

(7.3) Zachowując oznaczenia z twierdzenia 4 oznaczamy

$$(5.1^*) \quad h_*(u) = \sup_{\substack{\prod_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\prod_{i=1}^n v_i\right) \right].$$

Funkcja h_* nazywa się *miarą wewnętrzną*. Dowieść, że w przypadku, gdy funkcja g jest skończona, warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności elementu $u \in U$ jest warunek $h(u) = h_*(u)$.

(7.4) Niech X będzie zbiorem nieskończonym nieprzeliczalnym. Przyjmujemy dla zbiorów skończonych $Y \subset X$, $g(Y) = n$, gdzie n jest ilością elementów zbioru Y , dla Y przeliczalnych zaś lub takich, że zbiór $X - Y$ jest najwyżej przeliczalny, przyjmujemy $g(Y) = +\infty$. Udowodnić, że g jest miarą w $W(X)$. W ten sposób pojęcie miary można też uważać za uogólnienie pojęcia liczności elementów.

(7.5) Dla przykładu podanego w (7.4) określamy funkcję h wzorem (5.1). Wykazać, że każdy podzbiór zbioru X jest mierzalny według funkcji h .

(7.6) Zbadać zbiór elementów spełniających warunek (3.4) w przypadku, gdy funkcja g spełnia warunki (3.1), (3.2) i słabszy od (3.3) warunek

$$g(u_1 + u_2) \leq g(u_1) + g(u_2).$$

Rozdział VIII

Miary w przestrzeniach euklidesowych

§ 1. Treść rozdziału

Rozdział niniejszy jest zastosowaniem wyników rozdziału poprzedniego specjalnie do przestrzeni euklidesowych, a zarazem powiązaniem badań rozdziałów VI i VII. Wynik zasadniczy zawarty jest w twierdzeniach 4 i 6, z których pierwsze orzeka, że każdej funkcji n -wymiarowo niemalejącej daje się przyporządkować pewna miara w przestrzeni R_n , a drugie wyznacza klasy tych miar, które dadzą się w podany tam sposób z takich funkcji otrzymać. Twierdzenie 5 podaje pewną własność funkcji n -wymiarowo niemalejących spełniających dodatkowe warunki, ważne w pewnych zagadnieniach rachunku prawdopodobieństwa.

W paragrafie 5 omawiamy krótko miarę Lebesgue'a.

§ 2. Funkcje przedziału stowarzyszone z funkcjami n -wymiarowo niemalejącymi

Nawiązując do rozważań rozdziału pierwszego księgi I (str. 46-49) przypominamy, że przez P_n umówiliśmy się oznaczać klasę n -wymiarowych przedziałów półotwartych (prawostronnie) n -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej R_n , przez N_n ciało figur elementarnych tej przestrzeni, to znaczy klasę sum skończonej ilości parami rozłącznych przedziałów półotwartych tej przestrzeni. Ponieważ często będziemy w tym rozdziale mówili o przedziałach skończonych, to znaczy o zbiorach $I = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i \leq \beta_i)\right]$, gdzie $-\infty < a_i \leq \beta_i < +\infty$, więc klasę tych przedziałów oznaczmy dodatkowo przez P_n^* .

OKREŚLENIE 1. Jeżeli f jest n -wymiarowo niemalejącą funkcją określoną w przestrzeni R_n , to funkcję g określoną dla

$$I = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < \beta_i) \right] \in P_n^*$$

wzorem

$$(2.1) \quad g(I) = g \left(E \left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < \beta_i) \right] \right) = \Delta_{1, \dots, n}^{\beta_1 - a_1, \dots, \beta_n - a_n} f(a_1, \dots, a_n)$$

nazywamy funkcją przedziału stowarzyszoną z funkcją f .

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że na przykład funkcję przedziału stowarzyszoną z funkcją $f(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3$ jest zwykła objętość trójwymiarowego przedziału (prostokądnika).

Ponieważ w określeniu 1 założyliśmy, że funkcja f jest n -wymiarowo niemalejąca, więc

(2.2) Funkcja stowarzyszona jest nieujemna.

W dalszym ciągu przez g będziemy oznaczali stale funkcję przedziału stowarzyszoną z funkcją n -wymiarowo niemalejącą f , nie zaznaczając tego osobno w poszczególnych twierdzeniach.

Twierdzenie 1. Funkcja g jest addytywna w klasie P_n^* , to znaczy jeżeli przedziały $I_1, I_2, \dots, I_n \in P_n^*$ są parami rozłączne i $\sum_{j=1}^m I_j \in P_n^*$,

$$to \quad g \left(\sum_{j=1}^m I_j \right) = \sum_{j=1}^m g(I_j).$$

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem m . Dla $m=2$ możemy przyjąć

$$I_1 = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < a_i + h_i) \right],$$

$$I_2 = E[(a_1 \leq x_1 < a_1 + h_1) \dots (a_k + h_k \leq x_k < a_k + h_k + h'_k) \dots (a_n \leq x_n < a_n + h_n)].$$

Wtedy

$$I = I_1 + I_2 =$$

$$= E[(a_1 \leq x_1 < a_1 + h_1) \dots (a_k \leq x_k < a_k + h_k + h'_k) \dots (a_n \leq x_n < a_n + h_n)],$$

a więc, korzystając z podanego w rozdziale VI wzoru (2.12) i określenia 1, otrzymujemy

$$(2.3) \quad \begin{aligned} g(I) &= \Delta_{1, \dots, k, \dots, n}^{h_1, \dots, h_k + h'_k, \dots, h_n} f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = \\ &= \Delta_{1, \dots, k, \dots, n}^{h_1, \dots, h_k, \dots, h_n} \Delta f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) + \Delta_{1, \dots, k, \dots, n}^{h_1, \dots, h'_k, \dots, h_n} f(a_1, \dots, a_k + h_k, \dots, a_n) = \\ &= g(I_1) + g(I_2), \end{aligned}$$

co jest tezą twierdzenia 1 w rozważanym przypadku.

Przypuśćmy, że twierdzenie 1 zachodzi dla wszystkich $m < m_0$, przy czym $m_0 \geq 2$, i niech będzie danych m_0 przedziałów półotwartych rozłącznych $I_1, \dots, I_{m_0}$, których suma $I = \sum_{j=1}^{m_0} I_j$ jest znowu takim przedziałem. Przyjmijmy

$$I = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < \beta_i) \right], \quad I_j = E \left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < \beta_i^{(j)}) \right].$$

Mamy oczywiście dla każdego $i=1, 2, \dots, n$ oraz $j=1, 2, \dots, m_0$, $a_i \leq a_i^{(j)} \leq \beta_i^{(j)} \leq \beta_i$. Wśród przedziałów $I_1, I_2, \dots, I_{m_0}$ jest na pewno jeden i tylko jeden taki, do którego należy punkt (a_i) . Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że jest nim przedział I_1 , a więc $I_1 = E[a_i \leq x_i < \beta_i^{(1)}]$. Zwróćmy teraz uwagę na liczby $\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)}$. Nie wszystkie one mogą być równe odpowiednio liczbom $\beta_1, \dots, \beta_n$, gdyż mielibyśmy w tym przypadku $I_1 = I$, istnieje więc takie najmniejsze k , że $\beta_k^{(1)} < \beta_k$. Podzielmy przedziały $I_1, \dots, I_{m_0}$ na trzy klasy, do pierwszej klasy zaliczając te przedziały I_j , dla których $\beta_k^{(j)} \leq \beta_k^{(1)}$, do drugiej klasy te, dla których $\beta_k^{(j)} > \beta_k^{(1)}$, do trzeciej wreszcie te, dla których $\beta_k^{(j)} < \beta_k^{(1)} < \beta_k^{(j)}$. Oznaczając te klasy odpowiednio przez A_1, A_2, A_3 i przyjmując $A = A_1 + A_2 + A_3 = (I_1, \dots, I_{m_0})$ widzimy, że klasy A_1 i A_2 są niepuste, do pierwszej z nich bowiem należy przedział I_1 , do drugiej zaś należy ten przedział, do którego należy punkt $(a_1, \dots, a_{k-1}, \beta_k^{(1)}, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Widzimy też, że klasy A_1, A_2, A_3 są parami rozłączne.

Rozbijmy teraz każdy przedział $I_j \in A_3$ na dwa rozłączne przedziały

$$I_j^{(1)} = E[(a_1^{(j)} \leq x_1 < \beta_1^{(j)}) \dots (a_k^{(j)} \leq x_k < \beta_k^{(j)}) \dots (a_n^{(j)} \leq x_n < \beta_n^{(j)})]$$

oraz

$$I_j^{(2)} = E[(a_1^{(j)} \leq x_1 < \beta_1^{(j)}) \dots (\beta_k^{(1)} \leq x_k < \beta_k^{(j)}) \dots (a_n^{(j)} \leq x_n < \beta_n^{(j)})].$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że dla $I_j \in \mathcal{A}_3$ mamy $g(I_j) = g(I_j^{(1)}) + g(I_j^{(2)})$, a więc

$$\sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j) = \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j^{(1)}) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j^{(2)}).$$

Równocześnie zaś na podstawie naszych określeń wynika, że $\sum_{I_j \in \mathcal{A}_1} I_j + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} I_j^{(1)} = I^{(1)}$ jest przedziałem, a mianowicie przedziałem

$$E[(a_1 \leq x_1 < \beta_1) \dots (a_k \leq x_k < \beta_k^{(1)}) \dots (a_n \leq x_n < \beta_n)],$$

oraz że $\sum_{I_j \in \mathcal{A}_2} I_j + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} I_j^{(2)} = I^{(2)}$ jest również przedziałem, a ponadto, że przedziały te są rozłączne, w sumie zaś dają cały przedział I . Ponieważ z niepustości klas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ wynika, że ilość elementów klas $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ jest mniejsza niż m_0 , więc na mocy założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} (2.4) \quad g(I) &= g(I^{(1)}) + g(I^{(2)}) = \\ &= \sum_{I_j \in \mathcal{A}_1} g(I_j) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j^{(1)}) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_2} g(I_j) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j^{(2)}) = \\ &= \sum_{I_j \in \mathcal{A}_1} g(I_j) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_2} g(I_j) + \sum_{I_j \in \mathcal{A}_3} g(I_j) = \sum_{I_j \in \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3} g(I_j) = \sum_{j=1}^{m_0} g(I_j), \end{aligned}$$

a więc twierdzenie 1 zachodzi również dla m_0 , co należało okazać.

Natychmiastowymi wnioskami z twierdzenia 1 są:

$$(2.5) \quad \text{Jeżeli } I, I_1, I_2, \dots, I_m \in \mathcal{P}_n^* \text{ i } I \subset \sum_{j=1}^m I_j, \text{ to } g(I) \leq \sum_{j=1}^m g(I_j).$$

$$(2.6) \quad \text{Jeżeli przedziały } I_1, \dots, I_m \in \mathcal{P}_n^* \text{ są parami rozłączne i } \sum_{j=1}^m I_j \subset I \in \mathcal{P}_n^*, \text{ to } \sum_{j=1}^m g(I_j) \leq g(I).$$

Udowodnimy jeszcze przy dodatkowych założeniach pewne wzmocnienie twierdzenia 1, mianowicie

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja f jest lewostronnie ciągła w przestrzeni R_n , to funkcja g z nią stowarzyszona jest przeliczalnie addytywna w klasie $\mathcal{P}_n^*$, to znaczy dla każdego ciągu parami rozłącznych przedziałów

$$I_1, I_2, \dots \in \mathcal{P}_n^* \text{ takich, że } \sum_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{P}_n^*, \text{ zachodzi } g\left(\sum_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j).$$

Dowód. Przyjmijmy $I_j = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < \beta_i^{(j)})\right]$ oraz $\sum_{j=1}^{\infty} I_j = I = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < \beta_i)\right]$. Ponieważ wobec lewostronnej ciągłości funkcji f funkcja

$$\Delta_{1, \dots, n}^{z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n} f(y_1, \dots, y_n) = g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (y_i \leq x_i < z_i)\right]\right)$$

jest, na mocy (2.11) z rozdziału VI, lewostronnie ciągłą funkcją zmiennych $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$, więc dla każdego $\eta > 0$ można dobrać takie $(\beta_i^*) < (\beta_i)$, aby dla $I^* = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i < \beta_i^*)\right]$ zachodziła nierówność

$$(2.7) \quad g(I) \leq g(I^*) + \eta.$$

Również dla każdego j można dobrać takie $(a_i^{(j)*}) < (a_i^{(j)})$, aby dla $I_j^* = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)*} \leq x_i < \beta_i^{(j)})\right]$ była spełniona nierówność

$$(2.8) \quad g(I_j^*) \leq g(I_j) - \frac{\eta}{2^j}.$$

$$\text{Przyjmijmy } F = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i \leq \beta_i^*)\right] \text{ i } G_j = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)*} < x_i < \beta_i^{(j)})\right].$$

Wobec nierówności $(\beta_i^*) < (\beta_i)$ i $(a_i^{(j)*}) < (a_i^{(j)})$ mamy

$$(2.9) \quad I^* \subset F \subset I,$$

$$(2.10) \quad I_j \subset G_j \subset I_j^*,$$

a ponieważ $I = \sum_{j=1}^{\infty} I_j$, więc

$$(2.11) \quad F \subset \sum_{j=1}^{\infty} G_j.$$

Ale F jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, a G_j są zbiorami otwartymi. Na mocy twierdzenia Heine-Borela istnieje więc takie N , że

$$(2.12) \quad F \subset \sum_{j=1}^N G_j,$$

skąd na podstawie (2.9) i (2.10) otrzymujemy, że

$$(2.13) \quad I^* \subset \sum_{j=1}^N I_j \quad \text{dla } n > N,$$

co na podstawie (2.5) daje

$$(2.14) \quad g(I^*) \leq \sum_{j=1}^n g(I_j^*) \quad \text{dla } n > N.$$

Stosując nierówności (2.7) i (2.8) otrzymujemy, że

$$(2.15) \quad g(I) \leq g(I^*) + \eta \leq \sum_{j=1}^n g(I_j^*) + \eta \leq \sum_{j=1}^n g(I_j) + \eta - \sum_{j=1}^n \frac{\eta}{2^j},$$

co dla $n \rightarrow \infty$ daje w granicy

$$(2.16) \quad g(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j).$$

Na podstawie (2.6) mamy jednak dla każdego m

$$(2.17) \quad \sum_{j=1}^m g(I_j) \leq g(I),$$

więc

$$(2.18) \quad \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j) \leq g(I).$$

Nierówności (2.16) i (2.18) dają tęzę twierdzenia 2.

§ 3. Rozszerzenie funkcji stowarzyszonych na ciało figur elementarnych

Zajmiemy się w tym paragrafie rozszerzeniem funkcji g stowarzyszonej z funkcją n -wymiarowo niemalejącą i lewostronnie ciągłą. Udowodnimy przede wszystkim pewną własność takich funkcji.

$$(3.1) \quad \text{Jeżeli dwa ciągi } I_1, I_2, \dots \in P_n^* \text{ i } J_1, J_2, \dots \in P_n^* \text{ spełniają warunek } \sum_{j=1}^{\infty} I_j = \sum_{k=1}^{\infty} J_k \text{ i } I_j I_k = 0 = J_j J_k \text{ dla } j \neq k, \text{ to } \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j) = \sum_{k=1}^{\infty} g(J_k).$$

Dowód. Przyjmijmy $X = \sum_{j=1}^{\infty} I_j = \sum_{k=1}^{\infty} J_k$; wtedy $I_j = I_j X = \sum_{k=1}^{\infty} I_j J_k$, a ponieważ przedziały J_k są rozłączne, więc na mocy twierdzenia 2 $g(I_j) = \sum_{k=1}^{\infty} g(I_j J_k)$, skąd wynika, że $\sum_{j=1}^{\infty} g(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g(I_j J_k)$. Analogicznie dowodzi się, że $\sum_{k=1}^{\infty} g(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(J_k I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g(I_j J_k)$, co daje tezę (3.1).

Twierdzenie 3. Jeżeli f jest n -wymiarowo niemalejącą i lewostronnie ciągłą funkcją, to funkcja g stowarzyszona z funkcją f ma

jedno i tylko jedno rozszerzenie nieujemne i przeliczalnie addytywne z P_n^* na ciało figur elementarnych. Rozszerzenie to jest s_0 -skończone.

Dowód. Łatwo zauważyć, że przestrzeń R_n jest sumą przeliczalnej ilości przedziałów należących do P_n^* . Na przykład

$$(3.2) \quad R_n = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} E \left[\prod_{i=1}^n (k_i \leq x_i < k_i + 1) \right].$$

Wynika stąd, że funkcja g , a więc też i każde jej rozszerzenie, jest s_0 -skończona, a prócz tego, że każdy przedział klasy P_n jest sumą przeliczalnej ilości przedziałów rozłącznych klasy P_n^* . Na mocy określenia każda figura elementarna jest sumą skończonej ilości przedziałów rozłącznych klasy P_n , a więc sumą przeliczalnej ilości przedziałów rozłącznych klasy P_n^* . Określimy więc dodatkowo funkcje g na tych $X \in N_n$, na których dotychczas nie była określona, a które mają postać $X = \sum_{j=1}^{\infty} I_j$, gdzie $I_1, I_2, \dots$ są parami rozłącznymi przedziałami z P_n^* , wzorem

$$(3.3) \quad g(X) = \sum_{j=1}^{\infty} g(I_j).$$

Dopuszczalność takiego określenia wynika z (3.1). Czytelnik sprawdzi z łatwością, że tak określona funkcja jest istotnie jedynym nieujemnym i przeliczalnie addytywnym rozszerzeniem funkcji stowarzyszonej z funkcją f z P_n^* na N_n .

§ 4. Miary stowarzyszone

Określenie 2. Miarą stowarzyszoną z n -wymiarowo niemalejącą funkcją f nazywamy miarę w przestrzeni R_n będącą minimalnym rozszerzeniem funkcji g stowarzyszonej z funkcją f do miary, to znaczy taką miarę h , że każda miara w przestrzeni R_n będąca rozszerzeniem g jest również rozszerzeniem miary h .

Określenie 3. Miarą regularną w przestrzeni R_n nazywamy taką miarę, według której mierzalne są wszystkie zbiory borelowskie, przy czym przedziały klasy P_n^* są miary skończonej. Miarą borelowską nazywamy miarę g w przestrzeni R_n , według której mierzalne są wszystkie zbiory borelowskie, a prócz tego dla każdego zbioru X mierzalnego według miary g istnieją takie zbiory borelowskie B_1, B_2 , że

$$(4.1) \quad B_1 \subset X \subset B_2 \quad \text{i} \quad g(B_1) = g(X) = g(B_2).$$

Twierdzenie 4. Każda funkcja n -wymiarowo niemalejąca i lewostronnie ciągła ma miarę stowarzyszoną. Jest to miara regularna i borelowska.

Dowód. Istnienie miary stowarzyszonej z n -wymiarowo niemalejącą i lewostronnie ciągłą funkcją wynika z twierdzenia 3 oraz z twierdzeń 4 i 7 podanych w poprzednim rozdziale (str. 210 i 216); jej regularność wynika z określenia ciała zbiorów borelowskich, w szczególności ze wzoru (9.8) rozdziału I książki I (str. 49); miara ta jest borelowska, co wynika z twierdzeń 5 i 6 podanych w rozdziale poprzednim (str. 214 i 215).

W szczególności, daje się łatwo oszacować klasę borelowską zbiorów B_1 i B_2 spełniających warunek (4.1); istnienie takich zbiorów postaci $B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} I_i^{(j)}$ i $B_2 = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} J_i^{(j)}$, $I_i^{(j)}, J_i^{(j)} \in \mathcal{P}_n^*$ dla $i, j = 1, 2, \dots$ wynika z cytowanych twierdzeń 5 i 6 i określenia figur elementarnych. Każdy jednak przedział otwarto-domknięty jest iloczynem przeliczalnej ilości przedziałów otwartych, a zarazem sumą przeliczalnej ilości przedziałów domkniętych. Możemy więc napisać

$$B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} G_i^{(j,k)} \quad \text{ i } \quad B_2 = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_i^{(j,k)},$$

gdzie $G_i^{(j,k)}$ są przedziałami otwartymi, $F_i^{(j,k)}$ przedziałami domkniętymi. Ale jak wiemy, iloczyny przeliczalnej ilości przedziałów domkniętych są równocześnie zbiorami F_σ i G_δ , a więc B_1 jest zbiorem F_σ jako przeliczalna suma zbiorów F_σ , B_2 zaś jest zbiorem G_δ jako przeliczalny iloczyn zbiorów G_δ . Możemy więc powiedzieć, że

(4.2) *Każdy zbiór mierzalny według miary stowarzyszonej zawiera równy mu co do miary zbiór F_σ i jest zawarty w równym mu co do miary zbiorze G_δ .*

§ 5. O funkcjach n -wymiarowo niemalejących ograniczonych

Specjalną rolę w rachunku prawdopodobieństwa grają te funkcje n -wymiarowo niemalejące, które spełniają warunki

$$(5.1) \quad \lim_{t_i \rightarrow -\infty} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(5.2) \quad f(t_1, \dots, t_n) \leq M < +\infty \quad \text{ dla } (t_i) \in R_n.$$

Wiemy już (por. twierdzenie 2, rozdział VI, str. 198), że n -wymiarowo niemalejące funkcje spełniające (5.1) są niemalejące, a więc

(5.3) *Funkcje n -wymiarowo niemalejące spełniające (5.1) są nieujemne w całej przestrzeni R_n .*

Twierdzenie 5. Jeżeli n -wymiarowo niemalejąca funkcja f spełnia warunki (5.1) i (5.2), to

(5.4) *dla każdego ciągu parami rozłącznych przedziałów $I_1, I_2, \dots \in \mathcal{P}_n^*$ szereg $\sum_{j=1}^{\infty} g(I_j)$ jest zbieżny (g jest jak zawsze funkcją stowarzyszoną z f);*

(5.5) *warunek (5.1) jest spełniony jednostajnie, to znaczy dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie λ , że w każdym punkcie $(t_i) \in R_n$, którego przynajmniej jedna współrzędna jest mniejsza niż λ , mamy $f(t_1, t_2, \dots, t_n) < \eta$.*

Dowód. Dla dowodu tezy (5.4) zauważmy, że przy założeniach twierdzenia funkcja stowarzyszona g jest ograniczona w całej klasie $\mathcal{P}_n^*$. Ze wzoru bowiem (2.7) z rozdziału VI (str. 192) wynika, że $g(I)$ jest dla $I \in \mathcal{P}_n^*$ sumą 2^n składników, z których każdy jest co do wartości bezwzględnej równy wartości funkcji f w pewnym punkcie przestrzeni R_n , a więc nie większy od M . Mamy więc

$$(5.6) \quad g(I) \leq 2^n M \quad \text{ dla } I \in \mathcal{P}_n^*.$$

Dla każdej jednak skończonej ilości przedziałów z klasy $\mathcal{P}_n^*$ można znaleźć taki przedział należący do $\mathcal{P}_n^*$, który je wszystkie zawiera. W przypadku więc gdy $I_1, I_2, \dots \in \mathcal{P}_n^*$ są parami rozłączne, oznaczając przez $I^{(m)} \in \mathcal{P}_n^*$ przedział zawierający m pierwszych przedziałów rozważanego ciągu, mamy korzystając z (2.6) i (5.6)

$$(5.7) \quad \sum_{j=1}^m g(I_j) \leq g(I^{(m)}) \leq 2^n \cdot M,$$

co ze względu na nieujemność funkcji g dowodzi tezy (5.4).

Przystępując do dowodu tezy (5.5) zauważmy, że oznaczając jak zwykle $I = E \left[\prod_{i=1}^n (\alpha_i \leq x_i < \beta_i) \right] \in \mathcal{P}_n^*$, $g(I)$ jest na podstawie cytowanego już wzoru (2.7) z rozdziału V sumą skończonej ilości składników, z których jeden tylko, a mianowicie $f(\beta_1, \dots, \beta_n)$, nie zależy od α_i , wszystkie zaś inne są wartościami funkcji f w punkcie mającym przynajmniej jedną współrzędną wspólną z punktem (α_i) . Wszystkie więc one dążą do zera w przypadku $(\alpha_i) \rightarrow -\infty$, to znaczy, gdy wszystkie współrzędne punktu (α_i) dążą do $-\infty$.

Mamy więc

$$(5.8) \quad \lim_{(\alpha_i) \rightarrow -\infty} g(I) = f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Zakóźmy teraz, że teza (5.5) jest fałszywa. Istnieje wtedy taka stała $\eta > 0$, że dla każdego λ istnieje taki punkt $(t_i) \in R_n$, którego jedna współrzędna jest mniejsza od λ i $f(t_1, \dots, t_n) \geq \eta$. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ będzie malejącym ciągiem liczb dążących do $-\infty$. Na podstawie założonego zaprzeczenia tezy (5.5) możemy wtedy wyznaczyć taki ciąg punktów $(t_i^{(1)}), (t_i^{(2)}), \dots \in R_n$, że dla każdego k jedna przynajmniej ze współrzędnych punktu $(t_i^{(k)})$ jest mniejsza od λ_k i $f(t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}) \geq \eta$. Podzielmy punkty $(t_i^{(1)}), (t_i^{(2)}), \dots$ na n zbiorów, zaliczając do l -tego zbioru ($l \leq n$) te punkty $(t_i^{(k)})$, których l -ta współrzędna jest mniejsza od λ_k . Ponieważ każdy z punktów $(t_i^{(1)}), (t_i^{(2)}), \dots$ należy do przynajmniej jednego spośród określonych zbiorów, więc przynajmniej jeden spośród tych zbiorów musi być nieskończony. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że pierwszy z tych zbiorów jest nieskończony. Elementy jego tworzą podciąg pierwotnego ciągu

$$(5.9) \quad (t_i^{(k_1)}), (t_i^{(k_2)}), \dots$$

taki, że

$$(5.10) \quad f(t_1^{(k_s)}, \dots, t_n^{(k_s)}) \geq \eta \quad (s = 1, 2, \dots),$$

$$(5.11) \quad t_1^{(k_s)} < \lambda_{k_s} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Za pomocą ciągu (5.9) określimy obecnie indukcyjnie ciąg przedziałów z klasy P_n^*

$$(5.12) \quad I_1, I_2, \dots, I_m, I_{m+1}, \dots$$

w następujący sposób:

Niech $(a_i^{(1)}), (a_i^{(2)}), \dots$ będzie ciągiem punktów zmierzających do $-\infty$ i takim, że $(a_i^{(j)}) < (t_i^{(k_j)})$. Mamy wtedy na mocy (5.8)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < t_i^{(k_1)})\right]\right) = f(t_1^{(k_1)}, \dots, t_n^{(k_1)}) \geq \eta,$$

a więc wśród przedziałów $E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < t_i^{(k_1)})\right]$ znajdują się takie, dla których funkcja g przyjmuje wartość większą od $\eta/2$. Oznaczmy pierwszy z nich przez I_1 ; jest on pierwszym przedziałem ciągu (5.12). Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy już m przedziałów ciągu (5.12). Rozważmy zbiór tych liczb x_1 , które są pierwszą współrzędną któ-

regokolwiek punktu jednego z przedziałów $I_1, I_2, \dots, I_m$. Ponieważ każdy z określonych m przedziałów jest zbiorem ograniczonym, więc zbiór ten jest ograniczony, skąd wnioskujemy, że kres dolny tego zbioru $x_0 = \inf x_1$ jest skończony. Z założenia ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \dots$,

$$(x_i) \in \sum_{j=1}^m I_j$$

a więc i jego podciąg $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots$ zmierzają do $-\infty$, skąd na podstawie (5.11) widzimy, że ciąg $(t_1^{(k_1)}), (t_2^{(k_2)}), \dots$ również zmierza do $-\infty$. Istnieje więc takie s_0 , że $(t_1^{(k_{s_0})}) < x_0$.

Niech podobnie jak poprzednio $(a_i^{(1)}), (a_i^{(2)}), \dots$ będzie ciągiem punktów zmierzających do $-\infty$ i takich, że $(a_i^{(j)}) < (t_i^{(k_j)})$. Mamy na podstawie (5.8) i (5.10)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < t_i^{(k_{s_0})})\right]\right) = f(t_1^{(k_{s_0})}, \dots, t_n^{(k_{s_0})}) \geq \eta,$$

a więc wśród przedziałów $E\left[\prod_{i=1}^n (a_i^{(j)} \leq x_i < t_i^{(k_{s_0})})\right]$ znajdują się takie, dla których wartość funkcji g jest większa niż $\eta/2$. Oznaczmy pierwszy z nich przez I_{m+1} , jest on $(m+1)$ -szym przedziałem ciągu (5.12).

Z podanej konstrukcji widzimy, że przedziały ciągu (5.12) są parami rozłączne i że $g(I_j) > \eta/2$ dla $j = 1, 2, \dots$, a więc szereg $\sum_{j=1}^{\infty} g(I_j)$ jest rozbieżny, wbrew udowodnionej już tezie (5.4) twierdzenia 5. Dowodzi to tezy (5.5), gdyż jak widzieliśmy, zaprzeczenie jej prowadzi do sprzeczności.

Z tezy (5.4) twierdzenia 5 wynika:

(5.13) *Miara stowarzyszona z funkcją spełniającą warunki (5.1) i (5.2) jest skończona.*

Z tezy (5.4) wynika bowiem, że szereg

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (k_i \leq x_i < k_i + 1)\right]\right)$$

jest zbieżny, co wraz z (3.2) wskazuje na to, że $g(R_n)$ jest skończone.

Dla miar skończonych twierdzenie 4 daje się łatwo odwrócić:

Twierdzenie 6. *Każda skończona miara borelowska w przestrzeni R_n jest stowarzyszona z pewną funkcją n -wymiarowo niemającą*

jącą i lewostronnie ciągłą, spełniającą warunki (5.1) i (5.2), a mianowicie z funkcją

$$(5.14) \quad f(t_1, \dots, t_n) = g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (-\infty \leq x_i < t_i)\right]\right).$$

Dowód. Niech g będzie miarą w R_n spełniającą warunki twierdzenia.

Przede wszystkim udowodnimy indukcyjnie, że

$$(5.15) \quad \Delta_{1, \dots, k}^{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_k - \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ = g\left(E\left[\prod_{i=1}^k (\alpha_i \leq x_i < \beta_i) \cdot \prod_{i=k+1}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right).$$

Dla $k=1$ wzór (2.1) z rozdziału VI daje

$$\Delta_1^{\beta_1 - \alpha_1} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \\ = g\left(E\left[(-\infty \leq x_1 < \beta_1) \cdot \prod_{i=2}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right) - g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right) = \\ = g\left(E\left[(\alpha_1 \leq x_1 < \beta_1) \cdot \prod_{i=2}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right).$$

Założmy teraz, że wzór (5.15) zachodzi dla pewnego k . Korzystając znowu z addytywności funkcji g i z warunku (2.2) rozdziału VI otrzymujemy

$$\Delta_{1, \dots, k, k+1}^{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_k - \alpha_k, \beta_{k+1} - \alpha_{k+1}} f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = \\ = \Delta_{1, \dots, k}^{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_k - \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \alpha_n) - \Delta_{1, \dots, k}^{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_k - \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) = \\ = g\left(E\left[\prod_{i=1}^k (\alpha_i \leq x_i < \beta_i) \cdot (-\infty \leq x_{k+1} < \beta_{k+1}) \cdot \prod_{i=k+2}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right) - \\ - g\left(E\left[\prod_{i=1}^k (\alpha_i \leq x_i < \beta_i) \cdot \prod_{i=k+1}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right) = \\ = g\left(E\left[\prod_{i=1}^{k+1} (\alpha_i \leq x_i < \beta_i) \cdot \prod_{i=k+2}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right]\right),$$

co kończy dowód wzoru (5.15). Przyjmując w tym wzorze $k=n$ dostajemy

$$(5.16) \quad \Delta_{1, \dots, n}^{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g\left(E\left[\prod_{i=1}^n (\alpha_i \leq x_i < \beta_i)\right]\right),$$

co ze względu na nieujemność funkcji g dowodzi, że f jest funkcją n -wymiarowo niemalejącą, a dalej ze względu na (2.1) dowodzi, że funkcja g rozpatrywana na zbiorze P_n^* jest funkcją przedziału stowarzyszoną z f .

Z określenia 2 i twierdzenia 4 wynika, że w przypadku gdy funkcja f ma miarę stowarzyszoną, musi być ona identyczna z miarą g . Ze względu więc na twierdzenie 4 pozostaje do wykazania, że funkcja f jest lewostronnie ciągłą, a prócz tego, że spełnia warunki (5.1) i (5.2). Widzimy od razu, że funkcja f jest nieujemna, niemalejąca i ograniczona z góry, spełnia bowiem warunek (5.2) dla $M = g(R_n) < +\infty$. Ponieważ jednak

$$\prod_{m=1}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^{k-1} (-\infty \leq x_i < \alpha_i) (-\infty \leq x_i < -m) \cdot \prod_{i=k+1}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right] = 0,$$

więc z przeliczalnej addytywności funkcji g wynika, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(t_1, \dots, t_{k+1}, -m, t_{k+1}, \dots, t_n) = 0,$$

a ze względu na to, że f jest funkcją niemalejącą, również

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} f(t_1, \dots, t_j, \dots, t_n) = 0,$$

czyli funkcja f spełnia warunek (5.1).

Rozumując analogicznie jak poprzednio udowodnimy lewostronną ciągłość funkcji f . Mamy mianowicie

$$\prod_{m=1}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^{k-1} (-\infty \leq x_i < \alpha_i) \cdot \left(\alpha_k - \frac{1}{m} \leq x_k < \alpha_k\right) \cdot \prod_{i=k+1}^n (-\infty \leq x_i < \alpha_i)\right] = 0,$$

co wobec przeliczalnej addytywności miary g daje

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) - f(t_1, \dots, t_k - 1/m, \dots, t_n)) = 0,$$

skąd, wobec dowolności liczb $t_1, \dots, t_k, \dots, t_n, k$, otrzymujemy

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{m_n \rightarrow 0} (f(t_1, \dots, t_n) - f(t_1 - 1/m_1, \dots, t_n - 1/m_n)) = 0,$$

a ponieważ f jest funkcją niemalejącą, więc mamy $f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1 - 0, \dots, t_n - 0)$, co stwierdza lewostronną ciągłość funkcji f .

W ten sposób dowód został zakończony.

Ze wzoru (2.1) jak też ze wzoru (2.7) z rozdziału VI wynika łatwo, że dwie funkcje, których różnica jest stała, mają tę samą miarę stowarzyszoną. Twier-

dzenie odwrotne nie zachodzi; czytelnik sprawdzi, że np. funkcje $f(x, y)$ i $f(x, y) + g(x)$ mają tę samą sumę stowarzyszoną na płaszczyźnie.

Twierdzenie 6 można uogólnić w sposób następujący:

Twierdzenie 6*. *Każda miara regularna i borelowska w przestrzeni R_n jest stowarzyszona z pewną funkcją n -wymiarową niemalejącą i lewostronnie ciągłą.*

W tym jednak przypadku konstrukcja szukanej funkcji jest znacznie trudniejsza, a ponieważ uogólnienie to nie ma specjalnych zastosowań w rachunku prawdopodobieństwa, więc z dowodu tego twierdzenia rezygnujemy.

§ 6. Miara Lebesgue'a

Określenie 4. Miarę stowarzyszoną z funkcją $f(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n$ nazywamy *miarą Lebesgue'a* w przestrzeni R_n .

Z udowodnionych własności miar stowarzyszonych wynika, że miara Lebesgue'a jest regularną miarą borelowską, a z ciągłości funkcji $f(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n$ łatwo wyprowadzić wniosek, że zbiory jednopunktowe, a więc i wszystkie zbiory co najwyżej przeliczalne, są miarą Lebesgue'a zero.

Inną ważną własnością miary Lebesgue'a jest to, że przyjmuje ona te same wartości na zbiorach równoważnych przez rozkład przeliczalny, przy czym dwa zbiory $X, Y \subset R_n$ uważa się za równoważne przez rozkład przeliczalny, jeżeli są sumami $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$

i $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ zbiorów parami rozłącznych takich, że X_i jest przystające do Y_i dla $i=1, 2, \dots$

Jak już zauważyliśmy (str. 220), miara w przestrzeni R_3 stowarzyszona z funkcją $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$, a więc miara Lebesgue'a, jest na przedziałach identyczna z ich objętością, można więc ją uważać za uogólnienie pojęcia objętości. Podobnie w przestrzeni R_2 można miarę Lebesgue'a uważać za uogólnienie pojęcia pola w przestrzeni, w R_1 zaś za uogólnienie pojęcia długości.

Pierwotnie zainteresowania matematyków miarą Lebesgue'a szły wyraźnie po linii tych uogólnień; okazało się jednak wkrótce, że i z innych powodów miara Lebesgue'a jest interesująca, np. z tego względu, że jest to jedyna miara regularna i borelowska, przyjmująca na zbiorach przystających równe wartości, a na n -wymiarowej kostce jednostkowej (to znaczy na zbiorze $E[\prod_{i=1}^n (0 < x_i < 1)]$) wartości 1. Wydaje się, że ta ostatnia własność nadaje mierze Le-

besgue'a specjalną wartość dla rachunku prawdopodobieństwa. Ogólna teoria miar stowarzyszonych powstała jako uogólnienie teorii miary Lebesgue'a znacznie później od tej ostatniej.

§ 7. Przykłady i zadania

(7.1) Udowodnić, że w przypadku gdy funkcja f jest n -wymiarowo rosnąca, lecz nie jest lewostronnie ciągła, to dla funkcji przedziału g stowarzyszonej z f twierdzenie 1 zachodzi, a twierdzenie 2 nie zachodzi.

(7.2) Wykazać, że miarę stowarzyszoną z funkcją $f(t_1, \dots, t_n) = f_1(t_1, \dots, t_n) + f_2(t_1, \dots, t_n)$ jest miara $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$, gdzie g_1 i g_2 są miarami stowarzyszonymi odpowiednio z funkcjami f_1 i f_2 .

Uwaga. Należy skorzystać ze wzoru (2.10) z rozdziału VI.

(7.3) Znaleźć funkcję f spełniającą warunki (5.1) i (5.2), z którą jest stowarzyszona miara g określona w przykładzie (7.2) z rozdziału VII.

(7.4) Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, który musi spełniać funkcja f , aby miara z nią stowarzyszona przyjmowała wartość 0 na zbiorach jednopunktowych.

(7.5) Niech g_1 będzie miarą stowarzyszoną z funkcją jednej zmiennej f_1 . Rozważmy miarę g_1 na prostej P leżącej na płaszczyźnie R_2 i przyjmijmy dla $X \subset R_2$ i takich, że XP jest mierzalne według funkcji g_1

$$g_2(X) = g_1(XP).$$

Wykazać, że g_2 jest miarą regularną i borelowską, i znaleźć funkcję f_2 , z którą miara g_2 jest stowarzyszona.