} = S^k(h, 0, q) + \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_k = -\infty \\ b_1^2 + \ldots + b_k^2 > 0}}^{\infty} = S^k(h, q) + \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_k = -\infty \\ b_1^2 + \ldots + b_k^2 > 0}}^{\infty}.$$

Es ist somit

$$(14)\qquad \vartheta^k(w - 2\theta i) = q^{-k} w^{-k/2} S^k(h, q) + T(y),$$

wo

$$(15)\qquad T(y) = q^{-k} w^{-k/2} \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_k = -\infty \\ b_1^2 + \ldots + b_k^2 > 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi (b_1^2 + \ldots + b_k^2)}{q^2 w}\right) S(b_1) \ldots S(b_k).$$

Wir setzen, unter Berücksichtigung von (9),

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{x}{1 + 4x^2 y^2} = Y.$$

Dann ist, wegen (7) und (8), sobald y dem Intervall (θ_0) angehört,

$$(16)\qquad \frac{Y}{q^2} \geqslant \frac{x}{q^2 + 4x} \geqslant \frac{1}{5}, \qquad Y = \frac{1}{x\,|w|^2}.$$

In Verbindung mit (15), (13) und (1.26), ergibt dies, sobald y dem Intervall (θ_0) angehört,

$$T(y) = Bq^{-k/2}|w|^{-k/2}T_1(y) = Bx^{k/4}(Yq^{-2})^{k/4}T_1(y), \tag{17}$$

wo

$$T_1(y) = \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_k=-\infty \\ b_1^2+\ldots+b_k^2>0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi Y(b_1^2+\ldots+b_k^2)}{q^2}\right).$$

Da die Glieder der Summe $T_1(y)$ symmetrisch in bezug auf $b_1, \ldots, b_k$ sind, darf in der folgenden Abschätzung $b_1 \neq 0$ angenommen werden. Schreibt man noch b statt b_1, so folgt wegen (16)

$$T_1(y) = B\sum_{\substack{b=-\infty \\ b\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi Y b^2}{q^2}\right) \sum_{b_2,\ldots,b_k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi}{5}(b_2^2+\ldots+b_k^2)\right\}$$

$$= B\sum_{b=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi Y b^2}{q^2}\right) = B\sum_{b=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi Y b}{q^2}\right)$$

$$= B\exp\left(-\frac{\pi Y}{q^2}\right)\left\{1-\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right\}^{-1} = B\exp\left(-\frac{\pi Y}{q^2}\right).$$

In Verbindung mit (16) und (17), folgt hieraus, da die Funktion $s^{k/4}e^{-\pi s}$ für $s \geqslant 1/5$ begrenzt ist,

$$T(y) = Bx^{k/4}\left(\frac{Y}{q^2}\right)^{k/4} \exp\left(-\frac{\pi Y}{q^2}\right) = Bx^{k/4}, \tag{18}$$

sobald y dem Intervall (θ_0) angehört.

Mit Hilfe von (18) soll jetzt gezeigt werden, daß

$$\sum_{\theta} \int_{(\theta_0)} T(y) \sum_{n\leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n(y+\theta)\right\} dy = Bx^{k/4}\log x \tag{19}$$

st. Für $n \leqslant x$ und beliebiges y ist

$$\left|\sum_{m=1}^{n} e(-my)\right| \leqslant \operatorname{Min}(x, |\operatorname{cosec}\pi y|).$$

Nach dem Abelschen Lemma (Hilfssatz 3.3) ist somit

$$\sum_{n\leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n y\right\} = B\operatorname{Min}(x, |\operatorname{cosec}\pi y|), \tag{20}$$

und hieraus folgt weiter

$$\int_0^1 \left|\sum_{n\leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n y\right\}\right| dy = B\int_0^{1/x} x\,dy + B\int_{1/x}^{1} \frac{dy}{y} = B\log x.$$

Wegen (18) und weil die Gesamtlänge aller Intervalle (θ_0) gleich Eins ist, ist (19) bewiesen.

Aus (10), (14), (19) und (7) folgt

$$A_k(x) = \sum_{q\leqslant x^{1/2}} \sum_{\substack{0\leqslant h<q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \int_{(\theta_0)} w^{-k/2} \sum_{n\leqslant x} \exp\left\{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n\left(y+\frac{h}{q}\right)\right\} dy + Bx^{k/4}\log x. \tag{21}$$

Setzt man hier

$$\int_{(\theta_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} + W, \tag{22}$$

so ist, auf Grund von (7), (8), (9) und (20),

$$W = B(W_1+W_2), \tag{23}$$

wo

$$W_1 = \int_{2^{-1}q^{-1}x^{-1/2}}^{\infty} y^{-k/2}\operatorname{Min}\left(x, \left|\operatorname{cosec}\pi\left(y-\frac{h}{q}\right)\right|\right) dy, \tag{24}$$

$$W_2 = \int_{2^{-1}q^{-1}x^{-1/2}}^{\infty} y^{-k/2}\operatorname{Min}\left(x, \left|\operatorname{cosec}\pi\left(y+\frac{h}{q}\right)\right|\right) dy. \tag{25}$$

Bei der jetzt folgenden Abschätzung von W_1 und W_2 setzen wir

$$s = \operatorname{Max}\left(\frac{q}{h}, \frac{q}{q-h}\right) \quad \text{für} \quad q > 1. \tag{26}$$

Das ist gestattet, denn für $q > 1$ ist in (21) der Wert $h = 0$ ausgeschlossen.

Wir beginnen mit der Abschätzung von W_1 und teilen das Integral (24) in die beiden Teilintegrale

$$W_1 = \int_{2^{-1}q^{-1}}^{\infty} + \int_{2^{-1}q^{-1}x^{-1/2}}^{2^{-1}q^{-1}} = W_{11} + W_{12}.$$

Dann ist

$$W_{11} = \sum_{a=0}^{\infty} \int_{2^{-1}q^{-1}+a}^{2^{-1}q^{-1}+a+1} \leqslant \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2q}+a\right)^{-k/2} \int_0^1 \operatorname{Min}(x, |\operatorname{cosec}\pi y|)\,dy.$$

Hierin ist, wie wir im Anschluß an (20) vorgerechnet haben,

$$\int_0^1 \mathrm{Min}(x, |\mathrm{cosec}\,\pi y|)\,dy = B\log x.$$

Somit ist

$$W_{11} = B\Big(q^{k/2}+\sum_{a=1}^{\infty} a^{-k/2}\Big)\log x = Bq^{k/2}\log x.$$

Für $q=1$ ist ferner

$$W_{12} \leqslant \int_{2^{-1}x^{-1/2}}^{1/2} y^{-k/2}\,\mathrm{cosec}\,\pi y\,dy = B\int_{2^{-1}x^{-1/2}}^{\infty} y^{-1-k/2}\,dy = Bx^{k/4}.$$

Für $q>1$ ist $h/q > h/q-y \geqslant h/2q$, also nach (26)

$$\mathrm{cosec}\,\pi\left(y-\frac{h}{q}\right) = Bs,$$

und somit

$$W_{12} = Bs\int_{2^{-1}q^{-1}x^{-1/2}}^{\infty} y^{-k/2}\,dy = Bq^{k/2-1}x^{k/4-1/2}s.$$

Zusammenfassend haben wir

$$(27)\qquad W_1 = \begin{cases} Bx^{k/4} & \text{für}\quad q=1,\\ Bq^{k/2}\log x + Bq^{k/2-1}x^{k/4-1/2}s & \text{für}\quad q>1. \end{cases}$$

Dieselbe Abschätzung (27) gilt auch für W_2, und daher für W_1+W_2. Denn für $q=1$ fallen die beiden Integrale (24), (25) zusammen. Für $q>1$ geht aber W_2 in W_1 über, wenn man h durch $q-h$ ersetzt, was auf den Ausdruck (26) ohne Einfluß ist.

Aus (23) folgt jetzt

$$(28)\qquad W = \begin{cases} Bx^{k/4} & \text{für}\quad q=1,\\ Bq^{k/2}\log x + Bq^{k/2-1}x^{k/4-1/2}s & \text{für}\quad q>1. \end{cases}$$

Es sei jetzt X der Fehler, der entsteht, wenn in (21) jedes Integral über (θ_0) durch ein Integral über $-\infty<y<\infty$ ersetzt wird. Dann ist, da zu jedem q nicht mehr als q Werte von h gehören, nach (21), (1.2), (22), (28) und (26),

$$\begin{aligned} X &= Bx^{k/4} + B\sum_{2\leqslant q\leqslant x^{1/2}} q^{-k+k/2}\Big(q^{1+k/2}\log x + q^{k/2-1}x^{k/4-1/2}\sum_{h=1}^{q-1} s\Big)\\ &= Bx^{k/4} + B\log(x)\sum_{q\leqslant x^{1/2}} q + Bx^{k/4-1/2}\sum_{q\leqslant x^{1/2}} 1\cdot\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{h}\\ &= Bx^{k/4}\log x. \end{aligned}$$

Aus (21) folgt daher

$$(29)\qquad A_k(x) = \sum_{q\leqslant x^{1/2}}\ \sum_{\substack{0\leqslant h<q\\(h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n\leqslant x}\exp\left(\frac{\pi n}{x}-2\pi i n\frac{h}{q}\right) Z_n + Bx^{k/4}\log x,$$

wobei

$$(30)\qquad Z_n = \int_{-\infty}^{\infty} w^{-k/2} e(-ny)\,dy.$$

Es bleibt noch übrig, das Integral (30) zu berechnen. Setzt man in (30)

$$y = \frac{\pi n - xz}{2\pi n x i},\qquad t = \frac{\pi n}{x},$$

so folgt wegen (9)

$$(31)\qquad Z_n = \int_{t-\infty i}^{t+\infty i} \left(\frac{z}{\pi n}\right)^{-k/2} \exp(z-t)\,\frac{dz}{2\pi n i} = \pi^{k/2}\exp\left(-\frac{\pi n}{x}\right) n^{k/2-1} C,$$

wo

$$(32)\qquad C = \frac{1}{2\pi i}\int_{t-\infty i}^{t+\infty i} e^z z^{-k/2}\,dz.$$

Wir schneiden jetzt die Ebene der komplexen Veränderlichen z längs der negativen z-Achse $z<0$ auf, wobei auf dem unteren Schnittrand $\arg z = -\pi$, auf dem oberen $=\pi$ ist. Sei weiter $\varepsilon<t$ fest und $K(\varepsilon)$ der aus folgenden drei Stücken zusammengestellte Integrationsweg: 1) geradlinig längs des unteren Schnittrandes von $z=-\infty$ bis $z=-\varepsilon$; 2) längs des Kreises $|z|=\varepsilon$ im positiven Sinn vom Punkt $z=-\varepsilon$ des unteren Randes bis zum Punkt $z=-\varepsilon$ des oberen Randes; 3) geradlinig längs des oberen Randes vom Punkt $z=-\varepsilon$ bis $z=-\infty$. Nach dem Cauchyschen Satze ist dann

$$(33)\qquad C = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(\varepsilon)} e^z z^{-k/2}\,dz = \Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$$

(Nielsen [1], § 59).

Die Behauptung (3) des Satzes folgt aus (29), (31), (33) und (2), wenn man bedenkt, daß in (29) h ein beliebiges reduziertes Restsystem mod q, statt des angegebenen, durchlaufen kann, weil sowohl die Gaußsche Summe (1.1) als auch das Glied der n-Summe in (29) bezüglich h die Periode q hat.

Für $k>4$ kann man Satz 1 auch in der folgenden gleichwertigen Form aussprechen:

Satz 1a. *Für $k > 4$ ist*

$$(34)\qquad A_k(x) = D_k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{n \leqslant x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bx^{k/4}\log x.$$

Beweis. Wird s durch (26) definiert und durchläuft m irgend eine Reihe aufeinander folgender Zahlen, so ist

$$(35)\qquad \left|\sum_m e\left(-\frac{mh}{q}\right)\right| \leqslant \frac{s}{2} \quad \text{für} \quad q>1,\quad 0<h<q,\quad (h,q)=1.$$

In der Tat ist für $0 < h \leqslant q/2$

$$\left|\sum_m\right| \leqslant \operatorname{cosec}\frac{\pi h}{q} \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi h}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{2h} \leqslant \frac{s}{2},$$

und für $q/2 < h < q$ ersetze man h durch $q-h$.

Wegen (35) ergibt partielle Summation (Hilfssatz 3.3)

$$(36)\qquad \sum_{n\leqslant x} n^{k/2-1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) = Bx^{k/2-1}s.$$

Aus (1.2), (26) und (36) folgt, daß in (3)

$$\sum_{q>x^{1/2}} = B\sum_{q>x^{1/2}} q^{-k}\sum_{h=1}^{q-1} q^{k/2}x^{k/2-1}qh^{-1} = Bx^{k/2-1}\sum_{q>x^{1/2}} q^{1-k/2}\log q$$

$$(37)\qquad = Bx^{k/2-1+(2-k/2)/2}\log x = Bx^{k/4}\log x.$$

Aus (3) und (37) ergibt sich (34), und umgekehrt folgt (3) aus (34) und (37).

Beachtet man, daß nach Definition von $A_q(t)$

$$(38)\qquad r_k(n) = A_k(n) - A_k(n-1) \quad \text{für} \quad n>1$$

ist, so folgt aus (34) für $n>1$

$$(39)\quad r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bn^{k/4}\log n \quad (k>4).$$

Die Abschätzung (39) läßt sich noch verschärfen, wie der folgende wichtige Hilfssatz von Hardy zeigt, den wir zwar später nicht benutzen werden, der aber für die Gittertheorie mehrdimensionaler Kugeln von Bedeutung war und auch an sich von großem Interesse ist. Dieser Hilfssatz soll weiter unten (im IV Kapitel, vgl. Hilfssatz 4.2.4) für $5 \leqslant k \leqslant 8$ noch weiter verschärft werden.

Hilfssatz 2. *Für $k > 4$ ist*

$$(40)\qquad r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bn^{k/4}.$$

Beweis. Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich durch eine geringfügige Änderung des Beweises von Satz 1-1a. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \geqslant 3$. Nach (5) mit $z = 1/n$ ist

$$(41)\qquad r_k(n) = e^{\pi}\int_0^1 \vartheta^k\left(\frac{1}{n} - 2yi\right) e(-ny)\,dy.$$

Wir fahren jetzt wie beim Beweise von Satz 1 fort, nur daß wir für die Brüche $\theta = h/q$ eine Fareyreihe mit der Schwelle $n^{1/2}$, statt $x^{1/2}$, nehmen. Wir können dann die Formeln (7) und (8) mit $x = n$ benutzen. Statt (9) setzen wir

$$(42)\qquad w = \frac{1}{n} - 2yi.$$

Nach (41) und (42) ist

$$(43)\qquad r_k(n) = e^{\pi}\sum_{\theta}\int_{(\theta_0)} \vartheta^k(w-2\theta i)\, e\{-n(y+\theta)\}\,dy.$$

Die Formeln (14) und (15) bleiben in Kraft, wenn w durch (42) gegeben wird; denn die Werte (42) sind wegen $n \geqslant 3$ unter den Werten (9) enthalten. Wir setzen jetzt

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{n}{1+4n^2y^2} = Y$$

und erhalten wegen (7) und (8) mit $x = n$, wenn y dem Intervall (θ_0) angehört,

$$(44)\qquad \frac{Y}{q^2} \geqslant \frac{n}{q^2+4n} \geqslant \frac{1}{5}, \qquad Y = \frac{1}{n|w|^2}.$$

Man bekommt jetzt, statt (17),

$$T(y) = Bn^{k/4}(Yq^{-2})^{k/4}T_1(y),$$

wobei $T_1(y)$ die frühere Bedeutung hat, nur daß jetzt Y durch (44) und nicht durch (16) gegeben ist.

Fährt man nunmehr wie beim Beweise von Satz 1 fort, so ergibt sich, statt (18), wenn y dem Intervall (θ_0) angehört,

$$(45)\qquad T(y) = Bn^{k/4}.$$

Aus (8), mit $x = n$, und (45) folgt

$$\int\limits_{(\theta_0)} T(y)\, e\{-n(y+\theta)\}\, dy = B \int\limits_{-q^{-1}n^{-1/2}}^{q^{-1}n^{-1/2}} |T(y)|\, dy = Bn^{k/4-1/2}q^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich weiter, da jedem q nicht mehr als q Werte von h entsprechen,

$$(46) \qquad \sum_{\theta} \int\limits_{(\theta_0)} T(y)\, e\{-n(y+\theta)\}\, dy = B \sum_{q \leqslant n^{1/2}} n^{k/4-1/2} = Bn^{k/4}.$$

Aus (43), (14), (46), (7), mit $x = n$, und (1.1) folgt, an Stelle von (21),

$$(47) \quad r_k(n) = e^{\pi} \sum_{q \leqslant n^{1/2}} \sum_{\substack{0 \leqslant h < q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \int\limits_{(\theta_0)} w^{-k/2} e\left\{-n\left(y+\frac{h}{q}\right)\right\} dy + Bn^{k/4}.$$

Wird jetzt wieder W durch (22) definiert, so ist, auf Grund von (8), mit $x = n$, und (42),

$$W = B \int\limits_{2^{-1}q^{-1}n^{-1/2}}^{\infty} |w|^{-k/2}\, dy = B \int\limits_{2^{-1}q^{-1}n^{-1/2}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 4y^2\right)^{-k/4} dy$$

$$= Bn^{k/2-1} \int\limits_{2^{-1}q^{-1}n^{1/2}}^{\infty} (1+4y^2)^{-k/4}\, dy = Bn^{k/2-1} \int\limits_{2^{-1}q^{-1}n^{1/2}}^{\infty} y^{-k/2}\, dy$$

$$= Bn^{k/2-1}(q^{-1}n^{1/2})^{1-k/2} = Bn^{k/4-1/2}q^{k/2-1}.$$

Wird also in (47) jedes Integral über (θ_0) durch ein Integral über $-\infty < y < \infty$ ersetzt, so ist der dabei entstehende Fehler, wegen (1.2),

$$(48) \qquad B \sum_{q \leqslant n^{1/2}} q^{-k+k/2+1+k/2-1} n^{k/4-1/2} = Bn^{k/4-1/2} \sum_{q \leqslant n^{1/2}} 1 = Bn^{k/4}.$$

Aus (47), (48) und (22) folgt, wenn Z_n durch (30) definiert ist,

$$(49) \qquad r_k(n) = e^{\pi} \sum_{q \leqslant n^{1/2}} \sum_{\substack{0 \leqslant h < q \\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right) Z_n + Bn^{k/4}.$$

Da die Zahlen (42) unter den Zahlen (9), für $x = n$, enthalten sind, so kann jetzt Z_n nach den Formeln (31), mit $x = n$, und (33) berechnet werden. Es ergibt sich, unter Berücksichtigung von (2),

$$Z_n = e^{-\pi} D_k n^{k/2-1}.$$

Setzt man dies in (49) ein, so folgt, da h wegen (1.1) über ein beliebiges reduziertes Restsystem mod q laufen kann,

$$(50) \qquad r_k(n) = D_k n^{k/2-1} \sum_{q \leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right) + Bn^{k/4}.$$

Aus (50) ergibt sich (40), denn nach (1.2) ist

$$n^{k/2-1} \sum_{q > n^{1/2}} = Bn^{k/2-1} \sum_{q > n^{1/2}} q^{1-k/2} = Bn^{k/2-1+(2-k/2)/2} = Bn^{k/4}.$$