

Rozdział IX

Całka Lebesgue'a-Stieltjesa

§ 1. Treść rozdziału

Rozdział niniejszy zawiera teorię całki w zakresie niezbędnym przy studiowaniu rachunku prawdopodobieństwa. Zaczynamy od podania określenia i pewnych własności funkcji mierzalnych (§ 2), a następnie wprowadzamy sumy przybliżone Lebesgue'a-Stieltjesa (§ 3) i całkę, jako granicę tych sum przy zagęszczeniu podziału osi rzeczywistej (§ 4).

W paragrafie 4 prócz określenia całki podajemy jeszcze własności całki jako funkcji zbioru, dalej w paragrafie 5 zależność całki od funkcji całkowanej.

Przedmiotem rozważań paragrafu 6 jest całkowanie ciągów funkcji. Zawarte tam twierdzenia, a w szczególności twierdzenie 17, wskazują na zasadniczą różnicę między całką Lebesgue'a a znaną z elementarnego kursu analizy całką Riemanna. Nie należy jednak zapominać, że już niektóre twierdzenia podane w poprzednich paragrafach (zwłaszcza twierdzenie 9) nie przenoszą się na przypadek całki Riemanna.

Paragrafy 7 i 8 omawiają zagadnienie całkowania w przestrzeniach euklidesowych według miar pochodnych. Podane tam twierdzenia, w szczególności twierdzenie 19, znajdują specjalnie ważne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa.

Paragraf 9 zawiera zestawienie całki Stieltjesa-Riemanna z całką Lebesgue'a-Riemanna.

§ 2. Funkcje mierzalne

W niniejszym paragrafie będziemy rozważali dowolny zbiór R , nazywany w dalszym ciągu *przestrzenią*, w którym określona jest miara g . Ciało zbiorów mierzalnych według miary g będziemy

oznaczali przez $\mathcal{W}_g$. Będziemy często używali zwrotu: „ W zachodzi prawie wszędzie w A ”, gdzie A jest podzbiorem R , W zaś pewną własnością, która może przysługiwać lub nie przysługiwać punktom przestrzeni R . Np. będziemy mówili: „funkcja f jest określona prawie wszędzie w A ” lub „związek Z zachodzi prawie wszędzie w A ”. Zwrot: „ W zachodzi prawie wszędzie w A ”, znaczy: „zbiór tych punktów zbioru A , w którym W nie zachodzi, jest miary 0”. Tak np. w przypadku, gdy $R = R_1$, g zaś jest miarą Lebesgue'a w R_1 , funkcja $\log x$ nie jest określona prawie wszędzie w R_1 , lecz jest określona prawie wszędzie w zbiorze $A = E[x \geq 0]$, zbiór bowiem liczb nieujemnych, dla których logarytm nie jest określony, jest jednopunktowy, a więc miary Lebesgue'a 0.

Rozważanie pewnych własności pod względem zachodzenia ich prawie wszędzie pokrywa się w istocie rzeczy z rozważaniem tych własności w ciele $\mathcal{W}(R)$, $\text{rel } I_0$, gdzie I_0 jest ideałem zbiorów miary g zero. Łatwo bowiem sprawdzić, że W zachodzi prawie wszędzie w A wtedy i tylko wtedy, gdy W zachodzi w każdym punkcie pewnego zbioru A_1 równoważnego $\text{rel } I_0$ z A .

OKREŚLENIE 1. Funkcję rzeczywistą f , określoną w pewnym podzbiorze przestrzeni R , nazywamy *mierzalną według miary g w zbiorze $A \subset R$* , jeżeli jest określona prawie wszędzie w zbiorze A i dla każdego rzeczywistego t mamy $A \cap E[f(x) < t] \in \mathcal{W}_g$ ¹⁾, czyli gdy zbiór tych punktów zbioru A , na których funkcja przybiera wartości mniejsze niż t , jest mierzalny według miary g .

Gdy nie będzie to groziło nieporozumieniem, a w szczególności, gdy o mierze g nie będziemy nic zakładali, będziemy zamiast: zbiór mierzalny według miary g i funkcja mierzalna g , mówili krótko: zbiór mierzalny i funkcja mierzalna.

Dla lepszego zorientowania czytelnika w pojęciu funkcji mierzalnej, podamy kilka elementarnych własności tych funkcji.

(2.1) *Jeżeli funkcja f jest mierzalna w zbiorze A , to zbiór A jest mierzalny.*

Dowód. Niech $t_1, t_2, \dots$ będzie ciągiem liczb dążących do $+\infty$. Zbiór $A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} A \cap E[f(x) < t_i]$ jest mierzalny, ponieważ jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów mierzalnych, ciało zaś zbiorów mierzalnych jest przeliczalnie addytywne. Ponieważ jednak A_1 jest zbio-

¹⁾ W rozdziale tym umawiamy się, że operator E wiąże zawsze zmienną x .

rem tych punktów zbioru A , w których jest określona funkcja f , więc zbiór $A - A_1$ jest miary zero, a więc mierzalny. Zbiór A jako suma dwóch zbiorów mierzalnych jest mierzalny.

(2.2) Funkcja przyjmująca prawie wszędzie w zbiorze A tę samą wartość jest mierzalna w A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest mierzalny.

(2.3) Funkcja mierzalna w zbiorze A jest mierzalna w każdym podzbiorze mierzalnym zbioru A .

(2.4) Funkcja mierzalna w A jest mierzalna w każdym zbiorze równoważnym $\text{rel } I_0$ z A , gdzie I_0 jest ideałem zbiorów miary zero.

(2.5) Funkcja mierzalna w zbiorach $A_1, A_2, \dots$ jest również mierzalna w zbiorze $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

Łatwe dowody pozostawiamy czytelnikowi.

(2.6) Jeżeli f jest funkcją mierzalną w zbiorze A , to zbiory

$$AE[f(x) \geq t] \quad i \quad AE[t_1 \leq f(x) < t_2]$$

są mierzalne.

Dowód. Mamy $AE[f(x) \geq t] = A - E[f(x) < t]$, $\text{rel } I_0$, pierwszy więc z rozważanych zbiorów, jako równoważny różnicy zbiorów mierzalnych, jest mierzalny.

Dalej mamy

$$AE[t_1 \leq f(x) < t_2] = AE[f(x) \geq t_1] \cdot AE[f(x) < t_2],$$

co dowodzi mierzalności drugiego zbioru jako iloczynu dwóch zbiorów mierzalnych.

(2.7) Jeżeli $f_1, f_2, \dots, f_n$ są funkcjami mierzalnymi w zbiorze A , to zbiór $A = E\left[\prod_{i=1}^n (t_i \leq f_i(x) < t_i^*)\right]$ jest mierzalny.

Mamy bowiem

$$AE\left[\prod_{i=1}^n (t_i \leq f_i(x) < t_i^*)\right] = \prod_{i=1}^n AE[t_i \leq f_i(x) < t_i^*],$$

a więc rozpatrywany zbiór jest mierzalny jako iloczyn zbiorów mierzalnych.

Twierdzenie 1. Jeżeli każda z funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$ jest mierzalna w zbiorze A , to klasa A tych $X \subset R_n$, dla których zbiór $AE[f_i(x) \in X]$

jest mierzalny, jest przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni R_n , zawierającym ciała zbiorów borelowskich B_n tej przestrzeni.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika z następujących łatwych do udowodnienia wzorów:

$$(2.8) \quad AE[f_i(x) \in R_n - X] = A - E[f_i(x) \in X], \text{rel } I_0,$$

$$(2.9) \quad AE[f_i(x) \in \sum_{i=1}^{\infty} X_i] = \sum_{i=1}^{\infty} AE[f_i(x) \in X_i].$$

Druga część twierdzenia wynika z (2.7). Mamy bowiem $P_n^* \subset A$, więc na podstawie (2.9) $P_n \subset A$, a ponieważ A jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów, więc (por. księga I, rozdział I, (9.8), str. 49) $[P_n]_\beta = B_n \subset A$.

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja n zmiennych F jest ciągła w przestrzeni R_n , a funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ są mierzalne w zbiorze A , to funkcja $F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ jest mierzalna w A .

Dowód. Na podstawie elementarnych własności funkcji ciągłych (por. wstęp (4.3), str. 20) zbiór $E_{G_D}[F(y_i) < t]$, to znaczy zbiór tych punktów $(y_i) \in R_n$, w których funkcja F przyjmuje wartości mniejsze niż t , jest zbiorem otwartym; oznaczamy go przez G_t . Mamy oczywiście

$$(2.10) \quad AE[F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) < t] = AE[f_i(x) \in G_t].$$

Zbiór po prawej stronie równości (2.10) jest mierzalny na podstawie twierdzenia 1, a więc i zbiór po lewej stronie tej równości jest mierzalny, co należało okazać.

Twierdzenie 3. Jeśli $f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi w A , f zaś taką funkcją, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ prawie wszędzie w A , to f jest funkcją mierzalną w A .

Dowód. Z łatwością można sprawdzić, że

$$(2.11) \quad AE[f(x) < t] = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{k=m}^{\infty} AE\left[f_k(x) < t - \frac{1}{l}\right], \text{rel } I_0,$$

co ze względu na przeliczalną addytywność ciała zbiorów mierzalnych daje mierzalność zbioru $AE[f(x) < t]$.

Twierdzenie 4. *Suma i iloczyn skończonej ilości funkcji mierzalnych w zbiorze A są mierzalne w A ; również iloraz $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ dwóch funkcji mierzalnych w A jest mierzalny w A , jeżeli tylko funkcja f_2 jest różna od zera prawie wszędzie w A .*

Dowód. Pierwsze dwie tezy twierdzenia wynikają z twierdzenia 2 i ciągłości funkcji $y_1 + \dots + y_n$ i $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$. Ostatnia teza wynika z twierdzeń 2 i 3, ciągłości funkcji $\frac{y_1 \cdot y_2}{y_2^2 + \frac{1}{n^2}}$ i związku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 \cdot y_2}{y_2^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{y_1}{y_2} \text{ dla } y_2 \neq 0. \text{ Szczegółowe wyprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi.}$$

Z (2.2) i twierdzenia 4 wynika:

(2.12) *Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są mierzalne w zbiorze A , to funkcje $-f_2$ i $f_1 - f_2$ są również mierzalne w A .*

Dowód. Z mierzalności funkcji f_2 wynika mierzalność zbioru A , a więc mierzalność funkcji stałej $f(x) = -1$, a stąd mierzalność funkcji

$$(-1)f_2(x) = -f_2(x) \quad \text{ i } \quad f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) + (-f_2(x)).$$

(2.13) *Jeżeli funkcja f jest mierzalna w A , to funkcja $|f(x)|$ jest również mierzalna w A .*

Z mierzalności funkcji f wynika bowiem mierzalność zbioru $A_1 = A \cap \{f(x) < 0\}$, przyjmując więc

$$f^*(x) = -1 \text{ dla } x \in A_1 \text{ i } f^*(x) = +1 \text{ dla } x \in A - A_1,$$

otrzymujemy funkcję mierzalną w A spełniającą równanie $|f(x)| = f^*(x) \cdot f(x)$, co dowodzi tezy (2.13).

§ 3. Sumy przybliżone Lebesgue'a-Stieltjesa

Począwszy od tego paragrafu założymy, że rozpatrywana miara g w przestrzeni R jest unormowana, to znaczy, że

$$(3.1) \quad g(R) = 1.$$

Założenie to tylko nieznacznie ogranicza zakres naszych rozważań, miarę skończoną bowiem możemy zawsze unormować. Jeżeli

będziemy mieli do czynienia z miarami nieskończonymi, to rozważania nasze będą dotyczyły przypadku, w którym rozpatrujemy miarę tylko na podzbiorach skończonej miary pewnego zbioru mierzalnego (por. (2.6) i (2.7), rozdział VII, str. 204).

Rozpatrywanie miar unormowanych jest z naszego punktu widzenia rzeczą naturalną dlatego, że prawdopodobieństwo jest właśnie taką miarą. Rozpatrując miary unormowane uzyskujemy dodatkowo pewne uproszczenie wzorów przez opuszczanie współczynnika $g(R)$ wszędzie tam, gdzie bez założenia (3.1) musiałby wystąpić.

Będziemy rozpatrywali *ciągi dwustronne* $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ oznaczając je wszędzie tam, gdzie nie będzie to groziło nieporozumieniem, przez $\{a_k\}$, a więc tak jak ciągi pojedyncze. Przez Δa oznaczmy różnicę $a_{k+1} - a_k$ dwóch sąsiednich wyrazów ciągu liczb rzeczywistych $\{a_k\}$. Liczba Δa_k jest zatem dla ciągu dwustronnego $\{a_k\}$ określona przy wszelkim k całkowitym.

Dla ciągów dwustronnych zachowuje się pojęcie podciągu. Mówimy mianowicie, że ciąg $\{b_k\}$ jest *podciągiem* ciągu $\{a_k\}$, jeżeli istnieje taki ciąg dwustronny i rosnący liczb całkowitych $\{k_n\}$, że $b_n = a_{k_n}$ przy wszelkim całkowitym n .

Określenie 2. Ciąg dwustronny liczb rzeczywistych $\{a_k\}$ nazywamy *ciągami (LS)* jeżeli:

(3.2) *jest niemalejący, to znaczy $\Delta a_k \geq 0$ dla każdego całkowitego k ,*

(3.3) $a_k \rightarrow +\infty$ przy $k \rightarrow +\infty$ i $a_k \rightarrow -\infty$ przy $k \rightarrow -\infty$,

(3.4) $\sup_k \Delta a_k < +\infty$.

Liczbę $\sup_k \Delta a_k$ będziemy nazywali *rozpiętością* ciągu $\{a_k\}$ i oznaczali przez $\lambda(\{a_k\})$. Zbiór ciągów (LS) oznaczamy przez S .

Określenie 3. Mówimy, że ciąg $\{a_k\}$ jest *ciągami zestawionym* z ciągów $\{b_k\}$ i $\{c_k\} \in S$, jeżeli ciąg $\{a_k\}$ składa się z wszystkich elementów tworzących ciągi $\{b_k\}$ i $\{c_k\}$ i tylko z nich, oraz jest niemalejący.

Z określenia 3 wynika natychmiast:

(3.5) *Jeżeli ciąg $\{a_k\}$ jest zestawiony z ciągów $\{b_k\}$, $\{c_k\} \in S$, to $\{a_k\} \in S$; ciągi $\{b_k\}$ i $\{c_k\}$ są podciągami ciągu $\{a_k\}$.*

OKREŚLENIE 4. Dla danych zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}$, funkcji f mierzalnej w A oraz ciągu $\{a_k\} \in \mathcal{S}$ szeregi

$$(3.6) \quad l(f, A, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(A \cap [a_k, a_{k+1})),$$

$$(3.7) \quad L(f, A, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k+1} g(A \cap [a_k, a_{k+1}))$$

nazywamy odpowiednio *dolną* i *górną sumą* (LS) (Lebesgue'a-Stieltjesa) funkcji f w zbiorze A dla ciągu $\{a_k\}$.

Dla skrócenia przyjmujemy jeszcze

$$(3.8) \quad g(f, A, a_k) = g(A \cap [a_k, a_{k+1})).$$

Odejmując (3.6) od (3.7) otrzymujemy

$$(3.9) \quad L(f, A, \{a_k\}) - l(f, A, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta a_k g(f, A, a_k) \leq \leq \lambda(\{a_k\}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(f, A, a_k) \leq \lambda(\{a_k\}) g(A) \leq \lambda(\{a_k\}),$$

a z drugiej strony

$$(3.10) \quad L(f, A, \{a_k\}) - l(f, A, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta a_k g(f, A, a_k) \geq 0,$$

gdz wyrazy szeregu (3.10) są nieujemne. Wnosimy stąd, że

(3.11) Szeregi (3.6) i (3.7) są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne.

Zbieżność szeregu (3.6) sprowadza się do zbieżności dwóch szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g(f, A, a_k) \quad \text{ i } \quad \sum_{k=0}^{-\infty} a_k g(f, A, a_k).$$

Pierwszy z nich ma począwszy od pewnego wskaźnika wyrazy nieujemne, drugi — niedodatnie; warunkiem koniecznym i dostatecznym ich zbieżności jest zatem ograniczoność ich sum częściowych, przy czym jeżeli są one zbieżne, to są zbieżne bezwzględnie. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla szeregu (3.7) otrzymujemy

(3.12) Jeżeli szeregi (3.6) i (3.7) są zbieżne, to są bezwzględnie zbieżne. Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregów (3.6) i (3.7)

jest, aby sumy częściowe

$$\sum_{k=r}^s a_k g(f, A, a_k), \quad \sum_{k=r}^s a_{k+1} g(f, A, a_k)$$

były wspólnie ograniczone dla wszelkich całkowitych r i s ($r < s$).

Udowodnimy teraz:

(3.13) Jeżeli $\{a_k\} \in \mathcal{S}$ jest podciągiem ciągu $\{a_k\} \in \mathcal{S}$, to dla wszelkich całkowitych r i s takich, że $r < s$, mamy

$$\begin{aligned} \sum_{j=r}^s a_{k_j} g(f, A, a_{k_j}) &\leq \sum_{k=k_r}^{k_{s+1}-1} a_k g(f, A, a_k) \leq \\ &\leq \sum_{k=k_r}^{k_{s+1}-1} a_{k+1} g(f, A, a_k) \leq \sum_{j=r}^s a_{k_{j+1}} g(f, A, a_{k_j}). \end{aligned}$$

Dowód. Wobec addytywności miary $g(X)$ mamy

$$(3.14) \quad \sum_{j=r}^s a_{k_j} g(f, A, a_{k_j}) = \sum_{j=r}^s a_{k_j} \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} g(f, A, a_k) = \sum_{j=r}^s \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} a_{k_j} g(f, A, a_k),$$

ponieważ zaś ciąg $\{a_k\}$ jest niemalejący, więc pod znakiem sumy po prawej stronie jest $a_{k_j} \leq a_k$. Zatem

$$(3.15) \quad \sum_{j=r}^s a_{k_j} g(f, A, a_{k_j}) \leq \sum_{j=r}^s \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} a_k g(f, A, a_k) = \sum_{k=k_r}^{k_{s+1}-1} a_k g(f, A, a_k),$$

co jest pierwszą nierównością (3.13). Ostatniej nierówności (3.13) dowodzimy tak samo jak pierwszej; druga wynika przez proste odejmowanie (por. (3.10)).

Po tych przygotowaniach podamy dowód dwóch zasadniczych twierdzeń.

TWIERDZENIE 4. Dla danego zbioru mierzalnego A i funkcji mierzalnej f są zbieżne albo wszystkie sumy (LS), i to bezwzględnie, albo żadna.

Dowód. Załóżmy, że szereg $l(f, A, \{b_k\})$ jest zbieżny dla pewnego $\{b_k\} \in \mathcal{S}$; wówczas na mocy (3.11) zbieżny jest także szereg $L(f, A, \{b_k\})$. Na mocy (3.12) sumy częściowe $\sum_{k=r}^s b_k g(f, A, b_k)$ i $\sum_{k=r}^s b_{k+1} g(f, A, b_k)$ są wspólnie ograniczone. Oznaczmy ich górną i dolną granicę odpowiednio przez γ i Γ .

Niech będzie dany dowolny ciąg $\{c_k\} \in S$ i niech $\{a_k\} \in S$ będzie ciągiem zestawionym z ciągów $\{b_k\}, \{c_k\}$. Ponieważ $\{b_k\}$ jest podciągiem $\{a_k\}$, więc możemy przyjąć $b_j = a_{k_j}$. Stosując do ciągów $\{a_{k_j}\}$ i $\{a_k\}$ twierdzenie (3.13), wobec ograniczoności sum częściowych ciągu $\{a_{k_j}\}$ liczbami γ i Γ widzimy, że również sumy częściowe ciągu $\{a_k\}$ są ograniczone i to tymi samymi liczbami, a więc na mocy (3.12) szeregi $l(f, A, \{a_k\})$ i $L(f, A, \{a_k\})$ są zbieżne. Przechodząc do ciągu $\{c_k\}$ i korzystając z tego, że jest on również podciągiem ciągu $\{a_k\}$, przyjmijmy $c_j = a_{m_j}$ i zastosujmy znowu nierówności (3.13). Otrzymujemy

$$(3.16) \quad \sum_{j=r}^s c_j g(f, A, c_j) = \sum_{j=r}^s a_{m_j} g(f, A, a_{m_j}) \leq \sum_{m=m_r}^{m_{j+1}-1} a_m g(f, A, a_m) \leq \Gamma,$$

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sum_{j=r}^s c_j g(f, A, c_j) &= \sum_{j=r}^s c_{j+1} g(f, A, c_j) - \sum_{j=r}^s (c_{j+1} - c_j) g(f, A, c_j) = \\ &= \sum_{j=r}^s a_{m_{j+1}} g(f, A, a_{m_j}) - \sum_{j=r}^s \Delta c_j g(f, A, c_j) \geq \\ &\geq \sum_{m=m_r}^{m_{j+1}-1} a_m g(f, A, a_m) - \lambda(\{c_k\}) \geq \gamma - \lambda(\{c_k\}), \end{aligned}$$

a więc sumy częściowe dolne ciągu $\{c_k\}$ są wspólnie ograniczone, z czego na podstawie (3.12) wynika zbieżność szeregu $l(f, A, \{c_k\})$, a na podstawie (3.11) zbieżność szeregu $L(f, A, \{c_k\})$. Ponieważ zaś ciąg $\{c_k\}$ był dowolnym ciągiem (LS) , więc dowód twierdzenia 4 został zakończony.

Twierdzenie 5. Jeżeli sumy (LS) funkcji f w zbiorze A są zbieżne, to

$$(3.18) \quad l(f, A, \{b_k\}) \leq L(f, A, \{c_k\})$$

dla wszelkich $\{b_k\}, \{c_k\} \in S$ oraz

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}) &= \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}) = \\ &= \lim_{\lambda(\{a_k\}) \rightarrow 0} l(f, A, \{a_k\}) = \lim_{\lambda(\{a_k\}) \rightarrow 0} L(f, A, \{a_k\}). \end{aligned}$$

Dowód. Załóżmy, że sumy (LS) są zbieżne. Oznaczając przez $\{a_k\}$ ciąg zestawiony z ciągów $\{b_k\}, \{c_k\} \in S$ i przyjmując $b_j = a_{k_j}$, $c_j = a_{m_j}$, możemy we wzorze (3.13) zastosowanym kolejno do $\{a_{k_j}\}$, $\{a_k\}$

i $\{a_{m_j}\}$, $\{a_k\}$ przejść do granicy. W rezultacie otrzymujemy

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{k_j} g(f, A, a_{k_j}) &= l(f, A, \{b_k\}) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A, a_k), \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A, a_k) &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{m_{j+1}} g(f, A, a_{m_j}) = L(f, A, \{c_k\}), \end{aligned}$$

co dowodzi tezy (3.18).

Na podstawie tej tezy mamy

$$(3.21) \quad \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}) \leq \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}).$$

Z (3.9) otrzymujemy dla każdego $\{b_k\} \in S$

$$(3.22) \quad \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}) - \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}) \leq \lambda(\{b_k\}),$$

co wobec tego, że $\lambda(\{b_k\})$, może być dowolnie małe i wobec (3.21) daje

$$(3.23) \quad \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}) = \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}).$$

Oznaczając przez L_0 wartość (3.23) i dobierając dla $\eta > 0$ ciąg $\{a_k\} \in S$ tak, aby $\lambda(\{a_k\}) < \eta$, mamy na mocy nierówności (3.9)

$$(3.24) \quad l(f, A, \{a_k\}) \leq L_0 \leq L(f, A, \{a_k\}),$$

$$(3.25) \quad L(f, A, \{a_k\}) - l(f, A, \{a_k\}) \leq \lambda(\{a_k\}) < \eta,$$

stąd zaś

$$(3.26) \quad |L_0 - l(f, A, \{a_k\})| < \eta \quad \text{i} \quad |L_0 - L(f, A, \{a_k\})| < \eta,$$

co wraz z (3.23) dowodzi twierdzenia.

§ 4. Całka Lebesgue'a-Stieltjesa

Określenie 5. Dla danego zbioru ACR funkcji f mierzalnej według miary g w zbiorze A i takiej, że sumy (LS) funkcji f w zbiorze A są zbieżne, liczbę

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}) &= \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}) = \\ &= \lim_{\lambda(\{a_k\}) \rightarrow 0} l(f, A, \{a_k\}) = \lim_{\lambda(\{a_k\}) \rightarrow 0} L(f, A, \{a_k\}), \end{aligned}$$

nazywamy *całką Lebesgue'a-Stieltjesa* funkcji f w zbiorze A względem miary g (w skrócie *całką (LS)*) i oznaczamy przez $\int_A f dg$.

W przypadku, gdy sumy (LS) dla danej funkcji f w zbiorze A są zbieżne, mówimy, że *całka funkcji f w zbiorze A istnieje* lub że *funkcja f jest całkowalna w zbiorze A* .

Na podstawie twierdzenia 4 otrzymujemy:

(4.2) *Na to, aby istniała całka (LS) funkcji f w zbiorze A , potrzeba i wystarcza, aby istniał taki ciąg $\{a_k\} \in S$, że dolna (lub górna) suma (LS) funkcji f w zbiorze A dla ciągu $\{a_k\}$ jest zbieżna.*

Wprost z określeń wynika, że:

(4.3) *Jeżeli zbiory A_1 i A_2 są równoważne, $\text{rel } I_0$ i funkcja f jest całkowalna w A_1 , to funkcja f jest całkowalna w A_2 i*

$$\int_{A_1} f dg = \int_{A_2} f dg.$$

Z określenia 5 wynika, że *całka $\int_A f dg$ zależy od zbioru A , funkcji f i miary g* . Zajmiemy się przede wszystkim jej zależnością od zbioru A .

Twierdzenie 6. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorze A , to jest całkowalna w każdym mierzalnym podzbiorze zbioru A .*

Dowód. Istotnie, niech A_1 będzie mierzalnym podzbiorem zbioru A . Na mocy założenia dla dowolnego $\{a_k\} \in S$ szereg $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A, a_k)$ jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ zaś miara jest funkcją niemalejącą, więc $g(f, A_1, a_k) \leq g(f, A, a_k)$, skąd wynika, że

$$|a_k g(f, A_1, a_k)| \leq |a_k g(f, A, a_k)|,$$

tym bardziej więc szereg $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A, a_k)$ jest zbieżny i wobec tego funkcja f jest całkowalna w A_1 , co należało okazać.

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorach A_1 i A_2 , to jest całkowalna w zbiorze $A_1 + A_2$.*

Dowód. Wynika to natychmiast z nierówności

$$g(f, A_1 + A_2, a_k) \leq g(f, A_1, a_k) + g(f, A_2, a_k).$$

Można, rzecz prosta, przez indukcję uogólnić powyższe twierdzenie na dowolną skończoną liczbę składników.

Twierdzenie 8. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorze $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, zbiory zaś A_i są mierzalne i parami rozłączne, to*

$$(4.4) \quad \int_A f dg = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f dg.$$

Dowód. Z przeliczalnej addytywności miary g wynika, że przy wszelkim $\{a_k\} \in S$ mamy $g(f, A, a_k) = \sum_{i=1}^{\infty} g(f, A_i, a_k)$, a zatem

$$(4.5) \quad l(f, A, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A, a_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_k g(f, A_i, a_k),$$

przy czym szereg podwójny po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny. Zmieniając porządek sumowania otrzymujemy

$$(4.6) \quad l(f, A, \{a_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(f, A_i, a_k) = \sum_{i=1}^{\infty} l(f, A_i, \{a_k\});$$

analogicznie otrzymujemy

$$(4.7) \quad L(f, A, \{a_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} L(f, A_i, \{a_k\}),$$

a stąd na mocy własności kresu górnego i dolnego

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \int_A f dg &= \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A, \{a_k\}) = \sup_{\{a_k\} \in S} \sum_{i=1}^{\infty} l(f, A_i, \{a_k\}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{\{a_k\} \in S} l(f, A_i, \{a_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f dg = \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A_i, \{a_k\}) < \\ &< \inf_{\{a_k\} \in S} \sum_{i=1}^{\infty} L(f, A_i, \{a_k\}) = \inf_{\{a_k\} \in S} L(f, A, \{a_k\}) = \int_A f dg, \end{aligned}$$

co należało okazać.

Twierdzenie powyższe można także sformułować w następujący sposób:

Całka $\int f dg$ jako funkcja rzeczywista określona dla tych zbiorów X , dla których istnieje, jest w klasie tych zbiorów przeliczalnie addytywna.

Zanotujmy jeszcze następujące kryterium całkowalności:

(4.9) Jeżeli szereg całek funkcji f po zbiorach $A_k = A \cap [k \leq f(x) < k+1]$ jest zbieżny, to znaczy

$$-\infty < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{A_k} f dg < +\infty,$$

to funkcja f jest całkowalna w zbiorze A .

Istotnie, $l(f, A, \{k\}) = k \cdot g(A_k) \leq \int_{A_k} f dg \leq (k+1)g(A_k) = k g(A_k) + g(A_k) = l(f, A, \{k\}) + g(A_k)$, więc $\int_{A_k} f dg - g(A_k) \leq l(f, A, \{k\}) \leq \int_{A_k} f dg$,

ale $l(f, A, \{k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l(f, A_k, \{k\})$, a więc

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{A_k} f dg - g(A_k) \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{A_k} f dg - g(A) \leq l(f, A, \{k\}) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{A_k} f dg,$$

co dowodzi, że szereg $l(f, A, \{k\})$ jest zbieżny, a więc funkcja f jest całkowalna w zbiorze A . Czytelnik zauważy, że w (4.9) ciąg $\{k\} \in \mathcal{S}$ można by zastąpić dowolnym ciągiem $\{a_k\} \in \mathcal{S}$.

TWIERDZENIE 9. Jeżeli dla pewnych α, β i funkcji f mierzalnej w zbiorze A związek $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ zachodzi prawie wszędzie w zbiorze A , to f jest całkowalna w A i

$$(5.1) \quad \alpha g(A) \leq \int_A f dg \leq \beta g(A).$$

Dowód. Niech $\{a_k\} \in \mathcal{S}$ będzie takim ciągiem, że $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta + \eta$, gdzie $\eta > 0$. Wówczas

$$(5.2) \quad l(f, A, \{a_k\}) = \alpha g(A) = \alpha g(A),$$

$$(5.3) \quad L(f, A, \{a_k\}) = (\beta + \eta)g(A) = \beta g(A) + \eta g(A),$$

co ze względu na (5.2) dowodzi, że całka $\int_A f dg$ istnieje, a ze względu na określenie 5, warunek $g(A) \leq 1$ i dowolność η daje tezę (5.1).

Jako wniosek z powyższego twierdzenia wynika natychmiast:

(5.4) Jeżeli $f(x) = \beta$ prawie wszędzie w A , to $\int_A f dg = \beta g(A)$, w szczególności

$$(5.5) \quad \int_A \beta dg = \beta g(A).$$

TWIERDZENIE 10. Jeżeli dwie funkcje f_1 i f_2 całkowalne w zbiorze A spełniają prawie wszędzie w A związek $f_1(x) \leq f_2(x)$, to

$$\int_A f_1 dg \leq \int_A f_2 dg.$$

Dowód. Niech $\{a_k\} \in \mathcal{S}$. Przyjmijmy

$$(5.6) \quad A_k = A \cap [a_k \leq f_1(x) < a_{k+1}].$$

Ponieważ funkcja f_1 jest ograniczona z dołu w zbiorze A_k liczbą a_k , więc z założenia funkcja f_2 jest ograniczona z dołu liczbą a_k prawie wszędzie w zbiorze A_k . Mamy zatem na mocy twierdzenia 9

$$(5.7) \quad \int_{A_k} f_2 dg \geq a_k g(A_k).$$

Ponieważ jednak zbiory A_k są parami rozłączne i $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k = A$, rel I_0 , więc na mocy twierdzenia 8, (4.3) i (5.7) mamy

$$(5.8) \quad \int_A f_2 dg = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{A_k} f_2 dg \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(A_k) = l(f_1, A, \{a_k\}).$$

Przechodząc w nierówności (5.8) z $l(f_1, A, \{a_k\})$ do zera, otrzymujemy na mocy (4.1) tezę twierdzenia.

TWIERDZENIE 11. Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są całkowalne w zbiorze A , to ich suma $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ też jest całkowalna w A i

$$(5.9) \quad \int_A f dg = \int_A f_1 dg + \int_A f_2 dg.$$

Dowód. Weźmy pod uwagę dowolny ciąg $\{a_k\} \in \mathcal{S}$ i przyjmijmy

$$(5.10) \quad A_k^{(1)} = A \cap [a_k \leq f_1(x) < a_{k+1}], \quad A_k^{(2)} = A \cap [a_k \leq f_2(x) < a_{k+1}],$$

$$(5.11) \quad A_k^{(+)} = A \cap [a_k \leq f(x) < a_{k+1}].$$

Ze względu na przeliczalną addytywność funkcji g mamy

$$(5.12) \quad g(A_k^{(1)}) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}),$$

$$g(A_k^{(2)}) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}),$$

$$(5.13) \quad g(A_k^{(+)}) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}).$$

Ponieważ szeregi $l(f_1, A, \{a_k\})$, $l(f_2, A, \{a_k\})$, $L(f_1, A, \{a_k\})$ i $L(f_2, A, \{a_k\})$ są bezwzględnie zbieżne, więc zbieżne są szeregi:

$$(5.14) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} |a_{k_1}| g(A_{k_1}^{(1)}), \quad \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |a_{k_2}| g(A_{k_2}^{(2)}), \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} |a_{k_1+1}| g(A_{k_1}^{(1)}),$$

$$\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |a_{k_2+1}| g(A_{k_2}^{(2)}),$$

które na mocy (5.12) i (5.13) możemy przekształcić na szeregi wielokrotne:

$$(5.15) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} |a_{k_1}| g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}),$$

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} |a_{k_2}| g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}),$$

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} |a_{k_1+1}| g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}),$$

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} |a_{k_2+1}| g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}).$$

Rozpatrzmy zbiór $A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}$. Jeżeli jest on niepusty, to w jego punktach zachodzą nierówności

$$a_{k_1} \leq f_1(x) < a_{k_1+1}, \quad a_{k_2} \leq f_2(x) < a_{k_2+1}, \quad a_{k_3} \leq f_1(x) + f_2(x) < a_{k_3+1},$$

z których wynika, że $a_{k_3} < a_{k_1+1} + a_{k_2+1}$, $a_{k_1} + a_{k_2} < a_{k_3+1} \leq a_{k_3} + \lambda(\{a_k\})$, a więc wyrazy szeregu wielokrotnego

$$(5.16) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} a_{k_3} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)})$$

są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu

$$(5.17) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} (a_{k_1+1} + a_{k_2+1}) g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)})$$

i większe od odpowiednich wyrazów szeregu

$$(5.18) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} (a_{k_1} + a_{k_2} - \lambda(\{a_k\})) g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}).$$

Zbieżność bezwzględna tych ostatnich szeregów wynika jednak ze zbieżności szeregów (5.15), a więc szereg (5.16) jest również bez-

względnie zbieżny, co pozwala jego wyrazy sumować w dowolnym porządku. Korzystając z tego i z (5.12) otrzymujemy

$$(5.19) \quad \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} a_{k_3} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) =$$

$$= \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} a_{k_3} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) = \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} a_{k_3} g(A_{k_3}^{(+)}) = l(f, A, \{a_k\}),$$

co ze względu na (4.2) dowodzi, że całka funkcji f , będącej sumą funkcji f_1 i f_2 , w zbiorze A istnieje.

Przekształcając bezwzględnie zbieżne szeregi (5.17) i (5.18) otrzymujemy

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} (a_{k_1+1} + a_{k_2+1}) g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) =$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} a_{k_1+1} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) +$$

$$+ \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} a_{k_2+1} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) =$$

$$= L(f_1, A, \{a_k\}) + L(f_2, A, \{a_k\}),$$

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} (a_{k_1} + a_{k_2} - \lambda(\{a_k\})) g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) =$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} a_{k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) +$$

$$+ \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} a_{k_2} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) -$$

$$- \lambda(\{a_k\}) \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} g(A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} A_{k_3}^{(+)}) =$$

$$= l(f_1, A, \{a_k\}) + l(f_2, A, \{a_k\}) - \lambda(\{a_k\}) g(A),$$

a ze względu na to, że wyrazy szeregu (5.16) są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu (5.17) i większe od odpowiednich wyrazów szeregu (5.18) oraz ze względu na (5.19), mamy

$$(5.20) \quad l(f_1, A, \{a_k\}) + l(f_2, A, \{a_k\}) - \lambda(\{a_k\}) g(A) \leq$$

$$\leq l(f, A, \{a_k\}) \leq L(f_1, A, \{a_k\}) + L(f_2, A, \{a_k\}).$$

Przechodząc w (5.20) z $\lambda(\{a_k\})$ do zera otrzymujemy na mocy (4.1) tezę (5.9), co należało okazać.

Twierdzenie 12. Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorze A , β zaś jest dowolną stałą, to funkcja $\beta f(x)$ jest całkowalna w A i

$$\int_A \beta f dg = \beta \int_A f dg.$$

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 13. Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorze A , to funkcja $|f(x)|$ jest też całkowalna w zbiorze A i mamy

$$\int_A |f| dg \geq \left| \int_A f dg \right|.$$

Dowód. Przyjmijmy $A_1 = E[f(x) < 0]$, $f^*(x) = -1$ dla $x \in A_1$ i $f^*(x) = +1$ dla $x \in A - A_1$. Mamy $f(x) \cdot f^*(x) = |f(x)|$ prawie wszędzie w A , a więc

$$(5.21) \quad \int_A |f| dg = \int_A f \cdot f^* dg = \int_{A_1} f \cdot f^* dg + \int_{A - A_1} f \cdot f^* dg = - \int_{A_1} f dg + \int_{A - A_1} f dg.$$

Ponieważ zaś funkcja f jest w zbiorze A_1 ograniczona z góry przez 0, więc $\int_{A_1} f dg \leq 0$, co ze względu na (5.21) dowodzi twierdzenia.

Twierdzenie 14. Jeżeli funkcja f_1 jest całkowalna w zbiorze A , a funkcja f_2 jest mierzalna w zbiorze A i zachodzi nierówność

$$(5.22) \quad |f_1(x) - f_2(x)| \leq \beta$$

prawie wszędzie w A , to funkcja f_2 jest całkowalna w zbiorze A i

$$(5.23) \quad \left| \int_A f_1 dg - \int_A f_2 dg \right| \leq \beta g(A).$$

Dowód. Z (5.22) wynika, że

$$-\beta \leq f_1(x) - f_2(x) \leq \beta, \quad -\beta \leq f_2(x) - f_1(x) \leq \beta$$

prawie wszędzie w A , więc funkcja $f_2 - f_1$ jest całkowalna na podstawie twierdzenia 9 i $f_2 = f_1 + (f_2 - f_1)$ jest całkowalna jako suma funkcji całkowalnych. Dalej mamy

$$-\beta g(A) \leq \int_A (f_1 - f_2) dg = \int_A f_1 dg - \int_A f_2 dg \leq \beta g(A),$$

$$-\beta g(A) \leq \int_A (f_2 - f_1) dg = \int_A f_2 dg - \int_A f_1 dg \leq \beta g(A),$$

co w rezultacie daje (5.23).

§ 5. Całkowanie ciągów funkcji

Twierdzenie 15. Jeżeli ciąg funkcji $\{f_m\}$ całkowalnych w zbiorze A jest w tym zbiorze jednostajnie zbieżny do funkcji f , to funkcja f jest całkowalna w zbiorze A i

$$(6.1) \quad \int_A f dg = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m dg.$$

Dowód. Na mocy założenia dla każdego $\eta > 0$ istnieje taki wskaźnik m_η , że $|f(x) - f_m(x)| < \eta$ dla każdego $m \geq m_\eta$. Na mocy twierdzenia 14 wynika stąd, że funkcja f jest całkowalna w zbiorze A i że

$$\left| \int_A f dg - \int_A f_m dg \right| \leq \eta g(A),$$

co dowodzi twierdzenia.

Twierdzenie 16. Jeżeli funkcja f jest całkowalna w zbiorze A , to dla każdego $\eta > 0$ można dobrać takie β_η , że

$$(6.2) \quad \int_{AE[|f(x)| \geq \beta]} |f| dg < \eta$$

dla każdego $\beta \geq \beta_\eta$.

Dowód. Funkcja $|f|$ jest na mocy twierdzenia 13 całkowalna w A , na mocy zaś twierdzenia 8 mamy

$$(6.3) \quad \int_A |f| dg = \int_{AE[|f(x)| \geq 0]} |f| dg = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{AE[n \leq |f(x)| < n+1]} |f| dg,$$

skąd wynika, że

$$(6.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{AE[n \leq |f(x)| < n+1]} |f| dg = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{AE[|f(x)| \geq k]} |f| dg = 0.$$

Ponieważ zaś całka funkcji nieujemnej jest nieujemną i nie malejącą funkcją zbioru, więc z (6.4) wynika (6.2).

Określenie 6. Mówimy, że A jest zbiorem funkcji jednakowo całkowalnych w A , funkcje zaś zbioru A nazywamy jednakowo całkowalnymi w A , jeśli A jest zbiorem funkcji całkowalnych w A i dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie β_η , że przy $\beta \geq \beta_\eta$ warunek (6.2) jest spełniony dla każdej funkcji $f \in A$.

TWIERDZENIE 17. Jeżeli funkcje ciągu $\{f_m\}$ są jednakowo całkowalne w A i jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ prawie wszędzie w A , to funkcja f jest całkowalna w A i mamy

$$(6.5) \quad \int_A f dg = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m dg.$$

Dowód. Niech $\eta > 0$. Na podstawie założenia możemy dobrać $\beta_\eta \geq 1$ tak, aby dla $\beta \geq \beta_\eta$ było

$$(6.6) \quad \int_{AE[|f_m(x)| \geq \beta]} |f_m| dg < \frac{\eta}{4} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Oznaczmy dalej

$$(6.7) \quad A(\alpha, \gamma) = A[E[a \leq f(x) < \gamma]] \quad \text{dla} \quad |\alpha| + |\gamma| \geq 1,$$

$$(6.8) \quad B_k = A \prod_{i=1}^{\infty} E[|f(x) - f_{k+i}(x)| < \eta/4].$$

B_k jest więc zbiorem tych $x \in A$, dla których wartość wszystkich funkcji rozważanego ciągu o wskaźniku większym od k różni się o mniej niż $\eta/4$ od wartości funkcji granicznej. Wprost z (6.8) wynika

$$(6.9) \quad B_k \subset B_{k+1}, \quad \sum_{k=1}^n B_k = B_n.$$

Ponieważ zaś z założenia $\lim_{i \rightarrow \infty} |f(x) - f_{k+i}(x)| = 0$ prawie wszędzie w A , więc

$$(6.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k = A, \text{ rel } I_0, \quad g\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(B_n) = g(A).$$

Korzystając z (6.10) dobierzmy takie k_0 , aby było

$$(6.11) \quad g(A - B_{k_0}) = g(A) - g(B_{k_0}) \leq \frac{\eta}{4\beta_\eta(|\alpha| + |\gamma|)}.$$

Korzystając z (6.8) i z ograniczoneści funkcji f w zbiorze $A(\alpha, \gamma)$, z której wynika jej całkowalność w tym zbiorze, mamy na podstawie twierdzenia 14

$$(6.12) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma)B_{k_0}} f dg - \int_{A(\alpha, \gamma)B_{k_0}} f_{k_0+i} dg \right| \leq \frac{\eta}{4} g(A(\alpha, \gamma)) \leq \frac{\eta}{4}.$$

Korzystając z (6.7) i (6.11) mamy

$$(6.13) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma)B_{k_0}} f dg \right| \leq (|\alpha| + |\gamma|) g(A - B_{k_0}) \leq \frac{(|\alpha| + |\gamma|)\eta}{4\beta_\eta(|\alpha| + |\gamma|)} \leq \frac{\eta}{4}.$$

Wreszcie otrzymujemy

$$(6.14) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}} f_{k_0+i} dg \right| \leq \left| \int_{[A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}] \cdot E[|f_{k_0+i}(x)| < \beta_\eta]} f_{k_0+i} dg \right| + \left| \int_{[A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}] \cdot E[|f_{k_0+i}(x)| \geq \beta_\eta]} f_{k_0+i} dg \right|.$$

Ale wartość bezwzględna pierwszej z całek po prawej stronie nierówności (6.14) jest nie większa od

$$\beta_\eta g(A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}) \leq \frac{\eta \cdot \beta_\eta}{4\beta_\eta(|\alpha| + |\gamma|)} \leq \frac{\eta}{4},$$

a to na podstawie ograniczoneści funkcji podcałkowej w zbiorze, po którym całkujemy, (6.7) i (6.11); druga całka na podstawie (6.6) jest nie większa od $\eta/4$.

Ostatecznie więc

$$(6.15) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}} f_{k_0+i} dg \right| \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}.$$

Stosując teraz (6.12), (6.13) i (6.15) otrzymujemy

$$(6.16) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma)} f dg - \int_{A(\alpha, \gamma)} f_{k_0+i} dg \right| \leq \left| \int_{A(\alpha, \gamma)B_{k_0}} f dg - \int_{A(\alpha, \gamma)B_{k_0}} f_{k_0+i} dg \right| + \left| \int_{A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}} f dg \right| + \left| \int_{A(\alpha, \gamma) - B_{k_0}} f_{k_0+i} dg \right| \leq \eta,$$

skąd, wobec dowolności liczby η ,

$$(6.17) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A(\alpha, \gamma)} f_m dg = \int_{A(\alpha, \gamma)} f dg$$

dla dowolnych α, γ (czytnik łatwo zauważy, że założenie w (6.7) $-|\alpha| + |\gamma| \geq 1$ zostało uczynione tylko dla wygody przy szacowaniu).

Mamy dalej

$$(6.18) \quad \left| \int_{A(\alpha, \gamma)} f_m dg \right| \leq \int_{A(\alpha, \gamma)} |f_m| dg \leq \int_A |f_m| dg = \int_{AE[|f_m| < \beta_\eta]} |f_m| dg + \int_{AE[|f_m| \geq \beta_\eta]} |f_m| dg \leq \beta_\eta g(A) + \eta/4 \leq \beta_\eta + \eta/4,$$

a więc na mocy (6.17) mamy

$$(6.19) \quad \left| \int_{A(\alpha, \eta)} f dg \right| \leq \beta_\eta + \eta.$$

Z (6.19) wynika, że szeregi $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{A(k, k+1)} f dg$, $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{A(-k, k+1)} f dg$, a więc i szereg $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{A(k, k+1)} f dg$, są zbieżne, co ze względu na (4.9) dowo-

dzi, że funkcja f jest całkowalna w zbiorze A .

Niech teraz $\beta > \beta_\eta$ będzie taką liczbą, że

$$(6.20) \quad \int_{A \cap \{f(x) \geq \beta\}} |f| dg = \int_{A - A(-\beta, \beta)} |f| dg \leq \eta/2.$$

Na podstawie (6.17) można dobrać takie m_0 , że

$$(6.21) \quad \left| \int_{A(-\beta, \beta)} f dg - \int_{A(-\beta, \beta)} f_{m_0+i} dg \right| \leq \eta/4 \quad (i=1, 2, \dots).$$

Korzystając z (6.21), (6.20) i (6.6), mamy

$$(6.22) \quad \left| \int_A f dg - \int_A f_{m_0+i} dg \right| \leq \left| \int_{A(-\beta, \beta)} f dg - \int_{A(-\beta, \beta)} f_{m_0+i} dg \right| + \left| \int_{A - A(-\beta, \beta)} f dg \right| + \left| \int_{A - A(-\beta, \beta)} f_{m_0+i} dg \right| \leq \eta,$$

a więc $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m dg = \int_A f dg$, co należało okazać.

Twierdzenie 17, jak łatwo sprawdzić, pociąga za sobą twierdzenie 15, prócz tego zaś wynika zeń jeszcze następujący wniosek:

(6.23) Jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ prawie wszędzie w A , funkcje zaś f_m są wspólnie ograniczone w A , to zachodzi (6.5).

§ 6. Miary pochodne w przestrzeniach euklidesowych

TWIERDZENIE 18. Jeżeli g jest miarą w dowolnej przestrzeni R , $f_1, f_2, \dots, f_m$ funkcjami w R mierzalnymi według miary g , to funkcja

$$(7.1) \quad G(Y) = g\left(E\left[\left(f_i(x)\right) \in Y\right]\right)$$

określona dla tych $Y \subset R_n$, dla których zbiór $E\left[\left(f_i(x)\right) \in Y\right]$, jest mierzalny według miary g , jest miarą regularną w przestrzeni R_n będącą

rozszerzeniem miary stowarzyszonej (lub wprost miarą stowarzyszoną) z funkcją

$$(7.2) \quad F(t_1, t_2, \dots, t_n) = g\left(E\left[\left(f_i(x)\right) < (t_i)\right]\right).$$

Dowód. Jak wiemy z twierdzenia 1, funkcja G jest określona na przeliczalnie addytywnym ciełe podzbiorów przestrzeni R_n zawierającym ciało zbiorów borelowskich B_n . Jest ona oczywiście nieujemna i skończona, jeżeli tylko miara g jest skończona (co założyliśmy). Dla zakończenia dowodu pierwszej części twierdzenia należy więc tylko udowodnić przeliczalną addytywność funkcji $G(Y)$ i spełnianie przez nią warunku (2.2) określenia 1 z rozdziału VII (str. 203), co pozostawiamy czytelnikowi.

Druga część twierdzenia wynika natychmiast z twierdzenia 6 z rozdziału VIII (str. 214).

Z twierdzenia 18 wynika, że za pomocą danej miary g można w dowolnej przestrzeni abstrakcyjnej określić na ogół nieskończenie wiele miar regularnych w przestrzeniach R_n . Miary te będziemy nazywali *miarami pochodnymi* miary g .

§ 7. Całki Lebesgue'a-Stieltjesa w przestrzeniach euklidesowych

Rozpatrzmy dowolną miarę g w przestrzeni R i jej miarę pochodną G w przestrzeni R_n , skonstruowaną za pomocą funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$ mierzalnych według miary g . Niech będzie dany zbiór $A \subset R_n$ i funkcja $\varphi((x_i))$ całkowalna w A według miary G . Powstaje zagadnienie, czy całkę $\int_A \varphi dG$ można sprowadzić do całki (LS) według miary g na pewnym podzbiorze przestrzeni R , innymi słowy, czy każdej funkcji φ całkowalnej w $A \subset R_n$ można przyporządkować

zbiór $B \subset R$ i funkcję ψ całkowalną w B tak, aby $\int_A \varphi dG = \int_B \psi dg$.

Ograniczymy się do podania rozwiązania tego zagadnienia w pewnym szczególnym przypadku.

OKREŚLENIE 7. Funkcja $\varphi((x_i))$ określona w przestrzeni R_n nazywa się *funkcją Baire'a*, jeżeli dla każdego rzeczywistego t zbiór $E[\varphi((x_i)) < t]$ jest zbiorem borelowskim, to znaczy należy do B_n .

Z określenia 7 otrzymujemy natychmiast:

(8.1) Każda funkcja ciągła w przestrzeni R_n jest funkcją Baire'a (por. wstęp, (4.3), str. 20).

(8.2) Każda funkcja Baire'a jest mierzalna według każdej miary regularnej.

Zwykle zbiór funkcji Baire'a określa się, zgodnie z definicją podaną przez Baire'a w 1899 roku, jako najmniejszy zbiór funkcji przestrzeni R_n zawierający funkcje ciągłe i taki, że jeżeli funkcje $f_1, f_2, \dots$ do niego należą i w każdym punkcie $(t_i) \in R$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n((t_i)) = f((t_i))$, to funkcja f również do niego należy. W 1905 roku H. Lebesgue udowodnił równoważność określenia 7 z określeniem podanym przez Baire'a.

Twierdzenie 19. Jeżeli G jest miarą pochodną w R_n skonstruowaną za pomocą funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$ miary g w R , φ funkcją Baire'a w R_n całkowalną według miary G w całej przestrzeni R_n , to przyjmując dla $x \in R$

$$\psi(x) = \varphi((f_i(x)))$$

mamy

$$(8.3) \quad \int_{R_n} \varphi dg = \int_R \psi dg.$$

Dowód. Dla dowolnego $\{a_k\} \in S$ zbiór

$$Y_k = E[a_k \leq \varphi((x_i)) < a_{k+1}] \subset R_n$$

jest borelowski jako różnica dwóch zbiorów borelowskich. A więc zbiór $E[(f_i(x)) \in Y_k] \subset R$ jest mierzalny według miary g i mamy na podstawie (7.1)

$$(8.4) \quad G(Y_k) = g(E[(f_i(x)) \in Y_k]) = g(E[a_k \leq \varphi((f_i(x))) < a_{k+1}]) = \\ = g(E[a_k \leq \psi(x) < a_{k+1}]),$$

co daje

$$(8.5) \quad l(\varphi, R_n, \{a_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k G(Y_k) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(E[a_k \leq \psi(x) < a_{k+1}]) = l(\psi, R, \{a_k\}),$$

a więc

$$(8.6) \quad \int_{R_n} \varphi dg = \sup_{\{a_k\} \in S} l(\varphi, R_n, \{a_k\}) = \sup_{\{a_k\} \in S} l(\psi, R, \{a_k\}) = \int_R \psi dg,$$

co należało okazać.

Zwróćmy uwagę, że w powyższym rozumowaniu istotną rolę odgrywało założenie, że φ jest funkcją Baire'a, z tego bowiem założenia wynika, że zbiór Y_k jest borelowski, a dalej mierzalność według miary g zbioru $E[(f_i(x)) \in Y_k]$ i równość (8.4) wystarczająca do dowodu.

Przy założeniu mierzalności funkcji φ , a więc słabszym niż uczynione, twierdzenie 19 nie zachodzi. Już dla $n=1$ może się tak zdarzyć, że funkcja f jest mierzalna według miary g , φ mierzalna według miary G , gdzie G jest miarą pochodną, funkcja zaś $\psi(x) = \varphi(f(x))$ nie jest mierzalna według miary g .

§ 8. Całka Riemanna-Stieltjesa

Niech w przestrzeni R_n będzie dana miara regularna i unormowana G , stowarzyszona z n -wymiarowo niemalejącą funkcją $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Niech $I = E[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < a_i + h_i)]$ będzie przedziałem skończonym w przestrzeni R_n , $\varphi((x_i))$ funkcją ciągłą w całej przestrzeni R_n .

Przy tych założeniach mamy

$$(9.1) \quad G(I) \leq 1,$$

$$(9.2) \quad G(E[\prod_{i=1}^n (\xi_i \leq x_i < \xi_i + h_i)]) = \Delta_{1, \dots, n}^{h_1, \dots, h_n} F(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Z ciągłości funkcji φ wynika:

(9.3) Funkcja φ jest ograniczona, a więc również całkowalna, w każdym przedziale skończonym.

(9.4) Różnicą między kresem górnym a dolnym wartości funkcji φ w przedziale $E[\prod_{i=1}^n (\xi_i \leq x_i < \xi_i + h_i)]$ dąży do zera, jeżeli $\max(h_1, \dots, h_n)$ dąży do zera.

Podzielmy teraz przedział I na l przedziałów rozłącznych $I_j = E[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < a_i^{(j)} + h_i^{(j)})]$ i oznaczmy odpowiednio przez μ_j i $\bar{\mu}_j$ kres dolny i górny wartości funkcji φ w przedziale I_j , przez $\delta(I_1, \dots, I_l)$ zaś największą z liczb $h_i^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, l$, $i=1, 2, \dots, n$. Przy tych

oznaczeniach mamy

$$(9.5) \quad \int_I \varphi dg = \sum_{j=1}^l \int_{I_j} \varphi dg,$$

$$(9.6) \quad \underline{\mu}_j G(I_j) \leq \int_{I_j} \varphi dg \leq \bar{\mu}_j G(I_j),$$

a więc

$$(9.7) \quad \sum_{j=1}^l \underline{\mu}_j G(I_j) \leq \int_I \varphi dg \leq \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_j G(I_j).$$

Weźmy teraz pod uwagę sumę

$$(9.8) \quad \sum_{j=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) G(I_j) = \sum_{j=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) \Delta_{1, \dots, n}^{h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}} F(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}).$$

Dla $(t_i^{(j)}) \in I_j$ mamy

$$(9.9) \quad \underline{\mu}_j \leq \varphi(t_i^{(j)}) < \bar{\mu}_j,$$

a więc

$$(9.10) \quad \sum_{j=1}^l \underline{\mu}_j G(I_j) \leq \sum_{j=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) \Delta_{1, \dots, n}^{h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}} F(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) < \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_j G(I_j), \quad (t_i^{(j)}) \in I_j.$$

Z (9.4) wynika, że przy dostatecznie dużym l i dostatecznie małym $\delta(I_1, \dots, I_l)$ różnice $\bar{\mu}_j - \underline{\mu}_j$ będą dowolnie małe, innymi słowy, że dla dowolnego $\eta > 0$ istnieje takie $\varepsilon > 0$, że

$$(9.11) \quad \text{Jeżeli tylko } \delta(I_1, \dots, I_l) \leq \varepsilon, \text{ to } \bar{\mu}_j - \underline{\mu}_j < \eta \text{ dla } j=1, 2, \dots, l.$$

Dobierzmy więc dla dowolnego $\eta > 0$ takie $\varepsilon > 0$ i przedziały $I_1, \dots, I_l$ rozłączne i pokrywające I tak, aby zachodziło (9.11), i oszacujmy różnicę między skrajnymi wyrazami nierówności (9.7). Mamy

$$(9.12) \quad \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_j G(I_j) - \sum_{j=1}^l \underline{\mu}_j G(I_j) = \sum_{j=1}^l (\bar{\mu}_j - \underline{\mu}_j) G(I_j) \leq \sum_{j=1}^l \eta G(I_j) = \eta G(I) \leq \eta,$$

skąd na podstawie nierówności (9.7) i (9.10) otrzymujemy

$$(9.13) \quad \left| \int_I \varphi dg - \sum_{j=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) \Delta_{1, \dots, n}^{h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}} F(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) \right| < \eta \quad \text{dla } (t_i^{(j)}) \in I_j.$$

Tym samym udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 20. Jeżeli $G(Y)$ jest w przestrzeni R_n regularną i unormowaną miarą stowarzyszoną z n -wymiarowo niemającą funkcją F , φ zaś funkcją ciągłą w R_n , to dla każdego skończonego przedziału

$$I = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < a_i + h_i) \right]$$

zachodzi wzór

$$(9.14) \quad \int_I \varphi dg = \lim_{\delta(I_1, \dots, I_l) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) \Delta_{1, \dots, n}^{h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}} F(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}),$$

gdzie $I_j = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < a_i^{(j)} + h_i^{(j)}) \right]$, $j=1, 2, \dots, l$, są przedziałami rozłącznymi i takimi, że $\sum_{j=1}^l I_j = I$.

Określenie 8. Jeżeli φ i F są funkcjami w przestrzeni R_n , I przedziałem skończonym w tej przestrzeni, to granicę (9.14), a więc granicę liczb

$$\sum_{j=1}^l \varphi(t_i^{(j)}) \Delta_{1, \dots, n}^{h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}} F(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)})$$

przy $l \rightarrow \infty$, $\delta(I_1, \dots, I_l) \rightarrow 0$, przy czym $I_j = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < a_i^{(j)} + h_i^{(j)}) \right]$

są przedziałami rozłącznymi i takimi, że $\sum_{j=1}^l I_j = I$, nazywamy całką Riemanna-Stieltjesa funkcji φ w przedziale I względem funkcji F , o ile granica ta istnieje.

Twierdzenie 20 możemy podać teraz w postaci:

(9.15) Jeżeli φ jest funkcją ciągłą w przestrzeni R_n , $G(Y)$ miarą regularną i unormowaną, stowarzyszoną z funkcją n -wymiarowo niemającą F , to całka Lebesgue'a-Stieltjesa funkcji φ według miary G w dowolnym przedziale skończonym I jest identyczna z całką Riemanna-Stieltjesa funkcji φ względem funkcji F w przedziale I .

Znane są różne uogólnienia twierdzenia (9.15), nie będziemy ich jednak tu podawali.

§ 9. Przykłady i zadania

(10.1) Wykazać, że na to, aby funkcja f była mierzalna w zbiorze A , potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby wymiernej t zbiór $AE[f(x) < t]$ był mierzalny.

(10.2) Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^s \inf_{x \in A_i} f(x)g(A_i) \leq \int_A f dg \leq \sum_{i=1}^s \sup_{x \in A_i} f(x)g(A_i),$$

gdzie $A_1, \dots, A_s$ są zbiorami rozłącznymi i $\sum_{i=1}^s A_i = A$, a następnie wykazać, że

$$\sup \left[\sum_{i=1}^s \inf_{x \in A_i} f(x)g(A_i) \right] = \int_A f dg = \inf \left[\sum_{i=1}^s \sup_{x \in A_i} f(x)g(A_i) \right],$$

gdzie kres górny po prawej i kres dolny po lewej stronie brane są po wszystkich ciągach $A_1, \dots, A_s$ (s dowolne) zbiorów rozłącznych, których sumą jest A , funkcja zaś f jest ograniczona w A .

(10.3) Przyjmujemy $g(X) = \sum_{n \in X} a_n$ dla $X \subset R_1$, gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $a_n \geq 0$. Udowodnić, że

$$\int_A f dg = \sum_{n \in A} a_n \cdot f(n).$$

(10.4) Przyjmujemy, że

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} \text{ess} [f(x)] &= \inf_{g(AE[f(x) > \beta]) = 0} \beta, \\ \inf_{x \in A} \text{ess} [f(x)] &= \sup_{g(AE[f(x) < \beta]) = 0} \beta. \end{aligned}$$

Udowodnić, że

$$\inf_{x \in A} \text{ess} [f(x)]g(A) \leq \int_A f dg \leq \sup_{x \in A} \text{ess} [f(x)]g(A).$$

(10.5) Oznaczając przez m_1 i m_2 odpowiednio miarę Lebesgue'a na prostej i płaszczyźnie, mamy dla podzbiorów A odcinka $I = E[0 \leq x < 1]$ oraz nieujemnej i całkowalnej w zbiorze A funkcji f wzór

$$\int_A f dm_1 = m_2 \left(E \left[(x_1 \in A) \cdot (0 \leq x_2 \leq f(x_1)) \right] \right).$$

Uogólnić ten wzór na dowolne funkcje całkowalne.

(91.6) Podać przykład funkcji na odcinku $I = E[0 \leq x < 1]$ całkowalnej według miary Lebesgue'a w każdym przedziale

$$I_k = E \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

i takiej, że szereg całek $\sum_{k=1}^{\infty} \int f dm_1$ jest zbieżny bezwzględnie, a nie całkowalnej w całym przedziale I .