Rozdział VI

Funkcje n-wymiarowo niemalejące

§ 1. Treść rozdziału

Pojęcie, które wprowadzamy w tym rozdziale, nie odgrywa dużej roli poza teorią prawdopodobieństwa, a nawet w obrębie tej ostatniej nie wydaje się być należycie doceniane. W ogólnej teorii prawdopodobieństwa jest jednak nieodzowne.

W paragrafie 2 omawiamy operacje cząstkowego różnicowania, w paragrafie 3 zaś badamy stosunek tej operacji do operacji różniczkowania cząstkowego. Za pomocą operacji cząstkowego różnicowania określamy w paragrafie 4 pojęcie funkcji n-wymiarowo niemalejącej, po czym w paragrafie 5 badamy stosunek tego pojęcia do pojęcia funkcji niemalejącej; zasadniczym wynikiem jest tu twierdzenie 2. W paragrafie 6 dowodzimy, że ciągłościowa granica ciągu funkcji niemalejących i n-wymiarowo niemalejących jest n-wymiarowo niemalejąca.

§ 2. Operatory różnicowe

Pojęcie *operatora różnicowego* funkcji wielu zmiennych, które wprowadzimy w tym paragrafie, jest uogólnieniem znanego z elementarnej analizy pojęcia przyrostu funkcji w danym przedziale. Jak wiadomo, jeżeli f jest funkcją jednej zmiennej, x_1 i $h>0$ zaś są liczbami rzeczywistymi, to *przyrostem Δf funkcji f* w przedziale $\underset{x}{E}[x_1 \leqslant x \leqslant x_1+h]$ nazywamy różnicę $f(x_1+h)-f(x_1)$. Liczbę h nazywamy wtedy *przyrostem zmiennej x* i oznaczamy często przez Δx. Zauważmy, że przyrost funkcji w danym przedziale zależy od krańców tego przedziału, a więc od x_1 i h. Traktując te wielkości jako zmienne i pisząc $\Delta f = \Delta^h f(x_1) = f(x_1+h)-f(x_1)$ widzimy, że przyrost funkcji można uważać za nową funkcję dwóch zmiennych, z których jedna, a mianowicie h, jest dodatnia. Uogólnienie, któ-

remu poddamy pojęcie przyrostu funkcji, idzie w dwóch kierunkach: po pierwsze nie uwzględniamy założenia dodatniości przyrostu zmiennej, po drugie określamy je przez indukcję również dla funkcji wielu zmiennych.

Będziemy mówili w tym rozdziale o funkcjach f określonych w całej przestrzeni R_n (a więc o funkcjach n zmiennych), przy czym ze względu na specyficzny charakter zagadnienia wygodnie będzie niekiedy zaniechać używanych dotychczas skrótów i pisać $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zamiast $f\big((x_i)\big)$.

Określenie 1. Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie funkcją n zmiennych. Dla każdego układu $i_1, i_2, \ldots, i_k$ k spośród n pierwszych liczb naturalnych, każdego ciągu $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$ liczb (przyrostów) i każdego punktu $(t_i)=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ przestrzeni R_n określamy *różnicę* $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *funkcji f* w punkcie (t_i) dla przyrostów $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$ zmiennych $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ przez wzory

$$\Delta_{i_k}^{h_{i_k}} f(t_1, t_2, \ldots, t_{i_k}, \ldots, t_n) = \tag{2.1}$$
$$= f(t_1, t_2, \ldots, t_{i_k}+h_{i_k}, \ldots, t_n) - f(t_1, t_2, \ldots, t_{i_k}, \ldots, t_n),$$

jeżeli $k=1$,

$$\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_{k-1}}, h_{i_k}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Delta_{i_k}^{h_{i_k}}\Big[\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_{k-1}}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\Big], \tag{2.2}$$

jeżeli $k>1$.

Symbol $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}}$ nazywamy *operatorem różnicowym mieszanym* rzędu k.

Zauważmy, że jeżeli punkt, w którym dokonujemy różnicowania, i przyrosty będziemy traktowali jako zmienne, to

$$\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

będzie funkcją $n+k$ zmiennych.

Udowodnimy kilka własności operatorów różnicowych:

$$\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Delta_{i_k}^{h_{i_k}} \Delta_{i_{k-1}}^{h_{i_{k-1}}} \ldots \Delta_{i_1}^{h_{i_1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n). \tag{2.3}$$

Wynika to wprost z określenia 1.

$$\Delta_{i_1}^{h_{i_1}} \Delta_{i_2}^{h_{i_2}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Delta_{i_2}^{h_{i_2}} \Delta_{i_1}^{h_{i_1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad i_1 \neq i_2, \tag{2.4}$$

to znaczy *różne operatory rzędu* 1 *są przemienne*. Przy założeniu, że $i_1<i_2$ mamy bowiem

$$(2.5)\qquad \Delta_{i_1}^{h_{i_1}}\Delta_{i_2}^{h_{i_2}} f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2},\dots,t_n)=$$
$$=\Delta_{i_1}^{h_{i_1}}[f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2}+h_{i_2},\dots,t_n)-f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2},\dots,t_n)]=$$
$$=f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1}+h_{i_1},\dots,t_{i_2}+h_{i_2},\dots,t_n)-f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1}+h_1,\dots,t_{i_2},\dots,t_n)-$$
$$-f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2}+h_{i_2},\dots,t_n)+f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2},\dots,t_n)=$$
$$=\Delta_{i_1}^{h_{i_1}} f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2}+h_2,\dots,t_n)-\Delta_{i_1}^{h_{i_1}} f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2},\dots,t_n)=$$
$$=\Delta_{i_2}^{h_{i_2}}\Delta_{i_1}^{h_{i_1}} f(t_1,t_2,\dots,t_{i_1},\dots,t_{i_2},\dots,t_n),$$

co należało okazać.

Z warunków (2.3) i (2.4) za pomocą łatwego rozumowania indukcyjnego otrzymujemy, że

(2.6) *Jeżeli* $j_1,j_2,\dots,j_k$ *jest jakąkolwiek permutacją wskaźników* $i_1,i_2,\dots,i_k$, $k\leqslant n$, *to*

$$\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_k}} f(t_1,t_2,\dots,t_n)=\Delta_{j_1,j_2,\dots,j_k}^{h_{j_1},h_{j_2},\dots,h_{j_k}} f(t_1,t_2,\dots,t_n).$$

Z twierdzenia (2.6) wynika, że możemy ograniczyć się do rozpatrywania operatorów różnicowych mieszanych, dla których $i_1<i_2<\dots<i_k$. Operatory takie nazywamy krótko *operatorami różnicowymi* (opuszczając słowo *mieszane*). Istnieje oczywiście $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ operatorów różnicowych rzędu k, w szczególności jeden operator rzędu n: $\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n}$.

Wzory indukcyjne (2.1) i (2.2) dają się oczywiście rozwikłać. Zakładając, że $i_1<i_2<\dots<i_k$ i oznaczając przez $C^{(r)}(i_1,i_2,\dots,i_k)$ klasę kombinacji po r spośród k wskaźników $i_1,i_2,\dots,i_k$, $r=1,2,\dots,k$, a przez $f_{h_{j_1},h_{j_2},\dots,h_{j_r}}(x_1,x_2,\dots,x_{j_1},\dots,x_{j_2},\dots,x_{j_r},\dots,x_n)$ funkcję

$$f(x_1,x_2,\dots,x_{j_1}+h_{j_1},\dots,x_{j_r}+h_{j_r},\dots,x_n),$$

otrzymujemy przez łatwą indukcję, którą pozostawiamy czytelnikowi,

$$(2.7)\qquad \Delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_k}} f(t_1,t_2,\dots,t_n)=(-1)^k f(t_1,t_2,\dots,t_k)+$$
$$+\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r+k}\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_r)\in C^{(r)}(i_1,i_2,\dots,i_k)} f_{h_{j_1},h_{j_2},\dots,h_{j_r}}(t_1,t_2,\dots,t_k).$$

W szczególności dla wskaźników $1,2,\dots,k$, przyjmując oznaczenia $C^{(r)}(1,2,\dots,k)=C_k^{(r)}$, mamy

$$(2.8)\qquad \Delta_{1,2,\dots,k}^{h_1,h_2,\dots,h_k} f(t_1,t_2,\dots,t_n)=$$
$$=(-1)^k f(t_1,t_2,\dots,t_n)+\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r+k}\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_r)\in C_k^{(r)}} f_{h_{j_1},h_{j_2},\dots,h_{j_r}}(t_1,t_2,\dots,t_n),$$

a dla $k=n$

$$(2.9)\qquad \Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)=$$
$$=(-1)^n f(t_1,t_2,\dots,t_n)+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+n}\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_r)\in C_n^{(r)}} f_{h_{j_1},h_{j_2},\dots,h_{j_r}}(t_1,t_2,\dots,t_n).$$

Ze wzorów (2.7) wynikają natychmiast dwie ważne własności (2.10) i (2.11) operatorów różnicowych

$$(2.10)\qquad \Delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_n}}[f(t_1,t_2,\dots,t_n)+g(t_1,t_2,\dots,t_n)]=$$
$$=\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_n}} f(t_1,t_2,\dots,t_n)+\Delta_{i_2,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_n}} g(t_1,t_2,\dots,t_n).$$

Własność (2.10) wynika z faktu, że prawa strona wzoru (2.7) zależy liniowo od f.

(2.11) *Jeżeli f jest lewostronnie ciągłą funkcją n zmiennych, to funkcja* $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_k}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *jest też lewostronnie ciągłą funkcją* $n+k$ *zmiennych.*

Podamy z kolei wzór, który znajdzie ważne zastosowanie w dalszym ciągu naszych rozważań (w § 2 rozdziału VIII, przy określaniu miary za pomocą funkcji n-wymiarowo niemalejących). Wzór ten pozwala rozwijać operator różnicowy na sumę dwóch operatorów w przypadku, gdy jeden z przyrostów jest sumą dwóch składników:

$$(2.12)\qquad \Delta_{1,2,\dots,k,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_k+h_k',\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_k,\dots,t_n)=$$
$$=\Delta_{1,2,\dots,k,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_k,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_k,\dots,t_n)+$$
$$+\Delta_{1,2,\dots,k}^{h_1,h_2,\dots,h_k',\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_k+h_k,\dots,t_n).$$

Dowód, którego szczegóły pozostawiamy czytelnikowi, uzyskujemy natychmiast, jeżeli zauważymy, że

$$
\begin{aligned}
(2.13)\qquad & \Delta_k^{h_k+h_k'} f({}_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = \\
&= f(t_1, t_2, \ldots, t_k + h_k + h_k', \ldots, t_n) - f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = \\
&= f(t_1, t_2, \ldots, t_k + h_k + h_k', \ldots, t_n) - f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n) + \\
&\quad + f(t_1, t_2, \ldots, t_k + h_k, \ldots, t_n) - f(t_1, t_2, \ldots, t_k + h_k, \ldots, t_n) = \\
&= \Delta_k^{h_k} f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n) + \Delta_k^{h_k'} f(t_1, t_2, \ldots, t_k + h_k, \ldots, t_n).
\end{aligned}
$$

Jako ostatnią z elementarnych własności operatorów różnicowych podamy jeszcze następującą:

(2.14) *Jeżeli jeden z przyrostów* $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$ *jest równy* 0, *to*

$$\Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}} f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = 0.$$

Wynika to ze wzoru (2.12).

§ 3. Operatory różnicowe i różniczkowanie cząstkowe

Podamy teraz kilka związków między operatorami różnicowymi a operatorami różniczkowymi. Wprost z definicji pochodnej cząstkowej wynika, że

$$(3.1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta_i^{h_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

a ponieważ

$$(3.2)\qquad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{k+1}}} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

więc przez indukcję otrzymujemy

$$(3.3)\qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = \lim_{h_{i_1} \to 0} \left[\lim_{h_{i_2} \to 0} \left[\ldots \left[\lim_{h_{i_k} \to 0} \frac{\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}} \right] \ldots \right] \right].$$

Udowodnimy teraz wzór, który w elementarnej analizie podawany jest zazwyczaj tylko dla funkcji dwóch zmiennych.

LEMAT 1. *Jeżeli funkcja* n *zmiennych* f *ma pochodną mieszaną* $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$, *to dla wszelkich* $(t_i), (h_i) \in R_n$ *zachodzi wzór*

$$(3.4)\qquad \frac{\Delta_{1,2,\ldots,n}^{h_1, h_2, \ldots, h_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} = \left[\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \right]^{(t_i + \vartheta_i h_i)},$$

gdzie ϑ_i *są pewnymi liczbami spełniającymi nierówności* $0 < \vartheta_i < 1$, *a pochodna mieszana po prawej stronie równości wzięta jest w punkcie* $(t_i + \vartheta_i h_i)$.

D o w ó d przeprowadzamy indukcyjnie. Dla $n = 1$ lemat 1 redukuje się do twierdzenia o przyrostach skończonych (tak zwanego twierdzenia o *wartości średniej*), znanego z elementarnej analizy. Załóżmy, że lemat zachodzi dla każdej funkcji k zmiennych, gdzie $0 < k < n$, i niech $f(x_1, x_2, \ldots; x_n)$ będzie funkcją n zmiennych spełniającą założenia lematu. Ustalając wartość n-tej zmiennej, to znaczy podstawiając konkretną wartość y_n w miejsce zmiennej x_n, otrzymujemy funkcję $f_{y_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_n)$ $n-1$ zmiennych spełniającą założenia lematu. Na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie liczby ϑ_i spełniające nierówności $0 < \vartheta_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dla których

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & \frac{\Delta_{1,2,\ldots,n-1}^{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} f_{y_n}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})}{h_1, h_2 \ldots h_{n-1}} = \\
& = \left[\frac{\partial f_{y_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}} \right]^{(t_1 + \vartheta_1 h_1, t_2 + \vartheta_2 h_2, \ldots, t_{n-1} + \vartheta_{n-1} h_{n-1})}.
\end{aligned}
$$

Wartość pochodnej $\dfrac{\partial f_{y_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}$ w punkcie

$$(t_1 + \vartheta_1 h_1, t_2 + \vartheta_2 h_2, \ldots, t_{n-1} + \vartheta_{n-1} h_{n-1})$$

zależy jednak od wartości y_n, którą ustaliliśmy, możemy więc przemianowując y_n na x_n napisać

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad g(x_n) & = \left[\frac{\partial f_{x_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}} \right]^{(t_1 + \vartheta_1 h_1, t_2 + \vartheta_2 h_2, \ldots, t_{n-1} + \vartheta_{n-1} h_{n-1})} = \\
& = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}} \right]^{(t + \vartheta_1 h_1, t_2 + \vartheta_2 h_2, \ldots, t_{n-1} + \vartheta_{n-1} h_{n-1}, x_n)} = \\
& = \frac{\Delta_{1,2,\ldots,n-1}^{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} f_{x_n}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} = \\
& = \frac{\Delta_{1,2,\ldots,n-1}^{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, x_n)}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}},
\end{aligned}
$$

przy czym równość (3.6) zachodzi dla każdej wartości x_n i funkcja g ma pochodną w każdym punkcie. Stosując do funkcji g twierdzenie o przyrostach skończonych, otrzymujemy

$$\frac{\Delta_n^{h_n} g(t_n)}{h_n} = \left[\frac{dg_n}{dx_n}\right]^{t_n+\vartheta_n h_n}, \tag{3.7}$$

skąd, korzystając z (3.6), (2.10), (2.3), (2.6) i własności pochodnych,

$$\frac{\Delta_n^{h_n} \dfrac{\Delta_{1,2,\dots,n-1}^{h_1,h_2,\dots,h_{n-1}} f(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n)}{h_1 h_2\dots h_{n-1}}}{h_n} \tag{3.8}$$

$$= \frac{\Delta_{1,2,\dots,n-1,n}^{h_1,h_2,\dots,h_{n-1},h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n)}{h_1 h_2\dots h_{n-1} h_n} =$$

$$= \left[\frac{d}{dx_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_{n-1}}\right]^{(t_1+\vartheta_1 h_1,\, t_2+\vartheta_2 h_2,\dots,t_{n-1}+\vartheta_{n-1} h_{n-1})}\right]^{t_n+\vartheta_n h_n} =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_{n-1}\partial x_n}\right]^{(t_i+\vartheta_i h_i)},$$

co należało okazać.

§ 4. Funkcje n-wymiarowo niemalejące

OKREŚLENIE 2. Funkcję f, określoną w całej przestrzeni R_n, nazywamy *n-wymiarowo niemalejącą*, jeśli dla każdego punktu $(t_i)\in R_n$ i dla każdego układu nieujemnych przyrostów $h_1,\dots,h_n$ zachodzi nierówność

$$\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n) \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Dla funkcji jednej zmiennej warunek (4.1) można zapisać w postaci

$$f(t+h)-f(t)\geqslant 0, \tag{4.2}$$

a więc pojęcie funkcji 1-wymiarowo niemalejącej pokrywa się z pojęciem funkcji niemalejącej jednej zmiennej w sensie określenia 1 z rozdziału V (str. 175). Zobaczymy jednak dalej, że już dla $n\geqslant 2$ pojęcia te różnią się zasadniczo. Dla funkcji mających pochodne cząstkowe w całej przestrzeni warunek (4.1) daje się zastąpić przez warunek dogodniejszy. Zachodzi mianowicie

TWIERDZENIE 1. *Na to, aby funkcja f zależna od n zmiennych, mająca w każdym punkcie przestrzeni R_n pochodną cząstkową $\dfrac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}$, była n-wymiarowo niemalejąca, potrzeba i wystarcza, aby w całej przestrzeni R_n zachodziła nierówność*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}\geqslant 0. \tag{4.3}$$

Dowód. Jeżeli w pewnym punkcie (t_i) jest $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}<0$, to z uwagi na związek (3.3) dla przyrostów $h_1,h_2,\dots,h_n$ o dostatecznie małych wartościach bezwzględnych będą spełnione nierówności

$$\frac{\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)}{h_1,h_2,\dots,h_n}<0.$$

Zatem dla dostatecznie małych przyrostów dodatnich

$$\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)<0,$$

z czego widzimy, że warunek (4.3) jest warunkiem koniecznym, aby funkcja f była n-wymiarowo niemalejąca.

Jeżeli natomiast w pewnym punkcie (t_i) przy dodatnich przyrostach mamy $\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)<0$, to na mocy lematu 1 udowodnionego w poprzednim paragrafie mamy dla pewnego układu liczb $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n$ leżących między 0 a 1

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}\right]^{(t_i+\vartheta_i h_i)} = \frac{\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1,h_2,\dots,h_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)}{h_1 h_2\dots h_n}<0, \tag{4.4}$$

z czego widzimy, że warunek (4.3) nie zachodzi, jest on zatem warunkiem dostatecznym i twierdzenie jest udowodnione.

§ 5. Funkcje niemalejące a funkcje n-wymiarowo niemalejące

Wprowadzone w poprzednim paragrafie pojęcie funkcji n-wymiarowo niemalejącej jest w stosunku do pojęcia funkcji niemalejącej pojęciem nowym, ale ani ogólniejszym, ani też bardziej szczegółowym. Innymi słowy: Dla każdego $n\geqslant 2$ istnieją funkcje niemalejące, które nie są n-wymiarowo niemalejące, i odwrotnie.

Najłatwiej szukać odpowiednich przykładów wśród funkcji mających pochodną $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}$, a co za tym idzie, również pochodne

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Warunkiem na to, aby funkcja f była niemalejąca, jest wówczas

$$(5.1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}\geqslant 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

warunkiem zaś, aby była n-wymiarowo niemalejąca, w myśl twierdzenia 1 jest

$$(5.2)\qquad \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}\geqslant 0.$$

Oba warunki muszą zachodzić w każdym punkcie przestrzeni R_n. Warunki te są od siebie niezależne. Podajemy dwa proste przykłady.

Przykład 1. Funkcja $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2$ jest 2-wymiarowo niemalejąca, ale nie jest niemalejąca, gdyż

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=2,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=2(x_1+x_2).$$

Przykład 2. Funkcja $f(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}(x_1+x_2)$ jest niemalejąca, ale nie jest 2-wymiarowo niemalejąca. Istotnie,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{1}{1+(x_1+x_2)^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{-2(x_1+x_2)}{[1+(x_1+x_2)^2]^2}.$$

Sytuacja zmienia się jednak, jeżeli nałożymy na rozważane funkcje pewne dodatkowe warunki. Fakt ten jest dla nas szczególnie ważny, gdyż funkcje, z którymi spotykamy się w rachunku prawdopodobieństwa, zawsze spełniają te warunki. Zachodzi mianowicie następujące

TWIERDZENIE 2. *Funkcja n-wymiarowo niemalejąca f, spełniająca dla dowolnych $t_1,t_2,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n$ przy każdym $i=1,2,\ldots,n$ warunek*

$$(5.3)\qquad \lim_{t_i\to-\infty} f(t_1,t_2,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n)=0,$$

jest niemalejąca.

Dowód. Niech f będzie funkcją n-wymiarowo niemalejącą i spełniającą warunek (5.3). Ze wzoru (2.8) wynika, że przy tym założeniu

$$(5.4)\qquad \lim_{t_{k+1}\to-\infty} \Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_1,h_2,\ldots,h_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1},\ldots,t_n)=0,$$

ale ponieważ na podstawie (2.1) i (2.2) mamy tożsamościowo

$$(5.5)\qquad \Delta_{1,2,\ldots,k,k+1}^{h_1,h_2,\ldots,h_k,h_{k+1}} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1}-h_{k+1},\ldots,t_n)=$$
$$=\Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_1,h_2,\ldots,h_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1},\ldots,t_n)-$$
$$-\Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_1,h_2,\ldots,h_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1}-h_{k+1},\ldots,t_n),$$

więc na podstawie (5.4)

$$(5.6)\qquad \Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_1,h_2,\ldots,h_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1},\ldots,t_n)=$$
$$=\lim_{h_{k+1}\to-\infty}\Delta_{1,2,\ldots,k,k+1}^{h_1,h_2,\ldots,h_k,h_{k+1}} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1}-h_{k+1},\ldots,t_n).$$

Stosując ten wzór $(n-k)$-krotnie otrzymujemy, że

$$(5.7)\qquad \Delta_{1,2,\ldots,k}^{h_1,h_2,\ldots,h_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1},\ldots,t_n)=$$
$$=\lim_{h_{k+1}\to-\infty}\Big[\lim_{h_{k+2}\to-\infty}\big[\ldots\big[\lim_{h_n\to-\infty}\Delta_{1,2,\ldots,n}^{h_1,h_2,\ldots,h_n}\times$$
$$\times f(t_1,t_2,\ldots,t_k,t_{k+1}-h_{k+1},\ldots,t_n-h_n)\big]\ldots\big]\Big],$$

co w przypadku $k=1$ daje

$$(5.8)\qquad \Delta_1^{h_1} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)=$$
$$=\lim_{h_2\to-\infty}\Big[\lim_{h_3\to-\infty}\big[\ldots\big[\lim_{h_n\to-\infty}\Delta_{1,2,\ldots,n}^{h_1,h_2,\ldots,h_n} f(t_1,t_2-h_2,\ldots,t_n-h_n)\big]\ldots\big]\Big].$$

Ponieważ jednak na podstawie założenia funkcja f jest n-wymiarowo niemalejąca, więc prawa strona równości (5.8) jest dla $h_1>0$ nieujemna, co daje

$$(5.9)\qquad \Delta_1^{h_1} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\geqslant 0,\qquad h_1>0.$$

Wobec przemienności operatorów (por. twierdzenie (2.6)) porządek wskaźników w operatorze nie gra roli, a więc

$$(5.10)\qquad \Delta_i^{h_i} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\geqslant 0,\quad h_i>0\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Nierówności te wykazują, że funkcja f jest niemalejąca, co należało okazać.

§ 6. Zbieżność ciągłościowa funkcji n-wymiarowo niemalejących

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli $\{f_m\}$ jest ciągiem funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych i n-wymiarowo niemalejących, zbieżnym ciągłościowo do niemalejącej i lewostronnie ciągłej funkcji f, to f jest funkcją n-wymiarowo niemalejącą.*

Dowód. Niech (t_i) będzie dowolnym punktem przestrzeni R_n, a $h_1, h_2, \dots, h_n$ niech będzie układem przyrostów dodatnich. Zwróćmy uwagę na 2^n funkcji

(6.1) $$f_{h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_r}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{j_1} + h_{j_1}, \dots, x_{j_r} + h_{j_r}, \dots, x_n),$$

$(j_1, j_2, \dots, j_r) \in C_n^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots, n$ (por. oznaczenia przyjęte w § 2, str. 191). Wszystkie te funkcje są niemalejące, a więc zbiór punktów, w których są one wszystkie ciągłe, jest na mocy twierdzenia 5 z rozdziału V (§ 3, str. 182) gęsty w przestrzeni R_n. Istnieje zatem ciąg punktów $\{t_i^{(l)}\}$ taki, że

(6.2) $$(t_i^{(l)}) \to (t_i) \quad \textit{przy} \quad l \to \infty;$$

(6.3) $$(t_i^{(l)}) < (t_i) \qquad (l = 1, 2, \dots);$$

(6.4) *wszystkie funkcje* (6.1) *są ciągłe w każdym z punktów* $(t_i^{(l)})$.

Z uwagi na (6.4) i założenia naszego twierdzenia mamy dla każdego $(j_1, j_2, \dots, j_r) \in C_n^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots, n$ oraz każdego l

(6.5) $$f(t_1^{(l)}, t_2^{(l)}, \dots, t_{j_1}^{(l)} + h_{j_1}, \dots, t_{j_r}^{(l)} + h_{j_r}, \dots, t_n^{(l)}) = \\ = \lim_{m \to \infty} f_m(t_1^{(l)}, t_2^{(l)}, \dots, t_{j_1}^{(l)} + h_{j_1}, \dots, t_{j_r}^{(l)} + h_{j_r}, \dots, t_n^{(l)}),$$

skąd, korzystając z liniowości prawej strony wzoru (2.9),

(6.6) $$\Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1, h_2, \dots, h_n} f(t_1^{(l)}, \dots, t_n^{(l)}) = \lim_{m \to \infty} \Delta_{1,2,\dots,n}^{h_1, h_2, \dots, h_n} f_m(t_1^{(l)}, \dots, t_n^{(l)}).$$

Na mocy założenia prawa strona równości (6.6) jest nieujemna, zatem także lewa strona jest nieujemna dla każdego l. Ponieważ jednak, na mocy (2.11), $\Delta_{1,\dots,n}^{h_1,\dots,h_n} f(x_1, \dots, x_n)$ jest funkcją lewostronnie ciągłą, więc z (6.2) i (6.3) wynika, że

(6.7) $$\lim_{l \to \infty} \Delta_{1,\dots,n}^{h_1,\dots,h_n} f(t_1^{(l)}, \dots, t_n^{(l)}) = \Delta_{1,\dots,n}^{h_1,\dots,h_n} f(t_1, \dots, t_n).$$

Wyrażenie pod znakiem granicy jest nieujemne dla każdego l, zatem granica jest nieujemna, czyli

(6.8) $$\Delta_{1,\dots,n}^{h_1,\dots,h_n} f(t_1, \dots, t_n) \geqslant 0.$$

Ponieważ (t_i) jest dowolnym punktem przestrzeni R_n, więc istotnie funkcja f jest n-wymiarowo niemalejąca, co należało okazać.

W terminach topologii ogólnej twierdzenie 3 możemy wypowiedzieć następująco:

W przestrzeni funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych, z granicą ciągłościową zbiór funkcji n-wymiarowo niemalejących jest zbiorem zamkniętym.

§ 7. Przykłady i zadania

(7.1) Udowodnić następujące uogólnienie wzoru (2.12):

$$\Delta_{1,2,\dots,k}^{\sum_{s=1}^{r_1} h_1^{(s)}, \sum_{s=1}^{r_2} h_2^{(s)}, \dots, \sum_{s=1}^{r_k} h_k^{(s)}} f(t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = \\ = \sum_{s_1=1}^{r_1} \sum_{s_2=1}^{r_2} \dots \sum_{s_k=1}^{r_k} \Delta_{1,2,\dots,k}^{h_1^{(s_1)}, h_2^{(s_2)}, \dots, h_k^{(s_k)}} \times \\ \times f\Big(t_1 + \sum_{s=1}^{s_1-1} h_1^{(s)}, t_2 + \sum_{s=1}^{s_2-1} h_2^{(s)}, \dots, t_k + \sum_{s=1}^{s_k-1} h_k^{(s)}, t_{k+1}, \dots, t_n\Big).$$

Uwaga. Jak się wydaje, najwygodniej jest prowadzić dowód wychodząc ze wzoru (2.13) i stosując indukcję względem r_1 przy założeniu $k = 1$, a następnie względem k przy dowolnych r_i.

(7.2) Udowodnić, że suma dwóch funkcji n-wymiarowo niemalejących jest funkcją n-wymiarowo niemalejącą.

(7.3) Posługując się przykładem 1 i 2 z paragrafu 5 podać dla każdego n przykład funkcji: 1° n-wymiarowo niemalejącej, lecz nie niemalejącej; 2° niemalejącej, lecz nie n-wymiarowo niemalejącej.

(7.4) Przyjmujemy $f_a(x_1, x_2) = 0$ dla $(x_1, x_2) \leqslant (x_1, ax_1)$ i $f_a(x_1, x_2) = 1$ dla pozostałych punktów płaszczyzny. Dla jakich wartości parametru a funkcja f_a jest 2-wymiarowo niemalejąca?

(Odpowiedź: $a = 0$.)

(7.5) Udowodnić, że na to, aby funkcja lewostronnie ciągła była n-wymiarowo niemalejąca, potrzeba i wystarcza, aby warunek (4.1) zachodził dla przyrostów dodatnich i punktów (t_i) o współrzędnych wymiernych.