

Rozdział II

Ideały, ciała zdarzeń

§ 1. Treść rozdziału

Zadaniem niniejszego rozdziału jest przejście od ogólnej teorii ciał Boole'a do ciał bardziej specjalnych, które będą stanowiły właściwy substrat dla teorii prawdopodobieństwa. W tym celu wprowadzamy przede wszystkim nowe pojęcie, zapożyczone z teorii pierścieni, a mianowicie pojęcie ideału, które — wraz z zastosowaniami — omawiamy w paragrafach 1-6. Teoria ideałów w ciałach Boole'a została przez różnych matematyków rozwinięta w ostatnich czasach (Stone, Tarski, Birkhoff¹⁾) i służy do bardzo wielu celów, między innymi do dowodu twierdzenia o izomorfizmie ciał Boole'a z ciałami zbiorów (twierdzenie Stone'a, § 3) i ogólnego przedstawiania kongruencji (§ 6). W paragrafie 7 omawiamy pojęcie zdarzenia i formułujemy aksjomatykę tego pojęcia sprowadzającą się w zasadzie do tego, że ogół zdarzeń jest ciałem Boole'a.

Paragrafy 8, 11, 12 i 14 zawierają konstrukcje pewnych specjalnych ciał zdarzeń, mianowicie tak zwanych ciał kanonicznych i ich zespolów; ciała te znajdują zastosowanie w IV rozdziale książki. Konstrukcje te opierają się na trzech zasadniczych operacjach: relatywizacji i scalaniu ciał oraz nowej operacji — produktowaniu w ciele zdarzeń, którą omawiamy w paragrafie 10. Po omówieniu każdej z operacji podajemy przykład jej zastosowania i wyjaśnienia intuicyjne dotyczące jej własności (§ 9, § 13 i § 15). Treść tego rozdziału można by scharakteryzować jako zarys opisowej teorii gier, to jest takiej, w której pojęcie prawdopodobieństwa jeszcze nie występuje.

¹⁾ M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. of the Amer. Math. Soc. vol. 40 (1936), str. 37-111; A. Tarski, *Ideale in vollständigen Mengenkörpern I, II*, Fund. Math. 32 i 33 (1939), (1945), str. 45-63 i 51-65; G. Birkhoff, cytowane w odnośniku 1 rozdz. I (str. 33).

§ 2. Ideały w ciałach Boole'a

OKREŚLENIE 1. Podzbiór I ciała Boole'a U , $\text{rel} \equiv$ nazywa się *dziedziczny*, jeśli

(2.1) $z u \in I$ i $v \rightarrow u$, $\text{rel} \equiv$ wynika $v \in I$;
addytywny, jeśli

(2.2) $z u \in I$ i $v \in I$ wynika $u + v \in I$;
przeliczalnie addytywny (*zupełnie addytywny*), jeśli U jest przeliczalnie addytywnym ciałem (zupełnie addytywnym ciałem) oraz

(2.3) dla każdego przeliczalnego (lub po prostu każdego) zbioru $X \subset I$ mamy $\sum_{u \in X} u \in I$.

Zbiór ICU nazywa się *ideałem* ciała U , $\text{rel} \equiv$ (*Przeliczalnie addytywnym ideałem* ciała U , $\text{rel} \equiv$, *zupełnie addytywnym ideałem* ciała U , $\text{rel} \equiv$), jeśli jest on dziedziczny i addytywny (przeliczalnie addytywny, zupełnie addytywny). Ideał I ciała U , $\text{rel} \equiv$ nazywa się *właściwy*, jeśli $I \neq U$.

Z podanego określenia wynika kilka prostych wniosków:

(2.4) *Każdy ideał jest zbiorem nasyconym.*

(2.5) *Każdy ideał ciała U , $\text{rel} \equiv$ jest ideałem ciała U .*

(2.6) *Zbiór elementów pustych $[0]$ jest ideałem.*

Zbiór elementów pustych nazywamy *ideałem zerowym*.

(2.7) *Każdy ideał zawiera ideał zerowy.*

(2.8) *Na to, żeby ICU był ideałem ciała U , $\text{rel} \equiv$, potrzeba i wystarczy, aby zbiór I był nasycony, spełniał warunek (2.2) oraz warunek*

(2.1*) *Jeżeli $u \in I$, $v \in U$, to $u \cdot v \in I$.*

Ponieważ w zwykłych ciałach Boole'a każdy podzbiór ciała jest nasycony, więc w takich ciałach ideał można określić warunkami (2.1*) i (2.2). W tej postaci określenie ideału jest prawie identyczne z określeniem ideału w pierścieniach liczbowych.

Zanotujmy jeszcze następujące dwa twierdzenia:

(2.9) *Jeżeli V , $\text{rel} \equiv$ jest podciałem, I zaś ideałem ciała U , $\text{rel} \equiv$, to $I \cdot V$ jest ideałem ciała V , $\text{rel} \equiv$.*

(2.10) *Jeżeli K jest rodziną ideałów ciała U , $\text{rel} \equiv$ (przeliczalnie addytywnych ideałów ciała U , $\text{rel} \equiv$, zupełnie addytywnych ideałów ciała U , $\text{rel} \equiv$), to $\prod_{I \in K} I$ jest ideałem tego ciała (przeliczalnie addytywnym ideałem tego ciała, zupełnie addytywnym ideałem tego ciała).*

Twierdzenie 1. Dla każdego zbioru $X \subset U$ istnieje najmniejszy ideał (przeliczalnie addytywny ideał) (por. rozdział I, § 8, str. 42), zawierający zbiór X . Jest nim zbiór elementów zawartych (rel $\equiv$) w skończonych sumach (przeliczalnych sumach) elementów zbioru X , a więc takich elementów v , że

$$(2.11) \quad v \rightarrow \sum_{i=1}^n u_i, \text{ rel } \equiv, \text{ gdzie } u_1, u_2, \dots, u_n \in X$$

$$[v \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} u_i, \text{ rel } \equiv, \text{ gdzie } u_1, u_2, \dots \in X].$$

Dowód. Istnienie najmniejszego (przeliczalnie addytywnego) ideału zawierającego dany zbiór X , wynika łatwo z (2.10). Oznaczając bowiem przez K klasę wszystkich takich ideałów J , że $X \subset J$, widzimy, że $\prod_{J \in K} J$ jest żądanym ideałem. Z drugiej strony elementy spełniające (2.11) należą oczywiście do każdego ideału klasy K i, jak łatwo sprawdzić, tworzą ideał zawierający X , a więc twierdzenie 1 jest udowodnione. Dla ideałów zupełnie addytywnych zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia 1, ze względu jednak na specjalną strukturę ideałów zupełnie addytywnych poznamy je później.

Najmniejszy ideał, zawierający dany zbiór X oznaczamy przez $J(X)$, a najmniejszy przeliczalnie addytywny ideał zawierający dany zbiór X oznaczamy przez $J_p(X)$.

(2.12) Ideał $J(X)$ (ideał $J_p(X)$) jest ideałem właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy suma żadnego skończonego (przeliczalnego) podzbioru X nie jest równoważna 1.

Określenie 2. Ideał I nazywamy ideałem głównym, jeżeli istnieje taki element u , że $I = J(u)$. Ideał $J(u)$ oznaczamy przez $J(u)$. Element u nazywamy elementem tworzącym ideału $J(u)$.

Na mocy tego określenia mamy:

(2.13) Ideał $J(u)$ jest zbiorem tych elementów, które zawierają się w u .

(2.14) Jeżeli zbiór X jest skończony (przeliczalny), to ideał $J(X)$ ($J_p(X)$) jest ideałem głównym, a jego elementem tworzącym jest $\sum_{u \in X} u$.

Twierdzenie 2. Ideał zupełnie addytywny I jest zawsze główny, a jego elementem tworzącym jest $\sum_{u \in I} u$.

Dowód. pozostawiamy czytelnikowi.

Z twierdzenia 2 wynika natychmiast, że

(2.15) Najmniejszym ideałem zupełnie addytywnym zawierającym zbiór X jest ideał główny $J(\sum_{u \in X} u)$.

Przykładami ideałów w ciele $W(X)$, gdzie X jest dowolnym zbiorem, są: klasa wszystkich podzbiorów skończonych zbioru X , klasa wszystkich podzbiorów przeliczalnych zbioru X i klasa wszystkich podzbiorów zbioru X nie zawierających danego elementu $x \in X$. Pierwszy z nich jest właściwy, jeżeli zbiór X jest nieskończony; nie jest on wtedy przeliczalnie addytywny. Drugi jest zawsze przeliczalnie addytywny i właściwy, jeżeli zbiór X jest nieprzeliczalny. Trzeci wreszcie jest zawsze właściwy, zupełnie addytywny i główny; jego elementem tworzącym jest $X - (x)$.

Określenie 3. Ideał I ciała U , rel $\equiv$ nazywa się *pierwszy*, jeśli jest właściwy, a ponadto spełnia warunek:

(2.16) dla każdego $u \in U$ bądź $u \in I$, bądź $u' \in I$.

Podamy kilka własności ideałów pierwszych:

(2.17) Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby ideał I był pierwszy, jest, aby każdy różny od niego i zawierający go ideał nie był właściwy.

Dla dowodu konieczności warunku (2.17) przypuśćmy, że I_1 i I_2 są dwoma ideałami, $I_1 \subset I_2 \neq U$ i $u \in I_2 - I_1$. Element u' nie należy oczywiście do I_2 , gdyż I_2 jest ideałem właściwym, nie należy więc tym bardziej do I_1 , a ponieważ z założenia u nie należy do I_1 , więc warunek (2.16) nie jest spełniony i I_1 nie jest ideałem pierwszym. Przypuśćmy teraz, że I nie jest ideałem pierwszym i niech ani u , ani u' nie należy do I . Ideał $J(I + (u))$ jest wtedy właściwy, gdyż z $1 \rightarrow u + \sum_{i=1}^n u_i, \text{ rel } \equiv, u_1, u_2, \dots, u_n \in I$ wynika $1 \equiv u + \sum_{i=1}^n u_i, \text{ rel } \equiv$ i $\sum_{i=1}^n u_i \in I$, stąd zaś wynika, że $u' \rightarrow \sum_{i=1}^n u_i, \text{ rel } \equiv$ i ostatecznie $u' \in I$, wbrew założeniu. Ale ideał $J(I + (u))$ jest różny od I , zawiera I i jest właściwy, dostateczność warunku jest więc udowodniona.

Udowodnimy teraz twierdzenie:

(2.18) Ideał główny jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy jego elementem tworzącym jest u' , gdzie u jest atomem.

Dowód. Ideał $J(u')$, gdzie u jest atomem, jest zbiorem tych elementów, które nie zawierają u . Z własności atomów (por. rozdział I, § 12, str. 61) łatwo wynika, że ideał ten jest pierwszy. Jeżeli natomiast u nie jest atomem, to istnieje element v niepusty i nierównoważny u , zawarty w u . Ideał $J(u' + v)$ jest ideałem wła-

ściwym, różnym od $J(u')$ i zawierającym $J(u')$. Na mocy (2.17) $J(u')$ nie jest więc ideałem pierwszym.

Ostatni z ideałów podanych w poprzednim przykładzie jest pierwszy. W ciele $\mathcal{W}(X)$ nie umiemy podać efektywnie, to znaczy bez pomocy pewnika wyboru, przykładu ideału pierwszego, który by nie był główny.

Niekiedy rozpatruje się podzbiory F ciał Boole'a o następujących własnościach:

(2.19) Jeżeli $u \in F$ i $u \rightarrow v$, $\text{rel} \equiv$, to $v \in F$.

(2.20) Jeżeli $u \in F$ i $v \in F$, to $u \cdot v \in F$.

Zbiory F o takich własnościach nazywają się *filtrami* (lub *przeciwiideałami*). Nie trudno dowieść, że

(2.21) Jeżeli I jest ideałem, to zbiór elementów u' , gdzie $u \in I$ jest filtrem, i na odwrót.

(2.22) Jeżeli I jest ideałem, to $I + F$, gdzie F jest filtrem elementów u' , $u \in I$, jest ciałem; I jest ideałem pierwotnym tego ciała.

(2.23) Jeżeli U jest ciałem dla działań $+$, $\cdot$ i $'$ oraz I jest ideałem ciała U , to I jest filtrem ciała U rozpatrywanego dla działań $\cdot$, $+$ i $'$ (por. rozdział I, § 3, twierdzenie 1, str. 27).

Pojęcie filtru znajduje zastosowanie w topologii¹⁾.

Podamy jeszcze kilka mniej elementarnych przykładów ideałów.

Dla każdej liczby kardynalnej nieskończonej m klasa tych podzbiorów zbioru X , które są mocy nie większej od m , jest ideałem ciała $\mathcal{W}(X)$. Ideał ten jest właściwy, jeśli moc zbioru X jest większa od m .

W przestrzeni topologicznej T klasa zbiorów nigdzie gęstych i klasa zbiorów pierwszej kategorii (p. wstęp, str. 14), są ideałami ciała $\mathcal{W}(T)$; drugi z nich jest przeliczalnie addytywny.

W przestrzeni R_n klasa zbiorów n -wymiarowej miary Lebesgue'a zero jest ideałem przeliczalnie addytywnym w $\mathcal{W}(R_n)$. Klasa zbiorów miary pełnej Lebesgue'a na odcinku $E[0 < x < 1]$ jest filtrem w ciele podzbiorów tego odcinka.

§ 3. Twierdzenie o izomorfizmie ciał Boole'a z ciałami zbiorów

W paragrafie 7 z poprzedniego rozdziału wykazaliśmy, że każde ciało zbiorów $\mathcal{W}(X)$, a więc i każde jego podciało (podciała ciał $\mathcal{W}(X)$ nazywamy po prostu ciałami zbiorów, por. rozdział I, § 8, str. 45),

¹⁾ Por. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, Première partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Livre III. Topologie général, Chap. I, II, Paris 1940.

jest ciałem Boole'a. W tym paragrafie wykazemy, że zachodzi twierdzenie niejako odwrotne: w sensie algebry działań skończonych każde ciało Boole'a może być uważane za ciało zbiorów. Ściślej:

TWIERDZENIE 3¹⁾. Dla każdego ciała Boole'a U istnieje izomorficzne z nim ciało zbiorów K . Ciało to jest podciałem ciała $\mathcal{W}(I)$, gdzie I jest klasą ideałów pierwszych ciała U .

Zanim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia podamy kilka lematów:

(3.1) Jeżeli X jest klasą ideałów właściwych ciała U uporządkowanych relacją zawierania (to znaczy: dla $I_1, I_2 \in X$ mamy bądź $I_1 \subset I_2$, bądź $I_2 \subset I_1$), to $\sum_{I \in X} I$ jest ideałem właściwym ciała U .

Niech

$$\sum_{I \in X} I = I_0.$$

Należy sprawdzić, że I_0 jest zbiorem dziedzicznym i addytywnym. Niech $u \in I_0$ i $v \rightarrow u$. Istnieje wtedy taki ideał I , że $u \in I \in X$, a ponieważ I jest ideałem, więc $v \in I$, skąd wynika, że $v \in I_0$. Niech teraz $u_1, u_2 \in I_0$. Istnieją więc takie ideały I_1, I_2 , że $u_1 \in I_1 \in X$ i $u_2 \in I_2 \in X$. Ponieważ klasa X jest uporządkowana relacją zawierania, więc $I = I_1 + I_2$ jest ideałem (a mianowicie bądź $I = I_2$, w przypadku $I_1 \subset I_2$, bądź $I = I_1$, w przypadku $I_2 \subset I_1$) i mamy $u_1, u_2 \in I \in X$, z czego wynika, że $u_1 + u_2 \in I$ i ostatecznie $u_1 + u_2 \in I_0$. I_0 jest więc ideałem. Ideał ten jest właściwy, gdyż z założenia, że wszystkie ideały klasy X są właściwe, wynika, że element 1 nie należy do żadnego z nich, a więc nie należy też do sumy I_0 .

W dalszych dowodach posłużymy się następującym lematem należącym do teorii mnogości:

(3.2) Dla każdej klasy X podzbiorów ustalonego zbioru X istnieje taka klasa $X_0 \subset X$ uporządkowana relacją zawierania, że każda klasa $Y \subset X$, zawierająca X_0 i uporządkowana relacją zawierania, jest z nią identyczna.

Udowodnimy teraz zasadniczy lemat:

(3.3) Dla każdego ideału właściwego I ciała U istnieje taki ideał pierwszy I_p , że $I \subset I_p$.

Zastosujmy lemat (3.2) do klasy $I(I)$ tych ideałów właściwych ciała U , które zawierają I (klasa ta nie jest pusta, gdyż $I \in I(I)$)

¹⁾ Twierdzenie to podał po raz pierwszy M. H. Stone w pracy cytowanej w odnośniku 1 (str. 68), Theorem 67, str. 106.

i niech $I_0 \subset I(I)$ będzie klasą o własnościach wyrażonych w (3.2). Ponieważ klasa I_0 jest uporządkowana, więc

$$I_p = \sum_{I \in I_0} I$$

jest ideałem właściwym. Gdyby I_p nie był ideałem pierwszym, to na mocy (2.17) istniałby ideał właściwy I^* różny od I_p i zawierający I_p , a więc zawierający też każdy z ideałów klasy I_0 . Klasa $I_0 + (I^*)$ byłaby więc zawarta w $I(I)$, zawierałaby klasę I_0 , byłaby od niej różna, a prócz tego byłaby uporządkowana relacją zawierania, wbrew założeniu, według którego taka klasa nie istnieje.

Łatwym wnioskiem z lematu (3.3) jest

(3.4) *Jeżeli u nie jest elementem pustym, to istnieje ideał pierwszy I_p , do którego u nie należy.*

Z założenia, że u nie jest elementem pustym wynika, że ideał $J(u')$ jest ideałem właściwym. Na mocy (3.3) istnieje ideał pierwszy I_p zawierający $J(u')$. Element u' należy oczywiście do I_p . Gdyby i u należało do I_p , to $u + u' = 1$ należałoby do I_p i ideał I_p nie byłby właściwy.

Opierając się na tych lematach możemy udowodnić twierdzenie 3. Oznaczmy mianowicie przez I klasę ideałów pierwszych ciała U i założmy dla $u \in U$

$$h(u) = \bigcap_{I \in I} [u \notin I],$$

$$\mathfrak{K} = \bigcap_X [X = h(u), \text{ dla pewnego } u \in U].$$

Z addytywności i dziedziczności ideałów wynika, że

$$h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2),$$

z warunku zaś (2.16), który spełniają ideały pierwsze, wynika, że

$$h(u') = I - h(u) = h(u)'$$

Równości te dowodzą, że $\mathfrak{K}$ jest ciałem zbiorów i że U jest homomorficzne z $\mathfrak{K}$. Udowodnimy jeszcze, że funkcja h jest wzajemnie jednoznaczna.

Niech $u_1, u_2 \in U$ i $u_1 \neq u_2$. Na mocy (4.15) (rozdział I, str. 31) $u_1 u_2' \neq 0$ lub $u_1' u_2 \neq 0$. Wystarczy ograniczyć się do pierwszego przypadku, gdyż drugi jest symetryczny. Na mocy (3.4) istnieje ideał pierwszy I_p , do którego $u_1 \cdot u_2'$ nie należy. Wobec tego również u_1 nie należy do I_p , gdyż $u_1 \cdot u_2' \rightarrow u_1$. Ideał I_p jest pierwszy, więc $(u_1 \cdot u_2')' =$

$= u_1' + u_2$ należy do I_p , skąd wynika, że u_2 należy do I_p . Mamy więc

$$I_p \in h(u_1) \text{ i } I_p \notin h(u_2),$$

zatem $h(u_1) \neq h(u_2)$. Funkcja h jest więc wzajemnie jednoznaczna i U jest izomorficzne z $\mathfrak{K}$.

Należy zauważyć, że tak zbudowane ciało zbiorów $\mathfrak{K}$ jest izomorficzne z ciałem U tylko pod względem działań skończonych. Jeżeli na przykład $u_1, u_2, \dots$ jest ciągiem różnych elementów ciała U i suma $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ istnieje w ciele U , to element $h(\sum_{i=1}^{\infty} u_i)$ nie jest mnogościową sumą elementów $h(u_i)$. Można wykazać, że suma ta w ogóle do ciała $\mathfrak{K}$ nie należy, a więc jeżeli tylko ciało U jest nieskończone, to ciało $\mathfrak{K}$ nie jest przeliczalnie addytywne.

Przyjmując za otoczenia w klasie I zbiory należące do ciała K uzyskujemy przestrzeń topologiczną *dwuzwartą* i *całkowicie niespójną* (to znaczy taką, że każde dwa jej punkty dają się oddzielić zbiorem otwarto-domkniętym). K jest ciałem zbiorów otwarto-domkniętych tej przestrzeni. Twierdzenie 3 można więc wysłowić w następujący sposób:

Twierdzenie 3'. Każde ciało Boole'a jest izomorficzne z ciałem zbiorów otwarto-domkniętych pewnej przestrzeni topologicznej dwuzwartej i całkowicie niespójnej¹⁾.

Nasuwa się pytanie, czy każde przeliczalnie addytywne ciało Boole'a jest izomorficzne z pewnym przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów. Okazuje się, że tak nie jest, zachodzi natomiast twierdzenie słabsze:

Każde przeliczalnie addytywne ciało Boole'a jest przeliczalnie homomorficzne z pewnym ciałem zbiorów²⁾.

W paragrafie tym mówiliśmy o zwykłych ciałach Boole'a. Chcąc przenieść uzyskane wyniki na ciała zrelatywizowane $U, \text{rel} \equiv$, wystarczy je zastosować do ciała ilorazowego $U/\equiv$.

§ 4. Struktura ideałów

Twierdzenie 4. Relacja zawierania indukuje w zbiorze I wszystkich ideałów dowolnego ciała $U, \text{rel} \equiv$ strukturę. Struktura ta jest zupełnie addytywna i zupełnie mnożytywna, to znaczy

¹⁾ Wysłowienie to pochodzi również od H. M. Stone'a, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 41 (1937), Theorem 1, str. 378.

²⁾ L. H. Loomis, *On the representation of σ -complete Boolean algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), str. 757-760 i R. Sikorski, *On the representation of the Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. 35 (1948), str. 247-258.

(4.1) dla każdej klasy $XC I$ istnieje ideał $I \in I$ zawierający każdy z ideałów klasy X i zawarty w każdym ideale mającym tę własność; jest nim ideał $J\left(\sum_{I \in X} I\right)$,

(4.2) dla każdej klasy $XC I$ istnieje ideał $I \in I$ zawierający się w każdym ideale klasy X i zawierający każdy ideał mający tę własność; jest nim ideał $\prod_{I \in X} I$ (por. określenie 2, rozdział I, § 6, str. 35).

Dowód tego twierdzenia otrzymujemy natychmiast przez powołanie się na twierdzenie 1 i (2.10) (str. 69 i 70).

Należy zauważyć, że struktura ta nie jest na ogół strukturą typu B^1) (por. rozdział I, § 5).

Ideał $J\left(\sum_{I \in X} I\right)$ nazywamy sumą ideałów klasy X i oznaczamy przez SI , ideał $\prod_{I \in X} I$ nazywamy iloczynem ideałów klasy X . W przypadku, gdy X jest klasą skończoną, $X = (I_1, I_2, \dots, I_n)$, sumę ideałów klasy X oznaczamy też przez $I_1 \vee I_2 \vee \dots \vee I_n$, iloczyn zaś przez $I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_n$. Należy pamiętać, że suma ideałów klasy $XC I$ w sensie struktury ideałów nie pokrywa się z mnogościową sumą ideałów tej klasy. Mamy mianowicie zawsze

$$\sum_{I \in X} I \subset SI,$$

ale zbiór $\sum_{I \in X} I$ nie jest na ogół ideałem.

Twierdzenie 5. Relacja zawierania indukuje w zbiorze ideałów głównych $J^{(G)}$ dowolnego ciała $U, \text{rel} \equiv$ strukturę typu B ; struktura ta jest izomorficzna z ciałem $U/\equiv$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że funkcją ustalającą żądany izomorfizm jest funkcja $h(J(u)) = [u]$.

W ciele $J^{(G)}$ (przy działaniach wyznaczonych przez zawieranie, które indukuje w nim strukturę typu B ; por. rozdział I, § 5, twierdzenie 3, str. 34) sumą ideałów $J(u_1)$ i $J(u_2)$ jest ideał $J(u_1 + u_2)$, iloczynem — ideał $J(u_1 \cdot u_2)$, wreszcie uzupełnieniem ideału $J(u)$ jest ideał $J(u')$. Tylko iloczyn ideałów w $J^{(G)}$ pokrywa się z iloczynem mnogościowym, to znaczy

$$(4.3) \quad J(u_1 \cdot u_2) = J(u_1) \cdot J(u_2).$$

¹⁾ Strukturę tę badał szczegółowo A. Tarski w pracy cytowanej w odnośniku ¹⁾, rozdz. I, str. 55 jak też w drugiej części tej pracy — Fund. Math. 26 (1936), str. 283-301.

Pozostałe działania nie pokrywają się z odpowiednimi działaniami mnogościowymi. Natomiast suma ideałów $J(u_1)$ i $J(u_2)$ w ciele $J^{(G)}$ pokrywa się z sumą tych ideałów w strukturze I , mamy bowiem zawsze

$$(4.4) \quad J(u_1 + u_2) = J(u_1) \vee J(u_2).$$

Jeżeli ciało $U, \text{rel} \equiv$ jest przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne), to ciało $J^{(G)}$ również jest przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne). Sumą ideałów klasy $XC J^{(G)}$ jest ideał główny $J\left(\sum_{J(u) \in X} u\right)$, a iloczynem ideał $J\left(\prod_{J(u) \in X} u\right)$. Iloczyn nieskończony ideałów w ciele $J^{(G)}$ (o ile istnieje) pokrywa się z iloczynem w strukturze I , a więc z iloczynem mnogościowym, mamy bowiem

$$(4.5) \quad J\left(\prod_{J(u) \in X} u\right) = \prod_{J(u) \in X} J(u),$$

natomiast suma nieskończona ideałów w ciele $J^{(G)}$ nie pokrywa się nigdy z sumą tych ideałów w strukturze I . Suma $\sum_{J(u) \in X} J(u)$ nie jest ideałem głównym, jeżeli tylko klasa X jest nieskończona. Mamy natomiast (jeżeli suma $\sum_{J(u) \in X} u$ istnieje w ciele U):

$$(4.6) \quad \sum_{J(u) \in X} J(u) \subset J\left(\sum_{J(u) \in X} u\right).$$

Warto jeszcze zauważyć, że

$$(4.7) \quad \text{Jeżeli } J(u_1) \subset J(u_2) \subset J(u_3) \subset \dots \text{ i suma } \sum_{i=1}^{\infty} u_i \text{ istnieje, to}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} J(u_i) = \sum_{i=1}^{\infty} J(u_i) \subset J\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right),$$

jednak nawet i w tym przypadku suma ideałów nie jest ideałem głównym, jeżeli tylko w ciągu $J(u_1), J(u_2), \dots$ jest nieskończenie wiele różnych wyrazów.

Ciało $J^{(G)}$ jest ważne dlatego, że jak wynika z twierdzenia 2 (§ 2, str. 70) w przypadku, gdy ciało U jest zupełnie addytywne $J^{(G)}$ jest ciałem ideałów zupełnie addytywnych.

§ 5. Różnica i różnica symetryczna

Określimy obecnie dwa nowe działania w ciałach Boole'a, które będą nam przydatne przy dalszym omawianiu własności ideałów.

Określenie 4.

a) Różnicą dwóch elementów u i v ciała $U, \text{rel} \equiv$ nazywamy element uv' . Element ten oznaczamy przez $u - v$.

b) *Różnicą symetryczną* elementów u i v nazywamy element $(u-v)+(v-u)$. Element ten oznaczamy przez $u \dot{-} v$.

Na podstawie określenia 4 mamy

$$(5.1) \quad u-v=uv',$$

$$(5.2) \quad u \dot{-} v = (u-v) + (v-u) = uv' + vu' = uv' + u'v.$$

Działanie różnicy symetrycznej jest przemienne, to znaczy, że

$$(5.3) \quad u \dot{-} v = v \dot{-} u.$$

Działanie różnicy zwykłej nie jest przemienne.

(5.4) *W ciałach zbiorów różnica w sensie określenia 4a jest identyczna z mnogościową różnicą zbiorów, to znaczy $X-Y$ jest zbiorem tych elementów, które należą do X i nie należą do Y ; różnica symetryczna $X \dot{-} Y$ jest zbiorem elementów, które należą do jednego i tylko jednego ze zbiorów X, Y .*

Zachodzą następujące wzory:

$$(5.5) \quad u-u=0,$$

$$(5.6) \quad u-0=u, \quad 1-u=u',$$

$$(5.7) \quad (u-v)-w=(u-w)-v,$$

$$(5.8) \quad (u \dot{-} v) \dot{-} w = u \dot{-} (v \dot{-} w),$$

$$(5.9) \quad u \dot{-} u=0,$$

$$(5.10) \quad 0 \dot{-} u=u,$$

$$(5.11) \quad u \dot{-} (u \dot{-} v) = v,$$

$$(5.12) \quad u \cdot (v \dot{-} w) = uv \dot{-} uw,$$

$$(5.13) \quad (u \dot{-} w) \rightarrow [(u \dot{-} v) + (v \dot{-} w)],$$

$$(5.14) \quad u \dot{-} w = u' \dot{-} w',$$

$$(5.15) \quad u \dot{-} v \dot{-} u \cdot v = u + v,$$

$$(5.16) \quad 1 \dot{-} u = u'.$$

Dowody tych wzorów można łatwo uzyskać w następujący sposób: dowodzimy ich najpierw korzystając z (5.4) dla ciał zbiorów, to znaczy zakładając, że u, v i w są podzbiorami jakiegoś ustalonego zbioru X , 0 jest zbiorem pustym a $1=X$. Gdyby któryś z tych wzorów nie był spełniony w jakimś ciele U , rel $\equiv$, a więc i w ciele U , to nie byłby też spełniony w istniejącym na mocy twierdzenia 3 ciele zbiorów izomorficznym z U , whrew temu co udowodniliśmy poprzednio.

Analogiczną metodą możemy dowodzić różnych innych własności ciał Boole'a. Z twierdzenia 3 wynika bowiem, że każda własność działań skończonych przysługuje wszystkim ciałom Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy przysługuje ciałom zbiorów.

Niech U będzie zwykłym ciałem Boole'a. Z (5.8), (5.10) i (5.3) wynika, że U jest grupą abelową ze względu na działanie $\dot{-}$, a modułem tej grupy jest 0 . Dalej, na podstawie (5.12) i (B-2) widzimy, że U jest pierścieniem ze względu na różnicę symetryczną jako dodawanie i iloczyn jako mnożenie w pierścieniu. Pierścień ten jest przemienny, ma jedność, którą jest element $1=u'+u$, a prócz tego jest *idempotentny*, to znaczy spełnione jest w nim prawo

$$u \cdot u = u.$$

Pierścień w ten sposób utworzony nazywamy *pierścieniem różnicy symetrycznej ciała U* . Dowodzi się, że każdy pierścień idempotentny z jednością jest izomorficzny z pewnym pierścieniem różnicy symetrycznej.

Ponieważ, jak wynika z (5.15) i (5.16), zarówno dodawanie jak dopełnianie dają się określić za pomocą mnożenia i różnicy symetrycznej, więc teoria ciał Boole'a (przynajmniej jeżeli chodzi o teorię działań skończonych) może być uważana za rozdział teorii pierścieni.

§ 6. Ideały a kongruencje

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli $\equiv$ jest kongruencją ciała U , to zbiór $I = \bigcup_u [u \equiv 0]$ jest ideałem ciała U .*

Dowód. Niech $u \in I$ i $v \rightarrow u$. Mamy więc $u+v=u$, ale na mocy własności kongruencji i założenia, że $u \equiv 0$, otrzymujemy $u+v \equiv v+0=v$, skąd wynika, że $v \equiv 0$. Niech $u, v \in I$. Mamy więc $u \equiv 0$ i $v \equiv 0$, a zatem $u+v \equiv 0+0=0$. Zbiór I jako dziedziczny i addytywny jest ideałem.

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli I jest ideałem ciała U , to relacja $u \equiv v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \dot{-} v \in I$ jest kongruencją w U i mamy:*

$$(6.1) \quad I = \bigcup_u [u \equiv 0].$$

Dowód. Z (2.7) i (5.9) wynika zwrotność, z (5.3) zaś symetryczność relacji $\equiv$; przechodniość jej wynika z (5.13), a więc jest ona typu równoważności. Niech $u_1 \equiv u_3$ i $u_2 \equiv u_4$, a więc $u_1 \dot{-} u_3 \in I$ i $u_2 \dot{-} u_4 \in I$; wtedy $(u_1 \dot{-} u_3) + (u_2 \dot{-} u_4) \in I$. Ale $(u_1 + u_2) \dot{-} (u_3 + u_4) = (u_1 + u_2)(u_3 + u_4)' + (u_1 + u_2)'(u_3 + u_4) = (u_1 + u_2)u_3'u_4' + u_1'u_2'(u_3 + u_4) = u_1u_3'u_4' + u_2u_3'u_4' + u_1'u_2'u_3 + u_1'u_2'u_4 \rightarrow (u_1u_3' + u_1'u_3) + (u_2u_4' + u_2'u_4) = (u_1 \dot{-} u_3) + (u_2 \dot{-} u_4)$, a więc $(u_1 + u_2) \dot{-} (u_3 + u_4) \in I$, czyli $u_1 + u_2 \equiv$

$\equiv u_3 + u_4$. Podobnie dowodzi się, że z warunków $u_1 \equiv u_3$ i $u_2 \equiv u_4$ wynika warunek $u_1 \cdot u_2 \equiv u_3 \cdot u_4$, a więc relacja $\equiv$ spełnia warunek (10.10) (z rozdziału I, str. 51). Spełnianie przez relację $\equiv$ warunku (10.11) z rozdziału I wynika natychmiast z (5.14), a więc w myśl określenia 7 z rozdziału I jest ona kongruencją. Identyczność (6.1) wynika z (5.10).

Twierdzenia 6 i 7 wskazują na ścisły związek między ideałami a kongruencjami. Mówią one, że przyporządkowanie każdej kongruencji ideału wzorem (6.1) jest wzajemnie jednoznaczne, skutkiem czego możemy zamiast kongruencji rozpatrywać przyporządkowane im ideały. Skorzystamy z tego w szczególności przy rozpatrywaniu ciał zrelatywizowanych. Będziemy mianowicie przez $U, \text{rel} I$, gdzie I jest ideałem ciała U , oznaczali ciało $U, \text{rel} \equiv$, gdzie kongruencja $\equiv$ jest związana z ideałem I identycznością (6.1).

Również ciało $U/\equiv$ będziemy oznaczali w tym przypadku przez U/I i nazywali *ciałem U podzielonym przez ideał I* . Aby przy rozpatrywaniu ciała $U, \text{rel} I$ zaznaczyć, że równoważność, a więc i zawieranie, są związane z ideałem I , piszemy $u \equiv v, \text{rel} I$ i $u \rightarrow v, \text{rel} I$. O ideałach związanych z kongruencją $\equiv$ identycznością (6.1) mówimy, że jest *ideałem elementów równoważnych* (według tej kongruencji) *zeru*.

Pozostaje do omówienia stosunek ideałów przeliczalnie addytywnych (zupełnie addytywnych) i przeliczalnych kongruencji (zupełnych kongruencji). Zachodzi tu twierdzenie, którego łatwy dowód pozostawimy czytelnikowi:

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli I jest ideałem przeliczalnie addytywnego ciała U (zupełnie addytywnego ciała U), $\equiv$ jest kongruencją tego ciała i $I \equiv \bigcup_{u \in I} [u \equiv 0]$, to ideał I jest przeliczalnie addytywny (zupełnie addytywny) wtedy i tylko wtedy, gdy kongruencja $\equiv$ jest przeliczalna (zupełna).*

Przyporządkowanie ideałów kongruencjom pozwala w dogodny sposób uporządkować (częściowo) te ostatnie. Mówimy mianowicie, że kongruencja $\equiv_1$ jest *silniejsza* od kongruencji $\equiv_2$ (a kongruencja $\equiv_2$ jest *słabsza* od kongruencji $\equiv_1$), jeśli ideał elementów równoważnych 0 pierwszej kongruencji zawiera ideał elementów równoważnych 0 drugiej kongruencji. Następujące twierdzenie charakteryzuje ten stosunek między kongruencjami:

(6.2) *Kongruencja $\equiv_1$ jest silniejsza od kongruencji $\equiv_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $u, v \in U$ warunek $u \equiv_1 v$ pociąga za sobą*

warunek $u \equiv_2 v$ (wtedy oczywiście też warunek $u \rightarrow v, \text{rel} \equiv_1$ pociąga za sobą warunek $u \rightarrow v, \text{rel} \equiv_2$).

Na podstawie poznanych tu twierdzeń czytelnik łatwo zauważy, że struktura ideałów I (por. § 4, str. 75) może być uważana za strukturę kongruencji, gdzie relacją indukującą strukturę jest relacja „słabsza od”.

Omówimy jeszcze zachowywanie się podciał przy relatywizacji. Zachodzą twierdzenia:

(6.3) *W ciele U/I mamy $I \equiv [0]$.*

Wynika to natychmiast z twierdzenia 7.

(6.4) *Jeżeli V jest podciałem ciała U , J i I zaś odpowiednio ideałami ciał V i U , to ciało $V, \text{rel} J$ jest podciałem ciała $U, \text{rel} I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $J = IV$.*

Dowód. Ciało $V, \text{rel} J$ będzie oczywiście wtedy i tylko wtedy podciałem ciała $U, \text{rel} I$, gdy dla elementów z V równoważność $\text{rel} J$ będzie się pokrywała z równoważnością $\text{rel} I$, co oczywiście zachodzi, jeżeli $J = IV$. Przypuśćmy teraz, że $J \neq IV$. Wówczas bądź istnieje $u \in J - IV$ i mamy $u \equiv 0, \text{rel} J$, $u \not\equiv 0, \text{rel} I$, bądź istnieje $u \in IV - J$ i mamy $u \equiv 0, \text{rel} I$, $u \not\equiv 0, \text{rel} J$.

(6.5) *Jeżeli*

- (1) *V jest podciałem ciała U ,*
- (2) *I i J są odpowiednio ideałami ciał U i V ,*
- (3) *$J \subset I$,*
- (4) *Ciało $V, \text{rel} J$ jest atomowe,*
- (5) *Każdy atom ciała $V, \text{rel} J$ zawiera $\text{rel} I$ pewien atom ciała $U, \text{rel} I$,*

to ciało $V, \text{rel} J$ jest podciałem ciała $U, \text{rel} I$.

Dla dowodu należy wykazać, że $IV = J$.

Z założeń (2) i (3) wynika, że $J \subset IV$.

Przypuśćmy, że nie zachodzi $IV \subset J$. Istnieje wtedy pewien element $v \in IV - J$. Element ten jako nie należący do J nie jest pusty w $V, \text{rel} J$, a więc na mocy założeń (4) i (5) zawiera $\text{rel} I$ pewien atom ciała $U, \text{rel} I$. Jest to jednak sprzeczne z założeniem, według którego element v należy do I , a więc v jest pusty w $U, \text{rel} I$.

Podamy jeszcze kilka twierdzeń, które rzucają pewne światło na relatywizację ciała względem ideału głównego lub pierwszego.

$$(6.6) \quad u \equiv v, \text{rel}(I \vee J(w)) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } u \dot{\rightarrow} v \rightarrow w, \text{rel} I.$$

$$(6.7) \quad u \rightarrow v, \text{rel}(I \vee J(w)) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } w' \rightarrow w, \text{rel} I.$$

$$(6.8) \quad u \equiv 0, \text{rel}(I \vee J(w)) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } u \rightarrow w, \text{rel} I.$$

$$(6.9) \quad u \equiv 1, \text{rel}(I \vee J(w)) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } u' \rightarrow w, \text{rel} I \text{ (a więc, gdy } w' \rightarrow u, \text{rel} I).$$

(6.10) Jeżeli $U, \text{rel} I$ jest ciałem atomowym, $At(U, I)$ zbiorem atomów reprezentacyjnych tego ciała, to ciało $U, \text{rel}(I \vee J(w))$, gdzie $w \in U$, jest również atomowe, a jego zbiorem atomów reprezentacyjnych jest zbiór

$$\bigcup_{u \in At(U, I)} [u \rightarrow w, \text{rel} I].$$

Łatwe dowody pozostawiamy czytelnikowi. Zwracamy uwagę, że przyjmując w powyższych twierdzeniach $I = (0)$ otrzymujemy twierdzenia o ciele $U, \text{rel} J(w)$.

(6.11) Jeżeli J jest ideałem pierwszym ciała $U, \text{rel} I$, to w ciele $U, \text{rel}(I \vee J)$ każdy element jest bądź równoważny 0, bądź 1.

Wynika to natychmiast z własności (2.16) ideałów pierwszych (określenie 3, str. 71).

§ 7. Zdarzenia i ciało zdarzeń

Pojęcie *zdarzenia* uważamy za pierwotne, a więc nie podlegające określeniu. Możemy je jednak charakteryzować intuicyjnie i ilustrować przykładami. Przede wszystkim więc jest to pojęcie wyrastające z otaczającej nas konkretnej rzeczywistości, po wtóre oznacza ono zawsze coś jednostkowego, indywidualnego, jednorazowego, o czym powiedzieć można, że zachodzi albo nie zachodzi. Dalej, jest ono niezmiernie ogólne i pod tym względem zbliżone do pojęcia przedmiotu, od którego wszakże różni się tym, że zawiera w sobie moment stawania się w czasie. Przykładami zdarzeń są: wynik indywidualnie określonej gry losowej lub nielosowej, wynik liczbowy indywidualnego pomiaru, posiadanie przez dany przedmiot pewnej cechy, przynależność przedmiotu do pewnego zbioru itd.

Można między zdarzeniami i zdaniem (funkcjami zdaniowymi) ustalić odpowiedniość, którą — w braku lepszej nazwy — będziemy

nazywali *harmoniczną* i która niewątpliwie wyjaśnia w znacznym stopniu pojęcie zdarzenia (choć nie jest ona wzajemnie jednoznaczna i nie obejmuje ani wszystkich zdarzeń, ani też wszystkich zdań). Powiemy mianowicie, że między zdaniem a i zdarzeniem u zachodzi odpowiedniość harmoniczna, jeżeli zdarzenie u zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie a jest prawdziwe. Np. śmierć Nelsona w bitwie pod Trafalgarem jest zdarzeniem i jest w odpowiedniości harmonicznej ze zdaniem: „Nelson zginął w bitwie pod Trafalgarem“.

Ogólnie biorąc, zdanie a orzeka, że w świecie rzeczywistym „coś” zachodzi; to „coś” jest właśnie zdarzeniem pozostającym w odpowiedniości harmonicznej ze zdaniem a .

Odwrotnie, jeżeli v jest zdarzeniem, któremu możemy przypisać nazwę indywidualną v , wówczas zdanie: „zdarzenie v zachodzi” jest w odpowiedniości harmonicznej ze zdarzeniem v .

Nasuwa się więc myśl, czy nie należałoby odrzucić całkowicie pojęcie zdarzenia i zamiast zdarzeń rozpatrywać odpowiadające im harmonicznie zdania. Wtedy w teorii prawdopodobieństwa nie mówilibyśmy np. o „prawdopodobieństwie wyrzucenia w czwartym rzucie 6 oczek”, ale o prawdopodobieństwie zdania: „wyrzucono w czwartym rzucie 6 oczek”. Jest to punkt widzenia przyjęty m. in. przez Keynesa i przez niego konsekwentnie rozwijany. Ten punkt widzenia przedstawia niewątpliwie znaczne korzyści. Przede wszystkim można się oprzeć na gotowej już teorii zdań, zamiast budować nową teorię zdarzeń, po wtóre, pojęcie zdarzenia jest mniej jasne i wyraźne niż pojęcie zdania; po trzecie, ten punkt widzenia podkreśla rolę teorii prawdopodobieństwa jako surogatu dedukcji, to znaczy środka zastępczego, którym operuje się wtedy, kiedy brak danych nie pozwala wnioskować dedukcyjnie. Jednak korzyściom powyższym przeciwstawiają się poważne niedogodności. Pomijając już pewne niedogodności i komplikacje językowe oraz niezgodność z tradycją matematycznej teorii prawdopodobieństwa, która od 300 lat mówi o zdarzeniach, należy podkreślić, że ciało zdań z powodu przeliczalności zbioru zdań oraz braku przeliczalnej addytywności (por. rozdział I, § 11, str. 60) stanowi bardzo niedogodne podłoże dla matematycznej teorii prawdopodobieństwa.

Tymczasem pewna nieokreśloność pojęcia „zdarzenie”, pojęcia, które dopiero się wyłania z chaosu mowy potocznej, okazuje się korzystne, pozwala bowiem wyposażać ciała zdarzeń w takie właściwości, które z ciała tego robią dogodną podstawę dla matema-

tycznej teorii. W szczególności, nie potrzebujemy zakładać przeliczalności zbioru zdarzeń.

Weźmy pod uwagę dowolną liczbę pomiarową (to znaczy będącą wynikiem indywidualnego pomiaru) x_1 ; dla każdego rzeczywistego ξ nierówność $x_1 < \xi$ jest zdarzeniem. Dla różnych ξ będziemy mieli różne zdarzenia, a więc otrzymamy zbiór zdarzeń mający moc continuum. Widzimy zarazem, że nie dla każdego ze zdarzeń $x_1 < \xi$ istnieje zdanie pozostające z nim w odpowiedniości harmonicznej. Istotnie, aby tak było, liczba ξ musi mieć indywidualną nazwę; otóż można indywidualnie nazwać jedynie przeliczalną mnogość liczb rzeczywistych, gdyż zbiór wyrażeń mogących służyć za nazwy jest oczywiście przeliczalny. Potwierdza to słuszność naszej dawniejszej uwagi, że odpowiedniość harmoniczna nie obejmuje wszystkich zdarzeń.

Po tych uwagach ogólnych przejdziemy do konstrukcji ciała zdarzeń. Wprowadzimy teraz w zbiorze zdarzeń pojęcia pierwotne, a więc nie podlegające określeniu, lecz co najwyżej intuicyjnemu wyjaśnieniu, a mianowicie:

(7.1) *Tożsamość zdarzeń* u i v , którą oznaczamy przez $u=v$.

(7.2) *Alternatywa zdarzeń* u i v , którą oznaczamy przez $u+v$.

Alternatywa zdarzeń u i v jest to zdarzenie polegające na tym, że zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń u , v . Podobnie, jeżeli $u_1, u_2, \dots$ jest ciągiem zdarzeń, wówczas $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że zachodzi co najmniej jedno zdarzenie tego ciągu, a jeżeli X jest zbiorem zdarzeń, wówczas $\sum_{u \in X} u$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń zbioru X .

(7.3) *Koniunkcja zdarzeń* u i v , którą oznaczamy przez uv .

Koniunkcja zdarzeń u i v jest to zdarzenie polegające na łącznym zachodzeniu zdarzeń u i v . Podobnie $\prod_{j=1}^{\infty} u_j$, $\prod_{u \in X} u$ oznaczają odpowiednio zdarzenia polegające na łącznym zachodzeniu wszystkich zdarzeń ciągu $u_1, u_2, \dots$ lub wszystkich zdarzeń zbioru X .

(7.4) *Negacja zdarzenia* u , którą oznaczamy przez u' (czytamy „nie u ”).

Jest to zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie u nie zachodzi.

(7.5) *Zdarzenie absolutnie niemożliwe*, które oznaczamy przez 0 . Stanowi ono odpowiednik zbioru pustego w teorii zbiorów.

Ponadto wprowadzamy już na drodze określenia dalsze pojęcie:

(7.6) *Zdarzenie absolutnie pewne*, które określamy jako negację zdarzenia absolutnie niemożliwego i oznaczamy przez $1=0'$.

Intuicyjny sens pojęć (7.5) i (7.6) jest niezbyt łatwy do uchwycenia. Nie wdając się w głębszą ich analizę ograniczymy się do następującej wskazówki: Przez zdarzenie absolutnie niemożliwe należy rozumieć takie zdarzenie, którego zachodzenie byłoby sprzeczne z zasadami logiki rozumianej szeroko, a więc z włączeniem matematyki; takim zdarzeniem jest na przykład zdarzenie uu' lub $(u+v)u'v'$, gdzie u i v oznaczają dowolne zdarzenie lub też uzyskanie w drodze pomiaru liczby rzeczywistej ξ spełniającej nierówność $1 < \xi < 0$ itd. Wszystkie takie zdarzenia uważamy za identyczne między sobą, podobnie jak w algebrze zbiorów przyjmujemy jeden tylko zbiór pusty, choć możemy go rozmaicie nazywać (możemy np. zbiorem pustym nazywać zbiór trójkątów o 2 kątach rozwartych lub zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2+1=0$ itd.). Natomiast zdarzenie polegające na otrzymaniu dwu asów pikowych przy rozdaniu kart w bridge'u nie jest absolutnie niemożliwe, jest ono bowiem sprzeczne nie z zasadami logiki, lecz jedynie z zasadami bridge'a (talía kart zawiera tylko jednego asa pik; rozdajemy karty tylko jednej talii).

Przyjmujemy następujące dwa pewniki teorii zdarzeń:

(Z1) *Klasa zdarzeń jest zupełnie addytywnym i atomowym ciałem Boole'a ze względu na działanie (7.1)-(7.4); elementem pustym i pełnym są w tym ciele elementy określone przez (7.5) i (7.6).*

(Z2) *Zdarzenie absolutnie niemożliwe jest różne od zdarzenia absolutnie pewnego.*

Pewnik (Z2) wprowadzony został do ogólnej teorii ciał Boole'a przez Couturata. Wyprowadzimy z niego następującą konsekwencję:

(7.7) *Jeżeli u jest zdarzeniem, to $u \neq u'$.*

Istotnie, z równości $u=u'$ wynikałoby, że $u=u+u=u+u'=1$ oraz $u=uu=uu'=0$, a więc $0=1$, wbrew (Z2).

Ciało wszystkich zdarzeń — *universum* zdarzeń, będziemy oznaczali przez U_z .

§ 8. Relatywizacja ciała zdarzeń. Ciała kanoniczne. Scalanie ciał kanonicznych

Przy relatywizacji ciała zdarzeń w zastosowaniach do teorii prawdopodobieństwa będziemy się ograniczać do idealów właściwych i zupełnie addytywnych, a więc z uwagi na twierdzenie 2 (str. 70) do idealów głównych.

Zdarzenia zbioru $[0] \in U_z/I$, a więc zdarzenia równoważne $0, \text{rel } I$ nazywamy *niemożliwymi*, $\text{rel } I$. Podobnie zdarzenia zbioru $[1] \in U_z/I$, nazywamy zdarzeniami *pewnymi*, $\text{rel } I$. O dwóch zdarzeniach rozłącznych, $\text{rel } I$ będziemy mówili, że *wykluczają się*, $\text{rel } I$.

OKREŚLENIE 5. Zbiór zdarzeń A nazywamy *swobodnym*, jeśli żaden jego element nie jest zawarty w sumie pozostałych jego elementów.

OKREŚLENIE 6. Jeżeli A jest swobodnym zbiorem zdarzeń, to element $w(A) = \left(\sum_{u \in A} u \right)' + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A \\ u_1 \neq u_2}} u_1 \cdot u_2$ nazywamy *kanonicznym elementem zbioru A* , a ideał $J(w(A))$ *kanonicznym ideałem zbioru swobodnego A* . Ideał kanoniczny zbioru A oznaczamy przez $I(A)$.

Zwracamy uwagę, że pojęcie elementu i ideału kanonicznego jest określone tylko dla zbiorów swobodnych, to znaczy mówiąc o elemencie $w(A)$ i ideale $I(A)$ będziemy zawsze zakładali swobodność zbioru A .

Udowodnimy twierdzenie:

(8.1) *Jeżeli $u_0 \in A$, to u_0 nie jest zdarzeniem niemożliwym, $\text{rel } I(A)$.*

Przypuśćmy, że dla pewnego $u_0 \in A$ mamy $u_0 = 0, \text{rel } I(A)$. Wtedy $u_0 \in I(A)$ i $u_0 \rightarrow w(A)$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} u_0 = u_0 w(A) &= u_0 \left(\sum_{u \in A} u \right)' + u_0 \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 = \\ &= \sum_{u \in A - (u_0)} u_0 u + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A - (u_0) \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow \sum_{u \in A - (u_0)} u + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A - (u_0) \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 = \sum_{u \in A - (u_0)} u. \end{aligned}$$

Element u_0 jest więc zawarty w sumie pozostałych elementów zbioru A , a zatem zbiór A nie jest swobodny, wbrew założeniu.

Z (8.1) wynika natychmiast:

(8.2) $w(A) \neq 1$, więc $I(A)$ jest ideałem właściwym.

Wprost z określenia elementu kanonicznego wynika jeszcze, że

(8.3) *Każde dwa różne zdarzenia zbioru A wykluczają się, $\text{rel } I(A)$.*

$$(8.4) \quad \sum_{u \in A} u = 1, \text{rel } I(A).$$

OKREŚLENIE 7. Najmniejsze, zupełnie addytywne i nasycone podciało ciała $U_z, \text{rel } I(A)$ zawierające zbiór A nazywamy *kanonicznym ciałem zbioru A* i oznaczamy przez $V(A), \text{rel } I(A)$.

TWIERDZENIE 9. *Zbiór $V(A)$ jest zbiorem tych zdarzeń v , które dla pewnego $X \subset A$ spełniają równoważność*

$$(8.5) \quad v = \sum_{u \in X} u, \text{rel } I(A).$$

Ciało $V(A), \text{rel } I(A)$ jest atomowe, zbiór A zaś jest zbiorem atomów reprezentacyjnych tego ciała.

Dowód. Ze względu na (8.3) i (8.4) twierdzenie 9 jest szczególnym przypadkiem (13.1) (rozdział I, str. 64).

Zastosujemy teraz do ciała $V(A), \text{rel } I(A)$ metodę scalania atomów.

OKREŚLENIE 8. Podciało scalone ciała $V(A), \text{rel } I(A)$ względem dysjunkcji B zbioru A będziemy oznaczali przez $V(A; B), \text{rel } I(A)$ (por. rozdział I, § 13, określenie 11).

Z twierdzenia 11 (rozdział I, § 13, str. 65) wynikają następujące ważne własności tego ciała:

(8.6) *Ciało $V(A; B), \text{rel } I(A)$ jest zupełnie addytywnym i atomowym ciałem, którego zbiorem atomów reprezentacyjnych jest zbiór zdarzeń kształtu $\sum_{u \in AX} u$, gdzie $X \in B$ i $AX \neq \emptyset$.*

§ 9. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w § 8

Wprowadzone w poprzednim paragrafie operacje stosujemy do konstrukcji podciała pewnego ciała zdarzeń stanowiącego w pewnym sensie „opis” bardzo elementarnej gry, mianowicie gry składającej się z jednego rzutu sześcienną kostką, której ściany oznaczone zostały „oczkami” w ilości od 1 do 6.

Interesują nas w tej grze zdarzenia polegające na wyrzuceniu n oczek ($n = 1, 2, \dots, 6$) i wszystkie inne „składające się” z nich, a więc

należące do najmniejszego ciała rozpostartego na tych zdarzeniach (przeliczalna lub zupełna addytywność tego ciała nie jest istotna, mamy bowiem do czynienia ze zbiorem skończonym).

Oznaczmy przez u_n zdarzenie polegające na wyrzuceniu n oczek, a przez A zbiór wszystkich zdarzeń $u_n: A = (u_1, u_2, \dots, u_6)$.

Zastanówmy się, co możemy powiedzieć o wzajemnym stosunku zdarzeń zbioru A ? Odpowiedzi są dwie: jedna z punktu widzenia gry, druga z punktu widzenia ciała U_z .

Z punktu widzenia gry zdarzenia u_n zbioru A są przede wszystkim możliwe (a więc nie równoważne 0), gdyż kostka może upaść którąkolwiek ścianką ku górze, a prócz tego wykluczają się, gdyż budowa kostki i sposób odczytania wyniku prowadzą zawsze do jednoznacznego rezultatu, wreszcie w sumie dają zdarzenie pewne, każdy bowiem rzut przynosi jakiś rezultat.

Z punktu widzenia ciała U_z , które jest najogólniejszym ciałem zdarzeń, trudno przypuścić, aby którekolwiek zdarzenie $u_n \in A$ było absolutnie niemożliwe. Przemawia przeciw temu to, co powiedzieliśmy o zdarzeniu absolutnie niemożliwym w § 7 niniejszego rozdziału (str. 85). Zajście zdarzenia $u_n \in A$ nie jest sprzeczne ani z zasadami logiki, ani z zasadami matematyki, jest więc ono możliwe (różne od 0) w U_z . Z tych samych jednak powodów, dla których uznaliśmy zdarzenia $u_n \in A$ za możliwe, musimy uznać zdarzenia $u_n \cdot u_k$ ($u_n, u_k \in A$) za niewykluczające się. Przypuśćmy bowiem, że umawiamy się odczytywać jako wynik rzutu nie tylko ilość oczek na górnej ściance kostki, lecz również ilość oczek na przeciwległej ściance, to jest tej, która dotyka stołu, na którym gramy. Każde zdarzenie $u_n \cdot u_k$ jest możliwe w wypadku, gdy ścianka przeciwległa ściance oznaczonej n oczkami została oznaczona k oczkami. Niemożliwość zdarzenia $u_n \cdot u_k$ ($n \neq k$) wynika więc z reguł gry, nie zaś z praw logiki. Podobnymi przykładami moglibyśmy uzasadnić nie tylko, że iloczyn dwu zdań, ale też że każdy z iloczynów

$$(9.1) \quad u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_6, u'_1 \cdot u'_2 \cdot \dots \cdot u'_6, \dots, u_1 \cdot u'_2 \cdot u'_3 \cdot u'_4 \cdot u'_5 \cdot u'_6, \dots, u'_1 \cdot u'_2 \cdot \dots \cdot u'_6$$

(jest ich $2^6 = 64$) nie jest absolutnie niemożliwy. Wynika stąd, że zbiór A jest swobodnym zbiorem zdarzeń. Przypuśćmy bowiem, że

$$u_n \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} u_i + \sum_{i=n+1}^6 u_i;$$

wtedy

$$u_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i + \sum_{i=n+1}^6 u_i \right)' = 0 = u'_1 \cdot \dots \cdot u'_{n-1} \cdot u_n \cdot u'_{n+1} \cdot \dots \cdot u'_6,$$

a więc jeden z iloczynów (9.1) jest absolutnie niemożliwy, wbrew założeniu.

Należy zauważyć, że w dowodzie swobodności zbioru A skorzystaliśmy tylko z niepustości pewnych iloczynów (9.1), takich mianowicie, w których wszystkie czynniki prócz jednego są zanegowane. Intuicyjnie uzasadniliśmy coś więcej niż swobodność zbioru A , a mianowicie tak zwaną niezależność jego elementów w sensie działań algebry Boole'a. Przyjmijmy umowę (umowa ta w dalszych paragrafach nie będzie obowiązywała), że $u^1 = u$, $u^0 = u'$. Powiemy, że zbiór X jest *zbiorem elementów zupełnie niezależnych* (przeliczalnie niezależnych, skończenie niezależnych) w sensie działań algebry Boole'a, jeśli dla każdego zbioru $Z \subset X$ (przeliczalnego zbioru $Z \subset X$, skończonego zbioru $Z \subset X$) i każdej funkcji $f(u)$, określonej dla elementów zbioru Z i przyjmującej tylko wartości 0 i 1, element $\prod_{u \in Z} u^{f(u)}$ nie jest pusty.

Zachodzi twierdzenie:

(9.2) *Jeżeli zbiór X jest zbiorem elementów zupełnie niezależnych w sensie działań algebry Boole'a, to X jest zbiorem swobodnym.*

Łatwym przykładem czytelnik wykaże, że twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Podane powyżej pojęcie niezależności w sensie działań algebry Boole'a znajduje ważne zastosowania w teorii prawdopodobieństwa i teorii miary.

Powróćmy jednak do opisaney przedtem gry. Rozumując podobnie jak poprzednio, dojdziemy też do wniosku, że $\sum_{i=1}^6 u_i$ nie jest zdarzeniem absolutnie pewnym, jego pewność wynika bowiem z takiej a nie innej struktury kostki i pod tym względem ciało U_z nie jest dostosowane do opisu interesującej nas gry. Operacje poznane w poprzednim paragrafie służą właśnie do utworzenia ciała przystosowanego do opisu interesującej nas gry.

Utwórzmy element $w(A) = \left(\sum_{i=1}^6 u_i \right)' + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^6 u_i u_j$, ideał $J(w(A)) = I(A)$

i zrelatywizujmy ciało U_z za pomocą tego ideału. W ciele U_z , $\text{rel } I(A)$ stosunki między elementami zbioru A są właśnie takie, jakie powinny być, jeżeli je rozważać z punktu widzenia naszej gry. Więc przede wszystkim są one możliwe na mocy (8.1), wykluczają się wzajemnie na mocy (8.3), wreszcie na mocy (8.4) suma ich jest zdarzeniem pewnym.

Jednak mimo wymienionych zalet ciało $U_z, \text{rel}I(A)$ nie jest jeszcze idealnym opisem gry, o którą nam chodzi. W ciele tym są bowiem takie zdarzenia możliwe, $\text{rel}I(A)$ (a więc takie, których przez relatywizację nie wykluczaliśmy), które nie „składają się” ze zdarzeń zbioru A . Chodzi tu na przykład o te, które są (w ciele U_z) zawarte w którymś u_n i wykluczają się z wszystkimi innymi elementami zbioru A . Czytelnik łatwo sprawdzi, że takie właśnie zdarzenia nie są ani niemożliwe $\text{rel}I(A)$, ani też nie są równoważne $\text{rel}I(A)$ z żadną sumą elementów A . Aby takie zdarzenia wykluczyć, bierzemy pod uwagę ciało kanoniczne $V(A), \text{rel}I(A)$. Zgodnie z twierdzeniem 9 (§ 8, str. 87) zbiór $V(A)$ jest zbiorem zdarzeń równoważnych $\text{rel}I(A)$ sumom elementów ze zbioru A ; zbędne elementy odpadły (czytelnik sprawdzi to dla elementów podanych w przykładzie na str. 87), gdyż nie spełniają tego warunku, stosunek zaś elementów zbioru A nie zmienił się. Uzyskaliśmy to, do czego dążyliśmy: ciało $V(A), \text{rel}I(A)$ jest właściwym opisem interesującej nas gry.

Przypuścimy jednak, że nie interesują nas szczegółowe liczby uzyskane w wyniku gry, a chodzi nam tylko o to, czy wynik jest parzysty, czy nieparzysty. Chcielibyśmy więc utożsamiać elementy zbioru (u_2, u_4, u_6) zarówno jak i elementy zbioru (u_1, u_3, u_5) , każde bowiem dwa zdarzenia należące do jednego z tych zbiorów są dla nas w danym przypadku takie same: parzyste lub nieparzyste. Rodzina B , składająca się ze zbiorów (u_2, u_4, u_6) i (u_1, u_3, u_5) , stanowi dysjunkcję zbioru A , możemy więc utworzyć ciało scalone $V(A; B), \text{rel}I(A)$. W ciele tym mamy dwa atomy: $u_2 + u_4 + u_6$ i $u_1 + u_3 + u_5$. Pierwszy z nich odpowiada zdarzeniu polegającemu na wyrzuceniu parzystej, drugi — nieparzystej ilości oczek.

§ 10. Produktowanie w ciele zdarzeń

Omówimy teraz dalszą operację, zwaną *produktowaniem* w ciele zdarzeń, która stanowi pewien odpowiednik teoriomnogościowego iloczynu kartezjańskiego (zwanego też *produktem zbiorów*; por. wstęp, str. 3).

OKREŚLENIE 9. Niech A będzie rodziną zbiorów zdarzeń, a $P = \prod_{X \in A} X$ iloczynem kartezjańskim zbiorów rodziny A .

Produktem zbiorów rodziny A w ciele zdarzeń nazywamy zbiór elementów kształtu $\prod_{X \in A} f(X)$, gdzie $f \in P$. Produkt zbiorów rodziny A

oznaczamy przez $\mathcal{P}(A)$. Gdy $A = (X_1, X_2, \dots)$ lub $A = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, piszemy również $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ i odpowiednio $\prod_{i=1}^n X_i$.

(10.1) *Jeżeli $A = (X)$, to $\mathcal{P}(A) = X$; jeżeli każdy zbiór $X \in A$ zawiera jeden tylko element u_x , to $\mathcal{P}(A) = \left(\prod_{X \in A} u_x \right)$.*

(10.2) *Jeżeli $A = A_1 + A_2$, klasy A_1 i A_2 są rozłączne i niepuste, to $\mathcal{P}(A) = \prod_{i=1}^2 \mathcal{P}(A_i)$.*

Twierdzenia te wynikają natychmiast z własności iloczynów kartezjańskich (por. wstęp, str. 3). Dla dowodu drugiego z nich wystarczy zauważyć, że na to, aby $u \in \mathcal{P}(A)$, potrzeba i wystarcza, aby istniały takie $u_1 \in \mathcal{P}(A_1)$ i $u_2 \in \mathcal{P}(A_2)$, że $u = u_1 u_2$.

OKREŚLENIE 10. Produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ nazywamy *swobodnym*, jeśli

(10.3) *Każdy element $u \in \mathcal{P}$ ma tylko jedno przedstawienie w postaci $u = \prod_{X \in A} f(X)$, gdzie $f \in P$.*

(10.4) *$\mathcal{P}$ jest zbiorem swobodnym.*

Produkty swobodne mają następujące własności:

(10.5) *Jeżeli $A = A_1 + A_2$, klasy A_1 i A_2 są rozłączne i niepuste i produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ jest swobodny, to każdy z produktów $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(A_i)$, $i = 1, 2$, jest swobodny.*

Dowód. Przypuścimy, że jeden z produktów $\mathcal{P}_i$, na przykład $\mathcal{P}_1$ nie jest swobodny, to znaczy nie spełnia (10.3) lub (10.4)

W pierwszym przypadku istnieje element $u_1 \in \mathcal{P}_1$ mający dwa przedstawienia w postaci (10.3). Wtedy jednak każdy element $u_1 u_2 \in \mathcal{P}$, gdzie $u_2 \in \mathcal{P}_2$, również ma dwa przedstawienia tej postaci, a więc produkt $\mathcal{P}$ nie jest swobodny, wbrew założeniu.

W drugim przypadku istnieje takie $u_1 \in \mathcal{P}_1$, że

$$u_1 \rightarrow \sum_{v \in \mathcal{P}_1 - (u_1)} v.$$

Niech $u_2 \in \mathcal{P}_2$. Wtedy $u_1 u_2 \in \mathcal{P}$ i $u_1 u_2 \rightarrow u_2 \sum_{v \in \mathcal{P}_1 - (u_1)} v = \sum_{v \in \mathcal{P}_1 - (u_1)} v u_2 \rightarrow \sum_{u \in \mathcal{P} - (u_1 u_2)} u$.

a więc produkt $\mathcal{P}$ nie jest swobodny, wbrew założeniu.

Udowodnimy jeszcze twierdzenia:

(10.6) *Jeżeli $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ jest produktem swobodnym, $A_1 \subset A$ i $A_1 \neq \emptyset$, to $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(A_1)$ jest produktem swobodnym.*

(10.7) Jeżeli $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest produktem swobodnym, to każdy zbiór $X \in \mathcal{A}$ jest zbiorem swobodnym.

Pierwsze z tych twierdzeń jest oczywiste w przypadku $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$; w przeciwnym przypadku wynika ono z (10.5), jeżeli przyjmiemy $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \mathcal{A}_1$. Drugie twierdzenie wynika również z (10.5), jeżeli przyjmiemy $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - (X)$, $\mathcal{A}_2 = (X)$.

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie nie dotyczące specjalnie produktów, ważne jednak przy ich omawianiu. Twierdzenie to zachodzi dla ciała zdarzeń, gdyż ciało zdarzeń jest na mocy (Z1) (por. § 7, str. 85) ciałem zupełnie addytywnym i atomowym. Dla ciał zupełnie addytywnych, lecz nie atomowych, twierdzenie to nie zachodzi.

(10.8) Jeżeli $\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów zdarzeń, $\mathbf{P} = \mathbf{P}X$, to

$$\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) = \prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u.$$

Dowód. Ponieważ $f(X) \rightarrow \sum_{u \in X} u$ dla każdej funkcji $f \in \mathbf{P}$, więc $\prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u$, skąd wynika, że $\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u$.

Przypuścimy teraz, że v jest atomem ciała zdarzeń i $v \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u$. Istnieje wtedy dla każdego $X \in \mathcal{A}$ takie $u \in X$, że $v \rightarrow u$, a zatem istnieje też taka funkcja $f_0 \in \mathbf{P}$, że $v \rightarrow f_0(X)$ dla każdego $X \in \mathcal{A}$. Wynika stąd, że

$$v \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{A}} f_0(X) \rightarrow \sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X).$$

Udowodniliśmy, że każdy atom zawarty w $\prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u$ jest zawarty w $\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X)$, a ponieważ ciało zdarzeń jest atomowe, więc na mocy (12.8) z rozdziału I wynika stąd, że

$$\prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u \rightarrow \sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X),$$

co wraz z poprzednim zawieraniem daje tezę naszego twierdzenia. Twierdzenie to nazywa się twierdzeniem o *zupełnej dystrybutywności*. Wynikają z niego natychmiast twierdzenia:

$$(10.9) \quad \sum_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} u = \prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u.$$

(10.10) Jeżeli $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest produktem swobodnym, to dla każdego $X_0 \in \mathcal{A}$ i $u_0 \in X_0$

$$\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) = u_0 \prod_{X \in \mathcal{A} - (X_0)} \sum_{u \in X} u.$$

§ 11. Zespoły regularne ciał kanonicznych

Twierdzenie 10. Jeżeli $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest produktem swobodnym, to

$$w(\mathcal{P}) = \sum_{X \in \mathcal{A}} w(X).$$

Dowód. Przyjmując jak zwykle $\mathbf{P} = \mathbf{P}X$ oraz korzystając ze swobodności produktu $\mathcal{P}$ i z (10.8), otrzymujemy

$$(11.1) \quad w(\mathcal{P}) = \left(\sum_{u \in \mathcal{P}} u \right)' + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in \mathcal{P} \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 = \left(\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) \right)' + \sum_{\substack{f, g \in \mathbf{P} \\ f \neq g}} \prod_{X \in \mathcal{A}} [f(X) \cdot g(X)].$$

$$(11.2) \quad \sum_{X \in \mathcal{A}} w(X) = \sum_{X \in \mathcal{A}} \left[\left(\sum_{u \in X} u \right)' + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \right] = \sum_{X \in \mathcal{A}} \left(\sum_{u \in X} u \right)' + \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 = \\ = \left(\prod_{X \in \mathcal{A}} \sum_{u \in X} u \right)' + \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 = \left(\sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) \right)' + \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2.$$

Udowodnimy pomocniczo kilka wzorów:

$$(11.3) \quad \sum_{\substack{f, g \in \mathbf{P} \\ f \neq g}} \prod_{X \in \mathcal{A}} [f(X) \cdot g(X)] \rightarrow \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2.$$

Niech f i g będą dwiema różnymi funkcjami produktu $\mathbf{P}$. Istnieje więc taki zbiór $X_0 \in \mathcal{A}$, że $f(X_0) \neq g(X_0)$. Wtedy

$$\prod_{X \in \mathcal{A}} [f(X) \cdot g(X)] \rightarrow f(X_0) \cdot g(X_0) \rightarrow \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X_0 \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2,$$

a ponieważ zawieranie to zachodzi dla każdej pary różnych funkcji produktu $\mathbf{P}$, więc zachodzi wzór (11.3).

Na podstawie (11.1), (11.2) i (11.3) otrzymujemy

$$(11.4) \quad w(\mathcal{P}) \rightarrow \sum_{X \in \mathcal{A}} w(X),$$

$$(11.5) \quad \sum_{X \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in X \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \cdot \sum_{f \in \mathbf{P}} \prod_{X \in \mathcal{A}} f(X) \rightarrow \sum_{\substack{f, g \in \mathbf{P} \\ f \neq g}} \prod_{X \in \mathcal{A}} [f(X) \cdot g(X)].$$

Niech v będzie atomem ciała $\mathcal{U}_2$ zawartym w lewej stronie (11.5). Istnieje wówczas taki zbiór $X_0 \in \mathcal{A}$ i takie elementy $u_1, u_2 \in X_0$, że $u_1 \neq u_2$ i $v \rightarrow u_1 u_2$, prócz tego zaś taka funkcja $f \in \mathbf{P}$, że $v \rightarrow f(X)$ dla każdego $X \in \mathcal{A}$. Niech f_1 i f_2 będą takimi funkcjami z $\mathbf{P}$, że $f_1(X) = f_2(X) = f(X)$ dla $X \in \mathcal{A} - (X_0)$ i $f_1(X_0) = u_1$, $f_2(X_0) = u_2$. Funkcje f są różne, a prócz tego $v \rightarrow f_1(X) \cdot f_2(X)$ dla $X \in \mathcal{A}$, a więc

$$v \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{A}} [f_1(X) \cdot f_2(X)] \rightarrow \sum_{\substack{f, g \in \mathbf{P} \\ f \neq g}} \prod_{X \in \mathcal{A}} [f(X) \cdot g(X)].$$

Udowodniliśmy, że każdy atom lewej strony wzoru (11.5) zawiera się w prawej stronie wzoru (11.5). Na mocy (11.8) z rozdziału I zachodzi wzór (11.5).

Z (11.1), (11.2) i (11.5) wynika łatwo, że

$$(11.6) \quad \sum_{X \in \mathcal{A}} w(X) \rightarrow w(\mathcal{P}),$$

skąd z uwagi na (11.4) otrzymujemy twierdzenie 10.

Twierdzenie 10 można wypowiedzieć również w postaci:

(11.7) *Jeżeli produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest swobodny, to najmniejszym ideałem zupełnie addytywnym zawierającym ideały $I(X)$, $X \in \mathcal{A}$, jest ideał $I(\mathcal{P})$.*

OKREŚLENIE 11. Jeżeli produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest swobodny, to ciało $V(\mathcal{P})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$ nazywamy *zespołem regularnym ciał* $V(X)$, $\text{rel} I(X)$, gdzie $X \in \mathcal{A}$.

Ciała $V(X)$, $\text{rel} I(X)$ nazywamy *składowymi zespołu*.

Udowodnimy teraz, że:

(11.8) *Jeżeli $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest produktem swobodnym, to $X \subset V(\mathcal{P})$, dla każdego $X \in \mathcal{A}$.*

Ze względu na twierdzenie 9 (§ 8, str. 87) wystarczy wykazać, że każdy element $u_0 \in X_0 \in \mathcal{A}$ jest równoważny $\text{rel} I(\mathcal{P})$ pewnej sumie elementów $\mathcal{P}$. Przyjmujemy $\mathbf{P} = \mathbf{P}X$ i $v_0 = \sum_{X \in \mathcal{A}} \prod_{f(X_0)=u_0} f(X)$.

Na podstawie (10.10) $v_0 = u_0 \prod_{X \in \mathcal{A} - (X_0)} \sum_{u \in X} u$, a więc $u'_0 v_0 = 0$ i na podstawie twierdzenia 10

$$u_0 v'_0 = u_0 \sum_{X \in \mathcal{A} - (X_0)} \left(\sum_{u \in X} u \right)' \rightarrow \sum_{X \in \mathcal{A}} \left(\sum_{u \in X} u \right)' \rightarrow \sum_{X \in \mathcal{A}} w(X) = w(\mathcal{P}).$$

Mamy więc

$$u_0 \div v_0 = u_0 v'_0 + u'_0 v_0 = u_0 v'_0 \in I(\mathcal{P}),$$

z czego wynika, że $u_0 \equiv v_0, \text{rel} I(\mathcal{P})$, co dowodzi słuszności twierdzenia.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 11. *Jeżeli $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest produktem swobodnym, to każde ciało składowe $V(X)$, $\text{rel} I(X)$ jest podciałem zespołu regularnego $V(\mathcal{P})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$.*

Dowód. Wykażemy, że spełnione są wszystkie warunki twierdzenia (6.5) (str. 81).

Warunek (3) wynika z twierdzenia 10, a z niego i z (11.8) wynika natychmiast warunek (1). Warunek (2) jest założony. Spełnianie warunku (4) wynika z twierdzenia 9 (str. 87). Z tego samego twierdzenia wynika też spełnienie warunku (5), gdyż na jego podstawie X jest zbiorem atomów reprezentacyjnych ciał $V(X)$, $\text{rel} I(X)$, $\mathcal{P}$ zaś zbiorem atomów reprezentacyjnych ciał $V(\mathcal{P})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$.

§ 12. Zespoły regularne ciał skalonych

Zaczynając od tego paragrafu będziemy rozpatrywali tylko produkty przeliczalnych i skończonych klas zbiorów zdarzeń. Twierdzenia będziemy formułowali w zasadzie dla klas przeliczalnych, przy czym będziemy zakładali, że ich elementy są ustawione w ciąg $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots)$. Przeniesienie twierdzeń na przypadek klas skończonych nie nastrocza większych trudności. Przypominamy, że w omawianym przypadku produkt oznaczamy przez $\tilde{\mathcal{P}} A_i$, elementy

zaś iloczynu kartezjańskiego $\tilde{\mathcal{P}} A_i$ są ciągami $\{u_n\}$, gdzie $u_i \in A_i$. Przypominamy dalej, że produkt przeliczalny, którego wszystkie czynniki są równe temu samemu zbiorowi A , oznaczamy przez $A^{*\omega}$. (por. wstęp, str. 5).

TWIERDZENIE 12. *Jeżeli $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}} A_i$ jest produktem swobodnym, B zaś klasą zbiorów będącą dysjunkcją każdego ze zbiorów A_i , to klasa H , której elementami są produkty $\tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i)$, gdzie $\{B_i\} \in B^{*\omega}$, stanowi dysjunkcję zbioru $\mathcal{P}$.*

Dowód. Niech $u \in \mathcal{P}$, a więc $u = \prod_{i=1}^{\infty} u_i$, $\{u_i\} \in \mathbf{P} = \tilde{\mathcal{P}} A_i$.

Ponieważ B stanowi dysjunkcję każdego ze zbiorów A_i , więc dla każdego u_i istnieje jedno takie $B_i \in B$, że $u_i \in B_i$; wtedy $\{u_i\} \in \tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i)$, a więc $u \in \tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i)$, co dowodzi, że

$$\mathcal{P} \subset \sum_{\{B_i\} \in B^{*\omega}} \tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i) = \sum_{X \in H} X.$$

Niech teraz $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in H$, $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_1 = \tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i^{(1)})$, $\mathcal{P}_2 = \tilde{\mathcal{P}}(A_i B_i^{(2)})$, $\{B_i^{(1)}\}, \{B_i^{(2)}\} \in B^{*\omega}$. Dla pewnego j mamy wtedy oczywiście $B_j^{(1)} \neq B_j^{(2)}$,

a ponieważ B stanowi dysjunkcję zbioru A_j , więc $A_j B_j^{(1)} B^{(2)} = 0$. Gdyby jednak było $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 \neq 0$, to istniałby taki element $u \in \mathcal{P}$, że $u \in \mathcal{P}_1$ i $u \in \mathcal{P}_2$. Mielibyśmy zatem

$$u = \prod_{i=1}^{\infty} u_i^{(1)} = \prod_{i=1}^{\infty} u_i^{(2)}, \quad \{u_i^{(1)}\} \in \mathbf{P}(A_i B_i^{(1)}), \quad \{u_i^{(2)}\} \in \mathbf{P}(A_i B_i^{(2)}),$$

ale, jak udowodniliśmy poprzednio, $A_j B_j^{(1)} B_j^{(2)} = 0$, skąd wynika, że $u_j^{(1)} \neq u_j^{(2)}$, a więc u miałoby dwa różne przedstawienia w postaci iloczynów elementów zbiorów A_i , wbrew założonej swobodności produktu $\mathcal{P}$. Wynika z tego, że

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 = 0 \quad \text{dla} \quad \mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2 \quad \text{i} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{H},$$

co wraz z poprzednio udowodnionym zawieraniem dowodzi twierdzenia 12.

OKREŚLENIE 12. Jeżeli produkt $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ jest swobodny i klasa B jest dysjunkcją każdego ze zbiorów A_i , to *zespolem regularnym ciał scalonych* $V(A_i; B)$, $\text{rel} I(A_i)$ nazywamy ciało scalone $V(\mathcal{P}; \mathbf{H})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$, gdzie $\mathbf{H}$ jest klasą produktów $\prod_{i=1}^{\infty} (A_i B_i)$, $\{B_i\} \in B^{N_0}$. Ciała $V(A_i; B)$, $\text{rel} I(A_i)$ nazywamy *składowymi zespołu*.

Udowodnimy twierdzenie:

(12.1) Produkt $\mathcal{P}^0 = \prod_{i=1}^{\infty} A_i^*$, gdzie A_i^* jest zbiorem elementów kształtu $\sum_{u \in A_i B} u$, $B \in B$, $A_i B \neq 0$, jest zbiorem atomów reprezentacyjnych zespołu $V(\mathcal{P}; \mathbf{H})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$.

Na mocy (8.6) zbiorem atomów reprezentacyjnych ciała $V(\mathcal{P}; \mathbf{H})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$ jest zbiór elementów kształtu

$$\sum_{u \in \prod_{i=1}^{\infty} (A_i B_i)} u, \quad \text{gdzie} \quad \prod_{i=1}^{\infty} (A_i B_i) \neq 0, \quad \{B_i\} \in B^{N_0}.$$

Ponieważ na mocy (10.8) dla takiego atomu zachodzi warunek

$$\sum_{u \in \prod_{i=1}^{\infty} (A_i B_i)} u = \sum_{\{u_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} (A_i B_i)} \prod_{i=1}^{\infty} u_i = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{u \in A_i B_i} u \in \mathcal{P}^3,$$

więc otrzymujemy tezę twierdzenia (12.1).

Należy zwrócić uwagę, że zbiorami atomów reprezentacyjnych ciał $V(A_i; B)$, $\text{rel} I(A_i)$ są na mocy (8.6) właśnie zbiory A_i^* . Możemy więc twierdzenie (12.1) wypowiedzieć w następującej postaci:

Atomami reprezentacyjnymi zespołu regularnego ciał scalonych są iloczyny atomów reprezentacyjnych ciał składowych.

Twierdzenie 13. Ciała składowe $V(A_i; B)$, $\text{rel} I(A_i)$ są podciałami zespołu $V(\mathcal{P}; \mathbf{H})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$.

Zastosujemy znowu twierdzenie (6.5). Z (12.1) wynika, że każdy atom ciała $V(A_i; B)$, $\text{rel} I(A_i)$ jest $\text{rel} I(A_i)$ sumą atomów zespołu $V(\mathcal{P}; \mathbf{H})$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$ w nim zawartych. Spełniony jest więc warunek (5), a na mocy zupełnej addytywności i atomowości obu ciał spełnione są również warunki (1) i (4). Warunek (2) wynika z założenia, warunek zaś (3) z twierdzenia 10.

§ 13. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w §§ 10-12

Przypuśćmy, że mamy nieskończony ciąg kostek, n -ta kostka jest $(n+3)$ -ścianem, którego ścianki zostały oznaczone oczkami w ilości od 1 do $n+3$. Gra (zupełnie fikcyjna) polega na nieskończonym ciągu rzutów: w n -tym rzucie rzucamy n -tą kostką. (Kształt i materiał, z którego kostki zostały wykonane, nie interesuje nas tu zupełnie, dane te mogą bowiem wpływać na prawdopodobieństwo wyników gry, nie zaś na jej opis.)

Interesujące nas zdarzenia polegają na wyrzuceniu w n -tym rzucie k oczek, gdzie $k \leq n+3$. Oznaczmy te zdarzenia przez $u_k^{(n)}$, przez A_n zaś zbiór zdarzeń $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{n+3}^{(n)})$.

Rozpatrywana gra jest utworzona z przeliczalnej ilości gier „składowych”, mianowicie z gier polegających na rzucie $(n+3)$ -ścienną kostką. Dla każdej z tych gier umiemy wyznaczyć ciało zdarzeń opisujące tę grę; jest to ciało $V(A_n)$, $\text{rel} I(A_n)$. Nie wystarczy to jednak do opisu interesującej nas gry, bo ciała kanoniczne zbiorów A_n opisują nam tylko jakby poszczególne segmenty gry; dla opisu całej gry należy utworzyć zespół regularny, którego poszczególne ciała kanoniczne zbiorów A_n byłyby składowymi. Wiemy, że warunkiem na to, ażeby taki zespół dał się utworzyć, jest, aby

produkt $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{\infty} A_n$ był swobodny. Zastanówmy się, czy możemy założyć swobodność tego produktu. Utwórzmy iloczyn kartezjański

$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$; jest to, jak wiemy, zbiór ciągów postaci $\{u_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $k_n \leq n+3$. Korzystając z założonej „ogólności” ciała zdarzeń U_z , polegającej na tym, że tylko te zdarzenia są w nim niemożliwe, które są niemożliwe z powodów natury logiczno-matematycznej (a więc absolutnie niemożliwe), i rozumując analogicznie jak w § 9 przy uzasadnianiu swobodności rozpatrywanego tam zbioru zdarzeń A (str. 88), możemy uzasadnić swobodność zbiorów A_n , a prócz tego to, że żaden z iloczynów

$$(13.1) \quad \prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)}, \quad \{u_{k_i}^{(i)}\} \in P,$$

a nawet żaden z iloczynów

$$(13.2) \quad \prod_{i=1}^{\infty} v^{(i)}, \quad v^{(i)} \in [A_i]_0, \quad v^{(i)} \neq 0,$$

nie jest absolutnie niemożliwy (przypominamy, że $[A_i]_0$ jest najmniejszym podciałem ciała U_z zawierającym A_i ; por. rozdział I, § 8, str. 45). Wynika z tego swobodność produktu $\mathcal{P}$. Gdyby bowiem $\prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} = \prod_{i=1}^{\infty} u_{l_i}^{(i)}$ i na przykład $u_{k_n}^{(n)} \neq u_{l_n}^{(n)}$, to mielibyśmy

$$\prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} \cdot \left(\prod_{i=1}^{\infty} u_{l_i}^{(i)} \right)' = \prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} \sum_{i=1}^{\infty} u_{l_i}^{(i)'} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(u_{l_i}^{(i)'} \prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} \right) = 0,$$

a ponieważ pustość sumy pociąga pustość każdego ze składników, więc w szczególności

$$u_{l_n}^{(n)'} \prod_{i=1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} = \prod_{i=1}^{n-1} u_{k_i}^{(i)} \cdot u_{l_n}^{(n)'} \cdot u_{k_n}^{(n)} \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} u_{k_i}^{(i)} = 0.$$

Jest to iloczyn kształtu (13.2), więc z jego absolutnej niemożliwości wynika, że

$$u_{l_n}^{(n)'} \cdot u_{k_n}^{(n)} = 0, \quad \text{czyli} \quad u_{k_n}^{(n)} \subset u_{l_n}^{(n)},$$

a ponieważ według założenia $u_{k_n}^{(n)} \neq u_{l_n}^{(n)}$, więc zbiór A_n nie jest swobodny, wbrew założeniu.

Łatwo zauważyć, że w powyższym dowodzie nie skorzystaliśmy z możliwości wszystkich iloczynów (13.2), a skorzystaliśmy tylko z niektórych z nich, bardzo specjalnej postaci. Intuicyjnie uzasadniliśmy tak zwaną *niezależność w sensie działań algebry Boole'a*

ciał $[A_i]$, która (przy założeniu swobodności zbiorów A_i) do dowodu nie jest konieczna.

Niech E będzie klasą podciał ciała U . Mówimy, że E jest *klasą podciał zupełnie niezależnych* (przeliczalnie niezależnych, skończenie niezależnych) w sensie działań algebry Boole'a, jeśli dla każdej funkcji $f \in \mathbf{P}V$ (takiej, że tylko przeliczalnie, skończenie, a w przypadku $V \in E$ skończonej niezależności skończenie wiele jej wartości $f(V)$ jest różnych od 1) mamy $\prod_{V \in E} f(V) \neq 0$, jeżeli tylko $f(V) \neq 0$ dla każdego $V \in E$.

Zachodzi twierdzenie

(13.3) Jeżeli A jest klasą swobodnych zbiorów zdarzeń, a ciała $[A]_0$, gdzie $A \in \mathcal{A}$, są zupełnie niezależne w sensie działań algebry Boole'a, to $\mathcal{P}(A)$ jest produktem swobodnym.

Łatwym przykładem można dowieść, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne. Mamy natomiast twierdzenie

(13.4) Ciała składowe zespołu regularnego ciał kanonicznych stanowią rodzinę zupełnie niezależnych podciał tego ciała. (Niezależność brana jest oczywiście $\text{rel}I(\mathcal{P})$, to znaczy żąda się, aby $\prod f(V) \neq 0$, $\text{rel}I(\mathcal{P})$, gdzie $f(V) \neq 0$ dla wszystkich ciał składowych V tego zespołu.)

Wynika to łatwo z twierdzeń 9 i 11 (str. 87 i 94).

Zespół $V(\mathcal{P})$, $\text{rel}I(\mathcal{P})$ jest opisem interesującej nas gry. Należy zwrócić uwagę na to, że w myśl twierdzenia 11 ciała składowe są podciałami zespołu. Jest to wyrazem faktu, że struktura gry nie zmienia się przez włączenie danej gry do zespołu innych gier. Innymi słowy: gra złożona jest prostą superpozycją gier składowych.

Przypuśćmy teraz, że w n -tej grze zespołu $V(\mathcal{P})$, $\text{rel}I(\mathcal{P})$ przestaje nas interesować uzyskanie szczegółowego wyniku, a interesuje tylko to, do którego ze zbiorów klasy B_n należy element $u_k^{(n)}$ uzyskany w wyniku tej gry, gdzie B_n jest rozbiem zbioru A_n na zbiory rozłączne (jest więc dysjunkcją tego zbioru spełniającą warunek $\sum_{X \in B_n} X = A_n$). Każda z gier indywidualnych zmienia się wtedy, i jak

wiadomo, opisem n -tej gry nie jest już ciało kanoniczne $V(A_n)$, $\text{rel}I(A_n)$, lecz ciało scalone $V(A_n, B_n)$, $\text{rel}I(A_n)$. Utwórzmy klasę $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$.

Stanowi ona dysjunkcję każdego ze zbiorów A_n , i to, intuicyjnie rzecz biorąc, taką samą jak B_n (a to dlatego, że zbiory A_n są między sobą rozłączne, co wynika nie tylko z opisu tej właśnie gry,

lecz ogólnie ze swobodności produktu). Ciała $V(A_n, B_n)$, $\text{rel} I(A_n)$ i $V(A_n, B)$, $\text{rel} I(A_n)$ są identyczne. Utwórzmy teraz zespół regularny ciał skalonych $V(\mathcal{P}; H)$, $\text{rel} I(\mathcal{P})$. Ciało to jest opisem omawianej gry po dokonanej już modyfikacji gier składowych.

Operacja tworzenia zespołów regularnych występuje w teorii prawdopodobieństwa niezmiennie często, wszędzie tam, gdzie rozpatrujemy gry losowe złożone z ustalonej ilości gier składowych, które są zupełnie określone przez swój numer porządkowy, zatem struktura każdej z nich nie jest zależna od ewentualnie już uzyskanych wyników innych gier składających się na całość.

§ 14. Zespoły osobliwe

Pojęcia, które wprowadziliśmy, nie wystarczają do opisu niektórych gier, nawet bardzo prymitywnych; poza ich zasięgiem pozostają mianowicie wszelkie gry, w których liczba i struktura późniejszych gier składowych zależy od wyniku gier składowych wcześniejszych. Rozpatrzmy kilka przypadków.

1^o Z urny zawierającej numery 1, 2, 3, 4 ciągniemy numery tak długo, aż suma wyciągniętych numerów osiągnie lub przekroczy liczbę 3. Numer wyciągnięty rzucamy z powrotem do urny przed następnym ciagnieniem.

2^o Z tejże urny ciągniemy dwukrotnie, nie rzucając wyciągniętego numeru z powrotem do urny.

3^o Z tejże urny ciągniemy tak długo, aż suma wyciągniętych numerów osiągnie lub przekroczy liczbę 3, a wyciągniętego numeru nie rzucamy z powrotem do urny.

W pierwszym przypadku gra kończy się po pierwszym, drugim lub trzecim ciagnieniu, to znaczy obejmuje 1, 2 lub 3 gry składowe, z których każda polega na ciagnieniu z urny o składzie 1, 2, 3, 4. Struktura każdej gry składowej jest więc z góry ustalona, niezależnie od wyniku poprzednich gier, natomiast liczba partii zależy od przebiegu ciagnień. Atomami (to znaczy możliwymi wynikami gry) są ciagnienia: (3), (4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3) i (1,1,4).

W drugim przypadku gra składa się zawsze z dwu gier składowych, ale struktura drugiej gry zależy od wyniku pierwszej: jeżeli za pierwszym razem wyciągniemy odpowiednio numery 1, 2, 3, 4, to za drugim razem ciągniemy odpowiednio z urny zawierającej numery 2, 3, 4; 1, 3, 4; 1, 2, 4; 1, 2, 3.

Atomami są ciagnienia (i, j) , gdzie $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$; jest ich 12.

W trzecim przypadku liczba ciagnień wynosi 1 lub 2, zależnie od wyniku pierwszego ciagnienia, a struktura drugiego ciagnienia (o ile się ono odbywa) też zależy od wyniku pierwszego ciagnienia. Atomami ciagnienia są: (3), (4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3) i (2,4).

W celu opisania takich gier, w których liczba i struktura gier składowych późniejszych zależy od wyniku gier składowych wcześniejszych, wprowadzimy pojęcie zespołu osobliwego.

OKREŚLENIE 13. Rozszerzeniem swobodnego produktu $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$

nazywamy zbiór $\tilde{\mathcal{P}}^* = \mathcal{P} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \mathcal{P} A_i$.

OKREŚLENIE 14. Element $u \in \tilde{\mathcal{P}}^* = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ nazywamy odcinkiem

k -tego rzędu elementu $v \in \tilde{\mathcal{P}}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy bądź $v = \prod_{i=1}^n v_i$,

$\{v_i\} \in \prod_{i=1}^n A_i$ oraz $u = \prod_{i=1}^k v_i$, gdzie $k \leq n$, bądź odpowiednio $v = \prod_{i=1}^{\infty} v_i$,

$\{v_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ oraz $u = \prod_{i=1}^k v_i$, gdzie $k < \infty$.

(14.1) $u \in \tilde{\mathcal{P}}^* = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ jest wtedy i tylko wtedy odcinkiem elementu $v \in \tilde{\mathcal{P}}^*$, gdy $v \rightarrow u$.

Wynika to z założenia swobodności produktu $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

Udowodnimy jeszcze twierdzenie

(14.2) Na to, aby $A \subset \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ był zbiorem swobodnym, potrzeba i wystarczy, aby żaden z jego elementów nie był odcinkiem innego elementu tego zbioru.

Warunek oczywiście jest konieczny. Przypuśćmy, że warunek zachodzi, a mimo to dla pewnego $u_0 \in A$ mamy $u_0 \rightarrow \sum_{u \in A - (u_0)} u$.

Niech $\bar{u}_0 = \prod u_i$ będzie takim elementem produktu $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, dla którego u_0 jest odcinkiem. Mamy wtedy

$$\bar{u}_0 u_0 = \bar{u}_0 \rightarrow \bar{u}_0 \sum_{u \in A - (u_0)} u = \sum_{u \in A - (u_0)} \bar{u}_0 u.$$

Każdemu $u \in A - (u_0)$ przyporządkujemy teraz pewien element $\bar{u} \in \mathcal{P}$ w następujący sposób: jeżeli $u \in \mathcal{P}$, to $\bar{u} = u$, jeżeli zaś $u \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}A_i$, to $\bar{u} = u \prod_{i=n+1}^{\infty} u_i$. Jest wtedy $\bar{u}_0 u \rightarrow \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathcal{P}$ i $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ dla każdego $u \in A - (u_0)$, a więc

$$\bar{u}_0 \rightarrow \sum_{u \in A - (u_0)} \bar{u}_0 u \rightarrow \sum_{u \in A - (u_0)} \bar{u},$$

co jest sprzeczne z założeniem swobodności produktu $\mathcal{P}$.

OKREŚLENIE 15. Jeżeli $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}A_i$ jest produktem swobodnym, A zaś zbiorem swobodnym zdarzeń zawartym w $\mathcal{P}^*A_i$, to element

$$(14.3) \quad w(\mathcal{P}/A) = \left(\sum_{u \in A} u \right)' + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2$$

nazywamy *elementem kanonicznym* zbioru A , ideał zaś

$$(14.4) \quad I(\mathcal{P}/A) = J(w(\mathcal{P}/A))$$

nazywamy *ideałem kanonicznym* zbioru swobodnego A .

Udowodnimy twierdzenie

(14.5) Jeżeli $u_0 \in A$, to u_0 nie jest zdarzeniem niemożliwym, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

Dowód. Przypuśćmy, że $u_0 \in A$ i $u_0 \equiv 0, \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$; wtedy

$$u_0 \rightarrow w(\mathcal{P}/A) = \left(\sum_{u \in A} u \right)' + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2;$$

ale

$$u_0 \left(\sum_{u \in A} u \right)' = 0,$$

więc

$$u_0 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2.$$

Oznaczmy przez $\bar{u}_0$ dowolny element produktu $\mathcal{P}$, którego odcinkiem jest u_0 . Mamy wtedy $\bar{u}_0 \rightarrow u_0$, a więc

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \cdot \sum_{u \in \mathcal{P}} u,$$

skąd, na podstawie (11.5) i (11.1), otrzymujemy, że

$$\bar{u}_0 \rightarrow \sum_{\substack{u_1, u_2 \in \mathcal{P} \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow w(\mathcal{P}),$$

co jest równoważne warunkowi $\bar{u}_0 \equiv 0, \text{rel} I(\mathcal{P})$ i pozostaje w sprzeczności z (8.1).

Udowodnimy jeszcze twierdzenie

$$(14.6) \quad \sum_{u \in A} u \equiv 1, \text{rel} I(\mathcal{P}/A).$$

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z wzoru (14.3) i określenia 15.

Zauważmy jeszcze, że zachodzi twierdzenie:

(14.7) Jeżeli $u_1, u_2 \in A_i$, $u_1 \neq u_2$, to $u_1 u_2 \equiv 0, \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

Ponieważ z (14.2) i założenia, że $u_1 \neq u_2$, wynika, że żaden z elementów u_1, u_2 nie jest odcinkiem drugiego, więc istnieje takie A_i i takie $v_1, v_2 \in A_i$, że $v_1 \neq v_2$ i $u_1 \rightarrow v_1$, $u_2 \rightarrow v_2$; wtedy

$$u_1 u_2 \rightarrow v_1 v_2 \rightarrow \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_i \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow w(\mathcal{P}/A),$$

co dowodzi tezy (14.7).

OKREŚLENIE 16. Jeżeli A jest swobodnym podzbiorem rozszerzenia swobodnego produktu $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}A_i$, to najmniejsze, nasycone i zupełnie addytywne podciało ciała $U_z, \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$ zawierające A nazywamy *zespołem osobliwym* i oznaczamy przez $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

TWIERDZENIE 14. Zespół osobliwy $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$ jest zupełnie addytywnym i atomowym ciałem, dla którego A jest zbiorem atomów reprezentacyjnych. Do zbioru $V(\mathcal{P}/A)$ należą te i tylko te zdarzenia v , które dla pewnego XCA spełniają równoważność

$$(14.8) \quad v \equiv \sum_{u \in X} u, \text{rel} I(\mathcal{P}/A).$$

Dowód. Ze względu na (14.5), (14.6) i (14.7) twierdzenie 14 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia (13.1) z rozdziału I (§ 13, str. 64), co dowodzi słuszności tezy.

Oznaczmy przez A_k zbiór tych elementów, które są odcinkami k -tego rzędu elementów zbioru A ; przyjmijmy $A_1^{(0)} = A_1$ i dla każ-

dego $v \in A_k - A$ oznaczmy przez $A_{k+1}^{(w)}$ zbiór tych elementów u , dla których $vu \in A_{k+1}$. Oczywiście

(14.9) zbiory $A_1^{(w)}$, $A_{k+1}^{(w)}$ są swobodne,

co wynika z tego, że są one podzbiorami swobodnych zbiorów A_1 , A_{k+1} .

OKREŚLENIE 17. Ciała kanoniczne $V(A_1^{(w)})$, $\text{rel} I(A_1^{(w)})$ i $V(A_{k+1}^{(w)})$, $\text{rel} I(A_{k+1}^{(w)})$ nazywamy *składowymi zespołami osobliwego* $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$. W dalszym ciągu, nie zmniejszając ogólności rozważań, będziemy dodatkowo zakładali, że

$$(14.10) \quad A_1 = A_1^{(w)}, \quad A_{k+1} = \sum_{v \in A_k - A} A_{k+1}^{(w)};$$

gdyby bowiem tak nie było, wystarczyłoby w ciągu $\{A_i\}$ zastąpić zbiory A_i przez zbiory występujące po prawej stronie równości (14.10). Na zbiór A nie ma to żadnego wpływu.

Stosunek składowych zespołu osobliwego do samego zespołu jest nieco bardziej skomplikowany niż w przypadku zespołu regularnego. Zbadanie tego stosunku wymaga pewnych rozważań pomocniczych. Udowodnimy, że

$$(14.11) \quad A_k \subset V(\mathcal{P}/A), \quad k=1, 2, \dots$$

Dowód. Niech $u_0 \in A_k$ i $u_0 = \prod_{i=1}^k u_i^{(w)}$, a Z_0 niech będzie zbiorem tych $u \in A$, których odcinkiem jest u_0 . Niech $u_1 = \prod_{i=1}^m u_i^{(w)}$ będzie dowolnym elementem A . Zbiór Z_0 oczywiście nie może być pusty.

Rozróżnimy trzy przypadki:

- a) $m < k$,
- b) $m \geq k$ i $u_j^{(w)} \neq u_j^{(w)}$ dla pewnego $j \leq k$,
- c) $m \geq k$ i u_0 jest odcinkiem u_1 .

Przypadki te wyczerpują wszystkie stosunki, jakie mogą zachodzić między u_0 i u_1 .

W przypadku a) u_1 nie może być odcinkiem u_0 , gdyż wtedy byłby odcinkiem każdego elementu zbioru Z_0 , co z uwagi na (14.2) i swobodność zbioru A jest niemożliwe. Istnieje więc takie $j \leq m$, że $u_j^{(w)} \neq u_j^{(w)}$, i wtedy $u_0 u_1 \rightarrow u_j^{(w)} u_j^{(w)} \rightarrow w(\mathcal{P}/A)$, a więc $u_0 u_1 \equiv 0$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

Korzystając z założenia, że $u_j^{(w)} \neq u_j^{(w)}$, za pomocą analogicznego rozumowania jak powyższe wykazujemy, że w przypadku b) mamy $u_0 u_1 \equiv 0$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

W przypadku zaś c) mamy oczywiście $u_1 \rightarrow u_0$, a więc $u_0 u_1 \equiv u_1$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

W przypadku c) mamy więc $\sum_{u \in Z_0} u \rightarrow u_0$, a w przypadkach a) i b) mamy

$$(14.12) \quad u_0 \equiv u_0 \left(\sum_{u \in A} u \right) \equiv u_0 \sum_{u \in Z_0} u + u_0 \sum_{u \in A - Z_0} u \equiv u_0 \sum_{u \in Z_0} u \equiv \sum_{u \in Z_0} u, \text{rel} I(\mathcal{P}/A),$$

co dowodzi słuszności tezy (14.11).

Udowodnimy jeszcze dwa ważne twierdzenia:

TWIERDZENIE 15. Ciała składowe $V(A_1^{(w)})$, $\text{rel} I(A_1^{(w)})$ jest podciałem zespołu osobliwego $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A)$.

Dowód. Użyjemy znowu twierdzenie (6.5) (str. 81). Ponieważ oczywiście każdy element A jest zawarty w swoim odcinku 1-szego rzędu, a więc elemente zbioru $A_1 = A_1^{(w)}$, mamy więc

$$\sum_{u \in A} u \rightarrow \sum_{u \in A_1^{(w)}} u, \quad \text{z czego wynika, że} \quad \left(\sum_{u \in A_1^{(w)}} u \right)' \rightarrow \left(\sum_{u \in A} u \right)',$$

co wraz z określeniami ideałów $I(A_1^{(w)})$ i $I(\mathcal{P}/A)$ wykazuje, że pierwszy z tych ideałów jest zawarty w drugim, czyli spełniony jest warunek (3). Spełnianie warunku (3) wraz z (14.11) pociąga za sobą spełnianie warunku (1). Warunek (2) jest spełniony z założenia, warunek (4) na mocy twierdzenia 9, warunek zaś (5) na mocy wzoru (14.12) oraz twierdzeń 9 i 14.

TWIERDZENIE 16. Dla każdego $v \in A_k - A$, $k=1, 2, \dots$, ciała składowe $V(A_{k+1}^{(w)})$, $\text{rel} I(A_{k+1}^{(w)})$ jest podciałem ciała $V^{(w)}(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$ będącego nasyconiem ciała $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$.

Dowód. Niech $u \in A_{k+1}^{(w)}$; wówczas na mocy określenia $A_{k+1}^{(w)}$ i (14.11) mamy $vu \in A_{k+1} \subset V(\mathcal{P}/A)$; z drugiej jednak strony $vu \equiv u$, $\text{rel} J(v')$, więc tym bardziej $\text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$, a zatem $u \in V^{(w)}(\mathcal{P}/A)$, co daje

$$(14.13) \quad A_{k+1}^{(w)} \subset V^{(w)}(\mathcal{P}/A).$$

Na mocy twierdzenia 14 i (14.10) zbiorem atomów reprezentacyjnych ciała $V^{(w)}(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$ jest zbiór tych elemen-

tów A , które są zawarte w v ; są to zarazem te elementy, których odcinkiem jest v , i tworzą one zbiór Z_0 . Mamy więc

$$(14.14) \quad \sum_{u \in Z_0} u \equiv 1, \text{rel } I(\mathcal{P}/A) \vee J(v').$$

Ponieważ jednak v nie jest elementem A , więc v jest odcinkiem właściwym każdego $u \in Z_0$; innymi słowy, każdy $u \in Z_0$ ma jako $(k+1)$ -szy czynnik pewien element zbioru $A_{k+1}^{(v)}$, skąd wynika, że

$$\sum_{u \in Z_0} u \rightarrow \sum_{u \in A_{k+1}^{(v)}} u,$$

co wraz z (14.14) daje

$$\sum_{u \in A_{k+1}^{(v)}} u \equiv 1, \text{rel } I(\mathcal{P}/A) \vee J(v'),$$

a ponieważ na podstawie (4.4) mamy

$$I(\mathcal{P}/A) \vee J(v') = J(w(\mathcal{P}/A) + v'),$$

więc ostatecznie

$$\left(\sum_{u \in A_{k+1}^{(v)}} u \right)' \rightarrow w(\mathcal{P}/A) + v'.$$

Stąd wobec (14.3) mamy

$$w(A_{k+1}^{(v)}) = \left(\sum_{u \in A_{k+1}^{(v)}} u \right)' + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A_{k+1}^{(v)} \\ u_1 \neq u_2}} u_1 u_2 \rightarrow w(\mathcal{P}/A) + v',$$

więc

$$I(A_{k+1}^{(v)}) \subset I(\mathcal{P}/A) + v',$$

co stwierdza zachodzenie warunku (3), a wraz z (14.13) również warunku (1) twierdzenia (6.5). Warunek (2) tego twierdzenia jest oczywiście spełniony, warunek (4) wynika z twierdzenia 9, warunek zaś (5) z wzoru (14.12) i twierdzeń 9 i 14, co dowodzi słuszności twierdzenia.

Przyjmijmy

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P} A_i, \quad A^{(n)} = A_n + A \sum_{n=1}^{m-1} \mathcal{P}_m.$$

W przypadku gdy A jest swobodnym podzbiorem rozszerzenia swobodnego produktu $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{P} A_i$, wówczas $\mathcal{P}_n$ są swobodnymi produktami, A_n zaś swobodnymi podzbiórmi ich rozszerzeń. Uprawnia to do przyjęcia następującego określenia:

OKREŚLENIE 18. Zespół $V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ nazywamy zespołem częściowym rzędu n zespołu osobliwego $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$.

Zwracamy uwagę, że stosownie do uwagi uczynionej na początku paragrafu 12 (str. 95) określenie 18 stosuje się również do przypadku, gdy $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{P} A_i$; wtedy oczywiście musi być $n \leq N$. Z uwagi na to możemy wypowiedzieć twierdzenie

(14.15) Jeżeli $V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ i $V(\mathcal{P}_m/A^{(m)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_m/A^{(m)})$ są zespołami częściowymi zespołu osobliwego $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$ i $n \leq m$, to $V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest zespołem częściowym $V(\mathcal{P}_m/A^{(m)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_m/A^{(m)})$.

Udowodnimy ponadto, że

$$(14.16) \quad I(\mathcal{P}_n/A^{(n)}) \subset I(\mathcal{P}/A).$$

Weźmy pod uwagę element $u \in A$; jeżeli u jest odcinkiem rzędu $\leq n$ jakiegoś elementu produktu $\mathcal{P}$, to $u \in A^{(n)}$; jeżeli u jest odcinkiem rzędu $> n$, wówczas oznaczając przez u_0 jego odcinek n -tego rzędu mamy $u \rightarrow u_0 \in A_n \subset A^{(n)}$, w każdym więc przypadku u zawiera się w pewnym elemencie zbioru $A^{(n)}$, wobec czego $\sum_{u \in A} u \rightarrow \sum_{u \in A^{(n)}} u$, a zatem $\left(\sum_{u \in A} u \right)' \rightarrow \left(\sum_{u \in A^{(n)}} u \right)'$, co daje z łatwością (14.16).

Ze względu na (14.11) i (14.16) mamy

$$(14.17) \quad V(\mathcal{P}_n/A^{(n)}) \subset V(\mathcal{P}/A).$$

Biorąc pod uwagę (14.15), wzory (14.16) i (14.17) dają się uogólnić w sposób następujący:

$$(14.18) \quad I(\mathcal{P}_1/A^{(1)}) \subset I(\mathcal{P}_2/A^{(2)}) \subset \dots \subset I(\mathcal{P}/A),$$

$$(14.19) \quad V(\mathcal{P}_1/A^{(1)}) \subset V(\mathcal{P}_2/A^{(2)}) \subset \dots \subset V(\mathcal{P}/A).$$

Twierdzenie 17. Zespół częściowy $V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, $\text{rel } I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest podciałem zespołu $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$.

Dowód. Jak zwykle użyjemy twierdzenia (6.5). Warunki (1) i (3) są spełnione na mocy (14.16) i (14.17), warunek (2) jest oczywisty, warunek (4) spełniony na podstawie twierdzenia 14, warunek zaś (5) wynika łatwo z (14.1).

Twierdzenie 18. *Zbiór zdarzeń $\sum_{n=1}^{\infty} V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest ciałem, $\sum_{n=1}^{\infty} I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest ideałem, przy czym ciało $\sum_{n=1}^{\infty} V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, $\text{rel } \sum_{n=1}^{\infty} I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest podciałem zespołu osobliwego $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$.*

Dowód. Z (14.19) i (8.11) (rozdział I, str. 45) wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest ciałem, i to podciałem ciała $V(\mathcal{P}/A)$. Z (14.18) i (12.7) wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$ jest ideałem. Na mocy twierdzenia 17 i (6.4) dla każdego n mamy $I(\mathcal{P}_n/A^{(n)}) = I(\mathcal{P}/A) \cdot V(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$, a więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(\mathcal{P}_n/A^{(n)}) = I(\mathcal{P}/A) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} V(\mathcal{P}_n/A^{(n)}),$$

skąd wynika, korzystając znowu z (6.4), ostatnia teza twierdzenia 18.

Określenie 19. Podciało

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(\mathcal{P}_n/A^{(n)}), \text{ rel } \sum_{n=1}^{\infty} I(\mathcal{P}_n/A^{(n)})$$

nazywa się *podciałem określającym* zespołu $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$.

Łatwo widzieć, że podciało określające zespołu osobliwego nie musi być ani zupełnie addytywne, ani też atomowe.

§ 15. Klasyfikacja zespołów osobliwych. Przykład zastosowania i wyjaśnienie intuicyjne operacji wprowadzonych w § 14

Przeprowadzimy teraz klasyfikację zespołów osobliwych wyodrębniając typy najprostsze. Będziemy przy tym zakładali, że spełniony jest warunek (14.10).

Określenie 20. Zespół $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$ nazywamy *zespołem osobliwym pierwszego rodzaju*, jeżeli spełnia warunek

$$(15.1) \quad A_{k+1}^{(w)} = A_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, \quad v \in A_k - A.$$

Zespoły pierwszego rodzaju odpowiadają grom, w których przebieg gry może wpłynąć na ilość gier składowych przypadających do rozegrania, lecz nie na ich strukturę (np. gra 1, § 14). Twierdzenie 16 upraszcza się w tym przypadku i daje się sformułować w postaci:

(15.2) *Ciała składowe $V(A_{k+1})$, $\text{rel } I(A_{k+1})$ są podciałami ciała $V^{(w)}(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A) \vee J(w'_k)$, gdzie $w_k = \sum_{v \in A_k - A} v$.*

Dowód. Mamy na podstawie (4.5)

$$J(w'_k) = J\left(\sum_{v \in A_k - A} v\right) = J\left(\prod_{v \in A_k - A} v'\right) = \prod_{v \in A_k - A} J(v'),$$

a na podstawie (15.1), twierdzenia 16 i (6.4)

$$I(A_{k+1}) = [I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')] \cdot V(A_{k+1}) = J(w(\mathcal{P}/A) + v') \cdot V(A_{k+1})$$

dla każdego $v \in A_k - A$, z czego, znów przy użyciu (4.5), wynika, że

$$\begin{aligned} (15.3) \quad J(A_{k+1}) &= V(A_{k+1}) \cdot \prod_{v \in A_k - A} J(w(\mathcal{P}/A) + v') = \\ &= V(A_{k+1}) \cdot J(w(\mathcal{P}/A) + \prod_{v \in A_k - A} v') = \\ &= V(A_{k+1}) \cdot J(w(\mathcal{P}/A)) \vee J\left(\prod_{v \in A_k - A} v'\right) = \\ &= V(A_{k+1}) \cdot J(\mathcal{P}/A) \vee J(w'_k). \end{aligned}$$

Niech będzie dalej $u \in A_{k+1}$; wówczas dla każdego $v \in A_k - A$ jest $vu \in A_{k+1} \subset V(\mathcal{P}/A)$ (por. (14.11)), a ponieważ ciało $V(\mathcal{P}/A)$ jest zupełnie addytywne, więc

$$\sum_{v \in A_k - A} vu = w_k u \in V(\mathcal{P}/A).$$

Ale $u = w_k u$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A) \vee J(w'_k)$, z czego wynika, że $u \in V^{(w)}(\mathcal{P}/A)$, co daje

$$(15.4) \quad A_{k+1} \subset V^{(w)}(\mathcal{P}/A),$$

a wraz z (15.3)

$$(15.5) \quad V(A_{k+1}) \subset V^{(w)}(\mathcal{P}/A).$$

Twierdzenie (15.2) wynika z (15.5) i (15.3) przy użyciu (6.4).

Określenie 21. Zespół $V(\mathcal{P}/A)$, $\text{rel } I(\mathcal{P}/A)$ nazywamy *zespołem osobliwym drugiego rodzaju*, jeśli $A \subset \mathcal{P}$.

Zespoły drugiego rodzaju odpowiadają grom, w których ilość gier składowych jest z góry ustalona, natomiast struktura ich może zależeć od przebiegu gry (jak w przykładzie 2, § 14). Należą tu np. wszelkiego rodzaju ciągnięcia loteryjne.

Zespół osobliwy nazywamy *zespołem osobliwym trzeciego rodzaju*, jeżeli nie jest zespołem ani pierwszego, ani drugiego rodzaju.

Przypuśćmy, że jesteśmy w posiadaniu dwóch sześciennych kostek, białej i czarnej, których ścianki zostały oznaczone oczkami w ilości od 1 do 6. Gra polega na ciągu rzutów jedną z tych kostek; w pierwszym rzucie rzucaamy kostką białą, w $(n+1)$ -szym rzucie zaś kostką białą lub czarną zależnie od tego, czy w n -tym rzucie wynik uzyskany był parzysty czy nieparzysty, w przypadku zaś uzyskania w którymkolwiek rzucie wyniku 6, grę przerywamy. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu w n -tym rzucie k oczek kostką białą (czarną) oznaczamy przez $b_k^{(n)}$ ($c_k^{(n)}$); przyjmujemy dalej $A_1 = (b_1^{(1)}, \dots, b_6^{(1)})$ i $A_n = (b_1^{(n)}, \dots, b_6^{(n)}, c_1^{(n)}, \dots, c_6^{(n)})$ dla $n = 2, 3, \dots$. Rozumowaniem takim jak w § 9 (str. 88) i § 13 (str. 97) łatwo uzasadnić swobodność produktu $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; zespół regularny $V(\mathcal{P}), \text{rel} I(\mathcal{P})$ nie jest jednak

dobrym opisem naszej gry, ponieważ np. zdarzenie $\prod_{n=1}^{\infty} b_3^{(n)}$ jest atomem tego zespołu, podczas gdy z reguł naszej gry wynika jego niemożliwość; w drugim bowiem rzucie, po uzyskaniu w pierwszym wyniku 3, winniśmy grać czarną, nie zaś białą kostką. Utwórzmy więc zbiór tych zdarzeń, które mogą (ze względu na reguły gry) być opisem wyników całej gry. Widać od razu, że zdarzeń tych musimy szukać nie tylko w produkcie $\mathcal{P}$, ale w jego rozszerzeniu, gdyż gra nie musi składać się z nieskończonego ciągu rzutów (gra nie jest więc drugiego rodzaju).

Przyjmijmy

$$P^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P A_i;$$

iloczynny elementów ciągów z P^* są elementami rozszerzenia $\mathcal{P}^*$ produktu $\mathcal{P}$. Niech A będzie klasą tych ciągów $\{u_n\} \in P^*$, które mają następujące własności:

- (1) $u_{n+1} = b_j^{(n+1)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n = b_2^{(n)}$ lub $u_n = b_4^{(n)}$, lub $u_n = c_2^{(n)}$, lub $u_n = c_4^{(n)}$.
- (2) $u_{n+1} = c_j^{(n+1)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n = b_1^{(n)}$ lub $u_n = b_3^{(n)}$, lub $u_n = b_5^{(n)}$, lub $u_n = c_1^{(n)}$, lub $u_n = c_3^{(n)}$, lub $u_n = c_5^{(n)}$.
- (3) $u_n = b_6^{(n)}$ lub $u_n = c_6^{(n)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{u_n\}$ jest ciągiem n -elementowym.

Oznaczmy teraz przez A zbiór iloczynów elementów ciągów z A . Jest to właśnie szukany zbiór zdarzeń; jest on podzbiorem $\mathcal{P}^*$, a jego swobodność łatwo można uzasadnić rozumowaniem podobnym jak w §§ 9 i 13.

Zespół osobliwy $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$ jest opisem omawianej gry, zbiór A jest zbiorem jego atomów.

Przypuśćmy teraz, że w pierwszych trzech rzutach uzyskaliśmy wyniki $b_3^{(1)}, c_4^{(2)}, b_1^{(3)}$, iloczyn $v = b_3^{(1)} \cdot c_4^{(2)} \cdot b_1^{(3)}$ nie należy do A , gra bowiem nie jest skończona, należy natomiast do A_3 , a więc ostatecznie należy do $A_3 - A$. Ponieważ w ostatnim, to jest trzecim rzucie uzyskaliśmy wynik nieparzysty, więc w następnym, czwartym rzucie będziemy rzucać kostką czarną, uzyskując jeden z wyników $c_1^{(4)}, c_2^{(4)}, \dots, c_6^{(4)}$. Z określeń zbiorów $A_{k+1}^{(v)}$ (str. 103) wynika, że są to właśnie wszystkie elementy zbioru $A_4^{(v)}$. Ciało kanoniczne $V(A_4^{(v)}), \text{rel} I(A_4^{(v)})$ jest opisem gry składowej odpowiadającej trzeciemu rzutowi, przy założeniu, że w trzech pierwszych rzutach uzyskaliśmy wyniki $b_3^{(1)}, c_4^{(2)}$ i $b_1^{(3)}$. Zespół osobliwy $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$ nie jest już teraz, to jest po trzecim rzucie, właściwym opisem gry, która nam pozostaje do rozegrania. Zdarzenie v , nie będące w tym zespole ani pewne, ani niemożliwe, stało się obecnie pewne, wszystkie wykluczające się z nim zdarzenia, w szczególności zdarzenie v' , stały się niemożliwe. Aby opisać powyższy stan rzeczy, musimy omawiany zespół brać $\text{rel} J(v')$, to znaczy przejść do ciała $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$, lub jeszcze lepiej do ciała $V^{(v)}(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$, które jako zwykle nasycenie pierwszego ma właściwie taką samą strukturę.

Twierdzenie 16 mówi nam, że ciało $V(A_4^{(v)}), \text{rel} I(A_4^{(v)})$, opisujące nam rzut następny, jest podciałem ciała $V^{(v)}(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$, co tłumaczy, czemu nazywamy je *ciałem składowym* zespołu.

Przypuśćmy jeszcze, że grając dalej wyrzuciliśmy w czwartym rzucie 6, to znaczy uzyskaliśmy wynik $c_6^{(4)}$. Ciało $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v')$ przestaje być właściwym opisem dalszego ciągu gry, należy je zrelatywizować $\text{rel} J(c_6^{(4)})$, biorąc ciało $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A) \vee J(v') \vee J(c_6^{(4)})$, które ze względu na $J(v') \vee J(c_6^{(4)}) = J(v c_6^{(4)})$ możemy oznaczyć przez $V(P/A), \text{rel} I(P/A) \vee J(v c_6^{(4)})$. Z warunku (3) wynika, że $v c_6^{(4)} \in A$, a więc jest na mocy twierdzenia 14 atomem zespołu $V(\mathcal{P}/A), \text{rel} I(\mathcal{P}/A)$, skutkiem czego, na mocy (2.18), ideał $J(v c_6^{(4)})$ jest ideałem pierwszym. Z twierdzenia (6.11) wynika, że

każde zdarzenie ciała $V(\mathcal{P}/A)$ jest obecnie bądź niemożliwe, bądź konieczne. Niemożliwe są te, których uzupełnienia zaszły; zawarte są one, $\text{rel}I(\mathcal{P}/A)$ w $(v_6^{(4)})$, a więc wykluczają się z atomem $vc_6^{(4)}$, który uzyskaliśmy w wyniku gry, koniecznymi zaś są te, których uzupełnienia są niemożliwe, a więc te, które zawierają atom $vc_8^{(4)}$.

Ponieważ podzieliiliśmy interesujące nas w omawianej grze zdarzenia ciała $V(\mathcal{P}/A)$ na te, które zaszły (konieczne), i te, które nie zaszły (niemożliwe), więc gra jest zakończona zgodnie, oczywiście, z przyjętymi regułami.

§ 16. Przykłady i zadania

(16.1) Wykazać, że na to, aby podzbiór I ciała U , $\text{rel} \equiv$ był ideałem tego ciała, potrzeba i wystarcza, aby spełniał warunek

$$u \in I \text{ i } v \in I \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } u + v \in I,$$

a ponadto był zbiorem nasyconym.

(16.2) Wykazać, że jeżeli do ideału I należą wszystkie atomy ciała U , to ciało U , $\text{rel}I$ nie ma wcale atomów.

(16.3) Oznaczmy przez N zbiór liczb naturalnych, przez A_n zbiór $(1, 2, 3, \dots, n)$. Wykazać, że ideał $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(A_n)$ ciała $W(N)$ jest właściwy, nie jest główny ani też przeliczalnie addytywny, a ponadto że każdy przeliczalnie addytywny ideał zawierający go jest niewłaściwy.

(16.4) *Określenie negacji ideału.* Negację ideału I określamy wzorem $\neg I = \bigcap_{v \in I} J(v')$, a więc $u \in \neg I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \rightarrow v'$, dla każdego $v \in I$. Przy takim określeniu struktura I tworzy algebrę o trzech działaniach $\vee$, $\cdot$ i $\neg$ nie będącą ciałem Boole'a. Odpada w szczególności prawo podwójnej negacji $\neg \neg I = I$, co czytelnik zechce sprawdzić na przykładzie ideału $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(A_n)$ z przykładu (16.3). Algebra ta jest specjalnym przypadkiem tak zwanych *algebr Brouwera*.

(16.5) Wykazać, że pierwsze dwa posunięcia gry w szachy stanowią ciało kanoniczne o 400 atomach.

(16.6) Udowodnić, że licytacja bridge'owa stanowi ciało kanoniczne o liczbie atomów równej $\frac{16(22^{35} - 1)}{21} + 1$.

(16.7) Niech A_1 będzie klasą prostych płaszczyzn R_2 , równoległych do osi $(0, x)$, A_2 zaś niech będzie klasą prostych płaszczyzn R_2 , równoległych do osi $(0, y)$. Wykazać, że produkt $\mathcal{P} = \bigotimes_{i=1}^2 A_i$ jest swobodny, ideał $I(\mathcal{P})$ jest ideałem zerowym, zespół regularny $V(\mathcal{P})$, $\text{rel}I(\mathcal{P})$ pokrywa się z ciałem $W(R_2)$, ciało składowe $V(A_1)$, $\text{rel}I(A_1)$ jest ciałem walców o podstawach na osi $(0, y)$.

(16.8) Jakich rodzajów są zespoły osobliwe odpowiadające a) grze w szachy, b) rozgrywce bridge'owej, c) grze w kregle?