

(9.4) W ciele ilorazowym U/I ciała losowego U , rel I określamy funkcję $P([u])$ wzorem $P([u]) = p(u)$ (możliwość przyjęcia takiej definicji wynika z twierdzenia 1).

Udowodnić, że $P([u])$ jest funkcją przeliczalnie addytywną w ciele U/I .

(9.5) Udowodnić, że jeżeli U , rel I jest ciałem losowym, prawdopodobieństwo p jest ściśle rosnące w U , rel I , a $P(X)$ jest funkcją w U/I zdefiniowaną w zadaniu (9.4), to U/I jest przestrzenią metryczną względem metryki zdefiniowanej dla $[u], [v] \in U/I$ przez wzór

$$\rho([u], [v]) = P([u] \div [v]).$$

(9.6) Udowodnić, że jeżeli zdarzenia $u_1, u_2, \dots, u_n$ są losowo niezależne w ciele U , rel I , to zbiór $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ jest zbiorem swobodnym.

W szczególności, w takim przypadku elementy zbioru $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ są niezależne w sensie działań algebry Boole'a w ciele U , rel I (por. (9.2), rozdział II, str. 89).

(9.7) Udowodnić, że jeżeli A_1 i A_2 są dwoma podzbiorami skończonymi ciała losowego U , rel I , przy czym elementy zbiorów A_i ($i=1,2$) wykluczają się parami, każda zaś para elementów u_1, u_2 , gdzie $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, jest losowo niezależna, to elementy $\sum_{u \in A_1} u$ i $\sum_{u \in A_2} u$ są również losowo niezależne.

(9.8) Niech $V(A)$, rel $I(A)$ będzie losowym, kanonicznym ciałem zbioru A , składającego się z m elementów, $z = z(u)$, a $u \in A$ nieujemną zmienną losową ciała $V(A)$, rel $I(A)$, którą będziemy nazywali *zmienną losową zapłaty*; *stawką* będziemy nazywali każdą nieujemną zmienną losową $s = s(u)$ ciała $V(A)$, rel $I(A)$, a *szansą gracza przy stawce s* będziemy nazywali zmienną losową $x_s = x_s(u) = z(u)s(u)$. Zmienną zapłaty będziemy nazywali *sprawiedliwą*, jeżeli nadzieja matematyczna szansy gracza przy każdej stawce jest równa $\sum_{u \in A} s(u)$.

Udowodnić, że zapłata jest sprawiedliwa tylko wtedy, gdy $z(u) = \frac{1}{p(u)}$ dla każdego $u \in A$.

Wyprowadzić stąd wniosek, że jedyną sprawiedliwą zapłatą przy grze „rzetelnej” (to znaczy o prawdopodobieństwie klasycznym) sześcienną kostką do gry jest zapłata sześciokrotnej stawki przy wyrzuceniu obstawionego numeru.

Rozdział IV

Schemat Bernoulliego

§ 1. Treść rozdziału

Przedmiotem niniejszego rozdziału są pewne specjalne zespoły regularne będące ciałami losowymi, a mianowicie tak zwane zespoły prób niezależnych nad pewnym zjawiskiem C lub pewnymi zjawiskami $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$.

Nie zakładamy tu, że prawdopodobieństwo jest dane klasyczną definicją, zakładamy natomiast stałość występujących tu prawdopodobieństw, od próby do próby, i wzajemną niezależność prób, co prowadzi do tak zwanego *schematu Bernoulliego*.

Rozpoczynamy od określenia *zjawiska*, *próby* i *zespołu prób* (§ 2), po czym w paragrafie 3 określamy *niezależność prób* i schemat Bernoulliego, a dalej omawiamy *częstość* zjawiska i podajemy zasadniczy wzór na prawdopodobieństwo, że dane zjawisko w n pierwszych próbach pojawi się dokładnie k razy. W paragrafie 4 obliczamy nadzieję matematyczną częstości, paragraf 5 zaś zawiera wzór asymptotyczny na P_{nk} oraz ustalenie wartości k , dla której prawdopodobieństwo to ma maksimum.

W paragrafie 6 podajemy najprostsze prawo wielkich liczb Jakuba Bernoulliego.

W paragrafie 7 wyprowadzimy wzór graniczny de Moivre'a-Laplace'a, przy czym natrafimy na zasadniczą w teorii prawdopodobieństwa całkę

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

W paragrafie 8 podajemy wzór graniczny Poissona na prawdopodobieństwo P_{nk} dla zdarzeń rzadkich. Paragraf 9 zawiera pewne wiadomości z kombinatoryki, potrzebne do paragrafów 10-13,

w których uogólniamy uzyskane wyniki na wielokrotny schemat Bernoulliego. Paragraf 14 zawiera twierdzenie o bardziej specjalnym charakterze.

§ 2. Pojęcia zjawiska i zespołu prób losowych

Niech A będzie zbiorem zdarzeń, $B = (C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$ skończoną klasą zbiorów zdarzeń określającą dysjunkcję zbioru A . Nadając naszej terminologii charakter bardziej niż dotychczas probabilistyczny będziemy nazywali rozważane zbiory $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ *zjawiskami*, ciało zaś scalone $V(A; B)$, $\text{rel} I(A)$ *próbą nad zjawiskami* $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$. Ponieważ w naszych obecnych rozważaniach zbiory-zjawiska należące do klasy B będą odgrywały szczególną rolę, więc ciało scalone $V(A, B)$, $\text{rel} I(A)$ będziemy oznaczali przez $V(A; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, opuszczając dla krótkości po tym oznaczeniu $\text{rel} I(A)$.

Element $C^{(i)} = \sum_{u \in AC^{(i)}} u$ nazwiemy *pojawieniem się zjawiska* $C^{(i)}$ w próbie $V(A; C^{(1)}, \dots, C^{(m)})$.

Jak wiemy (por. rozdział II, (8.6), str. 87), elementy $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)}$ tworzą zbiór atomów reprezentacyjnych próby (ciała) $V(A; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, będziemy więc mówili, że zjawiska $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ są *jedynie możliwe i wyłączające się* w tej próbie.

Próbkę nazywamy *losową*, jeżeli ciało $V(A; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$ jest losowe (por. rozdział III, § 2, str. 116).

Niech $V(A_i, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, $i=1, 2, \dots, N$, będą próbami nad tymi samymi zjawiskami $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ i założmy, że produkt $\prod_{i=1}^N A_i$ jest swobodny. Zespół regularny ciał scalonych $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$ (por. rozdział II, § 12, określenie 12, str. 96) nazywamy *zespołem N prób nad zjawiskami* $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ i oznaczamy dla krótkości przez $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$. Jeżeli zespół ten jest ciałem losowym, nazywamy go *zespołem prób losowych*.

Oznaczając przez $C_i(j)$ pojawienie się zjawiska $C^{(j)}$ w i -tej próbie zespołu, przez B_i zaś zbiór złożony z elementów $c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, \dots, c_i^{(m)}$, widzimy, że zbiór $\prod_{i=1}^N B_i$ jest reprezentacyjnym układem atomów zespołu $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})_N$ (por. rozdział II, (12.1), str. 96).

Na mocy twierdzenia 13 (rozdział II, § 12, str. 97) oraz aksjomatu (A6) (rozdział III, § 2, str. 116) otrzymujemy twierdzenia:

(2.1) Każda próba $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$ zespołu prób losowych $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ jest próbą losową; prawdopodobieństwo zdarzenia należącego do którejś z prób jest takie samo w tej próbie jak w całym zespole.

(2.2) Jeżeli $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ jest zespołem prób losowych, to dla $n \leq N$ również $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_n$ jest zespołem prób losowych; prawdopodobieństwo zdarzeń należących do obu tych zespołów nie zależy od wyboru zespołu, w którym jest rozpatrywane.

Rozpatrzmy osobno przypadek prób nad dwoma zjawiskami, a więc ten, w którym $m=2$. Ponieważ tym przypadkiem zajmujemy się obszerniej, uproszę oznaczenia i terminologię pisząc $C, \bar{C}, c_i$ i c'_i zamiast odpowiednio $C^{(1)}, C^{(2)}, c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$, a dalej piszemy $V(A; C)$ zamiast $V(A_i, C, \bar{C})$ oraz $[V(A_i, C)]_N$ zamiast $[V(A_i, C, \bar{C})]_N$; poza tym będziemy mówili: próba nad zjawiskiem C i zespół prób nad zjawiskiem C , zamiast odpowiednich zwrotów dotyczących dwóch zjawisk C i $\bar{C}$. Zauważmy, że oznaczenie pojawienia się zjawiska $\bar{C}$ w i -tej próbie przez c'_i , a więc tak jak negacji pojawienia się zjawiska C , nie jest przypadkowe, oba te zdarzenia są bowiem zarówno w zespole, jak też w poszczególniej próbie równoważne, rel odpowiedni ideał. Z tego też powodu w omawianym przypadku zjawiska C i $\bar{C}$ są niejako dopełniające względem siebie i można, zaniechawszy drugiego z nich, mówić tylko o pierwszym. Zauważmy, że atomami reprezentacyjnymi i -tej próby zespołu $[V(A_i, C)]_N$ są zdarzenia c_i i c'_i , atomami zaś reprezentacyjnymi całego tego zespołu są zdarzenia kształtu $\prod_{i=1}^{\infty} u_i$, gdzie $u_i = c_i$ lub $u'_i = c'_i$. Atomów takich jest dokładnie 2^N .

Powracając do przypadku zespołu prób nad m zjawiskami $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ oznaczamy przez $l_1, l_2, \dots, l_s$ niektóre z liczb naturalnych $\leq m$, przez $k_1, k_2, \dots, k_{m-s}$ zaś pozostałe liczby $\leq m$, i przyjmijmy $C^* = \sum_{i=1}^{m-s} C^{(k_i)}$. W zespole $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}, C^*)]_N$ pojawieniu się w i -tej próbie zjawiska C^* odpowiada zdarzenie c'_i równoważne (rel odpowiedni ideał) zdarzeniu $\sum_{j=1}^{m-s} c_i^{(k_j)}$. Łatwo sprawdzić, że zespół $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ zawiera jako podciało

zespół $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, C^*)]_N$, w szczególności dla $s=1$ przyjmując $k_1=k$ i $C^*=C$ otrzymujemy twierdzenie

(2.3) *Zespół prób $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ zawiera jako podciacho zespół prób $[V(A_i; C^{(k)})]_N$ nad zjawiskiem $C^{(k)}$.*

Na zakończenie niniejszego paragrafu zastanówmy się krótko nad celowością wprowadzenia tu pojęcia zjawiska. Pojęcie to daje nam możliwość mówienia o czymś znacznie bogatszym w treść od zdarzenia, które może tylko zajść lub nie, o czymś, co może w pewnych przypadkach (próbach) zachodzić, w innych nie. Formalnie, jak widzieliśmy, temu pojęciu odpowiada zbiór zdarzeń, zwykle jednak nie jest to byle jaki zbiór, lecz składa się z przedmiotów wyróżnionych posiadaniem jakiejś wspólnej cechy. W zastosowaniach uważamy zwykle, że tę właśnie cechę badamy w kolejnych próbach.

Podamy przykład:

Niech $u_{n\xi}$, gdzie n jest liczbą naturalną, ξ zaś liczbą rzeczywistą dodatnią, oznacza zdarzenie polegające na pojawieniu się ξ mm opadów w ciągu roku, oznaczonego numerem n , w pewnej ustalonej miejscowości. Oznaczając przez A_n zbiór wszystkich zdarzeń $u_{n\xi}$ możemy założyć (ze względów wyluszczonych w rozdziale II, § 9, str. 88), że produkt $\prod_{i=1}^N A_i$ jest swobodny. Oznaczamy przez $C^{(j)}$ zjawisko polegające na pojawieniu się ilości opadów większej niż $10(j-1)$ mm, a nie mniejszej niż $10j$ mm opadów, gdzie $j=1, 2, \dots, m$. Formalnie, zjawisko $C^{(j)}$ będzie zbiorem tych wszystkich zdarzeń $u_{n\xi}$, dla których $10(j-1) < \xi \leq 10j$. Możemy teraz utworzyć zespół prób $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$, który jest dogodną podstawą do opisu (z interesującą nas tu dokładnością) przebiegu pogody w danej miejscowości w ciągu N branych pod uwagę lat. Oznaczając przez $\bar{C}$ zbiór $C^{(1)} + \dots + C^{(k-1)} + C^{(k+1)} + \dots + C^{(m)}$ widzimy, że zjawisko to polega na pojawianiu się ilości opadów wyrażającej się liczbą położoną poza przedziałem $E[10(k-1) < x \leq 10k]$, jest więc, w intuicyjnym sensie, rzeczywiście dopełniające względem zjawiska $\bar{C}$. Zespół $[V(A_i; C^{(k)})]_N$ jest podzespołem poprzedniego zespołu, co znowu z punktu widzenia intuicyjnego tłumaczy się tym, że zmniejszenie stopnia dokładności badań polega na odrzuceniu pewnych zjawisk, nie zaś na zmianie ich wzajemnych stosunków. Rozróżnienie zjawisk od zdarzeń nie było w klasycznej teorii prawdopodobieństwa

ściśle przestrzegane. Konieczność wprowadzenia wyraźnego rozróżnienia została podkreślona dopiero w matematyce współczesnej, zwłaszcza przez matematyka włoskiego Bruno de Finetti.

§ 3. Niezależność prób. Schematy Bernoulliego

OKREŚLENIE 1. Zespół losowy $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ nazywamy *zespołem prób niezależnych*, jeżeli każdy układ zdarzeń możliwych (to znaczy nie równoważnych 0) $u_1, u_2, \dots, u_N$ takich, że $u_i \in V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, $i=1, 2, \dots, N$, jest losowo niezależny.

TWIERDZENIE 1. *Na to, aby zespół $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ był zespołem prób niezależnych, potrzeba i wystarcza, aby przy każdym wyborze wskaźników $j_1, j_2, \dots, j_N$, $j_i \leq m$, zdarzenia $c_1^{(j_1)}, c_2^{(j_2)}, \dots, c_N^{(j_N)}$ były losowo niezależne.*

Dowód. Ponieważ $c_i^{(j_i)} \in V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, więc dla dowodu wystarczy wykazać, że z niezależności każdego układu zdarzeń $c_1^{(j_1)}, c_2^{(j_2)}, \dots, c_N^{(j_N)}$ wynika niezależność dowolnego układu zjawisk $u_1, u_2, \dots, u_N$, gdzie u_i jest nierównoważnym 0 elementem ciała $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$. Każdy element u_i daje się przedstawić, z dokładnością do równoważności rel $J(A_i)$ jako suma atomów i -tej próby zespołu, którymi są elementy $c_i^{(j_i)}$. Możemy więc przyjąć $u_i = \sum_{k_i=1}^{s_i} c_i^{(j_{k_i})}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
 (42.1) \quad p(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_N) &= p\left(\sum_{k_1=1}^{s_1} c_1^{(j_{k_1})} \cdot \sum_{k_2=1}^{s_2} c_2^{(j_{k_2})} \cdot \dots \cdot \sum_{k_N=1}^{s_N} c_N^{(j_{k_N})}\right) = \\
 &= p\left(\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} (c_1^{(j_{k_1})} \cdot c_2^{(j_{k_2})} \cdot \dots \cdot c_N^{(j_{k_N})})\right) = \\
 &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} p(c_1^{(j_{k_1})} \cdot c_2^{(j_{k_2})} \cdot \dots \cdot c_N^{(j_{k_N})}) = \\
 &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} (p(c_1^{(j_{k_1})}) \cdot p(c_2^{(j_{k_2})}) \cdot \dots \cdot p(c_N^{(j_{k_N})})) = \\
 &= \sum_{k_1=1}^{s_1} p(c_1^{(j_{k_1})}) \cdot \sum_{k_2=1}^{s_2} p(c_2^{(j_{k_2})}) \cdot \dots \cdot \sum_{k_N=1}^{s_N} p(c_N^{(j_{k_N})}) = \\
 &= p\left(\sum_{k_1=1}^{s_1} c_1^{(j_{k_1})}\right) \cdot p\left(\sum_{k_2=1}^{s_2} c_2^{(j_{k_2})}\right) \cdot \dots \cdot p\left(\sum_{k_N=1}^{s_N} c_N^{(j_{k_N})}\right) = \\
 &= p(u_1) \cdot p(u_2) \cdot \dots \cdot p(u_N).
 \end{aligned}$$

We wzorze tym znak $\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)}$ oznacza sumowanie po wszystkich układach wskaźników $(k_1, k_2, \dots, k_N)$, gdzie $k_i \leq S_i$.

W ten sposób udowodniliśmy związek

$$p(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_N) = p(u_1) \cdot p(u_2) \cdot \dots \cdot p(u_N)$$

dla dowolnych u_i należących do i -tej próby zespołu.

Wymagane dla niezależności zdarzeń $u_1, u_2, \dots, u_N$ związki pochodne (por. rozdział III, określenie 8, str. 127) wynikają z tego związku oraz z tego, że wraz z u_i również u'_i należy do i -tej próby zespołu.

OKREŚLENIE 2. Jeżeli w zespole prób niezależnych

$$[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$$

prawdopodobieństwo pojawienia się zjawiska $C^{(j)}$ jest jednakowe w każdej próbie, innymi słowy, jeżeli $p(c_i^{(j)})$ zależy tylko od j , a nie od i , to zespół taki nazywamy *schematem Bernoulliego*. Zespół N prób niezależnych (schemat Bernoulliego) nazywa się *prostym*, jeśli $m=2$, *wielokrotnym*, jeśli $m>2$. Dla wielokrotnego zespołu prób niezależnych oznaczamy

$$(3.2) \quad p(c_i^{(j)}) = p_{ij},$$

dla prostego zaś

$$(3.3) \quad p(c_i) = p, \quad p(c'_i) = 1 - p = q_i.$$

Dla schematów Bernoulliego możemy te wzory uprościć przyjmując dla wielokrotnego schematu Bernoulliego

$$(3.4) \quad p(c_i^{(j)}) = p_j$$

oraz

$$(3.5) \quad p(c_i) = p, \quad p(c'_i) = 1 - p = q$$

dla prostego schematu Bernoulliego.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ jest zespołem prób niezależnych (schematem Bernoulliego), to dla $n \leq N$ również $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_n$ jest zespołem prób niezależnych (schematem Bernoulliego).

Dowód wynika natychmiast z (2.2), twierdzenia 15 z rozdziału III (§ 5, str. 127) oraz określeń 1 i 2.

Obecnie zajmujemy się dokładniej prostymi zespołami prób niezależnych, a w szczególności prostymi schematami Bernoulliego. Wszystkie podane poniżej twierdzenia i określenia będą dotyczyły zespołu $V = [V(A_i; C)]_N$ prób niezależnych nad zjawiskiem C oraz zespołów $V_n = [V(A_i; C)]_n$, gdzie $n \leq N$.

TWIERDZENIE 3. Niech $i_1, i_2, \dots, i_k$ oznacza pewną kombinację liczb naturalnych takich, że $i_l \leq n \leq N$ ($l=1, 2, \dots, k$), a $j_1, j_2, \dots, j_{n-k}$ niech oznacza kombinację dopełniającą. Prawdopodobieństwo pojawienia się zjawiska C w tych i tylko w tych próbach spośród n pierwszych prób, które są oznaczone wskaźnikami $i_1, i_2, \dots, i_k$, wynosi

$$(3.6) \quad p\left(\prod_{l=1}^k c_{i_l} \cdot \prod_{l=1}^{n-k} c'_{j_l}\right) = \prod_{l=1}^k p_{i_l} \cdot \prod_{l=1}^{n-k} q_{j_l},$$

a w przypadku schematu Bernoulliego:

$$(3.7) \quad p\left(\prod_{l=1}^k c_i \cdot \prod_{l=1}^{n-k} c'_{j_l}\right) = p^k q^{n-k}.$$

Dowód. Wzór (3.6) jest bezpośrednią konsekwencją niezależności zdarzeń $c_1, c_2, \dots, c_n$; wzór (3.7) jest szczególnym przypadkiem poprzedniego.

OKREŚLENIE 3. Częstością zjawiska C w i -tej próbie zespołu V nazywamy zmienną losową x_i ciała $V(A_i; C)$, określoną wzorami

$$(3.8) \quad x_i(c_i) = 1, \quad x_i(c'_i) = 0.$$

Tym samym symbolem oznaczamy przeniesienie zmiennej x_i z ciała $V(A_i; C)$ do ciała V_n , gdzie $i \leq n \leq N$. Jeżeli v jest atomem ciała V_n , to możemy założyć, że $v = \prod_{j=1}^n u_j$, gdzie $u_j = c_j$ lub $u_j = c'_j$, i otrzymujemy dla $n \geq i$:

$$(3.9) \quad x_i(v) = 1, \text{ jeśli } u_i = c_i; \quad x_i(v) = 0, \text{ jeśli } u_i = c'_i \text{ (por. rozdział III, określenie 12, § 6, str. 130).}$$

OKREŚLENIE 4. Częstością zjawiska C w n początkowych próbach zespołu V nazywamy zmienną losową y_n ciała V_n , $n \leq N$, określoną wzorem

$$(3.10) \quad y_n(v) = \sum_{i=1}^n x_i(v).$$

Dla atomu $v = \prod_{i=1}^k c_{i_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-k} c'_{j_i}$ ciała V_n mamy więc

$$(3.11) \quad y_n(v) = y_n \left(\prod_{i=1}^k c_{i_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-k} c'_{j_i} \right) = k.$$

Zgodnie z przyjętą umową przeniesienie zmiennej y_n z ciała V_n na ciało V oznaczamy tym samym symbolem.

OKREŚLENIE 5. Zmienną y_n/n nazywamy częstością względną zjawiska C w n pierwszych próbach zespołu V .

TWIERDZENIE 4. Prawdopodobieństwo $P_{nk} = P(y_n = k)$, czyli prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na pojawieniu się zjawiska C w n pierwszych próbach zespołu V dokładnie k razy, wynosi

$$(3.12) \quad P_{nk} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in C_n^{(k)}} \left(\prod_{i=1}^k p_{i_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-k} q_{j_i} \right),$$

gdzie $C_n^{(k)}$ (por. rozdział III, § 3, str. 119) jest klasą kombinacji z $1, 2, \dots, n$ po k .

Dowód. Na mocy wzoru (3.11) zdarzenie $z(y_n = k)$ jest w ciele V_n równoważne sumie wszystkich atomów kształtu $\prod_{i=1}^k c_{i_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-k} c'_{j_i}$, a więc

$$z(y_n = k) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in C_n^{(k)}} \left(\prod_{i=1}^k c_{i_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-k} c'_{j_i} \right),$$

skąd ze względu na rozłączność atomów i twierdzenie 5 z rozdziału III (§ 3, str. 119, Ogólne twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym) otrzymujemy wzór (3.12).

Ponieważ zbiór $C_n^{(k)}$ zawiera dokładnie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ elementów, więc dla schematu Bernoulliego otrzymujemy z wzoru (3.12) wzór

$$(3.13) \quad P_{nk} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

§ 4. Nadzieja matematyczna częstości zjawiska C w n próbach

Przejdziemy teraz do obliczenia nadziei matematycznej zmiennej losowej y_n . Obliczenie to wykonamy dwiema metodami: metodą dodawania zmiennych i metodą funkcji tworzących Laplace'a.

Zauważmy przede wszystkim, że dla częstości zjawiska C w i -tej próbie zespołu V zachodzą wzory

$$(4.1) \quad \bar{x}_i = p_i,$$

$$(4.2) \quad \bar{x}_i = p,$$

z których pierwszy jest ogólny, drugi zaś odnosi się do przypadku schematu Bernoulliego. Wzór (4.1) wynika wprost z określenia nadziei matematycznej zmiennej losowej (rozdział III, § 6, określenie 11, str. 129), na podstawie którego mamy w ciele $V(A_i; C)$

$$x_i = 1 \cdot p(c_i) + 0 \cdot p(c'_i) = p(c_i) = p_i.$$

Na mocy (6.5) z rozdziału III (str. 130) wzór (4.1), a więc i wzór (4.2), są ważne również w ciele V dla przeniesienia zmiennych x_i do tego ciała.

TWIERDZENIE 5. Nadzieja matematyczna częstości zjawiska w n początkowych próbach zespołu V wynosi

$$(4.3) \quad \bar{y}_n = \sum_{i=1}^n p_i,$$

co w przypadku schematu Bernoulliego daje

$$(4.4) \quad \bar{y}_n = np.$$

Dowód 1. Wynika to natychmiast z wzorów (3.10), (4.1) i z wzoru (6.3) z rozdziału III (str. 130). Mamy bowiem na podstawie tych wzorów

$$\bar{y}_n = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n p_i,$$

co należało okazać.

Przed przystąpieniem do drugiego dowodu twierdzenia 5 podajemy następujące

OKREŚLENIE 6. Funkcją tworzącą Laplace'a zmiennej losowej x ciała skończonego nazywamy funkcję $E(t^x)$, $t > 0$, zmiennej t , gdzie E jest symbolem nadziei matematycznej.

LEMAT 1. Jeżeli zmienna losowa x przybiera tylko wartości $a_1, a_2, \dots, a_m$, każda z nich odpowiednio z prawdopodobieństwem $P_1, P_2, \dots, P_m$, to

$$(4.5) \quad E(t^x) = \sum_{j=1}^m P_j t^{a_j},$$

$$(4.6) \quad \bar{x} = \left[\frac{d}{dt} E(t^x) \right]_{t=1}.$$

Z założeń lematu wynika, że zmienna t^x przybiera tylko wartości $t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_m}$, przy czym $P(t^x = t^{a_j}) = P_j$, skąd na mocy wzoru (6.10) z rozdziału III (str. 131) wynika wzór (4.5). Ze wzoru (4.5) wynika różniczkowalność funkcji tworzącej, a w szczególności

$$\frac{d}{dx} E(t^x) = \sum_{j=1}^m a_j t^{a_j-1} P_j.$$

Przyjmując tu $t=1$ i stosując znowu wzór (6.10) z rozdziału III, otrzymujemy

$$\left[\frac{d}{dt} E(t^x) \right]_{t=1} = \sum_{j=1}^m a_j P_j = \bar{x}.$$

Dowód 2 twierdzenia 5. Zmienna y_n przybiera wartości $0, 1, \dots, n$ z prawdopodobieństwem odpowiednio $P_{n0}, P_{n1}, \dots, P_{nn}$. Mamy zatem na mocy (3.12) oraz (4.5)

$$(4.7) \quad E(t^{y_n}) = \sum_{k=0}^n t^k \left\{ \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in C_n^{(k)}} \left(\prod_{l=1}^k p_{i_l} \cdot \prod_{l=1}^{n-k} q_{j_l} \right) \right\} = \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in C_n^{(k)}} \left(\prod_{l=1}^k (p_{i_l} t) \prod_{l=1}^{n-k} q_{j_l} \right) = \prod_{l=1}^n (p_l t + q_l),$$

przy czym w przypadku schematu Bernoulliego wzór ten redukuje się do

$$(4.8) \quad E(t^{y_n}) = (pt + q)^n.$$

Stosując teraz wzór (4.6) i uwzględniając, że dla każdej zmiennej x mamy na podstawie (4.5)

$$(4.9) \quad [E(t^x)]_{t=1} = 1,$$

otrzymujemy

$$(4.10) \quad \bar{y}_n = \left[\frac{d}{dt} E(t^{y_n}) \right]_{t=1} = \left[\frac{\frac{d}{dt} E(t^{y_n})}{E(t^{y_n})} \right]_{t=1} = \left[\frac{d}{dt} \log E(t^{y_n}) \right]_{t=1} = \\ = \left[\sum_{l=1}^n \left(\frac{d}{dt} \log (p_l t + q_l) \right) \right]_{t=1} = \sum_{l=1}^n \frac{p_l}{p_l + q_l} = \sum_{l=1}^n p_l,$$

co należało okazać.

Z twierdzenia 5 wynika następujący wniosek:

Nadzieja matematyczna częstości względnej zjawiska C w n pierwszych próbach zespołu V wynosi

$$(4.11) \quad \overline{\left(\frac{y_n}{n} \right)} = \frac{1}{n} \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i,$$

co dla schematu Bernoulliego daje

$$(4.12) \quad \frac{1}{n} \bar{y}_n = p.$$

Liczbę $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ nazywamy *średnim prawdopodobieństwem zjawiska C w n pierwszych próbach*.

§ 5. Wzór asymptotyczny na P_{nk} dla schematu Bernoulliego

Wzór (3.13) na P_{nk} ani rachunkowo, ani też teoretycznie nie jest zbyt wygodny, zawiera bowiem silnie (ukrytą we współczynniku $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$). Zastąpimy go wobec tego przez wzór przybliżony, tak zwany *wzór asymptotyczny*.

W dalszym ciągu rozważań przez $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots$ będziemy oznaczali liczby (ewentualnie funkcje) rzeczywiste lub zespolone o module ≤ 1 .

LEMAT 2. Dla $z \leq \varrho < 1$ i $m = 0, 1, 2, \dots$ mamy

$$(5.1) \quad \log(1+z) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} + \frac{\vartheta |z|^{m+1}}{(m+1)(1-\varrho)};$$

w szczególności dla $|z| \leq 1/2$ i $m = 1, 2, \dots$ otrzymujemy

$$(5.2) \quad \log(1+z) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} + \vartheta |z|^{m+1},$$

co w przypadkach $m=1, 2$ daje odpowiednio

$$(5.3) \quad \log(1+z) = z + \vartheta_1 |z|^2,$$

$$(5.4) \quad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \vartheta_2 |z|^3.$$

Mamy bowiem dla $|z| \leq \varrho < 1$

$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} + r_m,$$

gdzie

$$|r_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} \right| \leq \frac{|z|^{m+1}}{m+1} \left| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{m+j} \frac{m+j}{m+j+1} z^j \right| \leq \frac{|z|^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{1-\varrho},$$

co prowadzi do wzoru (5.1).

Będziemy mówili (zgodnie z terminologią wprowadzoną przez Saksę i Zygmunda¹⁾), że ciąg funkcji $\{f_n(t)\}$ jest *niemal jednostajnie zbieżny*, jeśli dla każdego $r > 0$ jest on jednostajnie zbieżny w zbiorze tych t , dla których $|t| \leq r$.

Gdy dla dwóch ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$$

wówczas piszemy:

$$(5.5) \quad x_n \sim y_n \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

i nazywamy (5.5) *wzorem asymptotycznym*.

Jeśli x_n i y_n są funkcjami zmiennej t i zbieżność ciągu $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ do 1 jest niemal jednostajna względem tej zmiennej, wówczas mówimy, że wzór asymptotyczny (5.5) zachodzi *niemal jednostajnie względem zmiennej t* .

Podamy obecnie tak zwany wzór Stirlinga²⁾, który jest wzorem asymptotycznym na $n!$; orzeka on, że

$$(5.6) \quad n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Wzór ten pozwala zmućne rachunki przy obliczaniu $n!$ upraszczać za pomocą szacowania asymptotycznego.

¹⁾ S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne X, wydanie II, 1948, str. 47.

²⁾ Wyprowadzenie wzoru Stirlinga dla funkcji $\Gamma(s)$ w postaci $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s-1/2}$ znajdzie czytelnik na str. 402 książki Saksy i Zygmunda cytowanej w odnośniku 1. Na podstawie tego wzoru otrzymujemy $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$.

TWIERDZENIE 6. Dla schematu Bernoulliego, w którym $p \neq 0 \neq q$, zachodzi wzór:

$$(5.7) \quad P_{nk} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

niemal jednostajnie względem zmiennej $t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Dowód. Niech r będzie dowolną liczbą rzeczywistą > 0 i niech $\left| \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right| \leq r$; wówczas zachodzi nierówność

$$(a) \quad np - r\sqrt{npq} \leq k \leq np + r\sqrt{npq},$$

a ponieważ $k - np = k - n(1-q) = k - n + nq$, więc również

$$(b) \quad nq - r\sqrt{npq} \leq n - k \leq nq + r\sqrt{npq}.$$

Z nierówności (a) i (b) otrzymujemy odpowiednio

$$1 - \frac{r\sqrt{npq}}{np} \leq \frac{k}{np} \leq 1 + \frac{r\sqrt{npq}}{np} \quad \text{i} \quad 1 - \frac{r\sqrt{npq}}{nq} \leq \frac{n-k}{nq} \leq 1 + \frac{r\sqrt{npq}}{nq}.$$

Z nierówności tych wynika, że

$$(5.8) \quad k \sim np \quad \text{dla } n \rightarrow \infty,$$

$$(5.9) \quad n - k \sim nq \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

jednostajnie dla $\left| \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right| \leq r$, czyli niemal jednostajnie względem

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Korzystając z (5.6), (5.8) i (5.9) mamy przy $n \rightarrow \infty$ niemal jednostajnie względem $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$:

$$(5.10) \quad k! \sim \sqrt{2\pi} k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}, \quad (n-k)! \sim \sqrt{2\pi} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-(n-k)},$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad P_{nk} &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \sim \\
 &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2\pi k}^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)}^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-(n-k)}} p^k q^{n-k} = \\
 &= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k}^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}} p^k q^{n-k} = \\
 &= \frac{n^{k+\frac{1}{2}} n^{n-k+\frac{1}{2}} \sqrt{p} \sqrt{q}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n} \sqrt{p} \sqrt{q} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}} p^k q^{n-k} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{k} \right)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k+\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

i to niemal jednostajnie względem zmiennej $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Zatem dowód (5.7) sprowadza się do pokazania, że

$$(5.12) \quad P_{nk}^* = \left(\frac{np}{k} \right)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k+\frac{1}{2}} \sim e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right)^2},$$

przy $n \rightarrow \infty$ niemal jednostajnie względem $t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Logarytmując (5.12) stronami i wprowadzając zmienną t , otrzymujemy z uwagi na to, że $k = np + t\sqrt{npq}$,

$$\begin{aligned}
 (5.13) \quad \log P_{nk}^* &= - \left(np + t\sqrt{npq} + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right) - \\
 &\quad - \left(nq - t\sqrt{npq} + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right).
 \end{aligned}$$

Weźmy dowolne $r > 0$ i niech będzie $|t| \leq r$. Dla $n \geq 4r^2 \frac{p}{q}$

i $n \geq 4r^2 \frac{q}{p}$ mamy $\left| \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right| \leq \frac{1}{2}$ i $\left| \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right| \leq \frac{1}{2}$, możemy więc do wzoru

(5.13) zastosować rozwinięcie (5.4), co daje

$$\begin{aligned}
 (5.14) \quad \log P_{nk}^* &= - (np + t\sqrt{npq}) \left[\frac{tq}{\sqrt{npq}} - \frac{1}{2} \left(\frac{tq}{\sqrt{npq}} \right)^2 + \vartheta_1 \left| \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right|^3 \right] + \\
 &\quad + (nq - t\sqrt{npq}) \left[\frac{tp}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2} \left(\frac{tp}{\sqrt{npq}} \right)^2 + \vartheta_2 \left| \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right|^3 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right) = \\
 &= -t\sqrt{npq} + \frac{1}{2} t^2 q - t^2 q^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3 q^2}{\sqrt{npq}} - \\
 &\quad - (np + t\sqrt{npq}) \vartheta_1 \left| \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right|^3 + \\
 &\quad + t\sqrt{npq} + \frac{1}{2} t^2 p - t^2 p^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3 p^2}{\sqrt{npq}} + \\
 &\quad + (nq + t\sqrt{npq}) \vartheta_2 \left| \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right|^3 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} t^2 + \zeta_n(t, p, q),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (5.15) \quad \zeta_n(t, p, q) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3 (q^2 - p^2)}{\sqrt{npq}} - (np + t\sqrt{npq}) \vartheta_1 \left| \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right|^3 + \\
 &\quad + (nq + t\sqrt{npq}) \vartheta_2 \left| \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right|^3 - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} \right) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} \right),
 \end{aligned}$$

z czego widać, że $\zeta_n(t, p, q) \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, i to jednostajnie dla $|t| \leq r$, a ponieważ r jest dowolne, więc

$$(5.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log P_{nk}^* = -\frac{1}{2} t^2$$

niemal jednostajnie względem t .

Wzór (5.16) jest równoważny wzorowi (5.12), a więc nasze twierdzenie jest udowodnione.

Oznaczmy przez $[y]$ największą liczbę całkowitą $\leq y$ („entier z y ”).

Twierdzenie 7. Jeżeli $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to P_{nk} dla schematów Bernoulliego osiąga maksimum dla $k_0 = [(n+1)p]$,

przy czym P_{nk} dla $k < k_0$ monotonicznie rośnie, dla $k > k_0$ zaś monotonicznie maleje. Jeżeli $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to P_{nk} osiąga maksimum dla $k_1 = (n+1)p - 1$ i dla $k_2 = (n+1)p$, przy czym monotonicznie rośnie dla $k < k_1$ i monotonicznie maleje dla $k > k_2$.

Dowód. Z wzoru (3.13) wynika, że

$$(5.17) \quad \frac{P_{n,k+1}}{P_{nk}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Zatem $P_{n,k+1} \leq P_{nk}$ zależnie od tego, czy $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \leq 1$. Mamy jednak $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} = 1 + \frac{(n+1)p - (k+1)}{(k+1)q}$, a ułamek $\frac{(n+1)p - (k+1)}{(k+1)q}$ jest ≤ 0 zależnie od tego, czy licznik jego jest ≤ 0 , więc, jak łatwo sprawdzić, twierdzenie nasze jest słuszne.

Twierdzenie 8. Dla schematu Bernoulliego $P_{nk} \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ jednostajnie ze względu na k .

Dowód. Przyjmijmy $k_n = [(n+1)p] = np + t_n \sqrt{npq}$; ponieważ $np - q \leq k_n \leq np + p$, więc $|t| \leq \max\left(\sqrt{\frac{p}{q}}, \sqrt{\frac{q}{p}}\right)$. Na mocy twierdzenia 6 mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{nk_n}}{1} e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1,$$

ale mianownik ułamka pod znakiem granicy dąży do zera, więc i licznik dąży do zera. Mamy więc

$$P_{nk} \leq P_{nk_n} \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty,$$

co kończy dowód twierdzenia.

§ 6. Prawo wielkich liczb J. Bernoulliego

Twierdzenie 9. Jeżeli y_n jest częstością zjawiska C w n pierwszych próbach schematu Bernoulliego, to dla każdej pary liczb $\tau, \eta > 0$ istnieje takie n_0 , że

$$(6.1) \quad P(|y_n - np| \geq \tau \sqrt{npq}) < \frac{2}{\tau \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\tau^2(1+\eta)}$$

dla $n > n_0$.

Dowód. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $\eta \leq 1$. Przyjmijmy $t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ i oznaczmy przez k_0 najmniejszą liczbę całkowitą k , dla której $t_k \geq \tau$. Mamy wówczas $\tau \leq t_{k_0} \leq \tau + \frac{1}{pq}$. Na mocy twierdzenia 6 istnieje takie n_1 , że

$$(6.2) \quad P_{nk} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}t_k^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right)$$

dla $n > n_1$ i $|t_k| \leq \tau + \frac{1}{pq}$, a w szczególności

$$(6.3) \quad P_{nk} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}t_{k_0}^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right).$$

Mamy dalej na mocy (5.17)

$$(6.4) \quad \frac{P_{n,k+1}}{P_{nk}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} < \frac{n-k}{k} \cdot \frac{p}{q} = 1 - \frac{t_k}{qt_k + \sqrt{npq}}.$$

Funkcja $\varphi(t) = \frac{t}{qt + \sqrt{npq}}$ ma pochodną $\frac{\sqrt{npq}}{(qt + \sqrt{npq})^2} > 0$, więc jest stale rosnąca. Wobec (6.4) przy $t_k \geq \tau$ mamy

$$(6.5) \quad \frac{P_{n,k+1}}{P_{nk}} < 1 - \frac{\tau}{q\tau + \sqrt{npq}} = \mu.$$

Dla n większych od pewnego n_2 mamy $\tau < \sqrt{npq}$, a więc $\mu > 0$. Przez indukcję otrzymujemy stąd, że dla $n > n_2$ i $k > k_0$

$$(6.6) \quad P_{nk} < P_{nk_0} \mu^{k-k_0}.$$

Uwzględniając oszacowanie P_{nk_0} dane wzorem (6.3) otrzymujemy dla $n > n' = \max(n_1, n_2)$

$$(6.7) \quad P_{nk} < \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \mu^{k-k_0} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right).$$

P_{nk} jest prawdopodobieństwem równości $y_n = k$, nierówność zaś $y_n - np \geq \tau \sqrt{npq}$, której prawdopodobieństwo chcemy oszacować, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y_n = k$ i $\frac{k - np}{\sqrt{npq}} > \tau$, a więc

gdy $y_n = k$ i $k \geq k_0$. A zatem dla $n > n'$

$$(6.8) \quad P(y_n - np \geq \tau \sqrt{npq}) = \sum_{k=k_0}^n P_{nk} < \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \sum_{k=k_0}^n \mu^{k-k_0}.$$

Mamy dalej

$$\sum_{k=k_0}^n \mu^{k-k_0} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu^{k-k_0} = \frac{1}{1-\mu} = \frac{q\tau + \sqrt{npq}}{\tau},$$

a więc

$$(6.9) \quad P(y_n - np \geq \tau \sqrt{npq}) < \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \left(\frac{q\tau + \sqrt{npq}}{\tau}\right) = \\ = \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\tau \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \left(1 + \frac{q\tau}{\sqrt{npq}}\right) < \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\tau \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{npq}}\right).$$

Zauważmy dalej, że $y_n - np \leq -\tau \sqrt{npq}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(n - y_n) - nq \geq \tau \sqrt{npq}$; przechodząc więc od częstości zjawiska C do częstości zjawiska $\bar{C}$, to znaczy zastępując y_n przez $n - y_n$, a równocześnie zastępując k przez $n - k$ oraz p przez q i q przez p , otrzymujemy dla $n > n'$ analogiczny do wzoru (6.9) wzór

$$(6.10) \quad P(y_n - np \leq -\tau \sqrt{npq}) \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\tau \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{npq}}\right).$$

Dodając stronami (6.9) i (6.10) otrzymujemy

$$(6.11) \quad P(|y_n - np| \geq \tau \sqrt{npq}) < \frac{2e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\tau \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{npq}}\right).$$

Nierówność (6.11) zachodzi dla $n > n'$, czyli dla $n \geq n_1$ i takich, że $\tau < \sqrt{npq}$. Wynika stąd, że dla $n \geq n_0$, gdzie $n_0 \geq n'$ i $n_0 \geq 9 \frac{\tau^2}{\eta^2 pq}$, będziemy mieli

$$(6.12) \quad P(|y_n - np| \geq \tau \sqrt{npq}) < \frac{2e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}{\tau \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right).$$

Ponieważ jednak $\eta \leq 1$, więc $\left(1 + \frac{\eta}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{9}\eta^2 < 1 + \eta$, zatem zastępując we wzorze (6.12) czynnik $\left(1 + \frac{\eta}{3}\right)^2$ przez $1 + \eta$ otrzymujemy nierówność (6.1), której należało dowieść.

Weźmy pod uwagę takie schematy Bernoulliego dotyczące n prób nad zjawiskiem C , że w każdym z nich prawdopodobieństwo pojawienia się zjawiska C w pojedynczej próbie jest stałe i równa się p . O schematach tych można wypowiedzieć następujące twierdzenie zwane *prawem wielkich liczb* Jakuba Bernoulliego:

Twierdzenie 10. Dla każdego $\delta > 0$ istnieje takie n_δ , że dla $n \geq n_\delta$ częstość względna $\frac{1}{n} y_n$ zjawiska C w n próbach różni się od prawdopodobieństwa p o mniej niż δ , z prawdopodobieństwem większym niż $1 - \delta$, to znaczy takie n_δ , że dla $n \geq n_\delta$ zachodzi wzór

$$(6.13) \quad P\left(\left|\frac{1}{n} y_n - p\right| < \delta\right) > 1 - \delta.$$

Dowód. Ponieważ $\frac{4}{\tau \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} \rightarrow 0$ przy $\tau \rightarrow \infty$, więc dla danego δ

można dobrać takie τ_0 , aby było $\frac{4}{\tau_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\tau_0^2} < \delta$. Na podstawie twierdzenia 9 można dobrać takie n_0 , aby dla $n > n_0$ zachodziła nierówność (6.1) przy $\tau = \tau_0$ i $\eta = 1$. Biorąc jako n_δ większą z liczb n_0 i $\frac{\tau_0^2 pq}{\delta^2}$ otrzymujemy nierówność

$$(6.14) \quad P\left(\left|\frac{1}{n} y_n - p\right| \geq \delta\right) < \delta \quad \text{dla} \quad n > n_\delta,$$

która jest równoważna nierówności (6.13).

Słynne to twierdzenie zostało opublikowane w pośmiertnej pracy Jakuba Bernoulliego *Ars conjectandi* w 1713 r. Rok ten stanowi dzięki temu jedną z najważniejszych dat w teorii prawdopodobieństwa. Prawo wielkich liczb J. Bernoulliego stało się punktem wyjścia badań uogólniających, które doprowadziły do znalezienia całej rodziny twierdzeń zwanych *prawami wielkich liczb*. Metoda dowodu, której użyliśmy w tym paragrafie, podobnie jak metoda Bernoulliego w *Ars conjectandi*, jest metodą *ad hoc* i nie nadaje się do uogólnień; istnieją jednak inne metody (metoda Bie-

naymé-Czebyszewa, metoda funkcji charakterystycznych), które mają znacznie większy zasięg.

Obecnie podamy jeszcze pewne uwagi dotyczące intuicyjnego sensu tego twierdzenia.

Przed wszystkim możemy to twierdzenie sformułować w następujący sposób, nieco mniej ścisły, ale za to bardziej obrazowy:

Częstość względna zjawiska C w danym schemacie Bernoulliego przy dostatecznie dużej liczbie prób różni się dowolnie mało od prawdopodobieństwa tego zjawiska w omawianym schemacie, z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności.

Ponadto możemy za pomocą tego twierdzenia wydobyć treść intuicyjną tkwiącą w pojęciu prawdopodobieństwa. W mowie potocznej zdarzenie nazywamy więcej lub mniej prawdopodobnym, zależnie od tego czy mamy więcej, czy mniej powodów do spodziewania się tego zdarzenia. W szczególności, przez zdarzenie *bardzo prawdopodobne* rozumiemy takie zdarzenie, którego należy się spodziewać „prawie na pewno”. Ponieważ zdarzenie bardzo prawdopodobne w przekładzie na język matematyczny oznacza zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest dostatecznie bliskie jedności, otrzymujemy więc następujące intuicyjne sformułowanie twierdzenia Bernoulliego:

W schemacie Bernoulliego przy dostatecznie dużej liczbie prób należy się spodziewać prawie na pewno, że częstość względna zjawiska C będzie się bardzo mało różniła od prawdopodobieństwa tego zjawiska.

Weźmy jako przykład ciąg rzutów kostką do gry; niech na przykład zjawisko C będzie polegało na wyrzuceniu szóstki. Ciąg rzutów jest ciągiem prób losowych nad wyrzuceniem szóstki, przy czym niezależność prób wydaje się intuicyjnie oczywista. Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki jest w każdym rzucie dane przez definicję klasyczną (por. rozdział III, § 8), a więc wynosi $1/6$. Mamy zatem schemat Bernoulliego. W myśl twierdzenia Bernoulliego w podanym wyżej intuicyjnym sformułowaniu, przy dużej liczbie rzutów należy się spodziewać, że stosunek liczby wyrzuconych szóstek do liczby rzutów będzie bliski $1/6$. Powstaje pytanie, czy to się sprawdza? Otóż wiekowe doświadczenie graczy dowodzi, że tak jest, że sprawdza się to bardzo dobrze. Tak więc nasza konstrukcja myślowa, polegająca na przyjęciu dla rzutów

kostką prawdopodobieństwa klasycznego i niezależności prób, oraz na przyjęciu układu pojęć i zasad teorii prawdopodobieństwa prowadzących do twierdzenia Bernoulliego, harmonizuje z rzeczywistością, to znaczy ma wartość obiektywną.

§ 7. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a

Twierdzenie 11 (de Moivre'a-Laplace'a). *Dla częstości y_n zjawiska C w n próbach w przypadku schematu Bernoulliego zachodzi wzór:*

$$(7.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[np + \lambda_1 \sqrt{npq} \leq y_n \leq np + \lambda_2 \sqrt{npq}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

jednostajnie dla wszelkich rzeczywistych λ_1, λ_2 takich, że $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Dowód. Dla skrócenia wzorów oznaczymy prawdopodobieństwo występujące pod znakiem granicy po lewej stronie wzoru przez $P_n(\lambda_1, \lambda_2)$. Dowód twierdzenia sprowadza się do wykazania słuszności następującej tezy:

(7.2) *Dla każdego $\eta > 0$ istnieje takie n_η , że dla wszelkich λ_1 i λ_2 takich, że $\lambda_1 \leq \lambda_2$, i wszelkich $n \geq n_\eta$ jest*

$$\left| P_n(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| < \eta.$$

Oczywiście, można założyć $\eta \leq 1$. Przed wszystkim niech r_1 będzie liczbą dodatnią spełniającą nierówność

$$(7.3) \quad \frac{4}{r_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r_1^2} < \frac{1}{4} \eta,$$

$$(7.4) \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \frac{1}{4} \eta.$$

Liczba taka istnieje, gdyż funkcja po lewej stronie (7.3) dąży do 0 wraz z $r_1 \rightarrow \infty$, całka zaś w (7.4) jest zbieżna.

Niech n_η będzie liczbą naturalną taką, że dla $n \geq n_\eta$ zachodzą jednocześnie następujące cztery warunki:

$$(7.5) \quad \frac{1}{\sqrt{npq}} < \frac{1}{6} \eta,$$

(7.6) dla wszelkich x_1, x_2 należących do przedziału domkniętego $E[-r_1 \leq x \leq r_1 + \eta]$ i takich, że $|x_1 - x_2| < 1/\sqrt{npq}$, mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| e^{-\frac{1}{2}x_1^2} - e^{-\frac{1}{2}x_2^2} \right| < \frac{1}{6} \cdot \frac{\eta}{2r_1 + \eta},$$

$$(7.7) \quad P(|y_n - np| \geq r_1 \sqrt{npq}) < \frac{4}{r_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r_1^2},$$

(7.8) dla $\left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| \leq r_1$ zachodzi nierówność

$$\left| P_{nk} - \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \right| < \frac{1}{6} \eta P_{nk}.$$

Istnienie takiego n_η wynika dla (7.6) z ciągłości funkcji $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, dla (7.7) z wzoru (6.1) w twierdzeniu 9, dla (7.8) z wzoru asymptotycznego (5.7).

Przypuśćmy teraz, że $n \geq n_\eta$.

W przypadku $\lambda_1 \geq r$ z nierówności $\lambda_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np \leq \lambda_2 \sqrt{npq}$ wynika, że $|y_n - np| \geq r \sqrt{npq}$, a wobec tego na mocy (7.7) i (7.3) mamy

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2) \leq P(|y_n - np| \geq r \sqrt{npq}) < \frac{1}{4} \eta.$$

Na mocy (7.4) mamy w tym przypadku również

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \frac{1}{4} \eta,$$

a więc

$$\left| P_n(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| < \frac{1}{2} \eta < \eta,$$

to znaczy (7.2).

Zupełnie podobnie dowodzi się wzoru (7.2) w przypadku $\lambda_2 \leq -r$, pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek $\lambda_1 < r$, $\lambda_2 > -r$.

Oznaczmy przez μ_1 większą z liczb $-r, \lambda_1$, przez μ_2 zaś mniejszą z liczb r, λ_2 ; mamy więc w każdym przypadku

$$(7.9) \quad -r \leq \mu_1 < \mu_2 \leq r, \quad \lambda_1 \leq \mu_1 < \mu_2 \leq \lambda_2,$$

a ponadto z nierówności $\lambda_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np \leq \lambda_2 \sqrt{npq}$ wynika jedna i tylko jedna z nierówności

$$(a) \quad \lambda_1 \sqrt{npq} < y_n - np < \mu_1 \sqrt{npq},$$

$$(b) \quad \mu_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np \leq \mu_2 \sqrt{npq},$$

$$(c) \quad \mu_2 \sqrt{npq} < y_n - np < \lambda_2 \sqrt{npq}.$$

Oznaczmy przez u zdarzenie polegające na zachodzeniu nierówności $\lambda_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np \leq \lambda_2 \sqrt{npq}$, a przez u_1, u_2, u_3 odpowiednio zdarzenia polegające na zachodzeniu nierówności (a), (b) i (c) (u, u_1, u_2, u_3 zależą oczywiście od n). Mamy

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad u_1 u_2 = u_1 u_3 = u_2 u_3 = 0,$$

a więc

$$(7.10) \quad p(u) = P_n(\lambda_1, \lambda_2) = p(u_1) + p(u_2) + p(u_3) = p(u_1) + P_n(\mu_1, \mu_2) + p(u_3);$$

w przypadku $\lambda_1 = \mu_1$ mamy $u_1 = 0$, w przypadku zaś $\mu_2 = \lambda_2$ mamy $u_3 = 0$, co jednak nie narusza ważności wzorów.

Wobec tego korzystając z (7.7) i (7.3) mamy

$$(7.11) \quad 0 \leq P_n(\lambda_1, \lambda_2) - P_n(\mu_1, \mu_2) = \\ = P(\lambda_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np < \mu_1 \sqrt{npq}) + P(\mu_2 \sqrt{npq} < y_n - np \leq \lambda_2 \sqrt{npq}) < \\ < P(y_n - np < -r \sqrt{npq}) + P(y_n - np > r \sqrt{npq}) < \\ < P(|y_n - np| \geq r \sqrt{npq}) < \frac{1}{4} \eta,$$

korzystając zaś z (7.4)

$$(7.12) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\mu_1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_2}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \\ < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-r} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \frac{1}{4} \eta.$$

W ten sposób uzyskujemy nierówność

$$(7.13) \quad \left| P_n(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| < \left| P_n(\mu_1, \mu_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| + \frac{1}{2} \eta.$$

Przyjmijmy (podobnie jak w § 6) $t_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Mamy więc

$$(7.14) \quad t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Jeżeli w przedziale $E[\mu_1 \leq x \leq \mu_2]$ nie znajduje się żadne t_k , to (z uwagi na to, że $\frac{y_n - np}{\sqrt{npq}}$ przybiera tylko wartości t_k) y_n nie może spełniać nierówności

$$\mu_1 \sqrt{npq} \leq y_n - np \leq \mu_2 \sqrt{npq}, \text{ a więc } P_n(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Z (7.14) wynika jednak, że $\mu_2 - \mu_1 < \frac{1}{\sqrt{npq}}$, a więc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

co ze względu na (7.5) pozwala oszacować pierwszy składnik po prawej stronie (7.13) jako $< \frac{1}{6}\eta$, całą zaś prawą stronę tej nierówności jako $< \eta$, co w tym przypadku daje tezę (7.2).

Przypuśćmy teraz, że w przedziale $E[\mu_1 \leq x \leq \mu_2]$ leżą niektóre t_k . Oznaczmy najmniejsze z nich przez t_l , największe zaś z nich przez t_m . Zachodzą następujące nierówności:

$$(7.15) \quad -r \leq \mu_1 \leq t_l < \mu_1 + \frac{1}{\sqrt{npq}}, \quad \mu_2 < t_{m+1} \leq \mu_2 + \frac{1}{\sqrt{npq}} < \mu_2 + \eta \leq r + \eta,$$

a prócz tego

$$(7.16) \quad P_n(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k=l}^m P_{nk}.$$

Wobec (7.14) możemy nierówność (7.8) napisać w postaci

$$(7.17) \quad \left| P_{nk} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) \right| < \frac{1}{6} \eta P_{nk} \quad (k=l, l+1, \dots, m).$$

Używając (7.16) i pamiętając, że $P_n(\mu_1, \mu_2) \leq 1$, otrzymujemy sumując te nierówności

$$(7.18) \quad \left| P_n(\mu_1, \mu_2) - \sum_{k=l}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) \right| < \frac{1}{6} \eta.$$

Po lewej stronie w odjemniku mamy sumę przybliżoną całki

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_l}^{t_m} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Posługując się ze względu na (7.14) i (7.15) nierównością (7.6), otrzymujemy dla $k=l, l+1, \dots, m$

$$(7.19) \quad \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |e^{-\frac{1}{2}t_k^2} - e^{-\frac{1}{2}t^2}| dt < \frac{\eta(t_{k+1} - t_k)}{6(2r + \eta)},$$

a więc na podstawie wzorów (7.18), (7.19), (7.15) i (7.5):

$$(7.20) \quad \begin{aligned} & \left| P_n(\mu_1, \mu_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| \leq \\ & \leq \left| P_n(\mu_1, \mu_2) - \sum_{k=l}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) \right| + \\ & + \left| \sum_{k=l}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_l}^{t_{m+1}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| + \\ & + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_l}^{t_{m+1}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| < \frac{1}{6} \eta + \\ & + \sum_{k=l}^m \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} (t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{t_l} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_m}^{\mu_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < \\ & < \frac{1}{6} \eta + \frac{1}{6} \eta \frac{t_{m+1} - t_l}{2r + \eta} + \frac{(t_l - \mu_1) + (t_{m+1} - \mu_2)}{\sqrt{2\pi}} < \\ & < \frac{1}{6} \eta + \frac{1}{6} \eta + \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} < \frac{1}{2} \eta. \end{aligned}$$

Z nierówności (7.13) i (7.20) wynika wzór (7.2), a więc dowód twierdzenia został zakończony.

Twierdzenie 11 jest bardzo szczególnym przypadkiem twierdzeń ogólniejszych, zwanych *twierdzeniami o granicy prawdopodobieństwa*. Dowód powyższy oparty jest na rozumowaniach *ad hoc* i jest dość mozolny. Znajdujemy go we wszystkich niemal starszych podręcznikach teorii prawdopodobieństwa, przeważnie jednak z lukami i niedociągnięciami.

§ 8. Wzór Poissona na P_{nk} w przypadku zjawisk rzadkich

Wzór (5.7) może być użyty do przybliżonego wyliczenia P_{nk} dla dużych n . Jeżeli jednak p lub q są małe, tego rzędu co $1/n$ lub mniejsze, to wzór ten przestaje być dokładny. Dla tego przypadku wyprowadzimy inny wzór przybliżony. Ograniczymy się przy tym do przypadku, w którym np jest małe, a więc zjawisko C występuje rzadko, to znaczy jest mało prawdopodobne.

TWIERDZENIE 12 (Poissona). Dla $\lambda > 0$ mamy

$$(8.1) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \lambda}} \left(P_{nk} : \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = 1$$

niemal jednostajnie względem k .

Dowód. Przy przejściu do granicy w (8.1) zarówno n , jak i p są zmienne; $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tak jednak, że $np \rightarrow \lambda$. Inaczej można to twierdzenie sformułować tak:

Dla każdej pary liczb η, r takich, że $\eta > 0$, $r > 0$, istnieją takie $n_0 > 0$ i $\delta > 0$, że dla $n \geq n_0$, $k \leq r$ i $|np - \lambda| < \delta$ zachodzi nierówność

$$(8.2) \quad \left| \left(P_{nk} : \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) - 1 \right| < \eta.$$

Dla dowodu wzoru (8.2) rozłożymy P_{nk} na pięć czynników:

$$(8.3) \quad P_{nk} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \right] (np)^k \left(1 - \frac{np}{n} \right)^n (1-p)^{-k}.$$

Pierwszy z tych czynników jest stały dla stałego k , drugi i piąty są zbieżne do 1 przy $n \rightarrow \infty$ i $np \rightarrow \lambda$ jednostajnie dla $k \leq r$. Trzeci czynnik jest zbieżny do λ^k , czwarty zaś jest zbieżny do $e^{-\lambda}$ jednostajnie dla $k \leq r$. Stąd wynika natychmiast wzór (8.1).

Zauważmy jeszcze, że dla $n \rightarrow \infty$ i $np \rightarrow 0$ mamy

$$(8.4) \quad P_{n0} = (1-p)^n = \left(1 - \frac{np}{n} \right)^n \rightarrow e^{-\lambda}.$$

Wzór (8.1) oraz wiążące się z nim prawo prawdopodobieństwa Poissona grają ważną rolę w teorii prawdopodobieństwa.

§ 9. Pomocnicze wiadomości z kombinatoryki

Udowodnimy wzór

$$(9.1) \quad \sum_{j=0}^n \binom{j+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}.$$

Dowód tego wzoru jest indukcyjny. Jest on oczywisty dla $n=0$. Przypuśćmy, że wzór ten zachodzi dla pewnego n ; wówczas

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m} + \binom{n+m}{m-1} = \binom{n+1+m}{m},$$

to znaczy wzór ten zachodzi dla $n+1$, co należało okazać.

OKREŚLENIE 7. Ciąg m liczb całkowitych nieujemnych $k_1, k_2, \dots, k_m$ nazywamy *rozkładem* liczby naturalnej n na m składników nieujemnych, jeśli $n = \sum_{i=1}^m k_i$. Dwa rozkłady $k_1, k_2, \dots, k_{m_1}$ i $k_1^*, k_2^*, \dots, k_{m_2}^*$ uważamy za identyczne, jeśli $m_1 = m_2$ oraz $k_i = k_i^*$, $i = 1, 2, \dots, m_1$.

(9.2) Istnieje dokładnie $\binom{n+m-1}{m-1}$ rozkładów liczby naturalnej n na m składników nieujemnych.

Dowód. Dla $m=1$ wzór jest słuszny. Załóżmy, że zachodzi on dla pewnego m . Każdy rozkład liczby n na $m+1$ składników nieujemnych możemy uzyskać, i to jednoznacznie, z rozkładu pewnej liczby $j \leq n$ na m składników $k_2, k_3, \dots, k_{m+1}$, przyjmując $k_1 = n-j$. Ponieważ na mocy założenia indukcyjnego istnieje $\binom{j+m-1}{m-1}$ rozkładów liczby j na m składników, więc rozkładów liczby n na $m+1$ składników jest na mocy wzoru (9.1)

$$\sum_{j=0}^n \binom{j+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m} = \binom{n+(m+1)-1}{(m+1)-1},$$

co należało okazać.

OKREŚLENIE 8. Niech L będzie zbiorem złożonym z n elementów, a $k_1, k_2, \dots, k_m$ niech będzie rozkładem liczby n na m składników nieujemnych. Rozkładem typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ zbioru L nazywamy taki ciąg zbiorów $L_1, L_2, \dots, L_m$, że $L = \sum_{i=1}^m L_i$ oraz zbiór L_i zawiera k_i elementów, $i=1, 2, \dots, m$. Dwa rozkłady typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$: $L_1, L_2, \dots, L_m$ i $L_1^*, L_2^*, \dots, L_m^*$ uważamy za identyczne, jeśli $L_i = L_i^*$ dla $i=1, 2, \dots, m$.

(9.3) Istnieje dokładnie $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ rozkładów typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ zbioru L .

Dowód przeprowadzimy znowu indukcyjnie. Dla $m=1$ mamy z konieczności $k_1=n$ i wzór (9.3) jest spełniony. Założmy, że zachodzi on dla pewnego m i obliczmy ilość rozkładów typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}\}$ zbioru L . Każdy taki rozkład możemy jednoznacznie otrzymać ustalając pewien k_1 -elementowy podzbiór L_1 zbioru L i następnie biorąc rozkład typu $\{k_2, \dots, k_m, k_{m+1}\}$ $(n-k_1)$ -elementowego zbioru $L-L_1$. Tych ostatnich rozkładów mamy według założenia indukcyjnego $\frac{(n-k_1)!}{k_2! \dots k_m! k_{m+1}!}$, zbiór zaś L_1 możemy wybrać na $\binom{n}{k_1}$ sposobów, a więc ilość rozkładów typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}\}$ zbioru L wynosi

$$\binom{n}{k_1} \frac{(n-k_1)!}{k_2! \dots k_m! k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1! (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \dots k_m! k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m! k_{m+1}!},$$

co należało okazać.

Wzór (9.3) można uważać za uogólnienie wzoru $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, który podaje ilość rozkładów typu $\{k, (n-k)\}$ zbioru n -elementowego.

§ 10. Wielokrotny schemat Bernoulliego

Zajmiemy się obecnie wielokrotnym schematem Bernoulliego, to znaczy zespołem prób niezależnych $V=[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})_N]$, w którym prawdopodobieństwo pojawienia się j -tego zjawiska w i -tej próbie, $p(c_i^{(j)})=p_j$, nie zależy od i , a tylko od j (por. określenie 2, § 3, str. 142). Schemat złożony z n pierwszych prób schematu V będziemy oznaczali przez V_n .

TWIERDZENIE 13. Jeżeli $k_1, k_2, \dots, k_m$ jest rozkładem liczby n na m składników nieujemnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w n pierwszych próbach schematu V zjawisko $C^{(j)}$ pojawi się dokładnie k_j razy, $j=1, 2, \dots, m$, wyraża się wzorem

$$(10.1) \quad P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}.$$

Dowód. Zdarzenie $u(k_1, k_2, \dots, k_m)$, którego prawdopodobieństwo oznaczyliśmy przez $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$, jest sumą takich atomów $v = \prod_{i=1}^n c_i^{(s_i)}$, że w ciągu $s_1, s_2, \dots, s_n$ występuje dokładnie k_j razy liczba j . Oznaczając przez L_i zbiór tych liczb l zbioru $L=(1, 2, \dots, n)$, dla których $s_l=i$, widzimy, że zbiory $L_1, L_2, \dots, L_m$ stanowią rozkład typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ zbioru L , przy czym przyporządkowanie wyznaczone składnikom atomowym zdarzenia $u(k_1, k_2, \dots, k_m)$ rozkładów typu $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ zbioru L jest wzajemnie jednoznaczne. Na podstawie (9.3) zdarzenie $u(k_1, k_2, \dots, k_m)$ jest więc sumą dokładnie $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ atomów, z których każdy, na mocy założenia niezależności prób w schemacie V_n , ma prawdopodobieństwo równe $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika więc wzór (10.1). Nawiązując do rozważań § 2 (str. 141), niech $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}$ będą niektórymi zjawiskami spośród zjawisk $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$, a $C^{(k_1)}, C^{(k_2)}, \dots, C^{(k_{m-s})}$ niech będą pozostałymi zjawiskami. Przyjmując $C^* = \sum_{i=1}^{m-s} C^{(k_i)}$ i $V_n^* = [V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}, C^*)]_n$ wiemy, że V_n^* jest podciałem ciała V_n (por. § 2, str. 140). Przypominamy jeszcze, że zdarzenie odpowiadające pojawieniu się zjawiska C^* w i -tej próbie zespołu oznaczamy przez c_i^* ; jest ono sumą $\sum_{j=1}^{m-s} c_i^{(k_j)}$.

Z tego, co zostało tu przypomniane, oraz z określenia 1 (str. 141) wynika

TWIERDZENIE 14. Zespół V_n^* ($n=1, 2, \dots, N$) jest schematem Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo jest określone wzorami

$$p(c_i^{(j)})=p_j, \quad p(c_i^*)=\sum_{j=1}^{m-s} p_{k_j} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

§ 11. Maksimum prawdopodobieństwa $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$

TWIERDZENIE 15. Przy stałych n i m prawdopodobieństwo $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$ osiąga maksimum dla jednego lub więcej układów $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_m^{(0)}$ postaci

$$(11.1) \quad k_j^{(0)} = [np_j] + s_j \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

gdzie liczby s_j są całkowite, nieujemne i spełniają związek

$$(11.2) \quad \sum_{j=1}^m s_j = n - \sum_{j=1}^m E(np_j).$$

Dowód. Udowodnimy przede wszystkim, że każdy układ $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_m^{(0)}$, dla którego $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$ osiąga maksimum, spełnia warunek

$$(11.3) \quad k_j^{(0)} \geq [np_j] \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy dla pewnego j_1

$$(11.4) \quad k_{j_1}^{(0)} < [np_{j_1}] \leq np_{j_1}.$$

Gdyby jednak dla każdego $j=1, 2, \dots, m$ zachodziła nierówność $k_j^{(0)} < np_j$, wówczas sumując te nierówności stronami mielibyśmy $n = \sum_{j=1}^m k_j^{(0)} < \sum_{j=1}^m np_j = n$, co jest niemożliwe. A więc dla pewnego j_2 mamy

$$(11.5) \quad k_{j_2}^{(0)} > np_{j_2}.$$

Ponieważ liczby $k_{j_1}^{(0)}$ i $E(np_{j_1})$ są całkowite, więc nierówność (11.4) pociąga za sobą nierówności

$$(11.6) \quad k_{j_1}^{(0)} + 1 \leq [np_{j_1}] \leq np_{j_1}.$$

Zauważmy, że na podstawie (11.5) mamy $k_{j_2}^{(0)} > 0$, a więc $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_{j_1}^{(0)} + 1, \dots, k_{j_2}^{(0)} - 1, \dots, k_m^{(0)}$ jest rozkładem liczby n na m składników nieujemnych. Na mocy (10.1), (11.5) i (11.6) otrzymujemy

$$(11.7) \quad \begin{aligned} P_n^{(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_{j_1}^{(0)} + 1, \dots, k_{j_2}^{(0)} - 1, \dots, k_m^{(0)})} &= \\ &= P_n^{(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_m^{(0)})} \cdot \frac{k_{j_2}^{(0)}}{np_{j_2}} \cdot \frac{np_{j_1}}{k_{j_1}^{(0)} + 1} > P_n^{(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_m^{(0)})} \end{aligned}$$

w sprzeczności z założeniem, że dla układu $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_m^{(0)}$ prawdopodobieństwo $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$ osiąga maksimum. Udowodniliśmy w ten sposób (11.3), a więc możemy przyjąć

$$k_j^{(0)} = [np_j] + s_j \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

gdzie s_j są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Dodając te równości stronami, widzimy, że $s_1, s_2, \dots, s_m$ spełniają związek (11.2), czyli twierdzenie jest udowodnione.

Rozkładów liczby n postaci (11.1) jest oczywiście tyle, ile jest rozkładów liczby $s = n - \sum_{j=1}^m [np_j]$ na m składników nieujemnych.

Ponieważ $s = \sum_{j=1}^m [np_j - [np_j]] \leq m - 1$, skąd wynika, że

$$\binom{s+m-1}{m-1} \leq \binom{2m-2}{m-1},$$

więc możemy wypowiedzieć twierdzenie

(11.8) Prawdopodobieństwo $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$ osiąga maksimum dla nie więcej niż

$$\binom{2m-2}{m-1}$$

układów $k_1, k_2, \dots, k_m$.

§ 12. Wzór asymptotyczny na $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}$

TWIERDZENIE 16. Dla schematu Bernoulliego zachodzi przy założeniu, że $p_j > 0$, $j=1, 2, \dots, m$, wzór asymptotyczny

$$(12.1) \quad P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{m-1} p_1 p_2 \dots p_m}} e^{-\sum_{j=1}^m \frac{(k_j - np_j)^2}{2np_j}} \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

niemal jednostajnie względem zmiennych $t_j = \frac{k_j - np_j}{\sqrt{2np_j}}$, $j=1, 2, \dots, m$.

Zauważmy przede wszystkim, że twierdzenie powyższe jest uogólnieniem na schemat wielokrotny twierdzenia 6 (§ 5), dotyczącego prostego schematu Bernoulliego, to znaczy, że dla $m=2$, $p_1=p$, $p_2=q$, $k_1=k$, $k_2=n-k$ przechodzi ono w twierdzenie 6. Istotnie,

ze wzoru (12.1) otrzymujemy w tym przypadku

$$(12.2) \quad P_n^{(k,n-k)} = P_{nk} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np} - \frac{(n-k-nq)^2}{2nq}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{q(k-np)^2 + p(k-np)^2}{2npq}} \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right)^2},$$

przy czym wzór ten zachodzi przy $n \rightarrow \infty$ niemal jednostajnie względem zmiennych $t_1 = \frac{k-np}{\sqrt{2np}}$ i $t_2 = \frac{n-k-nq}{\sqrt{2nq}} = -\frac{k-np}{\sqrt{2nq}}$, a więc ponieważ p i q są dodatnie, niemal jednostajnie względem zmiennej $t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, jak tego wymaga twierdzenie 6.

D o w ó d twierdzenia 16. Załóżmy, że

$$(12.3) \quad |k_j - np_j| \leq r\sqrt{2np_j} \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

gdzie $r > 0$. Wynika stąd, że

$$(12.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_j}{n} = p_j \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

$$(12.5) \quad k_j \rightarrow +\infty \quad \text{przy } n \rightarrow +\infty.$$

Opierając się na wzorze (10.1), stosując do występujących w nim silni wzór Stirlinga (5.6), uwzględniając wzór (12.5) i rozumując jak w § 5, otrzymujemy

$$(12.6) \quad P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} \sim \sqrt{\frac{n}{(2\pi)^{m-1} k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{np_j}{k_j} \right)^{k_j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(2\pi n)^{m-1} p_1 \cdot \dots \cdot p_m}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{np_j}{k_j} \right)^{k_j + \frac{1}{2}}.$$

Z uwagi na to, że $k_j - np_j = t_j \sqrt{2np_j}$, mamy

$$(12.7) \quad \sum_{j=1}^m t_j \sqrt{2np_j} = \sum_{j=1}^m (k_j - np_j) = 0,$$

a ponadto z uwagi na (12.3) mamy $|t| \leq r$. Jeżeli więc n jest tak duże, że

$$(12.8) \quad \frac{2r}{\sqrt{2np_j}} \leq \frac{1}{2} \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

to stosując wzór (5.4) otrzymujemy

$$(12.9) \quad \log \prod_{j=1}^m \left(\frac{np_j}{k_j} \right)^{k_j + \frac{1}{2}} = - \sum_{j=1}^m \left(np_j + t_j \sqrt{2np_j} + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{2t_j}{\sqrt{2np_j}} \right) =$$

$$= - \sum_{j=1}^m \left(np_j + t_j \sqrt{2np_j} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2t_j}{\sqrt{2np_j}} - \frac{t_j^2}{np_j} + \theta_1 \left| \frac{2t_j}{\sqrt{2np_j}} \right|^3 \right) =$$

$$= - \sum_{j=1}^m t_j \sqrt{2np_j} - \sum_{j=1}^m t_j^2 + \zeta_n = - \sum_{j=0}^m t_j^2 + \zeta_n,$$

gdzie

$$(12.10) \quad \zeta_n = - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{4\theta_1 |t_j|^3}{\sqrt{2np_j}} - \frac{2t_j^3}{\sqrt{2np_j}} + \theta_1 \frac{4|t_j|^3 t_j}{np_j} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t_j}{\sqrt{2np_j}} - \frac{t_j^2}{np_j} + \theta_1 \left| \frac{2t_j}{\sqrt{2np_j}} \right|^3 \right] \right\},$$

a więc dla $|t_j| \leq r$

$$(12.11) \quad |\zeta_n| \leq \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{4r^3}{\sqrt{2np_j}} + \frac{2r^3}{\sqrt{2np_j}} + \frac{4r^4}{np_j} + \frac{r}{\sqrt{2np_j}} + \frac{r^2}{2np_j} + \frac{4r^3}{(\sqrt{2np_j})^4} \right\}.$$

Widzimy, że przy $n \rightarrow \infty$ ζ_n dąży do zera jednostajnie względem zmiennych $t_1, t_2, \dots, t_m$, jeżeli tylko zachodzą nierówności (12.3). Stąd otrzymujemy, że

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{np_j}{k_j} \right)^{k_j + \frac{1}{2}} \sim e^{-\sum_{j=1}^m t_j^2}$$

niemal jednostajnie względem zmiennych $t_1, t_2, \dots, t_m$. To zaś, że względem na (12.6), równoważne jest wzorowi (12.1), co należało okazać.

§ 13. Częstość zjawisk i prawo wielkich liczb w wielokrotnym schemacie Bernoulliego

OKREŚLENIE 9. W wielokrotnym schemacie Bernoulliego $V = [V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$ częstością zjawiska $C^{(r)}$, $r=1, 2, \dots, m$, w i -tej próbie nazywamy zmienną losową $x^{(r)}$ ciała $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$ określoną wzorami

$$(13.1) \quad x_i^{(r)}(c_j^{(r)}) = 1, \quad x_i^{(r)}(c_j^{(l)}) = 0 \quad \text{dla } j \neq r.$$

Częstością zjawiska $C^{(r)}$ w n pierwszych próbach schematu V nazywamy zmienną losową $y_n^{(r)}$ ciała $V_n = [V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_n$ określoną wzorem

$$(13.2) \quad y_n^{(r)}(v) = \sum_{i=1}^n x_i^{(r)}(v),$$

gdzie v jest atomem ciała V_n , $x_i^{(r)}$ zaś jest przeniesieniem częstości zjawiska $C^{(r)}$ w i -tej próbie zespołu do ciała V_n .

Zmienną losową $\frac{1}{n}y_n^{(r)}$ nazywamy częstością względną zjawiska $C^{(r)}$ w n pierwszych próbach zespołu V .

Ze związków (13.1) i (13.2) wynika bezpośrednio, że

$$(13.3) \quad \overline{x_i^{(r)}} = p_r,$$

$$(13.4) \quad \overline{y_n^{(r)}} = np_r, \quad \overline{\frac{1}{n}y_n^{(r)}} = p_r.$$

Weźmy pod uwagę zespół $[V(A_i; C^{(r)})]_N$, który, zgodnie z twierdzeniem (2.3), jest podciałem zespołu V i na mocy twierdzenia 14 (§ 10, str. 165) jest schematem Bernoulliego z prawdopodobieństwem pojawienia się zjawiska $C^{(r)}$ w i -tej próbie równym p_r . Zachodzą następujące związki:

(13.5) Częstość zjawiska $C^{(r)}$ w próbie $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$, to znaczy zmienna $x_i^{(r)}$, jest przeniesieniem częstości zjawiska $C^{(r)}$ w próbie $V(A_i; C^{(r)})$ z ciała $V(A_i; C^{(r)})$ do ciała $V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})$.

Wynika to natychmiast z określenia 3 (3.8) oraz z określenia 9 we wzorach (13.1).

(13.6) Częstość zjawiska $C^{(r)}$ w n pierwszych próbach schematu V , to znaczy zmienna $y_n^{(r)}$, jest przeniesieniem częstości zjawiska $C^{(r)}$ w n pierwszych próbach schematu $[V(A_i; C^{(r)})]_N$ z ciała $[V(A_i; C^{(r)})]_N$ do ciała V_n .

Wynika to bez trudu z twierdzeń (13.2), (13.5) i określenia 4.

Weźmy teraz pod uwagę wielokrotne schematy Bernoulliego, dotyczące n prób nad zjawiskami $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$, i takie, że w każdym z nich prawdopodobieństwo pojawienia się zjawiska $C^{(r)}$ w pojedynczej próbie jest równe p_r . Udowodnione w § 6 twierdzenie 10

(prawo wielkich liczb) dotyczące prostych schematów Bernoulliego uogólnimy tu na schematy wielokrotne w następujący sposób:

TWIERDZENIE 17 (prawo wielkich liczb dla wielokrotnych schematów Bernoulliego). Dla każdego $\delta > 0$ istnieje takie n_δ , że dla $n \geq n_\delta$ wszystkie częstości względne $\frac{1}{n}y_n^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, m$, różnią się odpowiednio od prawdopodobieństw p_j o mniej niż δ , z prawdopodobieństwem większym niż $1 - \delta$, to znaczy takie n_δ , że dla $n \geq n_\delta$ jest

$$(13.7) \quad P \left[\prod_{j=1}^m \left(\left| \frac{1}{n}y_n^{(j)} - p_j \right| < \delta \right) \right] > 1 - \delta.$$

Dowód. Oznaczmy przez $P_n(\delta)$ lewą stronę nierówności (13.7) i oznaczmy dla skrócenia $z_n^{(r)}(\lambda) = z \left(\left| \frac{1}{n}y_n^{(r)} - p_r \right| \geq \lambda \right)$, to znaczy przez $z_n^{(r)}(\lambda)$ oznaczamy zdarzenie polegające na zachodzeniu nierówności $\left| \frac{1}{n}y_n^{(r)} - p_r \right| \geq \lambda$. Zachodzą następujące wzory:

$$(13.8) \quad P_n(\delta) = 1 - p \left[\sum_{j=1}^m z_n^{(j)}(\delta) \right] \geq 1 - \sum_{j=1}^m p(z_n^{(j)}(\delta)) \geq 1 - \sum_{j=1}^m p \left(z_n^{(j)} \left(\frac{\delta}{m} \right) \right).$$

Na mocy (13.6) możemy zmienną $y_n^{(r)}$, a więc również zmienną $\frac{1}{n}y_n^{(r)}$, rozpatrywać, zamiast w ciele $[V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_n$, w jego podciele $[V(A_i; C^{(r)})]_n$, które, jak wiemy, jest prostym schematem Bernoulliego. Na podstawie udowodnionego już prawa wielkich liczb (twierdzenie 10), które możemy zastosować do schematu $[V(A_i; C^{(r)})]_n$, istnieje takie n_r , że nierówność $n > n_r$ pociąga za sobą nierówność

$$(13.9) \quad p \left(z_n^{(r)} \left(\frac{\delta}{m} \right) \right) < \frac{\delta}{m}.$$

Niech $n_1, n_2, \dots, n_m$ będą istniejącymi na podstawie powyższego rozumowania liczbami naturalnymi w przypadku $r=1, 2, \dots, m$, to znaczy takimi liczbami, że dla $n > n_i$ zachodzą nierówności

$p\left(z_n^{(i)}\left(\frac{\delta}{m}\right)\right) < \frac{\delta}{m}$, $i=1,2,\dots,m$. Niech n_δ oznacza największą z liczb $n_1, n_2, \dots, n_m$. Nierówność $n \geq n_\delta$ pociąga za sobą wszystkie nierówności (13.9) dla $r=1,2,\dots,m$, a więc na mocy (13.8) mamy $P_n(\delta) < 1-\delta$, co należało okazać.

§ 14. Twierdzenie Jordana

Niech $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}$ oznaczają niektóre zjawiska schematu Bernoulliego $V = [V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)})]_N$, a $C^{(k_1)}, C^{(k_2)}, \dots, C^{(k_{m-s})}$ niech oznaczają pozostałe z nich. Przyjmijmy $z_n^{(j)} = z(y_n^{(j)} = 0)$; $z_n^{(j)}$ jest więc zdarzeniem polegającym na tym, że zjawisko $C^{(j)}$ nie pojawi się ani razu w n pierwszych próbach schematu V . Przy tych oznaczeniach zachodzi wzór

$$(14.1) \quad p(z_n^{(1)} z_n^{(2)} \dots z_n^{(s)}) = (1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \dots - p_{i_s})^n.$$

Dowód. Oznaczmy $C^* = \sum_{j=1}^{m-s} C^{(k_j)}$ i weźmy pod uwagę ciało $V_n^* = [V(A_i; C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}, C^*)]_n$. Z twierdzenia 14 (§ 10, str. 165) wynika, że V_n^* jest schematem Bernoulliego i że $p(c_i^*) = \sum_{j=1}^{m-s} p_{k_j}$, a więc $p(c_i^*) = 1 - \sum_{j=1}^s p_{i_j}$. Ale zdarzenie $z_n^{(1)} z_n^{(2)} \dots z_n^{(s)}$ jest równoważne pojawieniu się w każdej próbie zjawiska C^* , a więc zdarzeniu $\prod_{i=1}^n c_i^*$. Mamy więc

$$p(z^{(1)} \cdot z^{(2)} \cdot \dots \cdot z^{(s)}) = p\left(\prod_{i=1}^n c_i^*\right) = \left(1 - \sum_{j=1}^s p_{i_j}\right)^n,$$

co należało okazać.

Twierdzenie 18 (Jordana). Prawdopodobieństwo zdarzenia $\prod_{j=1}^s z(y_n^{(j)} \geq 1)$ polegające na tym, że każde ze zjawisk $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}$ pojawi się przynajmniej raz w n pierwszych próbach wynosi

$$(14.2) \quad p\left[\prod_{j=1}^s z(y_n^{(j)} \geq 1)\right] = 1 + \sum_{k=1}^s (-1)^k \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_k) \in C_s^{(k)}} (1 - p_{i_{r_1}} - p_{i_{r_2}} - \dots - p_{i_{r_k}})^n,$$

gdzie jak zawsze p_j oznacza prawdopodobieństwo pojawienia się zjawiska $C^{(j)}$ w pojedynczej próbie, a $C_s^{(k)}$ oznacza klasę kombinacji z s liczb po k .

Dowód. Wyprowadzimy (14.2) z wzoru Poincarégo (rozdział III, (3.7), str. 119). Mamy bowiem

$$(14.3) \quad p\left[\prod_{j=1}^s z(y_n^{(j)} \geq 1)\right] = p\left[\left(\sum_{j=1}^s z_n^{(j)}\right)'\right] = 1 - p\left(\sum_{j=1}^s z_n^{(j)}\right),$$

gdzie $z_n^{(j)}$ oznacza zdarzenia występujące we wzorze (14.1). Na mocy wzoru Poincarégo mamy

$$(14.4) \quad p\left(\sum_{k=1}^s z_n^{(k)}\right) = - \sum_{k=1}^s (-1)^k \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_k) \in C_s^{(k)}} p(z_n^{(r_1)} z_n^{(r_2)} \dots z_n^{(r_k)}),$$

co wraz z (14.3) i (14.1) daje wzór (14.2).

§ 15. Przykłady i zadania

Zadania (15.1)-(15.5) dotyczą prostych schematów Bernoulliego.

(15.1) Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że zjawisko C pojawi się po raz pierwszy w próbie o wskaźniku nieparzystym, i granicę tego prawdopodobieństwa przy $n \rightarrow \infty$.

(15.2) Udowodnić, że prawdopodobieństwo

$$P[y_n \equiv r \pmod{s}],$$

gdzie s i r oznaczają dowolne liczby naturalne, dąży przy $n \rightarrow \infty$ do $1/s$.

(15.3) Udowodnić, że jeżeli $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P_{nk} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} a_k = a.$$

Wzór ten określa więc pewną liniową metodę sumowalności.

(15.4) Znaleźć za pomocą funkcji tworzącej Laplace'a

$$E(y_n^2), \quad E(y_n^3), \quad E(y_n^4).$$

(15.5) Opierając się na prawie wielkich liczb Bernoulliego (twierdzenie 10, str. 155) udowodnić twierdzenie S. Bernsteina:

Jeżeli f jest funkcją ciągłą określoną w przedziale $E[0 \leq x \leq 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x)$$

jednostajnie ze względu na x .

(15.6) W wielokrotnym schemacie Bernoulliego znaleźć prawdopodobieństwo, że zjawisko C_1 wystąpi wcześniej niż zjawisko C_2 i granicę tego prawdopodobieństwa przy $n \rightarrow \infty$.

(15.7) Udowodnić, że w wielokrotnym schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo, że żadne z rozważanych zjawisk $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(n)}$ nie wystąpi w pierwszych $n < m$ próbach więcej niż 1 raz, wynosi

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n}.$$

(15.8) Znaleźć prawdopodobieństwo, że w wielokrotnym schemacie Bernoulliego zjawisko $C^{(1)}$ pojawi się w $2n$ pierwszych próbach, w próbach o wskaźnikach parzystych większą ilość razy niż zjawisko $C^{(2)}$ w próbach o wskaźnikach nieparzystych i granicę tego prawdopodobieństwa przy $n \rightarrow \infty$. (Chodzi tu o prawdopodobieństwo

$$\text{zdarzenia } z_n = z\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^{(1)} > \sum_{i=1}^n x_{2i-1}^{(2)}\right).$$

Rozdział V

Funkcje niemalejące

§ 1. Treść rozdziału

Zadaniem książki drugiej jest podanie w odpowiednim zestawieniu niezbędnych przy studiowaniu rachunku prawdopodobieństwa wiadomości z zakresu teorii funkcji rzeczywistych.

W rozdziale niniejszym podajemy zarys teorii funkcji niemalejących i lewostronnie ciągłych n zmiennych. Zasadniczym twierdzeniem jest tutaj pochodzące od Helly'ego twierdzenie 6 (§ 4, str. 184). Paragraf 5 zawiera teorię odwracania funkcji niemalejących jednej zmiennej.

§ 2. Funkcje niemalejące n zmiennych

Punkty n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej R_n będziemy dla skrócenia oznaczali przez (t_i) , (t'_i) , zamiast $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$. Będziemy również pisali krótko $(t_i) < (t'_i)$ zamiast $t_1 < t'_1, t_2 < t'_2, \dots, t_n < t'_n$. Analogiczne oznaczenia przyjmujemy dla innego typu nierówności.

Przez funkcję określoną w zbiorze ACR_n będziemy rozumieli funkcję rzeczywistą n zmiennych $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, określoną dla $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i) \in A$. Zgodnie z zawartą umową co do oznaczania punktów przestrzeni R_n wartość takiej funkcji w punkcie (x_i) będziemy oznaczali przez $f((x_i))$.

OKREŚLENIE 1. Funkcję f określoną w zbiorze ACR_n będziemy nazywali *niemalejącą*, jeżeli dla wszystkich $(t_i), (t'_i) \in A$ i $(t_i) \leq (t'_i)$ zachodzi $f((t_i)) \leq f((t'_i))$. W przypadku gdy dla każdych $(t_i), (t'_i) \in A$ i $(t_i) \leq (t'_i)$ zachodzi $f((t_i)) \geq f((t'_i))$, funkcję f nazywamy *nierosnącą*.

OKREŚLENIE 2. Jeżeli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni R_n , a f jest funkcją określoną w zbiorze A i $(t_i) \in R_n$, to symbolem

$$(2.1) \quad f_A(t_i - 0) = f_A(t_1 - 0, t_2 - 0, \dots, t_n - 0)$$

będziemy oznaczali liczbę rzeczywistą ξ spełniającą warunek: