

Rozdział VII

Miary w ciałach Boole'a

§ 1. Treść rozdziału

W rozdziale 3 księgi pierwszej (str. 114-115) określiliśmy pojęcie funkcji addytywnej i funkcji przeliczalnie addytywnej w ciele Boole'a. Podaliśmy również kilka własności takich funkcji. Widzieliśmy też, że są one interesujące choćby z tego powodu, że prawdopodobieństwo jest właśnie taką funkcją. Istnieją jednak inne względy, które skłoniły matematyków do zajmowania się takimi funkcjami; do takich właśnie funkcji prowadzą uogólnienia pojęcia długości, powierzchni, objętości itd. Dlatego takie funkcje nazywamy ogólnie miarami; co prawda nie wszystkie. Dokładną definicję tego pojęcia podamy w paragrafie 2. W paragrafie 3 podamy pokrótce teorię tak zwanych miar zewnętrznych Carathéodory'ego i pewne ich własności, które znajdują zastosowanie przy dowodzie zasadniczego w teorii miary twierdzenia Frécheta-Nikodyma o domiarowym rozszerzaniu funkcji przeliczalnie addytywnych, stanowiącego jedyną nieomal metodę konstruowania miar (§ 5).

Treść paragrafu 4 stanowią własności miar zewnętrznych w przestrzeniach metrycznych, które podajemy jako uzupełnienie wiadomości zawartych w paragrafie 3.

§ 2. Określenie miary

Począwszy od tego paragrafu będziemy mówili o ciałach Boole'a zwykłych (to znaczy niezrelatywizowanych) i o funkcjach rzeczywistych nieujemnych określonych w takich ciałach, przy czym za funkcje rzeczywiste nieujemne (por. księga pierwsza, rozdział III, określenie 1, str. 114) uważamy również takie funkcje, które prócz wartości rzeczywistych ≥ 0 przyjmować mogą również wartość nie-
właściwą $+\infty$. Uogólnienie podanych tu wyników na ciała zrela-

tywizowane i funkcje spełniające warunek równoważności (por. księga pierwsza, rozdział III, str. 117) nie przedstawia żadnych trudności.

OKREŚLENIE 1. Funkcję g nieujemną i przeliczalnie addytywną nazywamy *miarą* w ciele przeliczalnie addytywnym U , jeżeli:

(2.1) *funkcja g jest określona na pewnym przeliczalnie addytywnym podciele V ciała U ;*

(2.2) *zbiór tych elementów v ciała V , dla których $g(v)=0$, jest ideałem właściwym ciała U .*

OKREŚLENIE 2. Miarę g w ciele U nazywamy *skończoną*, jeżeli $g(1) < +\infty$; w szczególności gdy $g(1)=1$, to miarę g nazywamy *unormowaną*.

Jak wiemy (por. rozdział III, (9.2), str. 135), zbiór, o którym mowa w warunku (2.2), jest przeliczalnie addytywnym ideałem ciała V ; nie musi on jednak być ideałem ciała U . Z własności ideałów wynika łatwo, że

(2.3) *Jeżeli każdy element $u \in U$ zawarty w pewnym elemencie $v \in V$ miary 0 (to znaczy takim, że $g(v)=0$) należy do V , to warunek (2.2) jest spełniony.*

Zachodzi również następujące twierdzenie, którego łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi:

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli g jest miarą określoną w podciele V ciała U , to*

(2.4) *zbiór V_1 elementów w kształtu*

$$w = v + u,$$

gdzie $u \in U$, $v \in V$, element u zaś jest zawarty w pewnym elemencie miary 0 ciała V , jest przeliczalnie addytywnym podciałem ciała U zawierającym V ;

(2.5) *istnieje jedno i tylko jedno rozszerzenie funkcji g do miary w ciele V_1 ; jest nim funkcja*

$$h(w) = g(v),$$

gdzie v jest pierwszym składnikiem jakiegokolwiek przedstawienia elementu w w postaci (2.4). Funkcja h jest miarą w ciele U .

Twierdzenie 1 podaje metodę rozszerzania miar określonych w podciałach do miary w całym ciele.

Element $u \in U$, dla którego określona jest miara g w ciele U , nazywamy *mierzalnym według miary g* lub, jeśli nie grozi to nieporozumieniem, krótko: *mierzalnym*; liczbę $g(u)$ nazywamy *miarą elementu u* ; zbiór elementów mierzalnych tworzy przeliczalnie addytywne podciało ciała U — *ciało elementów mierzalnych*.

Łatwo widzieć, że miara skończona g w ciele U nie znika na elemencie 1 ciała U ; w takim przypadku bowiem warunek (2.2) nie byłby spełniony. Miara elementu 1 jest więc liczbą dodatnią skończoną i możemy przyjąć dla mierzalnych elementów $u \in U$

$$(2.6) \quad h(u) = \frac{g(u)}{g(1)}.$$

Tak określona funkcja h jest miarą w ciele U określoną na tym samym ciele elementów mierzalnych co miara g , ale miarą unormowaną. W ten sposób rozważanie miar skończonych można zawsze sprowadzić do rozważania miar unormowanych. W przypadku miar nieskończonych takie przejście oczywiście nie jest możliwe. Jeżeli jednak ograniczymy rozważania do elementów zawartych w ustalonym elemencie u_0 miary skończonej dodatniej, to i w tym przypadku możemy przejść do miary skończonej, a więc też i do miary unormowanej. Możemy bowiem w takim przypadku przyjąć

$$(2.7) \quad h(u) = g(u u_0).$$

Funkcja h , po rozszerzeniu jej metodą podaną w twierdzeniu 1, będzie miarą skończoną, gdyż oczywiście $h(1) = g(u_0)$. Czytelnik sprawdzi, że ideałem elementów miary h zero będzie ideał $I \vee J(u_0')$, gdzie I jest ideałem elementów miary g zero. Miarę w ciele wszystkich podzbiorów danego zbioru (przestrzeni) R nazywamy po prostu *miarą w zbiorze (przestrzeni) R* . Zgodnie z tym mówimy o miarach na prostej (w przestrzeni R_1), o miarach na płaszczyźnie (w przestrzeni R_2) itd.

§ 3. Miary zewnętrzne Carathéodory'ego

OKREŚLENIE 3. Funkcję h określoną w ciele przeliczalnie addytywnym U nazywamy *miarą zewnętrzną* (Carathéodory'ego), jeśli:

(3.1) *jest nieujemna, jest równa zeru dla elementu pustego i różna od zera dla elementu pełnego ciała U , to znaczy $h(u) \geq 0$ dla $u \in U$ i $h(0) = 0 \neq h(1)$;*

(3.2) *jest niemalejąca, to znaczy warunek $u \rightarrow v$ pociąga za sobą warunek $h(u) \leq h(v)$ dla $u, v \in U$;*

(3.3) *jest subaddytywna, to znaczy, że $h\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} h(u_i)$ dla $u_1, u_2, \dots \in U$.*

OKREŚLENIE 4. Jeżeli h jest miarą zewnętrzną w ciele U , to element $u \in U$ nazywamy *mierzalnym według h* , jeśli dla każdego $v \in U$ takiego, że $h(v) < +\infty$, zachodzi tożsamość

$$(3.4) \quad h(v) = h(vu) + h(vu').$$

Zbiór wszystkich elementów ciała U mierzalnych według miary zewnętrznej h oznaczamy przez U_h .

Miara zewnętrzna jest pewnym uogólnieniem pojęcia miary w sensie określenia 1. W przypadku gdy h jest miarą określoną w całym ciele U , to h jest również miarą zewnętrzną $U = U_h$.

Wprost z określeń 3 i 4 wynikają następujące własności miary zewnętrznej:

$$(3.5) \quad h\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq \sum_{i=1}^n h(u_i), \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in U,$$

$$(3.6) \quad 0, 1 \in U_h,$$

$$(3.7) \quad \text{jeżeli } u \in U_h, \text{ to } u' \in U_h.$$

Użyteczność pojęcia miary zewnętrznej wynika z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. Jeżeli h jest miarą zewnętrzną w ciele U , to

$$(3.8) \quad U_h \text{ jest przeliczalnie addytywnym podciałem ciała } U.$$

$$(3.9) \quad \text{Funkcja } h \text{ rozpatrywana w ciele } U_h \text{ jest miarą w ciele } U.$$

Udowodnimy kolejno dalsze własności miary zewnętrznej, z których wyniknie twierdzenie 2.

$$(3.10) \quad \text{Jeżeli } u \in U_h, v_1, v_2 \in U, v_1 \rightarrow u \text{ i } v_2 \rightarrow u', \text{ to}$$

$$h(v_1 + v_2) = h(v_1) + h(v_2).$$

Mamy bowiem w przypadku $h(v_1 + v_2) < +\infty$ na podstawie założeń i (3.4): $h(v_1 + v_2) = h((v_1 + v_2)u) + h((v_1 + v_2)u') = h(v_1) + h(v_2)$, w przypadku zaś przeciwnym na mocy (3.5) $+\infty = h(v_1 + v_2) \leq h(v_1) + h(v_2) = +\infty$, czyli (3.10) również zachodzi.

$$(3.11) \quad \text{Jeżeli elementy } u_1, u_2 \in U_h \text{ są rozłączne, } v_1 \rightarrow u_1 \text{ i } v_2 \rightarrow u_2, \text{ to}$$

$$h(v_1 + v_2) = h(v_1) + h(v_2).$$

Z założenia wynika, że $v_2 \rightarrow u'$, a więc twierdzenie (3.11) wynika z twierdzenia (3.10).

Szczególnym przypadkiem twierdzenia (3.11) jest przypadek, gdy $v_1 = u_1$ i $v_2 = u_2$, a więc dla $u_1, u_2 \in U_h$ rozłącznych zachodzi warunek

$$(3.12) \quad h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2).$$

Przez indukcję otrzymujemy z twierdzenia (3.11):

(3.13) Jeżeli $u_1, u_2, \dots, u_n \in U_h$ są elementami rozłącznymi i $v \in U$, to

$$h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right) = \sum_{i=1}^n h(vu_i).$$

Własność (3.13) można też wyrazić następująco:

Miara zewnętrzna jest addytywna na tych elementach ciała, które dadzą się rozdzielić elementami mierzalnymi.

(3.14) Jeżeli $u_1, u_2 \in U_h$, to $u_1 + u_2 \in U_h$.

Należy udowodnić, że jeżeli warunek (3.4) zachodzi dla elementów u_1 i u_2 , to zachodzi też dla elementu $u_1 + u_2$. Niech $v \in U$ i $h(v) < +\infty$. Korzystając z założeń i twierdzenia (3.10)

$$\begin{aligned} h(v) &= h(vu_1) + h(vu'_1) = h(vu_1) + h(vu'_2 u_2) + h(vu'_1 u'_2) = \\ &= h(vu_1 + vu'_2 u_2) + h(vu'_1 u'_2) = h(v(u_1 + u'_2 u_2)) + h(vu'_1 u'_2) = \\ &= h(v(u_1 + u_2)) + h(v(u_1 + u_2)'), \end{aligned}$$

co należało okazać.

Na podstawie (3.7), (3.14), (3.1) i (3.12) mamy

(3.15) U_h jest podciałem ciała U , a h jest nieujemną i addytywną funkcją w ciele U_h .

(3.16) Jeżeli $u_1, u_2, \dots \in U_h$, $v \in U$, $h(v) < +\infty$, to

$$h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right).$$

Na podstawie twierdzenia 7 rozdziału III księgi pierwszej (str. 120) istnieje taki ciąg $w_1, w_2, \dots$ elementów rozłącznych ciała U_h , że

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \quad \text{ i } \quad \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n w_i \quad (i=1, 2, \dots).$$

Korzystając z tego i kolejno z (3.1), (3.2), (3.3) i (3.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right) &\leq h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} w_i\right) = h\left(\sum_{i=1}^{\infty} vw_i\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} h(vw_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h(vw_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(v \sum_{i=1}^n w_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia (3.16).

(3.17) Jeżeli $u_1, u_2, \dots \in U_h$, to $\sum_{i=1}^{\infty} u_i \in U_h$.

Niech v będzie dowolnym elementem ciała U i niech $h(v) < +\infty$.

Korzystając z założenia i kolejno z (3.16), (3.11) i oczywistego zawierania $\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)' \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)'$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right) \right] = \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[h\left(v \sum_{i=1}^n u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)'\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left[v \left(\sum_{i=1}^n u_i\right) + v \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)'\right] = h(v), \end{aligned}$$

a ponieważ na podstawie (3.5) mamy

$$h(v) = h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i + v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right) \leq h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right),$$

więc ostatecznie

$$h(v) = h\left(v \sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) + h\left(v \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)'\right),$$

co dowodzi spełnienia warunku (3.4), a tym samym dowodzi twierdzenia (3.17).

(3.18) Jeżeli $u_1, u_2, \dots \in U$ jest ciągiem elementów parami rozłącznych, to

$$h\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} h(u_i).$$

Dowód. Korzystając kolejno z (3.16) i (3.15) otrzymujemy

$$h\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h(u_i) = \sum_{i=1}^{\infty} h(u_i).$$

Udowodnimy jeszcze jedno twierdzenie potrzebne do dowodu twierdzenia 2:

(3.19) Jeżeli $u \in U_h$, $w \in U$, $h(u) = 0$ i $w \rightarrow u$, to $w \in U_h$.

Dowód. Niech v będzie dowolnym elementem ciała U i niech $h(v) < +\infty$. Mamy $h(v) = h(vw + vw') \leq h(vw) + h(vw')$, ale z założenia wynika, że $h(vw) = 0$, więc $h(v) \leq h(vw) + h(vw') = h(vw') \leq h(v)$, co dowodzi, że dla elementu ciała U spełniony jest warunek (3.4), a więc $w \in U_h$.

Z (3.15), (3.17), (3.19) oraz z określenia 1 i (9.3) wynika twierdzenie 2.

§ 4. Miary zewnętrzne Carathéodory'ego w przestrzeniach metrycznych

Będziemy rozpatrywali przestrzeń R , w której została określona metryka ϱ . Dla $p \in R$ i $X + Y \subset R$ oznaczmy przez $\delta(p, X)$ odległość punktu p od zbioru X , przez $\delta(X, Y)$ zaś odległość zbiorów X i Y w przestrzeni R . Przypominamy, że (por. wstęp, (3.2) i (3.3), str. 18)

$$(4.1) \quad \delta(p, X) = \inf_{x \in X} \varrho(p, x),$$

$$(4.2) \quad \delta(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \varrho(x, y).$$

OKREŚLENIE 5. Funkcja h określona dla podzbiorów przestrzeni metrycznej R nazywa się *miarą zewnętrzną* w tej przestrzeni, jeśli jest miarą zewnętrzną (w sensie określenia 3) w ciele $\mathcal{W}(R)$, a ponadto spełnia warunek

$$(4.3) \quad h(X + Y) = h(X) + h(Y) \quad \text{dla } X + Y \subset R \text{ i } \delta(X, Y) > 0.$$

O mierze zewnętrznej h w przestrzeni metrycznej R udowodnimy następujący zasadniczy lemat:

(4.4) Jeśli G jest zbiorem otwartym przestrzeni R , a W dowolnym podzbiorem G takim, że $h(W) < +\infty$ i

$$W_n = \bigcup_{x \in W} \left[\delta(x, R - G) > \frac{1}{n} \right],$$

to

$$h(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(W_n).$$

Dowód. Z określenia zbiorów W_n wynika, że $W_n \subset W_{n+1} \subset W$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, a więc na podstawie warunku (3.2)

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(W_n) \leq h(W).$$

Przyjmijmy dalej $F = R - G$, $P_n = W - W_n$ i $D_n = W_{n+1} - W_n$. Mamy wtedy

$$(4.6) \quad D_n = \bigcup_{x \in W} \left[\frac{1}{n} \geq \delta(x, F) > \frac{1}{n+1} \right],$$

a ponieważ zbiór F jest zamknięty (jako uzupełnienie zbioru otwartego G), więc

$$(4.7) \quad P_n = \sum_{i=n}^{\infty} D_i.$$

Z nierówności trójkątowej (por. wstęp, str. 9) i (4.6) wynika, że dla $p \in D_n$, $q \in D_{n+2}$ mamy

$$\varrho(p, q) \geq \delta(p, F) - \delta(q, F) \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0,$$

a zatem

$$\delta(D_n, D_{n+2}) > 0,$$

skąd na mocy (3.2) i (4.3) otrzymujemy

$$h(D_1) + h(D_3) + \dots + h(D_{2k-1}) = h(D_1 + D_3 + \dots + D_{2k-1}) < h(W),$$

$$h(D_2) + h(D_4) + \dots + h(D_{2k}) = h(D_2 + D_4 + \dots + D_{2k}) < h(W),$$

a więc szereg $\sum_{i=1}^{\infty} h(D_i)$ jest zbieżny.

Wynika z tego na mocy (4.7) i (3.3), że

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\sum_{i=n}^{\infty} D_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} h(D_i) = 0.$$

Ale $W = W_n + P_n$, więc $h(W) \leq h(W_n) + h(P_n)$. Przechodząc do granicy mamy z uwagi na (4.8)

$$h(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(W_n),$$

co wraz z (4.5) daje tezę lematu (4.4).

Twierdzenie 3. *Jeżeli h jest miarą zewnętrzną w przestrzeni metrycznej R , to każdy zbiór borelowski tej przestrzeni jest mierzalny.*

Dowód. Niech G będzie zbiorem otwartym przestrzeni R , V zaś dowolnym zbiorem tej przestrzeni o skończonej mierze $h(V)$; dalej niech $F = R - G$, $W = VG$ i analogicznie jak w (4.4) $W_n = \bigcap_{x \in W} \left[\delta(x, F) > \frac{1}{n} \right]$. Ponieważ $W_n \subset W$ i $\delta(W_n, VF) \geq \frac{1}{n}$, więc $h(V) \geq h(W_n + VF) = h(W_n) + h(VF)$, a przechodząc do granicy i korzystając z (4.4) otrzymujemy

$$h(V) \geq h(VG) + h(VF),$$

na podstawie zaś subaddytywności funkcji h mamy

$$h(V) \leq h(VG) + h(VF),$$

co razem daje

$$(4.9) \quad h(V) = h(VG) + h(VF),$$

a więc zbiór otwarty G jest mierzalny.

Ponieważ zgodnie z tezą (3.8) twierdzenia 2 ciało zbiorów mierzalnych jest przeliczalnie addytywne, a udowodniliśmy, że należą do niego zbiory otwarte, więc najmniejsze przeliczalnie addytywne ciało rozpostarte na klasie zbiorów otwartych, to znaczy ciało zbiorów borelowskich, również zawiera się w ciełe zbiorów mierzalnych, co należało okazać.

§ 5. Twierdzenie Frécheta-Nikodyma

Twierdzenie 4. *Jeżeli g jest funkcją nieujemną i przeliczalnie addytywną w podciele V przeliczalnie addytywnego ciała U , to w ciełe U istnieje miara będąca rozszerzeniem funkcji g .*

Trudność konstrukcji rozszerzenia h powstaje oczywiście jedynie w tym przypadku, gdy V nie jest przeliczalnie addytywnym podciałem ciała U , w przeciwnym bowiem razie twierdzenie 4 wynika natychmiast z twierdzenia 1. Przypominamy, że zgodnie z określeniem 3 z książki pierwszej, rozdziału III (str. 115) przez *funkcję przeliczalnie addytywną* w podciele V przeliczalnie addytywnego ciała

U rozumiemy taką funkcję g , która spełnia warunek $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(u_i)$

dla $u_1, u_2, \dots \in V$, ale oczywiście tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{\infty} u_i \in V$, co nie

musi mieć miejsca w przypadku, gdy V nie jest przeliczalnie addytywnym podciałem U .

Dowód twierdzenia 4. Przyjmijmy dla $u \in U$

$$(5.1) \quad h(u) = \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \right].$$

Zauważmy przede wszystkim, że dla każdego ciągu $v_1, v_2, \dots$ elementów ciała V istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)$ jako granica ciągu rosnącego (granica ta jest równa $+\infty$, gdy ciąg $\{g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)\}$ nie jest ograniczony z góry lub też gdy począwszy od pewnego wyrazu jego elementy stale są równe $+\infty$). Wprost z (5.1) wynika, że

(5.2) h jest funkcją nieujemną, monotoniczną i równą 0 dla elementu pustego ciała U .

Dalej mamy

$$(5.3) \quad h(v) = g(v) \quad \text{dla } v \in V.$$

Przyjmując bowiem $v_i^* = v$ dla $i=1, 2, \dots$ otrzymujemy

$$h(v) = \inf_{\substack{v \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i^*\right) = g(v).$$

Przypuśćmy jednak, że $h(v) < g(v)$; istnieje więc taki ciąg $v_1, v_2, \dots$ elementów ciała V , że

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) < g(v), \quad \text{a więc} \quad v = v \cdot \sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sum_{i=1}^{\infty} v v_i,$$

a na podstawie przeliczalnej addytywności funkcji g w ciełe V (por. rozdział III, twierdzenie 8, str. 123) mamy

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{\infty} v v_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v v_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right),$$

wbrew przypuszczeniu.

Wykażemy, że

$$(5.4) \quad h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \quad \text{dla } v_1, v_2, \dots \in V.$$

Wobec (5.2) i (5.3) jest

$$h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right).$$

Stosując (5.1) i (5.2) otrzymujemy

$$h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right) = \inf_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} v_i \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} w_i \\ w_1, w_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n w_i\right) \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right),$$

co kończy dowód tezy (5.4).

Wobec (5.1) i (5.4) mamy

$$(5.5) \quad h(u) = \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right) \right] \quad \text{dla } u \in U.$$

Udowodnimy teraz

$$(5.6) \quad h\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) \quad \text{dla } v_i^{(j)} \in V \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Korzystając kolejno z (5.4), (5.2) i znowu z (5.4) mamy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} h\left(\sum_{i=1}^m v_i^{(j)}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n h\left(\sum_{i=1}^m v_i^{(j)}\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} h\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_i^{(j)}\right) = h\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right). \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad h\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h(u_j) \quad \text{dla } u_1, u_2, \dots \in U.$$

Z (5.5) wynika, że dla każdego $\eta > 0$ istnieje ciąg podwójny $\{v_i^{(j)}\}$, $i, j = 1, 2, \dots$, elementów ciała V taki, że $u_j \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$ oraz

$h(u_j) + \frac{\eta}{2^j} \geq h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right)$. Wtedy oczywiście mamy $\sum_{j=1}^{\infty} u_j \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$.

Opierając się na tym i kolejno na (5.2) i (5.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j\right) &\leq h\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}\right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(h(u_j) + \frac{\eta}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} h(u_j) + \eta, \end{aligned}$$

co wobec dowolności liczby η dowodzi nierówności (5.7).

Z (5.2), (5.7) i (5.3) wynika, że

(5.8) Funkcja h jest miarą zewnętrzną w ciele U , będącą rozszerzeniem funkcji g z ciała V na ciało U .

Oznaczając ciało elementów mierzalnych według funkcji h , jak poprzednio, przez U_h udowodnimy, że

$$(5.9) \quad V \subset U_h.$$

Niech $v \in V$, zaś $u \in U$ i $h(u) < +\infty$. Korzystając z (5.1) oraz z monotoniczności i addytywności funkcji g w ciele V , otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(uv) + h(uv') &= \inf_{\substack{uv \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \right] + \inf_{\substack{uv' \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \right] = \\ &= \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n vv_i\right) \right] + \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v'v_i\right) \right] = \\ &= \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n vv_i\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v'v_i\right) \right] = \\ &= \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n vv_i\right) + g\left(\sum_{i=1}^n v'v_i\right) \right] = \\ &= \inf_{\substack{u \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \right] = h(u), \end{aligned}$$

co dowodzi, że dla elementów V spełniony jest warunek (3.4), a więc każdy taki element jest mierzalny według funkcji h , co należało okazać.

Twierdzenie 4 wynika z (3.8), (3.9) oraz twierdzenia 2.

§ 6. Aproksymacja miary rozszerzonej za pomocą funkcji rozszerzanej. Rozszerzenie minimalne

Udowodnimy najpierw ogólne

Twierdzenie 5. Dla każdego elementu $u \in U$ istnieje taki element $v = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$, $v_i^{(j)} \in V$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$, że $u \rightarrow v$ i $h(v) = h(u)$.

Dowód. Z (5.5) wynika, że dla każdego naturalnego j istnieje taki element $v^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$, $v_i^{(j)} \in V$, że $u \rightarrow v^{(j)}$ i $h(v^{(j)}) - h(u) < \frac{1}{j}$.

Z monotoniczności funkcji h wynika, że element $v = \prod_{j=1}^{\infty} v^{(j)} = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$ ma żądane własności.

Obecnie przejdziemy do miar będących rozszerzeniem funkcji bardziej specjalnych.

Określenie 6. Funkcję g określoną w podciele V ciała U nazywamy $\aleph_0$ -skończoną¹⁾, jeśli istnieje ciąg elementów parami rozłącznych $s_1, s_2, \dots \in V$ takich, że $g(s_i) < +\infty$, $i = 1, 2, \dots$, i $\sum_{i=1}^{\infty} s_i = 1$.

W szczególności, każda funkcja skończona jest $\aleph_0$ -skończona, możemy bowiem przyjąć $s_1 = 1$, $s_i = 0$ dla $i = 2, 3, \dots$

Twierdzenie 6. Jeżeli funkcja g jest $\aleph_0$ -skończona, to dla każdego elementu $u \in U_h$ istnieje taki element $v = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$, $v^{(j)} \in V$, $i, j = 1, 2, \dots$, że $v \rightarrow u$ i $h(v) = h(u)$.

Dowód. Założymy najpierw o elemencie u , że jest miary skończonej: $h(u) < +\infty$. Na mocy (5.5) istnieje wtedy element $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k \in V$, miary skończonej zawierający u . Na mocy twierdzenia 5 istnieje taki element $w = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(j)}$, że

$$(6.1) \quad u_0 - u \rightarrow w \quad \text{i} \quad h(u_0 - u) = h(w).$$

Ponieważ u_0 jest mierzalne, więc

$$h(w) = h(wu_0) + h(wu'_0).$$

¹⁾ Niektórzy autorzy używają w tym przypadku nazwy „funkcja σ -skończona”.

Mamy jednak $h(w) = h(u_0 - u)$, a więc $h(wu'_0) = 0$, co daje

$$(6.2) \quad h(w) = h(wu_0).$$

Na mocy mierzalności elementu u , (6.1) i tego, że $u \rightarrow u_0$ otrzymujemy

$$(6.3) \quad h(u_0) = h(u_0u) + h(u_0u') = h(u) + h(w),$$

na mocy zaś mierzalności elementu w i (6.2)

$$(6.4) \quad h(u_0) = h(u_0w) + h(u_0w') = h(w) + h(u_0w').$$

Porównując prawe strony wzorów (6.3) i (6.4), otrzymujemy

$$(6.5) \quad h(u) = h(u_0w').$$

Z tego, że $u_0 - u \rightarrow w$ i $u \rightarrow u_0$ wynika

$$(6.6) \quad u_0 - w = u_0w' \rightarrow u.$$

Dalej mamy

$$u_0w' = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \left(\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(j)} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} (w_i^{(j)})' = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} (w_i^{(j)})' u_k.$$

Porządkując teraz dla każdego i ciąg podwójny $\{(w_i^{(j)})' u_k\}$ w ciąg pojedynczy $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots$ otrzymujemy $u_0w' = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$, co ze względu na (6.5) i (6.6) kończy dowód w przypadku elementu u miary skończonej.

Przypuścimy teraz, że $h(u) = +\infty$. Na mocy założonej $\aleph_0$ -skończoności funkcji g istnieje ciąg elementów rozłącznych $s_1, s_2, \dots \in V$ miary skończonej h takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} us_k = u$; us_k są miary skończonej, więc na mocy poprzedniej części twierdzenia istnieje dla każdego k element $w_k = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} w_{ik}^{(j)}$, $w_{ik}^{(j)} \in V$, zawarty w us_k i równej miary z elementem us_k . Mamy więc $\sum_{k=1}^{\infty} w_k \rightarrow u$ i ze względu na rozłączność elementu s_k

$$h(u) = \sum_{k=1}^{\infty} h(us_k) = \sum_{k=1}^{\infty} h(w_k) = h\left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k\right).$$

Porządkując teraz przy każdym i ciąg podwójny $\{w_{ik}^{(j)}\}$ w ciąg pojedynczy $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots$ otrzymujemy $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}$, co kończy dowód.

Twierdzenie 7. Jeżeli g jest funkcją $\aleph_0$ -skończoną, to rozszerzenie h , określone wzorem (5.1), rozpatrywane na ciele U_h , jest rozszerzeniem minimalnym funkcji g do miary w U , to znaczy każda miara f w ciele U będąca rozszerzeniem g jest równocześnie rozszerzeniem h .

Dowód. Niech $u \in U_h$. Mamy udowodnić, że u jest mierzalne według miary f i że wartości miar f i h dla elementu u są równe. Podobnie jak poprzednio założmy najpierw, że $h(u) < +\infty$.

Na mocy twierdzeń 5 i 6 istnieją wtedy elementy

$$v = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)} \quad \text{ i } \quad w = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} w_i^{(j)}, \quad v_i^{(j)}, w_i^{(j)} \in V,$$

takie, że $w \rightarrow u \rightarrow v$ i $h(w) = h(u) = h(v)$.

Z twierdzenia (3.12) z rozdziału III książki pierwszej (str. 122) wynika, że miary f i h przyjmują na elementach w i v te same wartości, a więc $f(w) = h(u) = f(v) < +\infty$. Mamy dalej $f(v) = f(w) + f(v-w)$, co ze względu na poprzednią równość i skończoność $f(v)$ daje $f(v-w) = 0$. Element $v-u$ jako zawarty w elemencie $v-w$ miary f zero jest zgodnie z (2.3) mierzalny według funkcji f i oczywiście też jest miary f zero. Wynika z tego, że element $u = w + (u-w)$ jako suma dwóch elementów mierzalnych jest mierzalny i $f(u) = f(w) + f(u-w) = f(v) = h(u)$.

W przypadku gdy $h(u) = \infty$, korzystając z $\aleph_0$ -skończoności funkcji g , utwórzmy ciąg elementów rozłącznych $s_1, s_2, \dots \in V$ takich, że $g(s_k) < \infty$, i rozpatrzmy elementy ciągu $s_1 u, s_2 u, \dots$. Wszystkie one jako elementy skończonej miary h są mierzalne według miary f , i miary h i f przyjmują na nich te same wartości. Mamy więc

$$h(u) = h\left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} h(s_k u) = \sum_{k=1}^{\infty} f(s_k u) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k\right) = f(u),$$

co kończy dowód.

W przypadku gdy funkcja rozszerzana g jest $\aleph_0$ -skończona, z twierdzenia 7 wynika, że ciało U_h jest bardzo specjalnej postaci. Można bowiem łatwo za pomocą twierdzeń 8* i 9* z rozdziału III książki pierwszej (str. 121-122) wykazać, że każde dwie miary przyjmujące te same wartości w ciele V przyjmują również te same wartości w ciele $[|V|]_\beta$, rozszerzając więc funkcję h z ciała $[|V|]_\beta$ do miary w ciele U metodą podaną w twierdzeniu 1 otrzymujemy minimalne rozszerzenie funkcji g do miary w ciele U , a więc U_h jest ciałem tych elementów w , które mają postać $w = v + u$, $u \in [|V|]_\beta$, v zaś jest zawarty w pewnym elemencie miary 0 ciała $[|V|]_\beta$.

W przypadku gdy g nie jest funkcją $\aleph_0$ -skończoną, twierdzenia 6 i 7 nie zachodzą. W szczególności, funkcja g może się nie rozszerzać na $[|V|]_\beta$ w sposób jednoznaczny, o czym poucza następujący przykład:

Niech I_n będzie przedziałem $E[(0 \leq x_1 < 1) (n \leq x_2 < n+1)]$ na płaszczyźnie R_2 . Utwórzmy podciało $V = [|(I_1, I_2, \dots)|]_0$ ciała $W(R_2) = U$. Oczywiście,

$R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i \in [|V|]_\beta - V$. Ciało $V_1 = [|V + (R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i)|]_0$ składa się z tych zbiorów X , które mają postać

$$X = Y_1 \sum_{i=1}^{\infty} I_i + Y_2 (R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i), \quad Y_1, Y_2 \in V.$$

Niech m będzie miarą Lebesgue'a na płaszczyźnie R_2 . Przyjmijmy

$$g(X) = m(X) \quad \text{ dla } X \in V$$

i rozszerzmy funkcję g na V_1 przyjmując

$$g_1(X) = m(Y_1 \sum_{i=1}^{\infty} I_i) + m(Y_2 I_0),$$

gdzie

$$X = Y_1 \sum_{i=1}^{\infty} I_i + Y_2 (R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i), \quad Y_1, Y_2 \in V.$$

Mamy $g_1(R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i) = 1$ i g_1 jest przeliczalnie addytywną funkcją w V_1 , a więc istnieje rozszerzenie h_1 funkcji g_1 do miary w ciele U ; h_1 jest oczywiście również rozszerzeniem funkcji g . Innym rozszerzeniem funkcji g do miary w ciele U jest miara Lebesgue'a m . Oba te rozszerzenia nie są jednak równe na elemencie

$$R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i \in [|V|]_\beta = [|V_1|]_\beta, \quad \text{ gdyż } m(R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i) = +\infty, \quad \text{ zaś } h_1(R_2 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i) = 1.$$

§ 7. Przykłady i zadania

(7.1) Udowodnić, że warunek (2.2) określenia 1 można zastąpić warunkiem:

Dla każdego $u \in U$, jeżeli przy pewnych $v_1, v_2 \in V$ mamy $v_1 \rightarrow u \rightarrow v_2$ i $g(v_1) = g(v_2)$, to $u \in V$.

(7.2) W zbiorze X wyróżniamy punkt p_0 i przyjmujemy dla $Y \subset X$

$$g(Y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } p_0 \notin Y, \\ 1, & \text{jeżeli } p_0 \in Y. \end{cases}$$

Dowieść, że g jest miarą w $W(x)$.

(7.3) Zachowując oznaczenia z twierdzenia 4 oznaczamy

$$(5.1^*) \quad h_*(u) = \sup_{\substack{\prod_{i=1}^{\infty} v_i \\ v_1, v_2, \dots \in V}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\prod_{i=1}^n v_i\right) \right].$$

Funkcja h_* nazywa się *miarą wewnętrzną*. Dowieść, że w przypadku, gdy funkcja g jest skończona, warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności elementu $u \in U$ jest warunek $h(u) = h_*(u)$.

(7.4) Niech X będzie zbiorem nieskończonym nieprzeliczalnym. Przyjmujemy dla zbiorów skończonych $Y \subset X$, $g(Y) = n$, gdzie n jest ilością elementów zbioru Y , dla Y przeliczalnych zaś lub takich, że zbiór $X - Y$ jest najwyżej przeliczalny, przyjmujemy $g(Y) = +\infty$. Udowodnić, że g jest miarą w $W(x)$. W ten sposób pojęcie miary można też uważać za uogólnienie pojęcia liczności elementów.

(7.5) Dla przykładu podanego w (7.4) określamy funkcję h wzorem (5.1). Wykazać, że każdy podzbiór zbioru X jest mierzalny według funkcji h .

(7.6) Zbadać zbiór elementów spełniających warunek (3.4) w przypadku, gdy funkcja g spełnia warunki (3.1), (3.2) i słabszy od (3.3) warunek

$$g(u_1 + u_2) \leq g(u_1) + g(u_2).$$

Rozdział VIII

Miary w przestrzeniach euklidesowych

§ 1. Treść rozdziału

Rozdział niniejszy jest zastosowaniem wyników rozdziału poprzedniego specjalnie do przestrzeni euklidesowych, a zarazem powiązaniem badań rozdziałów VI i VII. Wynik zasadniczy zawarty jest w twierdzeniach 4 i 6, z których pierwsze orzeka, że każdej funkcji n -wymiarowo niemalejącej daje się przyporządkować pewna miara w przestrzeni R_n , a drugie wyznacza klasy tych miar, które dadzą się w podany tam sposób z takich funkcji otrzymać. Twierdzenie 5 podaje pewną własność funkcji n -wymiarowo niemalejących spełniających dodatkowe warunki, ważne w pewnych zagadnieniach rachunku prawdopodobieństwa.

W paragrafie 5 omawiamy krótko miarę Lebesgue'a.

§ 2. Funkcje przedziału stowarzyszone z funkcjami n -wymiarowo niemalejącymi

Nawiązując do rozważań rozdziału pierwszego księgi I (str. 46-49) przypominamy, że przez P_n umówiliśmy się oznaczać klasę n -wymiarowych przedziałów półotwartych (prawostronnie) n -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej R_n , przez N_n ciało figur elementarnych tej przestrzeni, to znaczy klasę sum skończonej ilości parami rozłącznych przedziałów półotwartych tej przestrzeni. Ponieważ często będziemy w tym rozdziale mówili o przedziałach skończonych, to znaczy o zbiorach $I = E\left[\prod_{i=1}^n (a_i \leq x_i \leq \beta_i)\right]$, gdzie $-\infty < a_i \leq \beta_i < +\infty$, więc klasę tych przedziałów oznaczmy dodatkowo przez P_n^* .