

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

STEFAN MAZURKIEWICZ

S. 462. 32

PODSTAWY RACHUNKU
PRAWDOPODOBIENSTWA

KOMITET REDAKCYJNY

KAZIMIERZ KURATOWSKI REDAKTOR NACZELNY,
KAROL BORSUK, BRONISŁAW KNASTER, STANISŁAW MAZUR,
WACŁAW SIERPIŃSKI, HUGO STEINHAUS, WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI

Na podstawie rękopisów pozostałych
po śmierci autora opracował do druku
JERZY ŁOŚ

QA

TOM 32

273

.M39

1956

S. 5182

COPYRIGHT, 1956, by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (POLAND) Krakowskie Przedmieście 79,

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers

ERRATA

Str.	Jest	Powinno być
169 wzór (12.11)	$\frac{4r^3}{(\sqrt{2np_j})}$	$\frac{4r^3}{(\sqrt{2np_j})^3}$
181 _{II}	$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_i^{(n)})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_i^{(n)})$

S. Mazurkiewicz, *Podstawy rachunku prawdopodobieństwa*

70-606/56
17. IV. 56.

Wstęp

Książka niniejsza ma za zadanie zaznajomić czytelnika z podstawami nowoczesnie ujętej teorii prawdopodobieństwa przez zapoznanie go z elementami tej teorii (księga pierwsza) oraz z aparatem teorii funkcji rzeczywistych niezbędnym przy jej studiowaniu (księga druga).

W zasadzie dla zrozumienia niniejszej książki wystarczą te wiadomości z analizy matematycznej, które wchodziły w program wykładów na pierwszym i drugim roku studiów uniwersyteckich. Te wiadomości z abstrakcyjnych działów matematyki, które są użyte w niniejszej książce, a które wykraczają poza ramy kursu analizy, zestawione są krótko w poniższym wstępie. Czytelnik obznajomiony z elementami teorii mnogości, topologii i teorii funkcji zmiennej rzeczywistej może niniejszy wstęp opuścić, bez obawy trudności w zrozumieniu właściwego tekstu.

1. Teoria mnogości, a w szczególności teoria mocy zbiorów

Zakładamy, że czytelnik obznajomiony jest z pojęciem zbioru, stosunkiem przynależności elementu do zbioru i najprostszymi działaniami na zbiorach. Przypominamy więc tylko, że przynależność elementu x do zbioru X oznaczamy symbolem $x \in X$. Na oznaczenie przynależności elementów x_1, x_2, \dots (w ilości skończonej lub nieskończonej) do zbioru X piszemy $x_1, x_2, \dots \in X$, zamiast $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots$. Dla oznaczenia, że element x nie należy do zbioru X , piszemy $x \notin X$.

Elementy zbiorów, w wypadku gdy o nich nie będziemy zakładali, że są zbiorami, będziemy oznaczali małymi literami alfabetu łacińskiego $a, b, c, \dots, p, q, u, v, w, \dots, x, y, z$, zbiory — dużymi literami łacińskimi, $A, B, \dots, U, V, W, \dots, X, Y, Z$, wreszcie klasy zbiorów to znaczy zbiory, których elementami są zbiory — literami $A, B, \dots, U, V, W, \dots, X, Y, Z$.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają numery stron

Absolutnie niemożliwe zdarzenie 85,
— pewne zdarzenie 85
absorpcji prawa 29
addytywna funkcja 115, — przeliczalnie
funkcja 115; *-e* przeliczalne ciało
Boole'a 36, — — rozszerzenie 45,
— zupełnie ciało Boole'a 36, — —
rozszerzenie 45; *-y* podzbiór 69,
— przeliczalnie ideał 69, — — pod-
zbiór 69, — zupełnie ideał 69, —
— podzbiór 69
aksjomaty prawdopodobieństwa 116
algebra Boole'a 24, — Brouwera 112;
-y Boole'a układ postulatów 25
algebraiczne dwoiste wyrażenia 28
alternatywa zdarzeń 84
asymptotyczny wzór 148
atom 61, — reprezentacyjny 62; *-owe*
ciało 62
Baire'a funkcja 255
Bernouilliego prawo wielkich liczb 155,
— schemat 142, — schematów wielo-
krotnych prawo wielkich liczb 171
Bernsteina twierdzenie 173
bezatomowe ciało 62
Boole'a algebra 24, — algebry układ
postulatów 25, — ciało 24, — — prze-
liczalnie addytywne 36, — — zupeł-
nie addytywne 36
borelowska miara 225; *-i* zbiór 14; *-ich*
zbiorów klasa 14
brakującej racji zasada 133
Brouwera algebra 112
Całka Lebesgue'a-Stieltjesa 243, — Rie-
manna-Stieltjesa 259

całkowalne jednakowo funkcje 251
całkowicie niespójna przestrzeń 75
Carathéodory'go miara zewnętrzna 204
ciało atomowe 62, — bezatomowe 62,
— Boole'a 24, — — przeliczalnie
addytywne 36, — — zupełnie addy-
tywne 36, — elementów niezależ-
nych 204, — figur elementarnych 47,
— kanoniczne zbioru 87, — ilora-
zowe 53, — losowe 116, — pier-
wotne 53, — składowe zespołu 111,
— skończone 63, — zrelatywizowane
55; *-a* równoważność 55, — zbiorów
45, — — borelowskich 48
ciąg (LS) 239, — dwustronny 239,
— *n*-elementowy 3, — zbieżny ciągło-
ściowo 182, — zestawiony 239;
-u funkcji zbieżność 21, — — —
jednostajna 21, — granica 19, — roz-
piętość 239
ciągła funkcja 20, — — *n* zmiennych
176
ciągłościowa granica 182; *-o* zbieżny
ciąg 182
continuum (moc) 8
częstość względna zjawiska 144, 170,
— zjawiska 143, 169
częściowe uporządkowanie 33
Dopełnienia podwójnego prawo 29
dwoiste wyrażenie algebraiczne 28
dwoistość 28
dwustronny ciąg 239
dwuzwarta przestrzeń 75
dysjunkcja zbiorów 65
dziedziczny podzbiór 69

Element kanoniczny zbioru 86, 102,
— mierzalny 204, — niepusty 39,
— nieskończony 38, — pełny 54,
— pusty 39, — tworzący ideału 70;
-y rozłączne 39; *-ów* mierzalnych
ciało 204
elementarna figura *n*-wymiarowa 47;
-ych figur ciało 47

Figur elementarnych ciało 47; *-a* ele-
mentarna *n*-wymiarowa 47
filtr (przeciwideał) 72
funkcja addytywna 115, — Baire'a 255,
— ciągła 20, — — *n*-zmiennych 176,
— homomorfizmu 50, — mierzalna
235, — *n*-wymiarowo niemalejąca
196, — *n* zmiennych niemalejąca 175,
— — nierosnąca 175, — niemalejąca
115, — odwrotna 186, — przeli-
czalnie addytywna 115, — punkto-
wiec nieciągła 181, — rzeczywista skoń-
czona 114, — — w R_n 20, — stowa-
rzyszona 220, — zdaniowa 56,
— \aleph_0 -skończona 214; *-e* jednakowo
całkowalne 251; *-i* punkt nieciągłości
20, — rozszerzenie 115, — relatywi-
zacja 125, — skok 179

Główny ideał 182
granica ciągu 19, — ciągłościowa 182

Harmoniczna odpowiedniość 82, 83
Helly'ego twierdzenie 184
homomorfizm 50, — przeliczalny 50,
— zupełny 50; *-u* funkcja 50
homomorficzny obraz 50

Ideał 69, — elementów równoważ-
nych zeru 80, — główny 70, — kano-
niczny zbioru swobodnego 86, 102,
— pierwszy 71, — przeliczalnie addy-
tywny 69, — właściwy 69, — ze-
rowy 69, — zupełnie addytywny 69;
-u element tworzący 70, — negacja
112; *-ów* iloczyn 76, — suma 76
idempotentny pierścień 79
iloczyn elementów zbioru 35, — ide-
ałów 76, — zbiorów 2

ilorazowe ciało 53
implikacja 32
izomorfizm 50

Jednakowo całkowalne funkcje 251
jednostajna zbieżność ciągu funkcji 21
jednoznaczne odwzorowanie 4
Jordana twierdzenie 172

Kanoniczne ciało zbioru 87; *-y* element
zbioru 86, 102, — ideał zbioru swo-
bodnego 86, 102
kartezyjska potęga zbioru 4, — prze-
strzeń *n*-wymiarowa 8; *-i* produkt
zbiorów 3, 4
klasa zbiorów 1, — — borelowskich 14
klasyczne prawdopodobieństwo 132
kongruencja 52, — przeliczalna 52, — zu-
pełna 52
koniunkcja zdarzeń 84

Laplace'a funkcja tworząca 145; *-Bayesu*
wzór 125
Lebesgue'a miara 232; *-Stieltjesa* całka
243, — suma funkcji 240
liczby naturalnej rozkład 163
losowa próba 138; *-e* ciało 116, — zmien-
ne rzeczywiste 129, — — wekto-
rialne 129, — — zespolone 129; *-ej*
zmiennej przeniesienie 130; *-ych* nie-
zależnych prób zespół 141, — prób
zespół 138

Matematyczna nadzieja 129
metryka 17
metryczna przestrzeń 17
miara 203, — borelowska 225, — Lebes-
gue'a 232, — pochodna 255, — regu-
larna 225, — skończona 203, — sto-
warzyszona 225, — unormowana 203,
— wewnętrzna 218, — zewnętrzna
208, — — Carathéodory'ego 204
miernalna funkcja 235; *-y* element 204,
— zbiór 235; *-ych* elementów ciało
204
mieszany operator różnicowy 191
moc zbioru 4; *-y* continuum zbiór 8,
— \aleph_0 zbiór 5

model systemu algebry Boole'a 25
de Moivre'a-Laplace'a twierdzenie 157
de Morgana wzory 30, — — uogólnione 37
 Nadzieja matematyczna 129
 najmniejsze podciało rozpostarte na zbiorze 45
 nasycony podzbiór 54
 naturalnej liczby rozkład 163
 negacja ideału 118, — zdarzenia 84
n-elementowy ciąg 3
 nieciągła punktowo funkcja 181
 nieciągłości punkt 20
 niemająca funkcja rzeczywista 115, — — *n* zmiennych 175, — — *n*-wymiarowa 196
 niemożliwe absolutnie zdarzenie 85
 niezależne zdarzenie losowe 126
 nigdzie niegęsty zbiór 12
 niepusty element 39
 nieskończony element 38
 niespójna całkowicie przestrzeń 75
 nierosnąca funkcja *n* zmiennych 175
 nierówność Schwarza-Buniakowskiego 9, — trójkątowa 9
n-wymiarowa przestrzeń kartezjańska 8: — o niemająca funkcja 196
n zmiennych funkcja 175
 Obraz homeomorficzny 50
 odcinek *k*-tego rzędu 101
 odległość dwóch punktów przestrzeni R_n 9, — zbiorów 18; — punktu od zbioru 18
 odpowiedniość harmoniczna 82, 83
 odwrotna funkcja 186
 odwzorowanie jednoznaczne 4
 operator różnicowy 192, — — mieszauny 191
 osobliwy zespół 103, — — pierwszego rodzaju 108, — — drugiego rodzaju 109, — — trzeciego rodzaju 110; —ego zespołu składowa 104
 otwarty przedział 10, — zbiór 10
 Para 3, — uporządkowana 3; —mi niezależne zdarzenia 127, — rozłączne elementy 39
 pełny element 54
 pewne absolutnie zdarzenie 85
 pierścień idempotentny 79
 pierwotne ciało 53
 pierwszy ideał 71
 pochodna miara 255, — związku 129
 podciało 43, — określające zespołu 108, — przeliczalnie addytywne 43, — scalone 65
 podwójnego dopełnienia prawo 29
 podzbiór 2, — addytywny 69, — dziedziczny 69, — nasycony 2, — przeliczalnie addytywny 69, — zupełnie addytywny 69
 Poincarégo wzór 119
 Poissona twierdzenie 162
 potęga kartezjańska zbioru 4
 prawdopodobieństwo 116, — klasyczne 132, — średnie 147, — względne 117; —a aksjomaty 116
 prawo podwójnego dopełnienia 29, — wielkich liczb Bernoulliego 115, — — — dla schematów wielokrotnych Bernoulliego 171; —a absorpcji 29
 produkt kartezjański zbiorów 3, 4, — swobodny 91, — zbiorów 90; —*n* swobodnego rozszerzenie 101
 produktowanie 90
 prób zespół 138; —a losowa 138, — — nad zjawiskami 138
 przeciwiideal (filtr) 72
 przedział *n*-wymiarowy 47, — otwarty 10, — wymierny 10, — zamknięty 10
 przeliczalnie addytywna funkcja 115, — addytywne ciało Boole'a 36, — — podciało 43, — — rozszerzenie 101, — addytywny ideał 69, — — podzbiór 69; —*e* kongruencja 52; —*y* homomorfizm 50, — zbiór 5
 przeniesienie zmiennej losowej 130
 przestrzeń całkowicie niespójna 75, — — dwuzwarta 75, — \mathcal{L}^* 19, — metryczna 17, — *n*-wymiarowa 8
 przypadki możliwe 133, — — sprzyjające zdarzeniu 133
 punkt nieciągłości funkcji 20, — przestrzeni kartezjańskiej *n*-wymiarowej 8

punktowo nieciągła funkcja 181
 pusty element 39, — zbiór 2

Racji brakującej zasada 133
 relatywizacja funkcji 125
 reprezentacyjny atom 62
 Riemanna-Stieltjesa całka 259
 rozkład liczby naturalnej 163, — zbiorów 164
 rozłączne elementy 39, — parami elementy 39
 rozpiętość ciągu 239
 rozszerzenie funkcji 115, — produktu swobodnego 101, — przeliczalnie addytywne 45, — zupełnie addytywne 45
 równoliczne zbiory 4
 równoważność ciała 55
 różnica symetryczna 78, — zbiorów 2
 różnicowy operator 192, — — mieszauny 191
 rzeczywista funkcja 114, — — w R_n 20
 rzędu *k*-tego odcinek 101

Scalone podciało 65
 schemat Bernoulliego 142, — — wielokrotny 142; —ów wielokrotnych Bernoulliego prawo wielkich liczb 171
 Schwarza-Buniakowskiego nierówność 9
 składowe zespołu 96, — — osobliwego 104, — ciało zespołu 111
 skok funkcji 179
 skończona miara 203, — funkcja 114; —*e* ciało 63
 Stirlinga wzór 148
 stowarzyszona miara 225, — funkcja 22
 struktura 33, — dystrybucyjna 33, — typu *B* (Boole'owska) 34
 suma ideałów 76, — Lebesgue'a-Stieltjesa funkcji 240, — — w ciele Boole'a 24, — zbiorów 2
 swobodny produkt 91, — zbiór 86; —ego zbioru ideał kanoniczny 86, 102
 system algebry Boole'a 25; —*u* algebry Boole'a model 25
 średnie prawdopodobieństwo 147

Tautologii zasada 29
 tożsamość zdarzeń 84

trójkątowa nierówność 9
 twierdzenie Bernsteina 173, — de Moivre'a-Laplace'a 157, — Helly'ego 184, — Jordana 172, — o dwoistości 27, — ogólne o prawdopodobieństwie złożonym 125, — o prawdopodobieństwie całkowitym 118, — — złożonym 124, — o pełnej dystrybucyjności 92, — Poissona 162
 tworzący element ideału 70

Układ postulatów algebry Boole'a 25
 universum zdarzeń 85
 unormowana miara 203
 uporządkowana para 3
 uporządkowanie częściowe 33
 uzupełnienie zbioru 3

Wektorialne zmiennne losowe 129
 wewnętrzna miara 218
 wielkich liczb prawo Bernoulliego 155, — — — dla schematów wielokrotnych Bernoulliego 171
 wielokrotny schemat Bernoulliego 164
 właściwy ideał 69, — podzbiór 2
 względna częstość zjawiska 144, 170; —*e* prawdopodobieństwo 117
 wzór asymptotyczny 148, — Laplace'a-Bayesa 125, — Poincarégo 119, — Stirlinga 148; —*y* de Morgana 30, — — uogólnione 37

Zamknięty zbiór 10
 zasada racji brakującej 133, — tautologii 29
 zawieranie 2, 32
 zbiór borelowski 14, — F_σ 12, — G_δ 12, — gęsty 12, — mierzalny 235, — mocy continuum 8, — — \aleph_0 5, — nigdzie niegęsty 12, — otwarty 10, — pierwszej kategorii 14, — przeliczalny 5, — pusty 2, — swobodny 86, — zamknięty 10, — zwarty 14; —*u* element kanoniczny 86, 102, — moc 4, — potęga kartezjańska 4, — swobodnego ideał kanoniczny 86, 102, — uzupełnienie 3; —ów borelowskich klasa 14, — — ciało 48, — ciała

- 46, — dysjunkcja 65, — iloczyn 2,
— klasa 1, — produkt 90, — — kar-
tezjański 3, 4, — rozkład 164, — róż-
nica 2, — suma 2; $-y$ równej mocy 4,
— równoliczne 4
- zbieżność* ciągu funkcji 21
- zbieżny* ciąg 21, — ciągłościowo ciąg 182
- zdaniowa* funkcja 56
- zdarzenie* 82, — absolutnie niemożliwe
85, — — pewne 85, — losowo nie-
zależne 125, 126; $-a$ negacja 84, — pa-
rami niezależne 127; $-n$ alternatywa
84, — koniunkcja 84, — tożsamość 84
- zerowy* ideał 69
- zespół* częściowy rzędu n 107, — oso-
bliwy 103, — prób 138, — — loso-
wych 138, — — niezależnych 141,
— regularny ciał scalonych 96,
— rodzaju pierwszego 108, — — dru-
giego 108, — — trzeciego 110;
- $-u$ ciało składowe 111, — osobliwego
składowa 104 — podciało określające
108, — składowa 96
- zespólona* zmienna losowa 129
- zestawiony* ciąg 239
- zewnątrzna* miara 208, — — Cara-
théodory'ego 204
- zjawisko* 138; $-a$ częstość 143, 169
— — względna 144, 170
- zmienna* losowa 129, — — rzeczy-
wista 129, — — zespolona 129,
— — wektorialna 129; $-e$ wolne 56;
 $-ej$ losowej przeniesienie 130
- zrelatywizowane* ciało 55
- zupełna* kongruencja 52; $-y$ homo-
morfizm 50; $-ie$ addytywne ciało
Boole'a 36, — — rozszerzenie 54,
— addytywny podzbiór 69
- zwarty* zbiór 14

SPIS RZECZY

Wstęp	Str.
1. Teoria mnogości, a w szczególności teoria mocy zbiorów	1
2. Przestrzenie kartezjańskie R_n	8
3. Przestrzenie metryczne i przestrzenie \mathcal{L}^*	17
4. Funkcje rzeczywiste w przestrzeniach R_n	19

KSIĘGA PIERWSZA

ELEMENTARNA TEORIA PRAWDOPODOBIENSTWA

Rozdział I. Algebra Boole'a

§ 1. Uwagi wstępne, treść rozdziału	23
§ 2. Określenie ciał Boole'a	24
§ 3. Omówienie postulatów układu (B). Twierdzenie o dwoistości	26
§ 4. Elementarne twierdzenia algebry Boole'a	28
§ 5. Zawieranie (implikacja). Ciała Boole'a jako zbiory częściowo uporząd- kowane	32
§ 6. Działania nieskończone w ciałach Boole'a	35
§ 7. Ciała zbiorów	39
§ 8. Podciała	42
§ 9. Ciało figur elementarnych	46
§ 10. Homomorfizm, izomorfizm, kongruencje oraz ciała ilorazowe i zrelaty- wizowane	49
§ 11. Zastosowanie teorii ciał Boole'a do logiki	55
§ 12. Atomy, ciała atomowe	61
§ 13. Metoda scalania atomów	64
§ 14. Przykłady i zadania	66

Rozdział II. Ideale, ciała zdarzeń

§ 1. Treść rozdziału	68
§ 2. Ideale w ciałach Boole'a	69
§ 3. Twierdzenie o izomorfizmie ciał Boole'a z ciałami zbiorów	72
§ 4. Struktura ideałów	75
§ 5. Różnica i różnica symetryczna	77

§ 6. Ideały a kongruencje	79
§ 7. Zdarzenia i ciało zdarzeń	82
§ 8. Relatywizacja ciała zdarzeń. Ciała kanoniczne. Scalanie ciał kanonicznych	86
§ 9. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w § 8	87
§ 10. Produktowanie w ciele zdarzeń	90
§ 11. Zespoły regularne ciał kanonicznych	93
§ 12. Zespoły regularne ciał scalonych	95
§ 13. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w §§ 10-12	97
§ 14. Zespoły osobliwe	100
§ 15. Klasyfikacja zespołów osobliwych. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w § 14	108
§ 16. Przykłady i zadania	112

Rozdział III. Pojęcie i najprostsze własności prawdopodobieństwa

§ 1. Treść rozdziału	114
§ 2. Aksjomatyka prawdopodobieństwa	114
§ 3. Najprostsze twierdzenia o prawdopodobieństwie	117
§ 4. Twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonym	124
§ 5. Niezależność losowa zdarzeń	126
§ 6. Pojęcie zmiennej losowej i nadziei matematycznej	129
§ 7. Ciała losowe nasycone	132
§ 8. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	132
§ 9. Przykłady i zadania	135

Rozdział IV. Schemat Bernoulliego

§ 1. Treść rozdziału	137
§ 2. Pojęcia zjawiska i zespołu prób losowych	138
§ 3. Niezależność prób. Schematy Bernoulliego	141
§ 4. Nadzieja matematyczna częstości zjawiska O w n próbach	144
§ 5. Wzór asymptotyczny na P_{nk} dla schematu Bernoulliego	147
§ 6. Prawo wielkich liczb J. Bernoulliego	152
§ 7. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a	157
§ 8. Wzór Poissona na P_{nk} w przypadku zjawisk rzadkich	162
§ 9. Pomocnicze wiadomości z kombinatoryki	163
§ 10. Wielokrotny schemat Bernoulliego	164
§ 11. Maksimum prawdopodobieństwa $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$	166
§ 12. Wzór asymptotyczny na $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$	167
§ 13. Częstość zjawisk i prawo wielkich liczb w wielokrotnym schemacie Bernoulliego	169
§ 14. Twierdzenie Jordana	172
§ 15. Przykłady i zadania	173

KSIEGA DRUGA

ELEMENTY TEORII FUNKCJI RZECZYWISTYCH

Rozdział V. Funkcje niemalejące

§ 1. Treść rozdziału	175
§ 2. Funkcje niemalejące n zmiennych	175
§ 3. Nieciągłości funkcji niemalejących	178
§ 4. Zbieżność ciągłościowa funkcji niemalejących	182
§ 5. Odwracanie funkcji niemalejących jednej zmiennej	185
§ 6. Przykłady i zadania	188

Rozdział VI. Funkcje n -wymiarowo niemalejące

§ 1. Treść rozdziału	190
§ 2. Operatory różnicowe	190
§ 3. Operatory różnicowe i różniczkowanie cząstkowe	194
§ 4. Funkcje n -wymiarowo niemalejące	196
§ 5. Funkcje niemalejące a funkcje n -wymiarowo niemalejące	197
§ 6. Zbieżność ciągłościowa funkcji n -wymiarowo niemalejących	200
§ 7. Przykłady i zadania	201

Rozdział VII. Miary w ciałach Boole'a

§ 1. Treść rozdziału	202
§ 2. Określenie miary	202
§ 3. Miary zewnętrzne Carathéodory'ego	204
§ 4. Miary zewnętrzne Carathéodory'ego w przestrzeniach metrycznych	208
§ 5. Twierdzenie Fréchet'a-Nikodyma	210
§ 6. Aproksymacja miary rozszerzonej za pomocą funkcji rozszerzanej. Rozszerzenie minimalne	214
§ 7. Przykłady i zadania	217

Rozdział VIII. Miary w przestrzeniach euklidesowych

§ 1. Treść rozdziału	219
§ 2. Funkcje przedziału stowarzyszone z funkcjami n -wymiarowo niemalejącymi	219
§ 3. Rozszerzenie funkcji stowarzyszonych na ciało figur elementarnych	224
§ 4. Miary stowarzyszone	225
§ 5. O funkcjach n -wymiarowo niemalejących ograniczonych	226
§ 6. Miara Lebesgue'a	232
§ 7. Przykłady i zadania	233

Rozdział IX. Całka Lebesgue'a-Stieltjesa

§ 1. Treść rozdziału	234
§ 2. Funkcje mierzalne	234
§ 3. Sumy przybliżone Lebesgue'a-Stieltjesa	238
§ 4. Całka Lebesgue'a-Stieltjesa	243
§ 5. Całkowanie ciągów funkcji	251
§ 6. Miary pochodne w przestrzeniach euklidesowych	254
§ 7. Całki Lebesgue'a-Stieltjesa w przestrzeniach euklidesowych	255
§ 8. Całka Riemanna-Stieltjesa	257
§ 9. Przykłady i zadania	260
SKOROWIDZ NAZW	262



Państwowe Wydawnictwo
Naukowe

Wydanie pierwsze. Nakład
1725+172 egz. Ark. wyd. 17,5
Ark. druk. 17 Papier druk.
sat. kl. V 70 g 70×100
Oddano do składu 2.VI.1954
Podp. do druku 20. I. 1956
Druk ukończ. w lutym 1956
Zamówienie 422/54 M 5-70645
Cena zł 27.—

Krakowska Drukarnia
Naukowa