

Jeżeli f jest funkcją ciągłą określoną w przedziale $E[0 \leq x \leq 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x)$$

jednostajnie ze względu na x .

(15.6) W wielokrotnym schemacie Bernoulliego znaleźć prawdopodobieństwo, że zjawisko C_1 wystąpi wcześniej niż zjawisko C_2 i granicę tego prawdopodobieństwa przy $n \rightarrow \infty$.

(15.7) Udowodnić, że w wielokrotnym schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo, że żadne z rozważanych zjawisk $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ nie wystąpi w pierwszych $n < m$ próbach więcej niż 1 raz, wynosi

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n}.$$

(15.8) Znaleźć prawdopodobieństwo, że w wielokrotnym schemacie Bernoulliego zjawisko $C^{(1)}$ pojawi się w $2n$ pierwszych próbach, w próbach o wskaźnikach parzystych większą ilość razy niż zjawisko $C^{(2)}$ w próbach o wskaźnikach nieparzystych i granicę tego prawdopodobieństwa przy $n \rightarrow \infty$. (Chodzi tu o prawdopodobieństwo

$$\text{zdarzenia } z_n = z\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^{(1)} > \sum_{i=1}^n x_{2i-1}^{(2)}\right).$$

Rozdział V

Funkcje niemalejące

§ 1. Treść rozdziału

Zadaniem książki drugiej jest podanie w odpowiednim zestawieniu niezbędnych przy studiowaniu rachunku prawdopodobieństwa wiadomości z zakresu teorii funkcji rzeczywistych.

W rozdziale niniejszym podajemy zarys teorii funkcji niemalejących i lewostronnie ciągłych n zmiennych. Zasadniczym twierdzeniem jest tutaj pochodzące od Helly'ego twierdzenie 6 (§ 4, str. 184). Paragraf 5 zawiera teorię odwracania funkcji niemalejących jednej zmiennej.

§ 2. Funkcje niemalejące n zmiennych

Punkty n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej R_n będziemy dla skrócenia oznaczali przez (t_i) , (t'_i) , zamiast $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$. Będziemy również pisali krótko $(t_i) < (t'_i)$ zamiast $t_1 < t'_1, t_2 < t'_2, \dots, t_n < t'_n$. Analogiczne oznaczenia przyjmujemy dla innego typu nierówności.

Przez funkcję określoną w zbiorze $AC R_n$ będziemy rozumieli funkcję rzeczywistą n zmiennych $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, określoną dla $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i) \in A$. Zgodnie z zawartą umową co do oznaczania punktów przestrzeni R_n wartość takiej funkcji w punkcie (x_i) będziemy oznaczali przez $f((x_i))$.

OKREŚLENIE 1. Funkcję f określoną w zbiorze $AC R_n$ będziemy nazywali *niemalejącą*, jeżeli dla wszystkich $(t_i), (t'_i) \in A$ i $(t_i) \leq (t'_i)$ zachodzi $f((t_i)) \leq f((t'_i))$. W przypadku gdy dla każdych $(t_i), (t'_i) \in A$ i $(t_i) \leq (t'_i)$ zachodzi $f((t_i)) \geq f((t'_i))$, funkcję f nazywamy *nierosnącą*.

OKREŚLENIE 2. Jeżeli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni R_n , a f jest funkcją określoną w zbiorze A i $(t_i) \in R_n$, to symbolem

$$(2.1) \quad f_A(t_i - 0) = f_A(t_1 - 0, t_2 - 0, \dots, t_n - 0)$$

będziemy oznaczali liczbę rzeczywistą ξ spełniającą warunek:

(2.2) dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla $(t'_i) \in A$ i $(t_i - \delta) \leq (t'_i) < (t_i)$ mamy

$$|f((t'_i)) - \xi| < \eta,$$

jeżeli tylko liczba taka istnieje.

Z określenia 2 wynika, że jeżeli liczba $f_A((t_i - 0))$ istnieje, to jest określona jednoznacznie.

Analogicznie, symbolem

$$(2.3) \quad f_A((t_i + 0)) = f_A(t_1 + 0, t_2 + 0, \dots, t_n + 0)$$

oznaczamy taką liczbę rzeczywistą ξ , że dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla $(t'_i) \in A$ i $(t_i) < (t'_i) \leq (t_i + \delta)$ spełniony jest warunek

$$|f((t'_i)) - \xi| < \eta,$$

jeżeli tylko taka liczba ξ istnieje.

Zarówno w określeniu liczby $f_A(t_i + 0)$, jak i w określeniu liczby $f_A(t_i - 0)$ warunek istnienia jest niezbędny, a w przypadku jego spełnienia jednoznaczność zachowana. Jeżeli funkcja f określona jest w całej przestrzeni R_n , to zamiast $f_{R_n}((t_i - 0))$, $f_{R_n}((t_i + 0))$ piszemy po prostu $f((t_i - 0))$, $f((t_i + 0))$.

OKREŚLENIE 3. Funkcję f określoną w przestrzeni R_n nazywamy *lewostronnie ciągłą w punkcie* $(t_i) \in R_n$, jeżeli liczba $f((t_i - 0))$ istnieje i $f((t_i)) = f((t_i - 0))$. Analogicznie, gdy istnieje liczba $f((t_i + 0))$ i $f((t_i + 0)) = f((t_i))$, to funkcję f nazywamy *prawostronnie ciągłą w punkcie* (t_i) .

TWIERDZENIE 1. Jeżeli A jest podzbiorem gęstym przestrzeni R_n , a f funkcją niemalejącą w zbiorze A , to:

(2.4) dla każdego $(t_i) \in R_n$ istnieją liczby $f_A((t_i - 0))$ oraz $f_A((t_i + 0))$ i mamy

$$f_A((t_i - 0)) = \sup f((x_i)), \quad (x_i) < (t_i), \quad (x_i) \in A,$$

$$f_A((t_i + 0)) = \inf f((x_i)), \quad (x_i) > (t_i), \quad (x_i) \in A;$$

(2.5) funkcje $f_A((t_i - 0))$ i $f_A((t_i + 0))$ zmiennej (t_i) są niemalejące w całej przestrzeni R_n ;

(2.6) dla $(t'_i) < (t''_i) < (t'''_i)$ i $(t'_i), (t''_i), (t'''_i) \in A$ zachodzi wzór

$$f((t'_i)) \leq f_A((t''_i - 0)) \leq f_A((t''_i + 0)) \leq f((t'''_i)),$$

w przypadku zaś, gdy ponadto $(t'_i) \in A$, to

$$f_A((t'_i - 0)) \leq f((t'_i)) \leq f_A((t'_i + 0));$$

(2.7) $f_A((t_i - 0))$ jest lewostronnie ciągłą, $f_A((t_i + 0))$ zaś jest prawostronnie ciągłą funkcją zmiennych (t_i) w całej przestrzeni R_n .

Dowód tezy (2.4). Niech będzie $\xi = \sup f((x_i))$, $(x_i) < (t_i)$, gdzie $(x_i) \in A$. Z założenia, że f jest funkcją niemalejącą w zbiorze A , wynika, że liczba ξ istnieje, a z własności kresu górnego wynika, że dla każdej liczby $\eta > 0$ można dobrać taki punkt $(x_i^{(\eta)}) < (t_i)$ należący do zbioru A , że

$$(2.8) \quad f((x_i^{(\eta)})) + \eta > \xi.$$

Niech $\eta > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią, $(x_i^{(\eta)}) = (x_1^{(\eta)}, x_2^{(\eta)}, \dots, x_n^{(\eta)})$ dowolnym punktem przestrzeni R_n spełniającym warunek (2.8); założmy $\delta = \min(t_1 - x_1^{(\eta)}, t_2 - x_2^{(\eta)}, \dots, t_n - x_n^{(\eta)})$ i weźmy pod uwagę dowolny punkt $(t'_i) \in A$ taki, że $(t_i - \delta) \leq (t'_i) < (t_i)$. Punkt taki istnieje, gdyż A jest zbiorem gęstym w przestrzeni R_n . Z określenia liczby δ wynika, że $(x_i^{(\eta)}) \leq (t_i)$, a więc $f((x_i^{(\eta)})) \leq f((t'_i))$ i $f((t'_i)) + \eta > \xi$, z czego wynika, że $|f((t'_i)) - \xi| < \eta$. Ponieważ zaś η była dowolną liczbą dodatnią, więc na mocy określenia 2 $f_A((t_i - 0)) = \xi$, co należało okazać. Analogiczny dowód drugiej części tezy (2.4) pozostawiamy czytelnikowi.

Dowód tezy (2.5) otrzymujemy natychmiast z tezy (2.4), jeżeli tylko zauważymy, że w przypadku, gdy $(t_i) \leq (t'_i)$, zbiór tych $(x_i) \in A$, dla których $(x_i) < (t_i)$, jest podzbiorem zbioru tych $(x_i) \in A$, dla których $(x_i) < (t'_i)$. Wobec tego zbiór liczb, którego kresem górnym zgodnie z (2.4) jest liczba $f((t_i - 0))$, jest zawarty w zbiorze liczb, którego kresem górnym jest liczba $f((t'_i - 0))$, z czego wynika, że $f((t_i - 0)) \leq f((t'_i - 0))$, co należało okazać.

Analogicznie dowodzimy, że $f((t_i + 0)) \leq f((t'_i + 0))$ dla $(t_i) \leq (t'_i)$.

Dowód tezy (2.6) pozostawiamy czytelnikowi. Należy w nim skorzystać z tezy (2.4) i założenia, że funkcja f jest niemalejąca.

Dowód tezy (2.7). Oznaczmy dla dowolnego $(t_i) \in A$ przez $A_{(t_i)}^{(-)}$ i $A_{(t_i)}^{(+)}$ zbiór tych (x_i) , dla których $(x_i) < (t_i)$ i odpowiednio $(x_i) > (t_i)$, a przez $f^{(-)}(t_i)$ i $f^{(+)}(t_i)$ odpowiednio funkcje $f_A((t_i - 0))$

i $f_A((t_i+0))$. Mamy przy tych oznaczeniach

$$(2.9) \quad A_{(t_i)}^{(-)} = \sum_{(x_i) \in A_{(t_i)}^{(-)}} A_{(x_i)}^{(-)}, \quad A_{(t_i)}^{(+)} = \sum_{(x_i) \in A_{(t_i)}^{(+)}} A_{(x_i)}^{(+)}$$

i dalej

$$(2.10) \quad f^{(-)}((t_i-0)) = \sup_{(x_i) \in A_{(t_i)}^{(-)}} (f^{(-)}((x_i))) = \sup_{(x_i) \in A_{(t_i)}^{(-)}} \left(\sup_{(x'_i) \in A_{(x_i)}^{(-)}} (f(x'_i)) \right) =$$

$$= \sup_{\substack{(x'_i) \in \sum_{(x_i) \in A_{(t_i)}^{(-)}} A_{(x_i)}^{(-)}}} (f((x'_i))) = \sup_{(x'_i) \in A_{(t_i)}^{(-)}} f((x'_i)) = f_A((t_i-0)) = f^{(-)}((t_i)).$$

Za pomocą drugiej tożsamości (2.9) i analogicznego rozumowania jak (2.10) czytelnik z łatwością udowodni, że

$$(2.11) \quad f^{(+)}((t_i+0)) = f^{(+)}(t_i),$$

co łącznie z (2.10) daje, zgodnie z określeniem 3, ostatnią tezę twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. Jeżeli f_1 i f_2 są niemalejącymi i lewostronnie (prawostronnie) ciągłymi funkcjami określonymi w R_n , zbiór A zaś tych punktów $(x_i) \in R_n$, dla których $f_1((x_i)) = f_2((x_i))$ jest gęsty w R_n , to funkcje f_1 i f_2 są identyczne.

Dowód. Na mocy założenia mamy $f_{1A}((x_i-0)) = f_{2A}((x_i-0))$ dla $(x_i) \in R_n$, ale z założenia lewostronnej ciągłości funkcji f_1 i f_2 wynika na mocy określenia 3, że

$$f_1((x_i)) = f_{1A}((x_i-0)), \quad f_2((x_i)) = f_{2A}((x_i-0)) \quad \text{dla } (x_i) \in R_n,$$

co kończy dowód. Analogiczny dowód dla prawostronnie ciągłych funkcji pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 2 można sformułować w następujący sposób:

Niemalejąca i lewostronnie (prawostronnie) ciągła funkcja jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości, jakie przybiera w dowolnym zbiorze gęstym.

§ 3. Nieciągłości funkcji niemalejących

W tym paragrafie będziemy rozpatrywali funkcje niemalejące określone w całej przestrzeni R_n (nie uwidaczniając tego ostatniego założenia w każdym twierdzeniu). W szczególności zbadamy zbiór

punktów, w których taka funkcja nie jest ciągła. Wynikiem tych badań będzie twierdzenie 4, według którego zbiór ten jest pierwszej kategorii (patrz wstęp, str. 14), a więc mały. Twierdzenie to również możemy sformułować w następujący sposób:

Funkcja niemalejąca jest prawie wszędzie (w sensie kategorii) ciągła.

Określenie 4. Jeżeli f jest funkcją niemalejącą, to skokiem funkcji f w punkcie $(t_i) \in R_n$ nazywamy liczbę

$$(3.1) \quad s_f((t_i)) = f((t_i+0)) - f((t_i-0)).$$

Ze względu na twierdzenie (3.6) skok funkcji niemalejącej jest zawsze liczbą nieujemną.

Twierdzenie 3. Na to, by funkcja niemalejąca f była ciągła w punkcie $(t_i) \in R_n$, potrzeba i wystarcza, aby skok jej był w tym punkcie zerem.

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie (t_i) . Można wówczas dla dowolnego $\eta > 0$ dobrać takie $\delta > 0$, że będą zachodziły nierówności

$$(3.2) \quad f((t_i)) - \frac{\eta}{2} < f((t_i-\delta)) \leq f((t_i+\delta)) < f((t_i)) + \frac{\eta}{2},$$

z tych zaś nierówności i nierówności (2.6) wynika, że

$$(3.3) \quad f((t_i)) + \frac{\eta}{2} < f((t_i-0)) \leq f((t_i+0)) < f((t_i)) + \frac{\eta}{2},$$

a więc

$$(3.4) \quad s_f((t_i)) < \eta.$$

Ponieważ zaś η jest dowolną liczbą dodatnią, więc $s_f((t_i)) = 0$, co dowodzi konieczności tego warunku dla ciągłości funkcji f .

Przypuśćmy teraz, że $s_f((t_i)) = 0$. Z twierdzenia (2.6) wynika, że

$$(3.5) \quad f((t_i)) = f((t_i-0)) = f((t_i+0)).$$

Na mocy określenia 2, dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że

$$(3.6) \quad f((t_i+\delta)) + \frac{\eta}{2} > f((t_i-0)), \quad f((t_i+\delta)) - \frac{\eta}{2} < f((t_i+0)).$$

Ze względu na (3.5) oraz na to, że f jest funkcją niemalejącą, zachodzą dla każdego $(t'_i) \in R_n$ takiego, że $(t_i - \delta) \leq (t'_i) \leq (t_i + \delta)$, nierówności

$$(3.7) \quad f((t'_i)) - \frac{\eta}{2} \leq f((t_i)) \leq f((t'_i)) + \frac{\eta}{2}$$

i wreszcie

$$(3.8) \quad |f((t_i)) - f((t'_i))| < \eta,$$

co dowodzi ciągłości funkcji f w punkcie (t_i) , w którym skok tej funkcji zniknął. Warunek $S_f((t_i)) = 0$ jest więc również warunkiem dostatecznym ciągłości funkcji f w punkcie (t_i) , co należało okazać.

Udowodnimy teraz kilka lematów potrzebnych w dowodzie twierdzenia zapowiedzianego na początku niniejszego paragrafu.

(3.9) Dla dowolnej niemalejącej funkcji f jednej zmiennej i dowolnych liczb $t \leq t'$ mamy

$$\sum_{t < x < t'} s_f(x) \leq f(t') - f(t).$$

Innymi słowy, przyrost funkcji niemalejącej w pewnym przedziale jest nie mniejszy od sumy skoków tej funkcji w tym przedziale.

Dowód (3.9) pozostawiamy czytelnikowi.

(3.10) Dla dowolnych liczb t_1, t_2, β takich, że $-\infty < t_1 \leq t_2 < +\infty$ i $\beta > 0$, zbiór tych punktów x , dla których $t_1 < x < t_2$ i $s_f(x) > \beta$, jest skończony.

Wynika to natychmiast z (3.9).

(3.11) Zbiór punktów nieciągłości funkcji niemalejącej jednej zmiennej jest co najwyżej przeliczalny.

Wynika to z (3.10) i twierdzenia 3.

(3.12) Jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami dodatnimi, $(t_i) = (a_i \tau_0 + b_i)$ jest punktem przestrzeni R_n leżącym na prostej $x_i = a_i \tau + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (b_i dowolne), f zaś funkcją niemalejącą, określoną w przestrzeni R_n , to funkcja f jest nieciągła w punkcie (t_i) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja jednej zmiennej $g(\tau) = f((a_i \tau + b_i))$ jest nieciągła w punkcie τ_0 .

Dowód. Ponieważ $a_i > 0$, więc funkcje liniowe $a_i \tau + b_i$ są rosnące, wobec czego $g(\tau)$ jest funkcją niemalejącą. Mamy więc

$$(3.13) \quad g(\tau_0 - 0) = \sup_{\tau < \tau_0} f((a_i \tau + b_i)) \leq \sup_{(x_i) < (t_i)} f((x_i)) = f((t_i - 0)).$$

Założmy, że $(t'_i) < (t_i)$. Z ciągłości funkcji liniowych wynika istnienie takiego τ' , że

$$(t'_i) < (a_i \tau' + b_i) < (a_i \tau_0 + b_i) = (t_i),$$

zatem

$$f((b'_i)) \leq f((a_i \tau' + b_i)) = g(\tau').$$

A więc $\sup_{(x_i) < (t_i)} f((x_i)) = f((t_i - 0)) \leq g(\tau_0 - 0)$. Stąd i z (3.13) wynika, że

$$(3.14) \quad g(\tau_0 - 0) = f((t_i - 0)).$$

Podobnie dowodzimy, że $g(\tau_0 + 0) = f((t_i + 0))$, a więc

$$(3.15) \quad s_f(\tau_0) = s_f((t_i)) = s_f((a_i \tau_0 + b_i)),$$

co wobec twierdzenia 3 dowodzi (3.12).

Uwzględniając (3.11) otrzymujemy z (3.12)

(3.16) Jeżeli f jest funkcją niemalejącą, to zbiór tych punktów nieciągłości funkcji f , które leżą na prostej $x_i = a_i \tau + b_i$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, jest co najwyżej przeliczalny.

Udowodnimy jeszcze twierdzenie

(3.17) Jeżeli f jest funkcją niemalejącą, to zbiór tych punktów $(t_i) \in R_n$, w których funkcja f jest ciągła, jest gęsty w przestrzeni R_n .

Niech $(t_i) \in R_n$ i niech prosta $x_i = \tau + t_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, przechodzi przez punkt (t_i) . Zgodnie z (3.16) zbiór punktów nieciągłości funkcji f leżących na prostej $x_i = \tau + t_i$ jest przeliczalny, uzupełnienie jego więc jest gęste na tej prostej; można zatem wybrać taki ciąg punktów $(t_i^{(n)}) = (\tau^{(n)} + t_i)$ leżących na tej prostej, będących punktami ciągłości funkcji f , że $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_i^{(n)}) = (t_i)$. Ponieważ punkt (t_i) jest dowolny, punkty $(t_i^{(n)})$ zaś są punktami ciągłości funkcji f , więc twierdzenie (3.17) jest udowodnione.

Funkcja f , której zbiór punktów ciągłości jest gęsty w przestrzeni R_n , nazywa się punktowo nieciągła. Twierdzenie (3.17) możemy więc zanotować w postaci

(3.17*) Każda funkcja niemalejąca określona w przestrzeni R_n jest co najwyżej punktowo nieciągła.

Możemy już udowodnić zapowiedziane

Twierdzenie 4. Zbiór punktów nieciągłości funkcji niemalejącej w przestrzeni R_n jest zbiorem pierwszej kategorii.

Dowód. Jak wiadomo z ogólnych twierdzeń teorii funkcji (por. wstęp, (4.8), str. 21), zbiór punktów nieciągłości dowolnej funkcji określonej w R_n jest zbiorem F_σ . Ponieważ uzupełnienie zbioru punktów nieciągłości (to znaczy zbiór punktów ciągłości) jest, zgodnie z twierdzeniem (3.17), zbiorem gęstym w przestrzeni R_n , on sam zaś jest zbiorem F_σ , więc jest on zbiorem pierwszej kategorii (por. wstęp, (2.23), str. 14), co należało okazać.

Ważną konsekwencją twierdzenia 4 jest

Twierdzenie 5. *Jeżeli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji niemalejących w przestrzeni R_n , to zbiór punktów, w których wszystkie funkcje rozważanego ciągu są ciągłe, jest gęsty w przestrzeni R_n .*

Dowód. Oznaczmy przez A_n zbiór punktów nieciągłości funkcji f_n , przez C zbiór punktów, w których każda z funkcji f_n jest ciągła. Mamy $C = R_n - \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, zbiór $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ jako sumę ciągu zbiorów pierwszej kategorii jest zbiorem pierwszej kategorii. Wobec tego zbiór C , jako uzupełnienie zbioru pierwszej kategorii, jest zbiorem gęstym w przestrzeni R_n , co należało okazać.

§ 4. Zbieżność ciągłościowa funkcji niemalejących

Określenie 5. Funkcję f niemalejącą i lewostronnie ciągłą, określoną w przestrzeni R_n nazywamy *granica ciągłościową* ciągu $\{f_i\}$ funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych i określonych w przestrzeni R_n , jeżeli w każdym punkcie (t_i) , który jest punktem ciągłości funkcji f , zachodzi związek

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_i) = f(t_i).$$

Będziemy także mówili, że ciąg $\{f_n\}$ jest w tym przypadku *ciągłościowo zbieżny* do f , i pisali

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* f_n = f.$$

Zauważmy przede wszystkim, że wprowadzone pojęcie ma istotnie charakter granicy w zbiorze funkcji niemalejących i lewostronnie ciągłych, a mianowicie

(4.3) *Granica ciągłościowa jest co najwyżej jedna.*

Dowód. Istotnie, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty}^* f_n = f^{(1)}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty}^* f_n = f^{(2)}$, to funkcje $f^{(1)}$ i $f^{(2)}$ przyjmują te same wartości w punktach, w których są równocześnie ciągłe. Zbiór tych punktów, zgodnie z twierdzeniem 5, jest zbiorem gęstym w przestrzeni R_n , a więc na mocy twierdzenia 2 (§ 2) funkcje $f^{(1)}$ i $f^{(2)}$ są identyczne, co należało okazać.

(4.4) *Zbiór funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych, określonych w R_n jest przestrzenią $\mathcal{L}^*$ (Frécheta) ze względu na granicę ciągłościową (por. wstęp, str. 19).*

Dla dowodu należy sprawdzić, że granica ciągłościowa spełnia trzy postulaty przestrzeni $\mathcal{L}^*$ w zbiorze funkcji niemalejących i lewostronnie ciągłych.

Pozostawiamy to czytelnikowi.

Udowodnimy twierdzenie:

(4.5) *Jeżeli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych w przestrzeni R_n , A jest zbiorem gęstym w przestrzeni R_n , g zaś jest funkcją określoną w zbiorze A i dla każdego punktu $(t_i) \in A$ jest*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_i) = g(t_i), \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty}^* f_n = h, \text{ gdzie } h(x_i) = g_A(x_i - 0) \text{ dla } (x_i) \in R_n.$$

Dowód. Ponieważ $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji niemalejących, więc g jest funkcją niemalejącą w zbiorze A . Na podstawie twierdzeń (2.5) i (2.7) funkcja h jest niemalejąca i lewostronnie ciągła w całej przestrzeni R_n . Niech $(t_i) \in R_n$ będzie punktem ciągłości funkcji h , $\eta > 0$ zaś dowolną liczbą dodatnią. Możemy dobrać tak małe $\delta > 0$, że nierówności

$$(t_i - \delta) < (t'_i) < (t_i + \delta)$$

pociągną za sobą nierówność

$$(4.6) \quad |h(t_i) - h(t'_i)| < \frac{\eta}{4}.$$

Korzystając z gęstości zbioru A dobierzmy takie $(t'_i), (t''_i) \in A$, aby $(t_i - \delta) < (t'_i) < (t_i) < (t''_i) < (t_i + \delta)$. Dla tak wybranych punktów będą zachodziły nierówności

$$(4.7) \quad h(t_i) - \frac{\eta}{4} < h(t'_i) \leq g(t'_i) \leq h(t''_i) \leq g(t''_i) < h(t_i) + \frac{\eta}{4}.$$

W punktach (t'_i) i (t''_i) jako w punktach zbioru A ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji g , można więc dobrać takie n_0 , że dla

$n > n_0$ będą zachodziły nierówności

$$(4.8) \quad |f_n(t_i') - g(t_i')| < \frac{\eta}{4} \quad \text{ i } \quad |f_n(t_i'') - g(t_i'')| < \frac{\eta}{4}.$$

Z nierówności (4.7) i (4.8) wynika więc, ponieważ mamy do czynienia z funkcjami niemalejącymi, że dla $n > n_0$ będą zachodziły nierówności

$$(4.9) \quad h(t_i) - \frac{\eta}{2} < f_n(t_i') \leq f_n(t_i) \leq f_n(t_i'') < h(t_i) + \frac{\eta}{2},$$

skąd ostatecznie otrzymujemy, że

$$(4.10) \quad |f_n(t_i) - h(t_i)| < \eta,$$

co dowodzi, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji h w każdym punkcie ciągłości tej ostatniej, co należało okazać.

Zachodzi następujące zasadnicze twierdzenie, udowodnione po raz pierwszy przez Helly'ego¹⁾:

TWIERDZENIE 6. *Z każdego ciągu funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych i wspólnie ograniczonych można wybrać podciąg ciągłościowo zbieżny.*

W terminologii topologii ogólnej można by to twierdzenie sformułować jak następuje: *W przestrzeni funkcji niemalejących i lewostronnie ciągłych każdy zbiór funkcji wspólnie ograniczonych jest zwarty.*

Dowód. Niech A będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym i gęstym w przestrzeni R_n . Ustawmy elementy zbioru A w ciąg

$$(4.11) \quad (t_i^{(1)}), (t_i^{(2)}), \dots, (t_i^{(k)}), (t_i^{(k+1)}), \dots$$

i niech

$$(4.12) \quad f_1, f_2, \dots$$

będzie ciągiem funkcji niemalejących, lewostronnie ciągłych i wspólnie ograniczonych. Określmy indukcyjnie ciąg podciągów ciągu (4.12):

$$(4.13) \quad \{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}, \dots, \{f_n^{(k)}\}, \{f_n^{(k+1)}\}, \dots$$

tak, aby

$$(4.14) \quad \text{ciąg } \{f_n^{(k+1)}\} \text{ był podciągiem ciągu } \{f_n^{(k)}\}$$

oraz

$$(4.15) \quad \text{ciąg liczbowy } f_n^{(k)}(t_i^{(k)}) \text{ był zbieżny przy } n \rightarrow \infty.$$

¹⁾ Eduard Helly, *Über lineare Funktional operationen*, Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse 121 (1912).

Ciąg (4.13) definiujemy indukcyjnie w następujący sposób: Ponieważ funkcje ciągu (4.12) są wspólnie ograniczone, więc ciąg liczbowy

$$(4.16) \quad f_1(t_i^{(1)}), f_2(t_i^{(1)}), \dots$$

jest ograniczony. Na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można z niego wybrać podciąg zbieżny

$$(4.17) \quad f_1^{(1)}(t_i^{(1)}), f_2^{(1)}(t_i^{(1)}), \dots$$

Dokonując tego wyboru wybraliśmy równocześnie pewien podciąg $\{f_n^{(1)}\}$ ciągu funkcji (4.12); niech ten podciąg będzie pierwszym wyrazem ciągu (4.13). Przypuśćmy, że określiliśmy już k -ty wyraz $\{f_n^{(k)}\}$ ciągu (4.13); $(k+1)$ -szy wyraz tego ciągu określamy podobnie jak pierwszy. Ciąg liczbowy wartości ciągu $\{f_n^{(k)}\}$ w punkcie $(t_i^{(k+1)})$ jest ograniczony, wybieramy więc z niego podciąg zbieżny. Ciąg funkcji, których wartości występują w tym wybranym podciągu, oznaczamy przez $\{f_n^{(k+1)}\}$; jest on na mocy określenia $(k+1)$ -szym wyrazem ciągu (4.13). Łatwo sprawdzić, że tak określony ciąg (4.13) ma własności (4.14) i (4.15), z tych zaś własności wynika, że ciąg

$$(4.18) \quad f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, f_3^{(3)}, \dots$$

jest podciągiem ciągu (4.12) i jest zbieżny w każdym punkcie zbioru A . Przyjmijmy dla $(t_i) \in A$

$$(4.19) \quad g((t_i)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(n)}((t_i)).$$

Na podstawie twierdzenia (4.5) ciąg (4.18) jest zbieżny ciągłościowo do funkcji $h((x_i)) = g((x_i - 0))$, co należało okazać.

§ 5. Odwracanie funkcji niemalejących jednej zmiennej

W niniejszym rozdziale rozpatrujemy funkcję $y = f(x)$ jednej zmiennej, niemalejącą i lewostronnie ciągłą w pewnym przedziale otwartym $E[a < x < b]$. W szczególności może być $a = -\infty$, $b = +\infty$, to znaczy rozpatrywany przedział może być całą prostą liczbową.

Przyjmijmy oznaczenia

$$(5.1) \quad \alpha = \inf_{a < x < b} f(x), \quad \beta = \sup_{a < x < b} f(x).$$

Zadaniem naszym jest określenie w przedziale $E[a < y < \beta]$ funkcji odwrotnej do funkcji f . W przypadku gdy f jest w rozpatrywanym przedziale funkcją ciągłą, zadanie niniejsze rozwiązuje się w znany sposób metodami elementarnej analizy. Dla naszych celów rozwiązanie to jest jednak niewystarczające. Założenie ciągłości jest zbyt krepujące i musimy je odrzucić.

OKREŚLENIE 6. Jeżeli f jest funkcją jednej zmiennej, niemalejącą i lewostronnie ciągłą, określoną w przedziale $E[a < x < b]$, to funkcję odwrotną do f nazywamy funkcję f^{-1} określoną w przedziale $E[a < y < \beta]$ przez identyczność

$$(5.2) \quad f^{-1}(y) = \sup_{f(x) < y} x.$$

Udowodnimy kilka własności funkcji f^{-1} , które usprawiedliwiają nazwę nadaną tej funkcji w powyższym określeniu. Przede wszystkim wprost z (5.2) wynika, że

(5.3) f^{-1} jest funkcją niemalejącą w przedziale, w którym jest określona, oraz

$$(5.4) \quad a < f^{-1}(y_0) < b \quad \text{dla} \quad y_0 \in E[a < y < \beta].$$

Dalej mamy

(5.5) f^{-1} jest funkcją lewostronnie ciągłą w rozważanym przedziale.

Niech bowiem y_0 będzie punktem rozważanego przedziału; wówczas mamy

$$f^{-1}(y_0 - 0) = \sup_{y < y_0} f^{-1}(y) = \sup_{y < y_0} \sup_{f(x) < y} x = \sup_{f(x) < y_0} x = f^{-1}(y_0),$$

co w myśl określenia 3 dowodzi, że funkcja f^{-1} jest lewostronnie ciągła.

Udowodnimy nierówności

$$(5.6) \quad f(f^{-1}(y_0)) \leq y_0 \leq f(f^{-1}(y_0) + 0).$$

Pierwsza nierówność wynika wprost z definicji, mamy bowiem $f(f^{-1}(y_0)) = f(\sup_{f(x) < y_0} x) \leq y_0$. Dla dowodu drugiej nierówności zauważmy, że $f(f^{-1}(y_0) + 0) = \inf_{x > f^{-1}(y_0)} f(x) = \inf_{\substack{x > \sup_{f(x) < y_0} x \\ f(x) < y_0}} f(x)$. Dla każdego więc $f(x)$ na-

leżącego do zbioru, z którego bierzemy kres dolny, aby uzyskać $(f^{-1}(y_0) + 0)$, mamy $f(x) \geq y_0$, z czego wynika druga nierówność (5.6).

Udowodnimy jeszcze, że

$$(5.7) \quad \sup_{f(x) < y_0} x = \inf_{f(x) \geq y_0} x \quad \text{dla} \quad y_0 \in E[a < y < \beta].$$

Ponieważ funkcja $f(x)$ jest niemalejąca, więc zbiory $E[f(x) < y_0]$ i $E[f(x) \geq y_0]$ wyznaczają przekrój (w sensie Dedekinda) osi liczbowej x . Niech x_0 będzie liczbą wyznaczoną przez ten przekrój. Mamy $\sup_{f(x) < y_0} x = x_0$ i $\inf_{f(x) \geq y_0} x = x_0$, co należało okazać.

(5.8) Jeżeli g jest funkcją określoną w przedziale $E[a < y < \beta]$, niemalejącą i lewostronnie ciągłą, przy czym dla każdego y_0 z rozważanego przedziału

$$f(g(y_0)) \leq y_0 \leq f(g(y_0) + 0),$$

to funkcja f jest identyczna w całym tym przedziale z funkcją f^{-1} .

Dowód. Ponieważ f jest funkcją niemalejącą w całym przedziale $E[a < x_0 < b]$, więc $f^{-1}(y_0) = \sup_{f(x) < y_0} x$ jest taką liczbą, że dla każdego $x_1 < f^{-1}(y_0)$ jest $f(x_1) < y_0$, a więc $f(x_1 + 0) = \inf_{x > x_1} f(x) = \inf_{f^{-1}(y_0) > x > x_1} f(x) < y_0$. Ponieważ zaś $f(g(y_0) + 0) \geq y_0$, więc $g(y_0) \geq f^{-1}(y_0)$. Z drugiej strony, gdyby w pewnym punkcie y_1 rozważanego przedziału było $g(y_1) > f^{-1}(y_1)$, to ponieważ funkcja f jest lewostronnie ciągła i niemalejąca, więc istniałby taki punkt $y_0 < y_1$, że $f^{-1}(y_1) < g(y_0) \leq g(y_1)$, ale $f^{-1}(y_1) = \sup_{f(x) < y_1} x$, więc dla $x_1 > f^{-1}(y_1)$ mamy $f(x_1) \geq y_1$, a więc $f(g(y_0)) \geq y_1 > y_0$, wbrew pierwszej założonej nierówności. Mamy więc $g(y_0) = f^{-1}(y_0)$ w całym przedziale $E[a < y < \beta]$, co należało okazać.

Zbierzmy uzyskane wyniki w następujące

TWIERDZENIE 7. Jeżeli f jest funkcją niemalejącą i lewostronnie ciągłą w przedziale $E[a < x < b]$, to istnieje jedna i tylko jedna funkcja f^{-1} niemalejąca, lewostronnie ciągła, spełniająca nierówności (5.5) i określona w przedziale $E[a < y < \beta]$, gdzie $\alpha = \inf_{a < x < b} f(x)$, $\beta = \sup_{a < x < b} f(x)$; funkcją tą jest funkcja odwrotna $f^{-1}(y) = \sup_{f(x) < y} x = \inf_{f(x) \geq y} x$.

Twierdzenie 8. *Jeżeli f^{-1} jest funkcją odwrotną do f , to f jest funkcją odwrotną do f^{-1} .*

Dowód. Weźmy pod uwagę dowolny punkt x_0 z przedziału, w którym funkcja f jest określona, i dwa takie punkty y_1, y_2 z przedziału, w którym funkcja f^{-1} jest określona, że $y_1 < f(x_0) < y_2$; wówczas $\sup_{f(x) < y_1} x < x_0 \leq \inf_{f(x) \geq y_2} x$, czyli na mocy twierdzeń (5.2) i (5.7) $f^{-1}(y_1) < x_0 \leq f^{-1}(y_2)$, a stąd wobec lewostronnej ciągłości funkcji f^{-1} otrzymujemy

$$f^{-1}((x_0)) \leq x_0 \leq f^{-1}((x_0) + 0),$$

co w myśl twierdzenia 7. wykazuje, że f jest odwróceniem f^{-1} .

§ 6. Przykłady i zadania

(6.1) Udowodnić, że dla funkcji f określonej w całej przestrzeni R_n zachodzą wzory

$$f((t_i - 0)) = \lim_{(x_i) < (t_i)} f((x_i)), \quad f((t_i + 0)) = \lim_{(x_i) > (t_i)} f((x_i)).$$

(6.2) Udowodnić, że jeżeli $x_i = \varphi_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, są funkcjami ciągłymi i rosnącymi ze względu na τ , f funkcją niemalejącą, określoną w przestrzeni R_n , to $g(\tau) = s_f((\varphi_i(\tau)))$ jest funkcją niemalejącą ze względu na τ i $s_g(\tau) = s_f((\varphi_i(\tau)))$.

(6.3) Udowodnić za pomocą (6.2), że jeżeli f jest funkcją niemalejącą określoną w przestrzeni R_n , to zbiór tych przedziałów (t_i) , dla których $s_f((t_i)) \geq \beta > 0$, jest nigdzie gęsty. Wyprowadzić stąd twierdzenie 4.

(6.4) Wykazać, że do dowodu twierdzenia 6 wystarczy słabsze założenia niż wspólna ograniczoność funkcji rozważanego ciągu, wystarczy np. założyć, że funkcje te są ograniczone w każdym przedziale skończonym.

(6.5) Mówimy, że funkcja jednej zmiennej g jest *schodkowa*, jeżeli istnieje taki ciąg $\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, że funkcja g w każdym przedziale $E[t_i < x < t_{i+1}]$ jest stała. Udowodnić, że dla każdej fun-

kcji niemalejącej i lewostronnie ciągłej istnieje ciąg funkcji schodkowych niemalejących i lewostronnie ciągłych, których dana funkcja jest granicą ciągłościową.

(6.6) Oznaczmy przez W_{y_0} zbiór $E[f(x) = y_0]$. Udowodnić, że jeżeli f jest funkcją niemalejącą, lewostronnie ciągłą, $y_0 \in E[\alpha < y < \beta]$ (por. (5.1)), to w przypadku gdy $W_{y_0} = 0$, funkcja f ma w punkcie $f^{-1}(y_0)$ skok dodatni, a w przypadku gdy W_{y_0} jest zbiorem jednopunktowym i $W_{y_0} = (x_0)$, mamy $f^{-1}(y_0) = x_0$, wreszcie gdy W_{y_0} jest zbiorem wielopunktowym, to W_{y_0} jest odcinkiem i f^{-1} ma w punkcie y_0 skok dodatni.