telnik łatwo udowodni, że zbiór wszystkich funkcji zarówno ze zwykła, jak też i jednostajną zbieżnością jest przestrzenią $\mathcal{L}^*$. Różnica zasadnicza między tymi dwoma zbieżnościami wyraża się między innymi w tym, że

(4.10) *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $f_1, f_2, \ldots$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f, to funkcja f jest ciągła,*

co dla zwykłej zbieżności nie zachodzi.

Dowód (4.10). Niech p będzie dowolnym punktem R_n. Z jednostajnej zbieżności ciągu $f_1, f_2, \ldots$ wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie m, że $|f(q) - f_m(q)| < \varepsilon/3$ dla każdego $q \in R_n$. Z drugiej strony, ponieważ funkcja f_m jest ciągła, więc istnieje takie $\eta > 0$, że $|f_m(p) - f_m(q)| < \varepsilon/3$, jeśli $\varrho(p, q) < \eta$. Mamy tedy przy $\varrho(p, q) < \eta$

$$|f(p) - f_m(p)| < \varepsilon/3,$$
$$|f_m(p) - f_m(q)| < \varepsilon/3,$$
$$|f_m(q) - f(q)| < \varepsilon/3$$

i ostatecznie $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$, czyli funkcja f jest ciągła w punkcie p, a ponieważ p był dowolnym punktem, więc f jest ciągła w całej przestrzeni R_n, co należało okazać.

Czytelnik łatwo sam skonstruuje przykład ciągu funkcji ciągłych zbieżnych niejednostajnie do funkcji nieciągłej.

Na zakończenie zauważmy, że w rozważaniach tego paragrafu nie robiliśmy użytku z tego, że R_n jest przestrzenią kartezjańską. a tylko z tego, że jest przestrzenią metryczną. Wszystkie więc uzyskane tu wyniki stosują się do dowolnych przestrzeni metrycznych, Nie będziemy jednak robili w dalszym ciągu z tego użytku.

KSIĘGA PIERWSZA

ELEMENTARNA TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rozdział I

Algebra Boole'a

§ 1. Uwagi wstępne, treść rozdziału

Znamy obecnie różne, nieraz mocno od siebie odbiegające sposoby wprowadzania pojęcia prawdopodobieństwa: teoria „klasyczna" w różnych odmianach, teorie aksjomatyczne: Bohlmanna, Keynesa, Kołmogorowa, teoria „częstościowa" Misesa[1]) i inne. Porównanie tych sposobów prowadzi do następujących spostrzeżeń:

1º Prawdopodobieństwo bywa określane rozmaicie, zawsze jednak jest ono liczbą nieujemną, nie większą od jedności, przyporządkowaną pewnym przedmiotom.

2º Co do natury przedmiotów, którym zostaje przyporządkowane prawdopodobieństwo, panuje rozbieżność między poszczególnymi teoriami, w każdym jednak razie można uważać za ustalone, że przedmioty te (zdarzenia, zdania, zbiory, cechy) tworzą tak zwane *ciała Boole'a*, to znaczy określone są dla nich działania podlegające specjalnym prawom formalnym, mianowicie prawom tak zwanej *algebry Boole'a*, którą intuicyjnie określić można jako algebrę wyrazów: „nie", „i" oraz „lub".

Wobec tego podajemy w tym rozdziale zarys teorii ciał Boole'a, a więc: ich określenie przez postulaty (§ 2), elementarne twierdzenia algebry Boole'a (§§ 3 i 4), związek teorii ciał Boole'a z teorią zbiorów częściowo uporządkowanych (§ 5), określenie działań nieskończonych w ciałach Boole'a i prawa nimi rządzące (§ 6), zastosowa-

[1]) G. Bohlmann, *Lebensversicherungsmethodik*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil II, Leipzig 1900-1904, str. 857-917.

J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, London and New York 1921, II wyd., 1929.

A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik II.3 (1933).

R. Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Wien 1931.

nia ciał Boole'a w teorii zbiorów (§§ 7 i 9) i w logice (§ 11), określenie podciał (§ 8), określenie homomorfizmu między dwoma ciałami Boole'a, kongruencji w ciałach Boole'a i uogólnienie ciał Boole'a na tak zwane ciała zrelatywizowane (§ 10) oraz określenie atomu, ciała atomowego i operacji scalania atomów (§§ 12, 13). Ostatni paragraf każdego rozdziału będzie zawierał przykłady i zadania.

§ 2. Określenie ciał Boole'a

Ciałem Boole'a nazywamy zbiór U, na którego elementach określone są działania $+$, $\cdot$ i $'$ (dwa pierwsze na dwu, trzecie na jednym elemencie) w taki sposób, aby dla dowolnych elementów $u, v, w \in U$ były spełnione następujące związki:

(B1) $u+v \in U, \quad u\cdot v \in U, \quad u' \in U,$

(B+2) $u+(v+w)=(u+v)+w,$ (B·2) $u\cdot(v\cdot w)=(u\cdot v)\cdot w,$

(B+3) $u+v=v+u,$ (B·3) $u\cdot v=v\cdot u,$

(B+4) $u\cdot(v+w)=(u\cdot v)+(u\cdot w),$ (B·4) $u+(v\cdot w)=(u+v)\cdot(u+w),$

(B+5) $u+(u\cdot u')=u,$ (B·5) $u\cdot(u+u')=u,$

(B+6) $u+u'=v+v';$ (B·6) $u\cdot u'=v\cdot v'.$

Działanie $+$ nazywamy *dodawaniem* w ciele U, a element $u+v$ *sumą* elementów u i v; działanie $\cdot$ nazywamy *mnożeniem* w ciele U, a element $u\cdot v$ *iloczynem* elementów u i v, wreszcie działanie $'$ nazywamy *dopełnianiem* w ciele U, a element u' *uzupełnieniem* elementu u.

Wyrażenie zapisane sensownie za pomocą zmiennych przebiegających zbiór U lub nazw elementów zbioru U, znaków $+$, $\cdot$, $'$ i nawiasów nazywamy *wyrażeniem algebraicznym* ciała U. Zdanie powstałe z dwu wyrażeń algebraicznych przez połączenie ich znakiem identyczności ($=$) nazywamy *równością algebraiczną* lub *równością*. Przy pisaniu wyrażeń algebraicznych umawiamy się, w celu oszczędzenia pisania zbędnych nawiasów, że znak mnożenia ($\cdot$) wiąże silniej niż znak dodawania ($+$), a następnie umawiamy się opuszczać nawiasy przy wielokrotnych sumach lub iloczynach ze względu na aksjomaty (B+2) i (B·2) wyrażające łączność tych działań. Ponadto będziemy opuszczali, ilekroć nie będzie to groziło nieporozumieniem, znak iloczynu, pisząc zamiast $u\cdot v$ po prostu uv. To postępowanie upodabnia nasze znakowanie do znakowania zwykłej algebry, w której te uproszczenia są ogólnie przyjęte.

W ten sposób wyrażenie algebraiczne $u+(v\cdot w)$ (por. (B+4)) zapisujemy w postaci $u+vw$, wyrażenie zaś $u+[(v\cdot w)+(u\cdot w)]$ — w postaci $u+vw+uw$.

Związki (B1)-(B·6) nazywamy *układem postulatów algebry Boole'a*, w skróceniu: *układem* (B). Wychodząc z postulatów układu (B) możemy, za pomocą rozumowań opartych na prawach logiki, wyprowadzać nowe związki prawdziwe w każdym ciele Boole'a, to znaczy spełnione przez każdy układ elementów każdego ciała Boole'a. Ogół tych wszystkich związków (zdań), które dają się wyprowadzić z postulatów układu (B) przez logicznie poprawne rozumowanie, nazywamy *systemem algebry Boole'a*.

Używając współczesnej terminologii logicznej możemy powiedzieć, że ciała Boole'a [1]) są *modelami systemu algebry Boole'a* lub — co na jedno wychodzi — *modelami układu postulatów* (B) [2]).

Przedstawiony tu układ postulatów algebry Boole'a nie jest ani jedynym możliwym (tę własność dzieli on ze wszystkimi układami postulatów abstrakcyjnych teorii), ani też najprostszym. Znane są rozmaite równoważne między sobą układy postulatów algebry Boole'a [3]). Zawierają one przeważnie mniej postulatów niż podany tu układ (B), a często też mniej pojęć pierwotnych. Jednak podany tu układ postulatów ma wiele stron dodatnich; poszczególne postulaty mają łatwo uchwytny sens intuicyjny, są łatwe do zapamiętania i elementarne twierdzenia dają się z nich prosto wyprowadzić. Poza tym uwidacznia on istotną dla ciał Boole'a symetrię między działaniami dodawania i mnożenia. W następnym paragrafie wyciągniemy z tej uwagi ważną konsekwencję.

Można wykazać, że do ugruntowania algebry Boole'a wystarczają postulaty (B1), (B+3), (B+4), (B·4), (B·5), (B+6) i (B·6), których zespół oznaczmy przez (B*); natomiast pozostałe postulaty, tj. (B+2), (B·2), (B·3) i (B·5), można z poprzednich wyprowadzić na drodze poprawnych rozumowań. Można też wykazać, że z układu postulatów (B*) nie da się już odrzucić żadnego postulatu bez uszczerbku dla systemu algebry Boole'a; mówimy, że układ postulatów (B*) jest niezależny, a układ (B) nie jest taki.

---

[1]) Przykłady ciał Boole'a znajdzie czytelnik w §§ 7 i 9 tego rozdziału.

[2]) Por. A. Tarski, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Lwów-Warszawa, w szczególności str. 85-89.

[3]) Różne układy postulatów algebry Boole'a bada E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Transations of the American Mathematical Society 5 (1904), str. 288-309.

§ 3. Omówienie postulatów układu (B). Twierdzenie o dwoistości

Postulat (B1) ma nieco odmienny charakter od pozostałych. Żąda on, aby działania ′, + i · były *wykonalne* w ciele U, czyli aby ciało U było *zamknięte* ze względu na podstawowe działania, to znaczy, aby element powstały w wyniku wykonania któregoś z działań podstawowych na elementach lub elemencie ciała U należał do ciała U. Dalsze postulaty charakteryzują pewne własności działań podstawowych, a mianowicie: postulaty (B+2) i (B·2) wyrażają *łączność* działań dodawania i mnożenia, postulaty (B+3) i (B·3) ich *przemienność*, postulaty (B+4) i (B·4) ich wzajemną *rozdzielność*. Pozostałe cztery postulaty charakteryzują własności działania uzupełniania w związku z dodawaniem i mnożeniem.

Postulaty (B+6) i (B·6) żądają, aby elementy przedstawione wyrażeniami algebraicznymi $u+u'$ i uu' nie zależały od wyboru elementu u w ciele U. Są to więc dwa wyróżnione elementy w ciele U, które umawiamy się oznaczać odpowiednio przez 1 i 0, to znaczy przyjmujemy następujące określenia:

(3.1) $$1 = u+u',$$

(3.2) $$0 = uu'.$$

Mamy prawo do przyjęcia takich określeń, gdyż ich jednoznaczność gwarantują nam postulaty (B+6) i (B·6). Nie możemy co prawda twierdzić, że 0 nie jest identyczne z 1, nie wiemy bowiem, czy zbiór U składa się z więcej niż jednego elementu, łatwo jednak dowieść, że jeżeli zbiór U zawiera więcej niż jeden element, to 0 nie jest identyczne z 1.

Niech bowiem będzie $0=1 \in U$ i $u \in U$ niech będzie elementem różnym od 1 (a więc i od 0). Ponieważ, jak udowodnimy później (§ 4, (4.1)), w każdym ciele Boole'a zachodzi równość $u=u+u$ dla dowolnego elementu, więc

(I) $uu' = u+u'$ (na mocy założenia $0=1$),
(II) $u+(u+u')=u$ (na mocy postulatu (B+5) oraz (I)),
(III) $(u+u)+u'=u$ (na mocy postulatu (B+2) oraz (II)),
(IV) $u+u'=u$ (na mocy równości $u+u=u$),
(V) $1=u$ (na mocy (IV) i określenia (3.1)).

Równość (V) przeczy założeniu, że u jest elementem różnym od 1, a to dowodzi słuszności tezy.

Zwróćmy uwagę na to, że elementy 0 i 1 zależą od ciała U, to znaczy, że jeżeli U i V są różnymi ciałami Boole'a, to elementy 0 i 1 w ciele U są na ogół różne od elementów 0 i 1 w ciele V.

Po przyjęciu określeń (3.1) i (3.2) możemy postulaty (B+5) i (B·5) zapisać w postaci

$\overline{(\mathrm{B}{+}5)}$ $$u+0=u,$$

$\overline{(\mathrm{B}{\cdot}5)}$ $$u\cdot 1=u.$$

W tej postaci są one zwykle przyjmowane w układach postulatów algebry Boole'a.

Nie należy zapominać, że ciało Boole'a tworzy nie sam zbiór U, lecz zbiór U wraz z określonymi w nim działaniami podstawowymi. Na przykład, gdy w pewnym zbiorze mamy określone dwa różne układy działań tworzące wraz z tym zbiorem ciało Boole'a, uważamy, że mamy do czynienia z dwoma różnymi ciałami Boole'a.

Z tego powodu byłoby rzeczą słuszną nazywać ciałem Boole'a nie sam zbiór U, lecz czwórkę uporządkowaną $\langle U, +, \cdot, ' \rangle$, składającą się ze zbioru U i trzech działań podstawowych spełniających postulaty układu (B). Nie będziemy się jednak trzymali tego sposobu oznaczania, gdyż mimo jego wielkiej ścisłości, nie jest on wygodny w użyciu.

TWIERDZENIE 1 (o dwoistości). *Jeżeli zbiór U jest ciałem Boole'a ze względu na działania* $+, \cdot$ *i* $'$, *to zbiór U jest również ciałem Boole'a ze względu na działania* $\cdot, +$ *i* $'$.

Twierdzenie to mówi nam, że każdy zbiór, który jest ciałem Boole'a ze względu na pewien układ podstawowych działań, jest również ciałem Boole'a ze względu na inny, różny od poprzedniego układu działań, działanie bowiem · nie pokrywa się z działaniem + (z wyjątkiem trywialnego przypadku, gdy ciało Boole'a jest zbiorem jednoelementowym).

Mówi nam ono dalej, że działania + i · określone w pewnym ciele Boole'a można traktować dowolnie: + jako dodawanie, a · jako mnożenie, lub przeciwnie. Dowód twierdzenia 1 jest natychmiastowy. Jak już mówiliśmy, postulaty układu (B) wykazują symetrię, która została specjalnie zaznaczona w ich numeracji. Każdy z postulatów przechodzi w drugi, oznaczony tym samym numerem, jeżeli w miejsce znaków + wpiszemy znaki · i odwrotnie. Jeżeli więc dwa działania + i · (wraz z trzecim działaniem ′, które nie ulega zmianie) spełniają jeden z postulatów, to działania $\cdot$ i $+$ spełniają drugi z postulatów, po przestawieniu w nim znaków sumy i iloczynu.

Mając dane wyrażenie algebraiczne nazwiemy *dwoistym* do niego wyrażenie algebraiczne otrzymane z danego w ten sposób, że występujące w nim znaki iloczynu $(\cdot)$ zastępujemy znakami sumy $(+)$ i na odwrót — znaki sumy znakami iloczynu (równocześnie zmieniając odpowiednio nawiasy, stosownie do zawartych poprzednio umów dotyczących zapisywania wyrażeń algebraicznych). Ze względu na określenie (3.1) i (3.2) oraz fakt, że wyrażenia $u+u'$ uu' są względem siebie dwoiste, widzimy, że w przypadku występowania 0 lub 1 w danym wyrażeniu musimy, aby otrzymać wyrażenie względem niego dwoiste, zastąpić w nim wszędzie 0 przez 1 i odwrotnie.

Równością algebraiczną dwoistą względem danej nazywamy równość, której obie strony są wyrażeniami dwoistymi odpowiednio względem obu stron danej równości. Widzimy, że każdy z postulatów układu (B) oznaczony krzyżykiem jest dwoisty względem postulatu oznaczonego tym samym numerem i kropką. Dalej widzimy, że równości (3.1) i (3.2) są wzajemnie do siebie dwoiste. Wynika stąd następujący

WNIOSEK. *Jeżeli udowodnimy pewną równość algebraiczną opierając się w dowodzie kolejno na pewnych postulatach, to dowód równości dwoistej otrzymamy zastępując kolejno w dowodzie danej równości postulaty, na których opieraliśmy się, postulatami względem nich dwoistymi.*

Korzystając z tego wniosku będziemy z dwóch równości dwoistych dowodzili tylko jednej; drugą będziemy uważali za udowodnioną na podstawie powyższego wniosku. O słuszności tego postępowania może się czytelnik przekonać przeprowadzając w poszczególnych przypadkach dowód równości dwoistej na podstawie dowodu równości udowodnionej.

§ 4. Elementarne twierdzenia algebry Boole'a

Dowody równości algebraicznych będziemy pisali, podobnie jak się to robi w zwykłej algebrze, w postaci łańcuchów równości, zastępując przy przejściu od członu do członu „równe przez równe" na podstawie postulatów lub równości wcześniej udowodnionych.

Udowodnimy najpierw następujące twierdzenia dwoiste, zwane *zasadami tautologii*:

(4.1) $$u = u+u, \qquad u = u\cdot u.$$

Dowód. $u = u+uu' = (u+u)(u+u') = u+u$. W dowodzie powołujemy się kolejno na postulaty (B^+5), $(B\cdot 4)$ i $(B\cdot 5)$.

Dla wykazania na przykładzie zastosowania wniosku wysnutego w poprzednim paragrafie podamy dowód twierdzenia dwoistego:

$$u = u\cdot(u+u') = uu+uu' = uu.$$

Powołujemy się kolejno na postulaty $(B\cdot 5)$, (B^+4) i (B^+5).

Udowodnimy teraz twierdzenia:

(4.2) $$u = uv+uv', \qquad u = (u+v)(u+v').$$

Dowód. $u = u(u+u') = u(v+v') = uv+uv'$.

Powołaliśmy się na postulaty $(B\cdot 5)$, (B^+6), (B^+4).

(4.3) $$u = u+uv, \qquad u = u(u+v).$$

Dowód.

$$u = uv+uv' = uv'+uv = uv'+(uv+uv) = (uv'+uv)+uv = u+uv.$$

Przy przechodzeniu od jednej równości do drugiej korzystaliśmy kolejno z wzorów (4.2), (B^+3), (4.1), (B^+2) i (4.2).

W dowodzie tego prawa, zwanego *prawem absorpcji*, powołaliśmy się na postulat (B^+2) orzekający łączność działania $+$, po to, aby pokazać jego zastosowanie.

Zgodnie z umową zawartą w § 2 wielowyrazowe sumy i iloczyny będziemy pisali bez nawiasów i nie będziemy się już więcej powoływali na postulaty (B^+2) i $(B\cdot 2)$.

Oto dalsze dwa *prawa absorpcji* oraz *prawo podwójnego dopełnienia*:

(4.4) $$u+1 = 1, \qquad u\cdot 0 = 0.$$

Dowód opiera się na wzorach (3.1), (4.1) i (3.1): $u+1 = u+u+u' = u+u' = 1$.

(4.5) $$u = (u')'.$$

Dowód opiera się na wzorach (4.2), (B^+3), $(B\cdot 3)$, $(B\cdot 6)$, $(B\cdot 3)$, (4.2):

$$u = uu'+u(u')' = u(u')'+uu' = (u')'u+uu' = (u')'u+u'(u')' = $$
$$= (u')'u+(u')'u' = (u')'.$$

W dalszych dowodach nie będziemy zaznaczali miejsc, w których powołujemy się na postulaty przemienności (B^{+}3) i (B·3).

Udowodnimy teraz tak zwane wzory de Morgana:

(4.6) $$(u+v)'=u'v', \qquad (uv)'=u'+v'.$$

Dowód. Udowodnimy wpierw pomocniczo:

(a) $$1=u+v+u'v', \qquad 0=uv(u'+v').$$

Istotnie, $1=(u+u')(v+v')=uv+uv'+u'v+u'v'=(uv+uv')+$ $+(uv+u'v)+u'v'=u+v+u'v'$.

Przy dowodzie tej równości opieraliśmy się kolejno na wzorach (3.1), (4.1), (B^{+}4), (4.1), (4.2).

Mamy teraz

$$\begin{aligned}(u+v)'&=(u+v+u'v')(u+v)'=(u+v)(u+v)'+u'v'(u+v)'=\\&=u'v'(u+v)'+u'v'\big((u')'+(v')'\big)=u'v'(u+v)'+u'v'(u+v)=\\&=u'v'[(u+v)'+(u+v)]=u'v',\end{aligned}$$

przy czym oparliśmy się na wzorach (B·5), (a), (B^{+}4), [(B^{+}5), (a)], (4.5), (B^{+}4), (B·5).

Umawiamy się, że gdy przy przejściu od jednej równości do drugiej powołujemy się na więcej niż jeden postulat lub poprzednio udowodnioną równość, ujmujemy numery odpowiadających twierdzeń w nawiasy kwadratowe.

Udowodnimy teraz dalsze twierdzenia:

(4.7) $$u+v=(u'v')', \qquad uv=(u'+v')'.$$

Dowód opieramy na wzorach (4.5), (4.6): $u+v=[(u+v)']'=$ $=(u'v')'$.

(4.8) $$0=1', \qquad 1=0'.$$

Dowód opieramy na wzorach (3.2), [(4.7), (4.5)], (3.1): $0=uu'=$ $=(u'+u)'=1'$.

Określamy teraz indukcyjnie, podobnie jak w arytmetyce, sumę i iloczyn n-elementów $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ciała U:

(4.9) $$\sum_{i=1}^{1} u_i=u_1, \qquad \prod_{i=1}^{1} u_i=u_1.$$

(4.10) $$\sum_{i=1}^{n} u_i=\Big(\sum_{i=1}^{n-1} u_i\Big)+u_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} u_i=\Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i\Big)\cdot u_n, \qquad \text{dla } n>1.$$

Można drogą łatwej indukcji uogólnić wzory de Morgana na sumy i iloczyny n-elementów:

(4.11) $$\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)'=\prod_{i=1}^{n} u_i', \qquad \Big(\prod_{i=1}^{n} u_i\Big)'=\sum_{i=1}^{n} u_i'.$$

Na zakończenie tego paragrafu podamy jeszcze kilka twierdzeń nie mających postaci równości.

(4.12) *Jeżeli* $u+v=1$ *i* $uv=0$, *to* $u=v'$.

Dowód. Załóżmy, że (a) $u+v=1$, (b) $uv=0$. Opierając się kolejno na wzorach [(B^{+}5), (B·6)], (B·4), [(a), (3.1), (B·5)], [(b), (4.6), (4.8), (B·6)], (4.2) otrzymujemy

$$u=u+vv'=(u+v)(u+v')=u+v'=(v'+u)(v'+u')=v'+uu'=v'.$$

(4.13) *Następujące cztery wzory są równoważne* (to znaczy, jeżeli którykolwiek z nich zachodzi dla dwu elementów $u, v \in U$, to zachodzą też i pozostałe):

(a) $u+v=v$, (b) $u\cdot v=u$, (c) $u'+v=1$, (d) $u\cdot v'=0$.

Dowód. Załóżmy (a). Otrzymujemy $u\cdot v=u(u+v)=u$, czyli (b), przy czym oparliśmy się na wzorach (a) i (4.3).

Załóżmy (b). Otrzymujemy $u'+v=(uv)'+v=u'+v'+v=1$, czyli (c), przy czym oparliśmy się na wzorach (b), (4.6), [(3.1), (4.4)].

Załóżmy (c). Otrzymujemy $u\cdot v'=(u'+v)'=1'=0$, czyli (d), przy czym oparliśmy się na wzorach [(4.6), (4.5)], (c), (4.8).

Załóżmy (d). Otrzymujemy $u+v=uv+uv'+v=uv+v=v$, czyli (a), przy czym oparliśmy się na wzorach (4.2), (d) i (4.3).

Wykazaliśmy, że z (a) wynika (b), z (b) wynika (c), z (c) wynika (d) i z (d) wynika (a), co daje (4.13).

(4.14) *Jeżeli* $u+v=v$ *i* $v+z=z$, *to* $u+z=z$.

Dowód. Załóżmy (a) $u+v=v$, (b) $v+z=z$; opierając się na wzorach (b), (a) i (b)[1]) otrzymujemy $u+z=u+v+z=v+z=z$.

(4.15) $u=v$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $uv'+u'v=0$.

Dowód. Załóżmy (a) $u=v$; otrzymujemy $uv'+u'=uu'+$ $+u'u=0$, gdzie skorzystaliśmy z wzorów [(a), (a)], [(3.2), (4.1)].

Załóżmy (b) $uv'+u'v=0$; otrzymujemy $u=uv+uv'=uv+$ $+uv'+uv'+u'v=uv+uv'+u'v=uv+(uv'+u'v)+u'v=uv+u+$ $+v=v$. Oparliśmy się na wzorach (4.2), (b), (4.1), (4.1), (b) i (4.2).

---

[1]) Pozornie w dowodzie tym nie korzystamy z żadnych specyficznych twierdzeń algebry Boole'a, w istocie jednak korzystamy z (B^{+}2), czego zgodnie z umową nie uwidaczniamy.

§ 5. Zawieranie (implikacja). Ciała Boole'a jako zbiory częściowo uporządkowane

Określimy obecnie pewną relację dwuargumentową między elementami dowolnego ciała Boole'a, zwaną relacją *zawierania* lub *implikacji*.

OKREŚLENIE 1. Jeżeli u i v są dwoma elementami ciała Boole'a, to mówimy, że *element* u *jest zawarty w elemencie* v (lub że u *implikuje* v), i piszemy $u \to v$, jeśli $u+v=v$.

Na mocy tego określenia i twierdzenia (4.13) wzór $u \to v$ jest równoważny każdemu z wzorów (4.13): (a), (b), (c) i (d).

Następujące własności implikacji otrzymamy natychmiast z udowodnionych już twierdzeń:

(5.1) $$u \to u.$$

Jest to tak zwana *zwrotność* stosunku zawierania. Dowód opiera się na wzorze (4.1).

(5.2) *Jeżeli* $u \to v$ *i* $v \to z$, *to* $u \to z$.

Jest to tak zwana *przechodniość* stosunku zawierania. Dowód opiera się na wzorze (4.14).

(5.3) $$u \to 1.$$

Dowód wynika z wzoru (4.4).

(5.4) $$0 \to u.$$

Dowód wynika z wzorów (4.4) i (4.13).

(5.5) $$u \to u+v.$$

Dowód wynika z twierdzeń (4.3) i (4.13).

(5.6) $$uv \to u.$$

Dowód wynika z wzoru (4.3).

(5.7) *Jeżeli* $u \to z$ *i* $v \to z$, *to* $u+v \to z$.

Dowód. Załóżmy (a) $u+z=z$, (b) $v+z=z$; otrzymujemy: $u+v+z=u+z=z$, przy czym opieraliśmy się na wzorach (b), (a).

(5.8) *Jeżeli* $z \to u$ *i* $z \to v$, *to* $z \to u \cdot v$.

Dowód jest analogiczny do poprzedniego przy użyciu równoważności (4.13). Pozostawimy go czytelnikowi.

(5.9) *Jeżeli* $u \to 0$, *to* $u=0$.

Dowód. Załóżmy (a) $u+0=0$; otrzymujemy $u=u+uu'= =u+0=0$.

Oparliśmy się na wzorach (B+5), (3.2), (a).

(5.10) *Jeżeli* $1 \to u$, *to* $u=1$.

Dowód, który jest analogiczny do poprzedniego, pozostawiamy czytelnikowi.

(5.11) *Jeżeli* $u \to v$, *to* $v' \to u'$.

Dowód. Załóżmy (a) $u+v=v$; opierając się na wzorach (a) i (4.6) otrzymujemy $v'=(u+v)'=u'v'$, co na mocy (4.13) jest równoważne wzorowi $v'+u'=u'$.

(5.12) $u=v$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $u \to v$ *i* $v \to u$.

Dowód. Z założenia, że $u=v$, wynika na mocy (5.1) $u \to v$ i $v \to u$. Załóżmy, że $u+v=v$ i $v+u=u$. Korzystając z (B+3) mamy stąd $u=v$.

Zajmiemy się teraz abstrakcyjnym badaniem takich relacyj, które mają własności podobne do relacji zawierania w ciałach Boole'a.

Niech A będzie dowolnym zbiorem, $\lesssim$ relacją określoną dla elementów zbioru A. O relacji $\lesssim$ mówimy, że *porządkuje częściowo* zbiór A, jeżeli ma następujące dwie własności:

(I) *Jeżeli* $a \in A$, *to* $a \lesssim a$.

(II) *Jeżeli* $a,b,c \in A$, $a \lesssim b$ *i* $b \lesssim c$, *to* $a \lesssim c$.

Własności (I) i (II) nazywamy odpowiednio *zwrotnością* i *przechodniością* relacji $\lesssim$ w zbiorze A. Jeżeli relacja $\lesssim$ ma ponadto własność

(III) *Jeżeli* $a,b \in A$, $a \lesssim b$ *i* $b \lesssim a$, *to* $a=b$,

to mówimy, że jest ona w zbiorze A *zredukowana*.

W przypadku, gdy prócz warunków (I), (II) i (III) relacja $\lesssim$ spełnia jeszcze warunki:

(IV) *Jeżeli* $a,b \in A$, *to istnieje takie* $c \in A$, *że* $a \lesssim c$, $b \lesssim c$ *i dla każdego* $d \in A$, *jeżeli* $a \lesssim d$ *i* $b \lesssim d$, *to* $c \lesssim d$,

(V) *Jeżeli* $a,b \in A$, *to istnieje takie* $c \in A$, *że* $c \lesssim a$, $c \lesssim b$ *i dla każdego* $d \in A$, *jeżeli* $d \lesssim a$ *i* $d \lesssim b$, *to* $d \lesssim c$,

mówimy, że *indukuje* ona w zbiorze A *strukturę*.

Tak określone pojęcie struktury [1]) ma wiele zastosowań w różnych działach matematyki. Czytelnik sprawdzi, że np. relacja „k dzieli bez reszty l" indukuje strukturę w zbiorze liczb całkowitych.

[1]) Teoria struktur jest szczegółowo omówiona w książce: G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948, II wyd.

Jeśli relacja $\precsim$ indukuje w A strukturę, to możemy w A określić dwa działania: dodawanie i mnożenie, w ten sposób, że przez sumę $a+b$ dwóch elementów $a, b \in A$ będziemy rozumieli element $c \in A$ spełniający (IV), przez iloczyn zaś $a \cdot b$ tych dwóch elementów będziemy rozumieli element $c \in A$ spełniający (V). Łatwo sprawdzić, że suma i iloczyn dwóch elementów są w ten sposób określone jednoznacznie. Tak zdefiniowane działania spełniają związki (B^+2), ($B^\cdot 2$), (B^+4), ($B^\cdot 4$), (4.1), (4.3), nie muszą jednak być wzajemnie rozłączne, to znaczy nie muszą spełniać (B^+4) i ($B^\cdot 4$). Jeżeli suma i iloczyn spełniają te związki, to mówimy, że *relacja $\precsim$ indukuje w A strukturę dystrybutywną.*

Specjalnym przypadkiem relacyj indukujących strukturę są te, które spełniają dodatkowo warunek:

(VI) *Jeżeli $a \in A$, to istnieje takie $b \in A$, że dla każdego $c \in A$, jeżeli $c \precsim b$ i $c \precsim a$, to dla każdego $d \in A$ jest $c \precsim d$ oraz dla każdego $c \in A$, jeżeli $a \precsim c$ i $b \precsim c$, to dla każdego $d \in A$ jest $d \precsim c$.*

O relacjach indukujących w A strukturę dystrybutywną i spełniającą (VI) mówimy, że *indukują w A strukturę typu B* (Boole'owską).

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli U jest ciałem Boole'a, to relacja zawierania $\to$ indukuje w U strukturę typu B.*

Dowód. Spełnianie przez relację $\to$ w zbiorze U warunków (I), (II) i (III) wynika natychmiast z wzorów (5.1), (5.2) i (5.12). Łatwo sprawdzić, że warunki (IV) i (V) będą spełnione dla dowolnych $u, v \in U$ odpowiednio przez elementy $u+v$ i $u \cdot v$, a to ze względu na twierdzenie (5.5), (5.7) i (5.6), (5.8). Udowodnimy, że warunek (VI) jest spełniony dla każdego $u \in U$ przez element u'. Załóżmy, że $v \to u$ i $v \to u'$. Na mocy (5.8) mamy $v \to uu' = 0$, skąd na podstawie (5.9) $v = 0$, a więc na mocy (5.4) $v \to z$ dla każdego $z \in U$. Niech teraz $u \to v$ i $u' \to v$. Z (5.7) wynika $1 = u + u' \to v$, a z (5.10) wynika $v = 1$, na mocy (5.3) mamy zatem $z \to v$ dla każdego $z \in U$.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli relacja $\precsim$ indukuje w zbiorze A strukturę typu B, to istnieje jeden i tylko jeden taki wybór działań $+, \cdot, '$, że zbiór A tworzy ze względu na te działania ciało Boole'a i relacja $\precsim$ pokrywa się z relacją zawierania w tym ciele, to znaczy dla $a, b \in A$ mamy $a \precsim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \to b$.*

Dowód. Dla wykazania istnienia działań określamy w A dodawanie i mnożenie, tak jak to zrobiliśmy poprzednio, przy założeniu, że relacja $\precsim$ indukuje w A strukturę, a więc przez warunki (IV) i (V). Uzupełnienie a' elementu $a \in A$ określamy jako ten element $b \in A$, który spełnia warunek (VI). Podobnie jak poprzednio, tak i tu łatwo jest wykazać, że uzupełnienie jest w ten sposób jednoznacznie określone. W ten sposób mamy określony w A pewien układ działań.

Określiliśmy więc w A pewien układ działań. Dla dowodu, że zbiór A jest ze względu na te działania ciałem Boole'a, należy sprawdzić, że spełniony jest układ postulatów (B), co pozostawiamy czytelnikowi.

Niech teraz $a \precsim b$. Ponieważ z warunku (I) wynika $b \precsim b$, więc $a+b \precsim b$ na mocy warunku (IV). Z drugiej zaś strony z warunku (IV) wynika $b \precsim a+b$, co ze względu na (III) daje nam $a+b = b$, czyli $a \to b$.

Na odwrót, niech $a \to b$, czyli $a+b = b$. Na mocy (I) mamy $a+b \precsim b$, a na mocy (IV) ogólnie $a \precsim a+b$, co łącznie z warunkiem (II) daje $a \precsim b$. Jednoznaczność takiego wyboru działań $+, \cdot$ i $'$, aby była zachowana równoważność związków $a \precsim b$ i $a \to b$, wynika natychmiast z (5.3)-(5.11).

Udowodnione twierdzenia 2 i 3 mówią nam, że teoria ciała Boole'a jest częścią teorii zbiorów częściowo uporządkowanych, a w szczególności częścią teorii struktur.

§ 6. Działania nieskończone w ciałach Boole'a

Niech U będzie dowolnym ciałem Boole'a, Z zaś dowolnym podzbiorem U.

OKREŚLENIE 2a. Element $u \in U$ nazywamy *sumą* elementów zbioru $Z \subset U$, jeśli spełnia dwa warunki:

(6.1a) *Dla każdego $z \in Z$ zachodzi $z \to u$,*

(6.2a) *Jeżeli przy pewnym $v \in U$ mamy $z \to v$ dla każdego $z \in Z$, to $u \to v$.*

OKREŚLENIE 2b. Element $u \in U$ nazywamy *iloczynem* elementów zbioru $Z \subset U$, jeśli spełnia on dwa warunki:

(6.1b) *Dla każdego $z \in Z$ zachodzi $u \to z$,*

(6.2b) *Jeżeli przy pewnym $v \in U$ mamy $v \to z$ dla każdego $z \in Z$, to $v \to u$.*

Sumę elementów zbioru $Z\subset U$ oznaczamy przez $\sum\limits_{z\in Z} z$, a iloczyn oznaczamy przez $\prod\limits_{z\in Z} z$. W przypadku, gdy Z jest zbiorem przeliczalnym i $Z=(z_1,z_2,\ldots)$, piszemy dla oznaczenia sumy i iloczynu odpowiednio $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i$ i $\prod\limits_{i=1}^{\infty} z_i$.

Należy zwrócić uwagę, że dla każdego zbioru $Z\subset U$ suma i iloczyn elementów tego zbioru, o ile istnieją, są jednoznacznie wyznaczone określeniem 2. Może się jednak zdarzyć, że w pewnym ciele U dla pewnego zbioru $Z\subset U$ nie istnieje element $u\in U$ spełniający (6.1) i (6.2), czyli nie istnieje suma (lub odpowiednio iloczyn) elementów zbioru Z.

Określenie 3. Ciało U nazywamy *przeliczalnie addytywnym* ciałem Boole'a, jeżeli dla każdego przeliczalnego podzbioru Z tego ciała istnieje w tym celu suma elementów zbioru Z. W przypadku, gdy dla każdego podzbioru Z tego ciała (bez ograniczenia mocy) istnieje w tym ciele suma elementów zbioru Z, wówczas ciało U nazywamy *zupełnie addytywnym*.

Udowodnimy kilka twierdzeń dotyczących wprowadzonych pojęć.

(6.3) *Dla każdego zbioru skończonego $Z=(z_1,\ldots,z_n)\subset U$ istnieje suma i iloczyn elementów tego zbioru*:

$$\sum_{z\in Z} z=\sum_{i=1}^{n} z_i=z_1+\ldots+z_n,\qquad \prod_{z\in Z} z=\prod_{i=1}^{n} z_i=z_1\cdot\ldots\cdot z_n.$$

Dowód. Dla $n=2$ twierdzenie jest oczywiste, gdyż wtedy warunki (6.1) i (6.2) pokrywają się z określeniem sumy i iloczynu przez relację zawierania $\to$ (warunki (IV) i (V), str. 33). Dla dowolnego n otrzymujemy twierdzenie (6.3) przez indukcję, korzystając z łączności dodawania i mnożenia.

Wniosek. *Każde ciało Boole'a skończone jest zupełnie addytywne.*

Udowodnimy teraz równości:

$$(6.4)\qquad \sum_{z\in Z}\sum_{w\in W}(z+w)=\sum_{z\in Z} z+\sum_{w\in W} w,\qquad \prod_{z\in Z}\prod_{w\in W}(zw)=\prod_{z\in Z} z\cdot\prod_{w\in W} w.$$

Dowód. Dla każdego $z\in Z$ i $w\in W$ mamy $z+w\to\sum\limits_{z\in Z} z+\sum\limits_{w\in W} w$, a więc $\sum\limits_{w\in W}(z+w)\to\sum\limits_{z\in Z} z+\sum\limits_{w\in W} w$ i dalej $\sum\limits_{z\in Z}\sum\limits_{w\in W}(z+w)\to\sum\limits_{z\in Z} z+\sum\limits_{w\in W} w$.

Z drugiej jednak strony dla $z\in Z$ mamy $z\to z+w\to\sum\limits_{w\in W}(z+w)\to\sum\limits_{z\in Z}\sum\limits_{w\in W}(z+w)$, a więc $\sum\limits_{z\in Z} z\to\sum\limits_{z\in Z}\sum\limits_{w\in W}(z+w)$. Podobnie otrzymujemy $\sum\limits_{w\in W} w\to\sum\limits_{z\in Z}\sum\limits_{w\in W}(z+w)$, skąd wynika, że $\sum\limits_{z\in Z} z+\sum\limits_{w\in W} w\to\sum\limits_{z\in Z}\sum\limits_{w\in W}(z+w)$, co wraz z poprzednio udowodnionym zawieraniem daje pierwszą równość (6.4).

Łatwo zauważyć, że dowód drugiej równości otrzymamy przez rozumowanie dwoiste, to znaczy zastępując w dowodzie pierwszej równości znaki sumy przez znaki iloczynu i odwracając zawieranie. Należy zauważyć, że tak w twierdzeniu (6.4), jak też w następnych zakładamy istnienie sum (lub iloczynów) występujących w twierdzeniu.

(6.5) *Jeżeli Z jest zbiorem pustym, to*

$$\sum_{z\in Z} z=1,\qquad \prod_{z\in Z} z=0.$$

(6.6) *Jeżeli Z nie jest zbiorem pustym, to*

$$\sum_{z\in Z} zz'=0,\qquad \prod_{z\in Z}(z+z')=1.$$

(6.7) *Jeżeli $z_0\in Z$, to*

$$\sum_{z\in Z}(z+z_0')=1,\qquad \prod_{z\in Z}(zz_0')=0.$$

Dowody (6.5), (6.6) i (6.7) wynikają wprost z określenia 2.

$$(6.8)\qquad \Big(\sum_{z\in Z} z\Big)'=\prod_{z\in Z} z',\qquad \Big(\prod_{z\in Z} z\Big)'=\sum_{z\in Z} z'.$$

Dowód. Dla każdego $z\in Z$ mamy $z\to\sum\limits_{z\in Z} z$, skąd na mocy (5.11) $\Big(\sum\limits_{z\in Z} z\Big)'\to z'$, a na podstawie określenia iloczynu $\Big(\sum\limits_{z\in Z} z\Big)'\to\prod\limits_{z\in Z} z'$. Z drugiej jednak strony, ponieważ dla każdego $z\in Z$ mamy $\prod\limits_{z\in Z} z'\to z'$, więc na mocy (5.11) $z\to\Big(\prod\limits_{z\in Z} z'\Big)'$, a następnie $\sum\limits_{z\in Z} z\to\Big(\prod\limits_{z\in Z} z'\Big)'$. Stosując znowu (5.11) otrzymujemy $\prod\limits_{z\in Z} z'\to\Big(\sum\limits_{z\in Z} z\Big)'$. Udowodnione obustronne zawieranie dają identyczność (6.8).

Wzory (6.8) nazywają się *uogólnionymi wzorami de Morgana*. Wynika z nich następujący

Wniosek. *W każdym zupełnie addytywnym ciele Boole'a (przeliczalnie addytywnym ciele Boole'a) istnieje dla każdego (każdego co najwyżej przeliczalnego) zbioru elementów iloczyn elementów tego zbioru.*

Udowodnimy jeszcze dwa prawa rozdzielności:

(6.9) $$w\sum_{z\in Z} z = \sum_{z\in Z} wz, \qquad w+\prod_{z\in Z} z = \prod_{z\in Z}(z+w).$$

Udowodnimy pomocniczo

(a) $$w\sum_{z\in Z} wz = \sum_{z\in Z} wz.$$

Dla dowolnego $z\in Z$ mamy $wz\rightarrow w$, więc $\sum_{z\in Z} wz\rightarrow w$, skąd wynika (a).

(b) $$w'\sum_{z\in Z} wz = 0.$$

Mnożąc (a) obustronnie przez w' otrzymujemy (b).

Dowód twierdzenia (6.9): $w\sum_{z\in Z} z = w\sum_{z\in Z}(zw+zw') = w\sum_{z\in Z} zw + w\sum_{z\in Z} zw' = \sum_{z\in Z} wz$.

Na zakończenie niniejszego paragrafu podamy jeszcze dwa twierdzenia o nieco innym charakterze.

Będziemy mówili, że element u ciała U jest *nieskończony*, jeśli zbiór tych $v\in U$, które są zawarte w u (tzn. $v\rightarrow u$), jest nieskończony.

(6.10) *Jeżeli element $u\in U$ jest nieskończony, to istnieje różny od niego i zawarty w nim element $v\in U$ również nieskończony.*

Dowód. Przypuśćmy, że element u jest nieskończony, ale każdy różny od u i zawarty w nim element nie jest nieskończony. Niech v_0 będzie dowolnym niepustym elementem zawartym w u. Na mocy założenia zarówno v_0, jak uv_0' nie są nieskończone. Przypuśćmy, że w pierwszym zawiera się k elementów, w drugim zaś l elementów ciała U. Ponieważ każdy element v zawarty w u daje się jednoznacznie przedstawić w postaci $v=v_1+v_2$, gdzie $v_1\rightarrow v_0$, a $v_2\rightarrow uv_0'$, więc w u zawiera się nie więcej niż $k\cdot l$ elementów, nie jest on zatem nieskończony, wbrew założeniu.

(6.11) *Jeżeli U jest przeliczalnym ciałem Boole'a* (to znaczy zbiór U jest dokładnie przeliczalny), *to U nie jest przeliczalnie addytywnym ciałem Boole'a.*

Dowód. Z założenia element 1 ciała U jest nieskończony. Twierdzenie (6.10) pozwala nam indukcyjnie wyznaczyć taki ciąg elementów $u_1,u_2,\ldots$ ciała U, że każde dwa jego elementy są różne i każdy z nich zawiera się w poprzednich. Załóżmy, że $v_i=u_i'\cdot u_{i+1}$. Sprawdzamy z łatwością, że elementy ciągu $v_1,v_2,\ldots$ są parami rozłączne (to znaczy, że $v_i\cdot v_j=0$ dla $i\neq j$) i niepuste (to znaczy, że $v_i\neq 0$ dla $i=1,2,\ldots$). Gdyby ciało U było przeliczalnie addytywne, to każdemu rosnącemu ciągowi $m_1<m_2<\ldots$ liczb naturalnych odpowiadałby element $\sum_{i=1}^{\infty} v_{m_i}$, będący sumą elementów oznaczonych indeksami $m_1,m_2,\ldots$ w ciągu $v_1,v_2,\ldots$ i, jak łatwo sprawdzić, różnym ciągom odpowiadałyby różne sumy. Wynika stąd, że zbiór elementów, które można przedstawić w postaci $\sum_{i=1}^{\infty} v_{m_i}$ $(m_1<m_2<\ldots)$, jest równej mocy ze zbiorem wszystkich ciągów rosnących liczb naturalnych, a więc jest nieprzeliczalny (por. wstęp, (1), str. 7). Nie może się więc on zawierać w przeliczalnym ciele U.

W dowodzie powyższego twierdzenia użyliśmy po raz pierwszy dwóch wyrażeń, którymi w dalszym ciągu będziemy się systematycznie posługiwali. O elemencie $u\in U$ mówimy, że jest *niepusty*, jeśli $u\neq 0$, w przeciwnym zaś razie mówimy, że jest *pusty*. O dwóch elementach $u,v\in U$ mówimy, że są *rozłączne*, jeśli ich iloczyn jest pusty, a więc gdy $u\cdot v=0$. Mówimy, że elementy zbioru $Z\subset U$ są *parami rozłączne*, jeśli każde dwa różne elementy zbioru Z są rozłączne.

§ 7. Ciała zbiorów

Niech E będzie dowolnym zbiorem. O elementach tego zbioru i o jego mocy nic nie będziemy zakładali. Oznaczmy przez $\boldsymbol{W}(E)$ klasę wszystkich podzbiorów zbioru E (a więc wzory $X\in\boldsymbol{W}(E)$ i $X\subset E$ są równoważne). Dla dwóch zbiorów $X,Y\in\boldsymbol{W}(E)$ oznaczmy przez $X+Y$, $X\cdot Y$ i $X-Y$ odpowiednio ich sumę, iloczyn i różnicę. Wiemy, że klasa $\boldsymbol{W}(E)$ ma następującą własność:

(7.1) *Jeżeli $X,Y\in\boldsymbol{W}(E)$, to $X+Y$, $X\cdot Y$, $X-Y\in\boldsymbol{W}(E)$.*

Przyjmijmy teraz dla $X\in\boldsymbol{W}(E)$

(7.2) $$X'=E-X.$$

Określiliśmy w ten sposób działanie na jednym elemencie klasy $\boldsymbol{W}(E)$. Na mocy (7.1) mamy:

(7.3) *Jeżeli $X\in\boldsymbol{W}(E)$, to $X'\in\boldsymbol{W}(E)$.*

Następujące twierdzenie charakteryzuje własności działań $+$, $\cdot$ i $'$ w klasie $\boldsymbol{W}(E)$:

TWIERDZENIE 4. *Klasa $\boldsymbol{W}(E)$ jest ciałem Boole'a ze względu na działania $+$, $\cdot$ i $'$; relacja zawierania w tym ciele Boole'a pokrywa się* *ze zwykłym teoriomnogościowym zawieraniem się zbiorów; ciało to jest zupełnie addytywne, a działania nieskończone sumy i iloczynu w tym ciele pokrywają się ze zwykłymi nieskończonymi działaniami sumy i iloczynu w sensie teorii mnogości.*

Twierdzenie powyższe jest ważne zarówno ze względu na to, że pozwala nam ono budować przykłady ciał Boole'a, jak też i dlatego, że na jego podstawie można teorię ciał Boole'a traktować jako uogólnienie działań teoriomnogościowych rozpatrywanych na podzbiorach jakiegoś ustalonego zbioru.

Dowód twierdzenia 4. Udowodnimy po kolei każdą z trzech części naszego twierdzenia.

Dowód pierwszej części uzyskamy przez sprawdzenie, że suma i iloczyn zbiorów wraz z uzupełnieniem zbiorów określonym przez (7.2) spełniają układ postulatów (B). Sprawdzenie tego pozostawiamy czytelnikowi. Przykładowo sprawdzimy tylko postulat (B·4). Niech X, Y i Z będą dowolnymi podzbiorami zbioru E. Postulat (B·4) żąda, aby

$$X+Y\cdot Z=(X+Y)(X+Z).$$

Zauważmy, że element p zbioru E należy do zbioru $X+Y\cdot Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy bądź $p\in X$, bądź równocześnie $p\in Y$ i $p\in Z$. Zarówno jednak w pierwszym, jak w drugim przypadku mamy $p\in(X+Y)$ i $p\in(Y+Z)$, skąd $p\in(X+Y)(X+Z)$, a więc $X+Y\cdot Z\subset(X+Y)(X+Z)$. Niech teraz $p\in(X+Y)(X+Z)$. Wynika stąd, że p należy zarówno do $(X+Y)$, jak do $(X+Z)$. Jeżeli p należy do X, to należy też do $X+Y\cdot Z$; jeżeli natomiast do X nie należy, to ponieważ należy zarówno do $(X+Y)$, jak do $(X+Z)$, więc musi należeć i do Y, i do Z. Z należenia jednak punktu p i do Y, i do Z wynika jego należenie do $Y\cdot Z$, a w rezultacie również do $X+Y\cdot Z$. Wykazaliśmy w ten sposób, że z należenia elementu p do $(X+Y)(X+Z)$ wynika jego należenie do $X+Y\cdot Z$, a więc udowodniliśmy zawieranie $(X+Y)(X+Z)\subset X+Y\cdot Z$. Udowodnione obustronne zawieranie daje identyczność, której chcieliśmy dowieść.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia 4 zauważmy, że wzór $X\subset Y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt należący do X należy również do Y, wzór zaś $X\to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X+Y=Y$.

Mamy więc wykazać, że wzory $X\subset Y$ i $X+Y=Y$ są równoważne. Załóżmy, że $X\subset Y$. Wtedy zbiór $X+Y$ składający się z tych punktów, które należą do X lub należą do Y, składa się po prostu z tych punktów, które należą do Y; te punkty bowiem, które należą do X, należą też do Y, a więc $X+Y=Y$. Przypuśćmy teraz, że wzór $X\subset Y$ nie zachodzi, to znaczy, że istnieje taki punkt p_0, który należy do X i nie należy do Y. Przy tych założeniach punkt p_0 należy do $X+Y$, nie należy zaś do Y i identyczność $X+Y=Y$ nie zachodzi, a to dowodzi drugiej części twierdzenia.

Niech teraz $\boldsymbol{K}$ będzie dowolną podklasą klasy $\boldsymbol{W}(E)$. Udowodnimy, że w ciele $\boldsymbol{W}(E)$ istnieje suma elementów klasy $\boldsymbol{K}$: $\sum\limits_{X\in \boldsymbol{K}} X$ i że sumą tą jest zwykła teoriomnogościowa suma zbiorów klasy $\boldsymbol{K}$, a więc zbiór tych punktów, które należą do przynajmniej jednego ze zbiorów klasy $\boldsymbol{K}$. Oznaczając przez X_0 mnogościową sumę elementów klasy $\boldsymbol{K}$, mamy wykazać zgodnie z określeniem 2, że

(7.4) *Jeżeli* $X\in\boldsymbol{K}$, *to* $X\subset X_0$.

(7.5) *Jeżeli dla każdego* $X\in\boldsymbol{K}$ $X\subset Y$, *to* $X_0\subset Y$.

Wzór (7.4) jest oczywisty na mocy definicji sumy mnogościowej. Dla dowodu (7.5) przypuśćmy, że każdy ze zbiorów $X\in\boldsymbol{K}$ zawiera się w zbiorze Y, a mnogościowa suma X_0 zbiorów klasy $\boldsymbol{K}$ w Y się nie zawiera. Istnieje wtedy taki element p, który należy do X_0, a nie należy do Y. Ale element p_0 nie należy do żadnego ze zbiorów klasy $\boldsymbol{K}$. Gdybyśmy bowiem mieli $X_1\in\boldsymbol{K}$ i $p_0\in X_1$, to na mocy założonego związku $X_1\subset Y$ mielibyśmy również $p_0\in Y$. Z tych rozważań wynika, że zbiór X_0, wbrew założeniu, nie jest mnogościową sumą zbiorów klasy $\boldsymbol{K}$, mnogościowa bowiem suma zbiorów tej klasy jest to zbiór, do którego jakiś element należy wtedy i tylko wtedy, gdy należy do przynajmniej jednego zbioru klasy $\boldsymbol{K}$, punkt p_0 zaś tej własności nie ma, a mimo to do X_0 należy. W ten sposób udowodniliśmy ostatnią część twierdzenia 4.

Podobnym rozumowaniem jak powyższe czytelnik z łatwością udowodni, że również operacja mnogościowego iloczynu elementów dowolnej klasy $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{W}(E)$ pokrywa się z iloczynem elementów tej klasy w sensie ciała Boole'a $\boldsymbol{W}(E)$. Dalej, czytelnik łatwo udowodni, że jednością w ciele $\boldsymbol{W}(E)$ jest zbiór E, mamy bowiem $E=X+X'$, gdzie X jest dowolnym zbiorem należącym do $\boldsymbol{W}(E)$, zerem zaś jest zbiór pusty.

To, co zostało powiedziane o ciele $\boldsymbol{W}(E)$, usprawiedliwia użycie tych samych symboli dla oznaczenia działań w ciele Boole'a, co dla oznaczenia działań teorii mnogości, jak również użycie symbolu 0 zarówno dla oznaczenia zbioru pustego, jak i dla oznaczenia elementów $u \cdot u'$ w ciele Boole'a.

Niech U będzie dowolnym ciałem Boole'a. U jest pewnym zbiorem, utwórzmy więc ciało $\boldsymbol{W}(U)$. Działania nieskończone w U wykonuje się na elementach podzbiorów U, a więc na elementach zbiorów ciała $\boldsymbol{W}(U)$. Pozwala nam to na wyprowadzenie pewnych zależności między działaniami w U a działaniami w $\boldsymbol{W}(U)$.

Tak więc, dla wszystkich podzbiorów X i Y ciała U zachodzą następujące związki pod warunkiem, że w ciele U istnieją odpowiednie sumy lub iloczyny:

(7.6) $$\sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u = \sum_{u\in X+Y} u, \qquad \prod_{u\in Y} u \cdot \prod_{u\in Y} u = \prod_{u\in X+Y} u.$$

Udowodnimy pierwszy z tych związków, pozostawiając dowód drugiego czytelnikowi.

Jeżeli $u\in X$, to $u\in X+Y$, a więc $u \to \sum_{u\in X+Y} u$, skąd $\sum_{u\in X} u \to \sum_{u\in X+Y} u$. Podobnie otrzymujemy $\sum_{u\in Y} u \to \sum_{u\in X+Y} u$ i ostatecznie $\sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u \to \sum_{u\in X+Y} u$. Jeżeli teraz $u\in X+Y$, to bądź $u\in X$, bądź $u\in Y$. W pierwszym jednak przypadku $u \to \sum_{u\in X} u \to \sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u$, w drugim $u \to \sum_{u\in Y} u \to \sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u$, w obu więc przypadkach $u \to \sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u$, więc $\sum_{u\in X+Y} u \to \sum_{u\in X} u + \sum_{u\in Y} u$, co wraz z poprzednio udowodnionym zawieraniem daje tezę (7.6).

Zauważmy jeszcze, że

(7.7) *Jeżeli Y jest dowolnym zbiorem, $X(y)$ zaś, dla $y\in Y$, podzbiorem ciała U, to zachodzą następujące związki*:

$$\sum_{y\in Y} \sum_{u\in X(y)} u = \sum_{u\in \sum_{y\in Y} X(y)} u, \qquad \prod_{y\in Y} \prod_{u\in X(y)} u = \prod_{u\in \sum_{y\in Y} X(y)} u.$$

Dowód wzorowany na dowodzie (7.6) pozostawiamy czytelnikowi. Warto zwrócić uwagę na to, że związki (7.7) są uogólnieniem związków (7.6).

§ 8. Podciała

Niech U będzie dowolnym ciałem Boole'a ze względu na działania $+$, $\cdot$ i $'$. W niniejszym paragrafie zajmiemy się takimi podzbiorami V ciała U, które są ciałami Boole'a ze względu na te same działania co U.

OKREŚLENIE 4.

(8.1) Zbiór $V\subset U$ nazywa się *podciałem ciała* U, jeśli jest ciałem Boole'a ze względu na te same działania co ciało U.

(8.2) Zbiór $V\subset U$ nazywa się *przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym) podciałem* przeliczalnie (zupełnie addytywnego) ciała U, jeśli zbiór V jest podciałem ciała U (w sensie (8.1)), a ponadto jeżeli zbiór V jest przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym) ciałem Boole'a i działania nieskończone (przeliczalne lub wszystkie) w V pokrywają się dla podzbiorów zbioru V z działaniami nieskończonymi (przeliczalnymi lub wszystkimi) w ciele U.

Podamy prosty przykład. W każdym ciele Boole'a zbiór V składający się z dwóch elementów 0 i 1, określonych za pomocą wzorów (3.1) i (3.2), jest podciałem ciała U.

TWIERDZENIE 5.

(8.3) *Na to, aby zbiór $V\subset U$ był podciałem ciała U, potrzeba i wystarcza, aby zbiór V spełniał postulat* (B1) *ze względu na działania określone w U.*

(8.4) *Na to, żeby zbiór $V\subset U$ był przeliczalnie addytywnym podciałem (zupełnie addytywnym podciałem) przeliczalnie addytywnego ciała U (zupełnie addytywnego ciała U), potrzeba i wystarcza, aby zbiór V był podciałem U oraz aby dla każdego przeliczalnego (w przypadku zupełnej addytywności, po prostu każdego) zbioru $X\subset V$ suma* $\sum_{u\in X} u$ (rozumiana jako suma w ciele U) *należała do V.*

Dowód. Jest rzeczą oczywistą, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby zbiór $V\subset U$ był podciałem U, jest, aby spełniał on wraz z działaniami określonymi w całym U układ postulatów (B). Zauważmy jednak, że jedynie postulat (B1) nakłada pewne warunki na cały zbiór elementów ciała Boole'a. Pozostałe postulaty charakteryzują działania na poszczególnych elementach tego zbioru, jeżeli więc są one spełnione dla każdej pary u,v (lub trójki u,v,w) elementów zbioru U, to tym bardziej dla każdej pary (lub trójki) elementów podzbioru V zbioru U. Aby więc wiedzieć, czy układ (B) jest spełniony w V, wystarczy sprawdzić spełnianie postulatu (B1); to właśnie wyraża nam część (8.3) twierdzenia 5.

Część (8.4) tego twierdzenia jest w świetle określeń 2 i 4 oczywista.

Z twierdzenia 5(8.3) i wzorów (4.7) wyciągniemy jeszcze następujący

WNIOSEK. *Na to, żeby $V \subset U$ było podciałem ciała U, potrzeba i wystarcza, aby bądź*

(8.5) *dla każdych* $u, v \in V$ *zachodziło* $u+v, u' \in V$,

bądź

(8.6) *dla każdych* $u, v \in V$ *zachodziło* $u \cdot v, u' \in V$.

Z wzorów (4.7) wynika bowiem dla każdego $V \subset U$ równoważność postulatu (B1) z każdym z warunków (8.5) i (8.6).

(8.7) *Jeżeli* $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{W}(E)$ *jest klasą podciał ciała* U *(przeliczalnie addytywnych podciał ciała* U*, zupełnie addytywnych podciał ciała* U*), to* $U_0 = \prod_{V \in \boldsymbol{C}} V$ *jest również podciałem (przeliczalnie addytywnym podciałem, zupełnie addytywnym podciałem) ciała* U.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że spełniony jest warunek (8.5). Niech $u, v \in U_0$. Wobec tego $u, v \in V$ dla każdego $V \in \boldsymbol{C}$, a ponieważ każde $V \in \boldsymbol{C}$ jest ciałem, więc $u+v, u' \in V$, skąd wynika, że $u+v, u' \in \prod_{V \in \boldsymbol{C}} V = U_0$.

Analogiczny dowód w przypadku przeliczalnej (zupełnej) addytywności pozostawiamy czytelnikowi.

Niech P będzie pewną własnością, która może przysługiwać zbiorom. Mówimy, że zbiór X_0 jest *najmniejszym zbiorem* mającym własność P, jeśli zbiór X_0 ma własność P i każdy zbiór Y mający własność P zawiera zbiór X_0.

Tak na przykład zbiór $\sum_{X \in \boldsymbol{K}} X = X_0$ jest najmniejszym zbiorem mającym własność: każdy zbiór $X \in \boldsymbol{K}$ zawiera się w X_0. Należy zauważyć, że nie dla każdej własności P istnieje najmniejszy zbiór mający tę własność (np. własność „być zbiorem przeliczalnym" nie jest taka), jeżeli jednak zbiór taki istnieje, to jest jedyny. Niech będzie $X \subset U$, gdzie U jest pewnym ciałem Boole'a. Wprowadzone powyżej pojęcie zastosujemy do własności: zbiór Y jest podciałem U i zawiera X.

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli* U *jest ciałem Boole'a (przeliczalnie addytywnym ciałem Boole'a, zupełnie addytywnym ciałem Boole'a), to dla każdego zbioru* $X \subset U$ *istnieje najmniejsze podciało* U *(przeliczalnie addytywne podciało* U*, zupełnie addytywne podciało* U*) zawierające* X.

Dowód. Niech $\boldsymbol{C}$ będzie klasą wszystkich podciał ciała U (przeliczalnie addytywnych podciał U, zupełnie addytywnych podciał U) zawierających X. Klasa $\boldsymbol{C}$ nie jest pusta, gdyż na przykład $U \in \boldsymbol{C}$. Czytelnik łatwo wykaże za pomocą twierdzenia (8.7), że zbiór $\prod_{V \in \boldsymbol{C}} V$ ma żądane własności.

OKREŚLENIE 5. Najmniejsze podciało zawierające zbiór $X \subset U$ nazywamy *najmniejszym podciałem rozpostartym na zbiorze* X i oznaczamy przez $\big[|X|\big]_0$.

Najmniejsze przeliczalnie addytywne podciało zawierające zbiór $X \subset U$ nazywamy *najmniejszym przeliczalnie addytywnym podciałem rozpostartym na zbiorze* X i oznaczamy przez $\big[|X|\big]_\beta$.

Najmniejsze zupełnie addytywne podciało zawierające zbiór $X \subset U$ nazywamy *najmniejszym zupełnie addytywnym podciałem rozpostartym na zbiorze* X i oznaczamy przez $\big[|X|\big]_\infty$.

Zachodzą następujące związki, których łatwe dowody pozostawiamy czytelnikowi:

(8.8) $$\Big[\big|\,\big[|X|\big]_0\big|\Big]_\beta = \big[|X|\big]_\beta, \quad \Big[\big|\,\big[|X|\big]_\beta\big|\Big]_\infty = \big[|X|\big]_\infty.$$

(8.9) (a) *Jeżeli* $X \subset Y \subset \big[|X|\big]_0$, *to* $\big[|X|\big]_0 = \big[|Y|\big]_0$.

(b) *Jeżeli* $X \subset Y \subset \big[|X|\big]_\beta$, *to* $\big[|X|\big]_\beta = \big[|Y|\big]_\beta$.

(c) *Jeżeli* $X \subset Y \subset \big[|X|\big]_\infty$, *to* $\big[|X|\big]_\infty = \big[|Y|\big]_\infty$.

(8.10) *Jeżeli* $X \subset \big[|Y|\big]_0$ *i* $Y \subset \big[|X|\big]_0$, *to* $\big[|X|\big]_0 = \big[|Y|\big]_0$.

I w tym twierdzeniu możemy, podobnie jak w twierdzeniu (8.9), dać sformułowanie typu (b) i (c).

W przypadku gdy V jest podciałem U, wówczas ciało $\big[|V|\big]_\beta$ nazywamy *przeliczalnie addytywnym rozszerzeniem* V, a ciało $\big[|V|\big]_\infty$ nazywamy *zupełnie addytywnym rozszerzeniem* V.

Zauważmy jeszcze, że

(8.11) *Jeżeli* $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$ *są podciałami ciała* U, *to*

$$\Big[\Big|\sum_{i=1}^{\infty} V_i\Big|\Big]_0 = \sum_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Ciało $\sum_{i=1}^{\infty} V_i$ nie musi jednak być zupełnie, a nawet przeliczalnie addytywne, nawet jeżeli ciała V_i są zupełnie addytywne.

Dla dowolnego zbioru E podciała ciała $\boldsymbol{W}(E)$ nazywamy *ciałami zbiorów*. Zwracamy uwagę, że ciała zbiorów nie muszą być zupełnie (a nawet przeliczalnie) addytywne ani w sensie działań teorii mnogości, ani nawet ciał Boole'a. Ciało zbiorów nazywamy *przeliczalnie (zupełnie) addytywnym ciałem zbiorów,* jeśli odpowiednie sumy nieskończone są w nim wykonalne i pokrywają się z sumami w sensie teorii mnogości.

§ 9. Ciało figur elementarnych

W niniejszym paragrafie zbadamy pewne ciało zbiorów, które będzie odgrywało dużą rolę w dalszym ciągu naszych rozważań (w szczególności w księdze drugiej). Zaczniemy od wprowadzenia pewnych umów dotyczących znakowania i terminologii.

Będziemy oznaczali przez R_n, $n=1,2,\ldots$, n-wymiarową przestrzeń kartezjańską. Punkt tej przestrzeni o współrzędnych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ będziemy oznaczali przez $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Przy rozpatrywaniu nierówności kształtu $a<x$, $a\leqslant x$, gdzie x jest zmienną rzeczywistą, uważamy za dopuszczalne, aby a przybierało również wartość „niewłaściwą" $-\infty$, przy czym nierówności $-\infty<x$ i $-\infty\leqslant x$ nic o liczbie x nie orzekają. Podobnie, przy nierównościach $x<b$, $x\leqslant b$ dopuszczamy dla b wartość niewłaściwą $+\infty$, co daje nic nie orzekające o x nierówności $x<+\infty$, $x\leqslant+\infty$. Tak więc np. podwójna nierówność: $0<x<+\infty$ znaczy to samo co $0<x$, tj. że x jest liczbą dodatnią.

Niech będzie dany układ k nierówności $W_1,W_2,\ldots,W_k$. Warunek polegający na łącznym zachodzeniu tych nierówności będziemy oznaczali przez $W_1,W_2,\ldots,W_k$ lub krótko przez $\prod_{i=1}^{k} W_k$, zupełnie tak, jakbyśmy mieli do czynienia z elementami jakiegoś ciała Boole'a. Tak np. jeżeli współrzędne x_1,x_2,x_3 jakiegoś punktu przestrzeni R_3 spełniają układ dwu nierówności: $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$, $x_3>0$, wówczas powiemy, że punkt x_1,x_2,x_3 spełnia warunek $(x_1^2+x_2^2\leqslant 1)\cdot(x_3>0)$. Ten sposób znakowania okazuje się bardzo wygodny i nie daje na ogół pola do nieporozumień.

Załóżmy, że ustalono przestrzeń R. Niech W oznacza pewien warunek, wówczas przez $\underset{}{E}[W]$ będziemy oznaczali zbiór tych punktów przestrzeni R, które spełniają warunek w; tak np. $E[x_1^2+x_2^2=1]$ jest w przestrzeni R_2 zbiorem punktów pewnego okręgu, a w przestrzeni R_3 — zbiorem punktów powierzchni pewnego walca kołowego.

W przestrzeni R_n, przy założeniu $a_i\leqslant b_i$, $i=1,2,\ldots,n$, nazywamy odpowiednio:

$$\text{przedziałem } n\text{-wymiarowym}\left\{\begin{array}{ll}\textit{otwartym} \text{ zbiór} & E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i<x_i<b_i)\Big],\\ \textit{domkniętym} \text{ zbiór} & E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i\leqslant x_i\leqslant b_i)\Big],\\ \textit{prawostronnie półotwartym} \text{ zbiór} & E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i\leqslant x_i<b_i)\Big],\\ \textit{lewostronnie półotwartym} \text{ zbiór} & E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i<x_i\leqslant b_i)\Big].\end{array}\right.$$

Ponieważ przedziały lewostronnie półotwarte nie będą odgrywały w naszych rozważaniach żadnej roli, więc przedziały prawostronnie półotwarte będziemy nazywali po prostu *półotwartymi*, opuszczając wyraz *prawostronnie*. Klasę wszystkich n-wymiarowych przedziałów półotwartych będziemy oznaczali przez $\boldsymbol{P}_n$. Każdą sumę skończonej ilości n-wymiarowych parami rozłącznych przedziałów półotwartych będziemy nazywali *n-wymiarową figurą elementarną.* Klasę tych figur oznaczymy przez $\boldsymbol{N}_n$.

TWIERDZENIE 7. *Dla każdego n klasa $\boldsymbol{N}_n$ n-wymiarowych figur elementarnych jest ciałem zbiorów.*

Dowód. Oczywiście $\boldsymbol{N}_n$ może być tylko podciałem ciała $\boldsymbol{W}(R_n)$, więc na mocy wniosku z twierdzenia 5 wystarczy dowieść, że spełniony jest warunek (8.6), tzn. jeżeli $X,Y\in\boldsymbol{N}_n$, to $X\cdot Y, X'\in\boldsymbol{N}_n$.

Pomocniczo udowodnimy:

(9.1) *Jeżeli $I_1,I_2\in\boldsymbol{P}_n$, to $I_1\cdot I_2\in\boldsymbol{P}_n$.*

Iloczyn dwu n-wymiarowych przedziałów półotwartych jest przedziałem półotwartym.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że zachodzą następujące równości:

$$E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i^{(1)}\leqslant x_i<b_i^{(1)})\Big]\cdot E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i^{(2)}\leqslant x_i<b_i^{(2)})\Big]= \\ =E\Big[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{2}(a_i^{(j)}\leqslant x_i\leqslant l_i^{(j)})\Big]=E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i\leqslant x_i<b_i)\Big], \tag{9.2}$$

gdzie $a_i=\max(a_i^{(1)},a_i^{(2)})$, $b_i=\min(b_i^{(1)},b_i^{(2)})$.

Z (9.1) wynika natychmiast, że iloczyn dwu figur elementarnych jest figurą elementarną.

Niech bowiem $X, Y \in \boldsymbol{N}_n$, $X = \sum_{i=1}^{k} I_i$, $Y = \sum_{j=1}^{l} J_j$, $I_i, J_j \in \boldsymbol{P}_n$ oraz $I_i I_j = 0 = J_i J_j$ dla $i \neq j$.

$$X \cdot Y = (I_1 + \ldots + I_k)(J_1 + \ldots + J_l) = J_1(I_1 + \ldots + I_k) + \tag{9.3}$$
$$+ J_2(I_1 + \ldots + I_k) + \ldots + J_l(I_1 + \ldots + I_k) = J_1 I_1 + J_1 I_2 + \ldots$$
$$\ldots + J_1 I_k + J_2 I_1 + J_2 I_2 + \ldots + J_2 I_k + \ldots + J_l I_1 + \ldots + J_l I_k = \sum_{i=j=1}^{i=k,\, j=l} J_j I_i,$$

co dowodzi, że X, Y jest figurą elementarną.

Dowód, że jeżeli X jest figurą elementarną, to X' jest figurą elementarną, poprowadzimy przez indukcję względem ilości k przedziałów półotwartych, których sumą jest X.

Dla $k=1$ twierdzenie jest oczywiste. Przypuśćmy, że zachodzi ono dla wszystkich figur elementarnych będących sumą nie więcej niż k przedziałów rozłącznych i niech $X = \sum_{i=1}^{k+1} I_i$, gdzie $I_i \in \boldsymbol{P}_n$. Mamy wtedy

$$X' = \Big(\sum_{i=1}^{k+1} I_i\Big)' = \prod_{i=1}^{k+1} I_i' = \prod_{i=1}^{k} I_i' \cdot I_{k+1}' = \Big(\sum_{i=1}^{k} I_i\Big)' \cdot I_{k+1}', \tag{9.4}$$

ale na podstawie założenia indukcyjnego zarówno $\big(\sum_{i=1}^{k} I_i\big)'$, jak I_{k+1}' są figurami elementarnymi, na podstawie zaś poprzednio udowodnionego twierdzenia iloczyn dwu figur elementarnych jest figurą elementarną, co kończy dowód.

Zauważmy jeszcze, że

$$\boldsymbol{N}_n = \big[|\boldsymbol{P}_n|\big]_0. \tag{9.5}$$

Oczywiście $\boldsymbol{P}_n \subset \boldsymbol{N}_n \subset \big[|\boldsymbol{P}_n|\big]_0$, więc na mocy (8.9) $\big[|\boldsymbol{N}_n|\big]_0 = \big[|\boldsymbol{P}_n|\big]_0$, ponieważ jednak $\boldsymbol{N}_n$ jest ciałem, więc $\big[|\boldsymbol{N}_n|\big]_0 = \boldsymbol{N}_n$, co dowodzi (9.5).

Ciało $\boldsymbol{N}_n$ jako zawarte w przeliczalnie (a nawet zupełnie) addytywnym ciele $\boldsymbol{W}(R_n)$, ma w nim swoje przeliczalnie addytywne rozszerzenie $\big[|\boldsymbol{N}_n|\big]_\beta$. Ciało $\big[|\boldsymbol{N}_n|\big]_\beta$ nazywamy *ciałem zbiorów borelowskich* przestrzeni R_n i oznaczamy przez $\boldsymbol{B}_n$ (por. wstęp, str. 14). Ciało $\boldsymbol{B}_n$ odgrywa wielką rolę w opisowej teorii mnogości i w teorii funkcji rzeczywistych. Ma ono również podstawowe znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa.

Udowodnimy obecnie kilka własności ciała $\boldsymbol{B}_n$. Oznaczmy przez $\boldsymbol{P}_n^0$ klasę przedziałów otwartych, a przez $\boldsymbol{Q}_n$ klasę zbiorów otwartych przestrzeni R_n. Mamy

$$\boldsymbol{P}_n^0 \subset \boldsymbol{Q}_n \subset \boldsymbol{B}_n. \tag{9.6}$$

Inkluzja pierwsza jest oczywista, druga zaś wynika z tego (por. wstęp, str. 11), że każdy przedział otwarty jest sumą przeliczalnego ciągu przedziałów półotwartych, każdy zaś zbiór otwarty jest sumą przeliczalnego ciągu przedziałów otwartych.

Dalej mamy:

$$\boldsymbol{P}_n \subset \big[|\boldsymbol{P}_n^0|\big]_0 \subset \big[|\boldsymbol{P}_n|\big]_\beta. \tag{9.7}$$

Inkluzja druga jest oczywista. Dla dowodu pierwszej niech $I = E\Big[\prod_{i=1}^{n}(a_i \leqslant x_i < b_i)\Big]$ oznacza pewien przedział półotwarty w przestrzeni R_n. Załóżmy, że

$$J = E\Big[\prod_{i=1}^{n}(-\infty < x_i < b_i)\Big] \quad \text{i} \quad J_i = E\big[(-\infty < x_i < a_i)\big].$$

Jak łatwo sprawdzić

$$I = J \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} J_i\Big)',$$

a więc

$$I \in \big[|\boldsymbol{P}_n^0|\big]_0.$$

Z (9.6), (9.7) i (8.10) wynika wzór

$$\big[|\boldsymbol{P}_n^0|\big]_\beta = \big[|\boldsymbol{P}_n|\big]_\beta = \boldsymbol{B}_n, \tag{9.8}$$

a z (9.6), (9.8) i (8.9) wynika wzór

$$\big[|\boldsymbol{Q}_n|\big]_\beta = \boldsymbol{B}_n. \tag{9.9}$$

Ciało zbiorów borelowskich definiuje się zwykle w ten właśnie sposób jako najmniejsze ciało przeliczalnie addytywne rozpostarte na zbiorach otwartych.

§ 10. Homomorfizm, izomorfizm, kongruencje oraz ciała ilorazowe i zrelatywizowane

W tym paragrafie określimy pewne stosunki, które mogą zachodzić między dwoma ciałami Boole'a. Tak tu, jak i w dalszym ciągu, mówiąc o dwóch ciałach Boole'a będziemy używali, o ile nie będzie to groziło nieporozumieniem, tych samych znaków na oznaczenie działań określonych w jednym i w drugim, a mianowicie znaków $+$, $\cdot$ i $'$.

Określenie 6 [1]). Niech U i V będą dwoma ciałami Boole'a.

(a) Mówimy, że ciało U jest *homomorficzne* z ciałem V (a ciało V jest *obrazem homomorficznym* ciała U), i piszemy $U \operatorname{hom} V$, jeśli istnieje funkcja h odwzorowująca U na V (to znaczy określona dla elementów U i przyjmująca wartości z V, przy czym dla każdego $v \in V$ istnieje takie $u \in U$, że $h(u)=v$), spełniająca przy dowolnych $u_1, u_2 \in U$ następujące warunki:

(10.1) $$h(u_1+u_2)=h(u_1)+h(u_2),$$

(10.2) $$h(u_1')=h(u_1)'$$ [2]).

Funkcję h spełniającą warunki (10.1) i (10.2) nazywamy *funkcją homomorfizmu* lub *funkcją ustalającą homomorfizm*.

(b) W przypadku gdy ciała U i V są przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne), a funkcja h ustalająca ich homomorfizm spełnia dla każdego przeliczalnego (lub po prostu każdego) zbioru $Z \subset U$ warunek

(10.3) $$h\Big(\sum_{u\in Z} u\Big)=\sum_{u\in Z} h(u),$$

mówimy, że U jest *przeliczalnie homomorficzne (zupełnie homomorficzne)* z V.

(c) W przypadku gdy ciało U jest homomorficzne (w sensie punktu (a) niniejszego określenia) z ciałem V, a funkcja ustalająca homomorfizm jest wzajemnie jednoznaczna, mówimy, że ciała U i V są *izomorficzne*, i piszemy $U \operatorname{izom} V$.

Z powyższych określeń wynikają natychmiast twierdzenia:

(10.4) *Stosunek homomorfizmu (przeliczalnego homomorfizmu, zupełnego homomorfizmu) porządkuje częściowo klasę wszystkich (przeliczalnie addytywnych, zupełnie addytywnych) ciał Boole'a.*

(10.5) *Stosunek izomorfizmu jest równoważnością w klasie wszystkich ciał Boole'a.*

---

[1]) Pojęcie homomorfizmu jest natury ogólnoalgebraicznej. Por. np. określenie homomorfizmu grup w książce B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Berlin 1930, Tom I, § 11, str. 44-46.

[2]) Należy zauważyć, że po lewej stronie równości (10.1) i (10.2) znaki działań odnoszą się do elementów ciała U, oznaczają więc działania w U. Po prawej stronie tych równości znaki działań odnoszą się do elementów ciała V i oznaczają działania w V.

(10.6) *Jeżeli funkcja h ustala homomorfizm ciała U z ciałem V, to dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$ mamy*

$$h(u_1\cdot u_2)=h(u_1)\cdot h(u_2).$$

Jeżeli zaś h ustala przeliczalny homomorfizm (zupełny homomorfizm), to dla każdego przeliczalnego (lub po prostu każdego) zbioru $Z \subset U$ mamy

$$h\Big(\prod_{u\in Z} u\Big)=\prod_{u\in Z} h(u).$$

Te ostatnie prawa wynikają oczywiście z wzorów de Morgana (4.6) i (6.8). Zauważmy jeszcze, że zachodzą następujące twierdzenia:

(10.7) *Jeżeli ciała U i V są izomorficzne, a h jest funkcją ustalającą ten izomorfizm, to dla każdych $u_1, u_2 \in U$ wzory*

$$u_1 \to u_2 \quad i \quad h(u_1)\to h(u_2)$$

są bądź równocześnie prawdziwe, bądź równocześnie fałszywe.

(10.8) *Jeżeli ciała U i V są izomorficzne, a h jest funkcją ustalającą ten izomorfizm $Z \subset U$ i istnieje $\sum_{u\in Z} u$, to istnieje też $\sum_{u\in Z} h(u)$ i*

$$h\Big(\sum_{u\in Z} u\Big)=\sum_{u\in Z} h(u).$$

(10.9) *Jeżeli ciała U i V są izomorficzne i U jest ciałem przeliczalnie addytywnym, (zupełnie addytywnym), to i V jest ciałem przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym).*

Niech h będzie funkcją ustalającą homomorfizm ciała U z ciałem V. Oznaczmy dla $v \in V$ przez $h^{-1}(v)$ zbiór tych elementów $u \in U$, dla których $h(u)=v$. Zbiory $h^{-1}(v_1)$ i $h^{-1}(v_2)$ dla różnych $v_1, v_2 \in V$ są oczywiście rozłączne i niepuste, a więc relacja $u_1 \equiv u_2$ zachodząca między dwoma elementami U wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $v \in V$, że $u_1, u_2 \in h^{-1}(v)$ lub, co na to samo wychodzi, gdy $h(u_1)=h(u_2)$ jest relacją typu równoważności w ciele U. Z (10.1) (10.2) i (10.6) wynika, że ma ona ponadto następujące własności:

(10.10) *Jeżeli $u_1\equiv u_3$ i $u_2 \equiv u_4$, to $u_1+u_2\equiv u_3+u_4$ i $u_1u_2\equiv u_3u_4$.*

(10.11) *Jeżeli $u_1 \equiv u_2$, to $u_1' \equiv u_2'$.*

Gdy rozpatrywany homomorfizm jest przeliczalny (zupełny), to mamy poza tym

(10.12) *Jeżeli $Z_1, Z_2 \subset U$, Z_1 i Z_2 są zbiorami przeliczalnymi (dowolnymi) i dla każdego $z_1 \in Z_1$ istnieje takie $z_2 \in Z_2$, że $z_1 \equiv z_2$, i równocześnie dla każdego $z_2 \in Z_2$ istnieje takie $z_1 \in Z_1$, że $z_2 \equiv z_1$, to*

$$\sum_{u \in Z_1} u \equiv \sum_{u \in Z_2} u.$$

Określenie 7. Relację $\equiv$ typu równoważności, określoną w ciele Boole'a U, nazywamy *kongruencją*, jeżeli spełnia w U warunki (10.10) i (10.11). Jeżeli zaś ciało U jest przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne), a relacja $\equiv$ spełnia dodatkowo warunek (10.12), to nazywamy ją *kongruencją przeliczalną (kongruencją zupełną)*.

Z poprzednich rozważań wynika, że relacja $h(u_1) = h(u_2)$, gdzie h ustala homomorfizm U z dowolnym ciałem V, jest kongruencją w U. O takiej kongruencji mówimy, że jest *indukowana przez homomorfizm*. Udowodnimy dalej, że każda kongruencja jest indukowana przez homomorfizm.

Niech relacja $\equiv$ będzie kongruencją w ciele U. Oznaczmy przez $A = A(U_1, \equiv)$ klasę zbiorów abstrakcji relacji $\equiv$ w U. Element klasy A wyznaczony przez element $u \in U$ (to znaczy zbiór tych wszystkich $v \in U$, dla których $u \equiv v$) oznaczmy przez $[u]$. W klasie A określmy działania $+$, $\cdot$ i $'$ w następujący sposób:

(10.13) $$[u_1] + [u_2] = [u_1 + u_2],$$

(10.14) $$[u_1] \cdot [u_2] = [u_1 \cdot u_2],$$

(10.15) $$[u]' = [u'].$$

Dopuszczalność takiego określenia wynika z (10.10) i (10.11), z warunków tych wynika bowiem, że mimo określenia działań na zbiorach klasy A przez wyznaczające je elementy ciała U, działania te nie są zależne od wyboru elementów ciała wyznaczających odpowiednie zbiory klasy A.

Jeżeli np. $u_1, u_2 \in U$ i $u_1 \neq u_2$, ale $[u_1] = [u_2]$, to $[u_1]' = [u_2]'$, gdyż z równości $[u_1] = [u_2]$ wynika $u_1 \equiv u_2$, a na mocy (10.11) $u_1' \equiv u_2'$, skąd $[u_1'] = [u_2']$, czyli na mocy (10.15) $[u_1]' = [u_2]'$.

Zachodzi następujące twierdzenie:

(10.16) *Klasa A wraz z działaniami określonymi w niej przez układ wzorów* (10.13)-(10.15) *tworzy ciało Boole'a.*

Dla dowodu należy sprawdzić, że działania (10.13)-(10.15) w klasie A spełniają postulaty układu (B). Spełnianie postulatu (B1)

jest oczywiste. Spełnianie pozostałych postulatów wynika łatwo z założonych własności kongruencji i ze spełniania tych postulatów przez działanie w ciele U.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód dla postulatu (B+4). Niech $[u]$, $[v]$ i $[w]$ będą elementami A. Elementy u, v i w należą oczywiście do U, a więc $u(v+w) = uv + uv$, skąd wynika, że $[u(v+w)] = [uv + uw]$.

Na mocy (10.13) i (10.14) mamy

$$[u(v+w)] = [u] \cdot [v+w] = [u] \cdot ([v] + [w]),$$

$$[uv + uw] = [uv] + [uw] = [u] \cdot [v] + [u] \cdot [w],$$

a więc ostatecznie

$$[u] \cdot ([u] + [w]) = [u] \cdot [v] + [u] \cdot [w],$$

co dowodzi, że postulat (B+4) jest spełniony w klasie A. Podobnie sprawdza się pozostałe postulaty.

Łatwo spostrzec, że *elementem pełnym* (jednością) ciała A jest element $[1]$, a *elementem pustym* (zerem) — element $[0]$.

Określenie 8. Ciało Boole'a powstałe przez określenie w zbiorach abstrakcji dowolnego ciała Boole'a U względem kongruencji $\equiv$ i działań wzorami (10.13)-(10.15) nazywamy *ciałem powstałym przez podzielenie ciała U przez kongruencję $\equiv$*, lub krótko: *ciałem ilorazowym*, i oznaczamy przez $U/\equiv$. Ciało U nazywamy *ciałem pierwotnym* ciała ilorazowego $U/\equiv$.

Opierając się na określeniu 8 udowodnimy następujące trzy twierdzenia:

(10.17) *Ciało pierwotne jest zawsze homomorficzne z ciałem ilorazowym; funkcją homomorfizmu jest funkcja $h(u) = [u]$,*

a więc

(10.18) *Każda kongruencja w ciele Boole'a jest indukowana przez pewien homomorfizm.*

(10.19) *Jeżeli ciało U jest homomorficzne z ciałem V, h jest funkcją ustalającą ten homomorfizm, a $\equiv$ kongruencją w U indukowaną przez h, to $U/\equiv$ jest izomorficzne z V.*

Dowód pierwszych dwóch twierdzeń polega oczywiście na łatwym sprawdzeniu, że funkcja $h(u) = [u]$ jest rzeczywiście homomorfizmem, co wynika wprost z definicji działań w $U/\equiv$. Dla dowodu trzeciego twierdzenia przyjmujemy, że $f([u]) = h(u)$ dla $[u] \in U/\equiv$

i podobnie jak w poprzednim przypadku sprawdzamy, że funkcja f jest żądanym izomorfizmem.

Zauważmy jeszcze, że

(10.20) *Jeżeli U jest ciałem przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym), a kongruencja $\equiv$ w U jest przeliczalnią (zupełną) kongruencją, to ciało ilorazowe i homomorfizm $h(u)=[u]$ są też przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne).*

Wynika to natychmiast z (10.12).

Twierdzenia (10.17)-(10.20) ustalają ścisły związek między pojęciem homomorfizmu a pojęciem kongruencji.

Dzielenie ciała przez kongruencję polega, mówiąc potocznie, na identyfikowaniu elementów kongruentnych. Uzyskuje się to przez abstrakcję, to znaczy przez utworzenie nowego ciała, którego elementami są klasy abstrakcji kongruencji. W niektórych przypadkach, specjalnie w rachunku prawdopodobieństwa, nie jest wygodne to, że elementami ciała ilorazowego są przedmioty tak zupełnie różniące się od elementów ciała pierwotnego. Aby tego uniknąć, a równocześnie zidentyfikować w pewien sposób elementy kongruentne, rozpatrujemy dane ciało pierwotne i działania w nim określone z punktu widzenia danej w nim kongruencji, to znaczy nie interesujemy się na przykład tym, czy dwa dane elementy są identyczne, a tylko, czy są one kongruentne. Rozpatrując ciało U z punktu widzenia kongruencji $\equiv$ mówimy, że rozpatrujemy ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$. *Elementem pełnym* w ciele $U, \mathrm{rel}\equiv$ będziemy nazywali każdy element ciała U kongruentny z elementem pełnym ciała U, a więc każdy element zbioru [1], podobnie, *elementem pustym* będziemy nazywali każdy element zbioru [0]. Będziemy mówili, że element u *zawiera się w elemencie* $v, \mathrm{rel}\equiv$, co piszemy $u\to v, \mathrm{rel}\equiv$, wtedy, gdy $[u]$ zawiera się w $[v]$ w ciele ilorazowym. Czytelnik z łatwością sprawdzi, że zawieranie $\mathrm{rel}\equiv$ porządkuje częściowo zbiór U, to znaczy spełnia warunki (I) i (II), (§ 5, str. 33), a ponadto spełnia warunki (IV)-(VI). Zawieranie to spełnia warunek (III) tylko wtedy, gdy kongruencja jest identycznością.

Podzbiór ciała U nazywamy *nasyconym*, $\mathrm{rel}\equiv$, jeżeli jest sumą klas abstrakcji kongruencji $\equiv$; innymi słowy, gdy wraz z jakimś elementem u należą do tego podzbioru również wszystkie elementy kongruentne z u.

Mówimy, że $V, \mathrm{rel}\equiv$ jest podciałem ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$, jeśli V jest podciałem ciała U, i rozpatrujemy to ciało z punktu widzenia kongruencji $\equiv$. To, że kongruencja danego ciała jest też kongruencją każdego jego podciała, jest oczywiste. Należy jednak zauważyć, że jeżeli $V, \mathrm{rel}\equiv$ jest podciałem ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$, to ciało $V/\equiv$ niekoniecznie jest podciałem ciała $U/\equiv$, lecz wtedy najmniejszy nasycony $\mathrm{rel}\equiv$ w U zbiór V_0 zawierający V jest podciałem U, $V_0/\equiv$ jest podciałem $U/\equiv$ i ponadto jest homomorficzne z $V/\equiv$. Oczywiście, dla każdego zbioru $X\subset U$ (a więc i dla podciała V ciała U) istnieje najmniejsze podciało nasycone, $\mathrm{rel}\equiv$, w przypadku jednak, gdy X jest podciałem U, podciało nasycone, o które chodzi, otrzymujemy dołączając do X wszystkie elementy równoważne $\mathrm{rel}\equiv$ pewnym elementom z X.

Ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$ nazywamy *przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym)*, jeżeli U jest przeliczalnie addytywnym (zupełnie addytywnym) ciałem, a kongruencja $\equiv$ jest również przeliczalna (zupełna). Jak wiemy, ciało $U/\equiv$ jest wtedy przeliczalnie addytywne (zupełnie addytywne). Z warunku (10.12) wynika, że rozpatrywanie sum i iloczynów nieskończonych, określonych w ciele U, z punktu widzenia kongruencji $\equiv$, a więc w ciele $U, \mathrm{rel}\equiv$, ma wtedy sens.

Ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$ będziemy nazywali *ciałem zrelatywizowanym*; kongruencję $\equiv$ będziemy nazywali *równoważnością* tego ciała, aby odróżnić ją od innych kongruencji, które mogą być w tym ciele rozpatrywane.

Ciała zrelatywizowane stanowią pewne uogólnienie ciał w zwykłym sensie, uogólnienie, gdyż w przypadku, gdy równoważność $\equiv$ jest identycznością, ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$ pokrywa się z ciałem U. Uogólnienie to jednak nie jest istotne. Z punktu widzenia algebraicznego możemy bowiem zawsze zastąpić rozpatrywanie ciała zrelatywizowanego $U, \mathrm{rel}\equiv$ rozpatrywaniem zwykłego ciała $U/\equiv$. Mimo to jednak, ze względów wyłuszczonych powyżej, będziemy w dalszym ciągu omawiali przeważnie ciała zrelatywizowane.

§ 11. Zastosowanie teorii ciał Boole'a do logiki [1])

Teoria ciał Boole'a znajduje zastosowanie w logice dwuwartościowej, to znaczy w takiej logice, w której rozpatrujemy tylko

[1]) O zastosowaniach ciał Boole'a do logiki traktują obszernie prace: A. Tarski, *Grundzüge der Systemenkalküls I*, Fund. Math. 25 (1935), str. 503-526 i A. Mostowski, *Abzählbare Boole'sche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik*, Fund. Math. 29 (1937), str. 34-53. Pojęcia logiczne, których używamy w tym paragrafie, są przedstawione np. w książce A. Tarskiego cytowanej w [2]) (str. 25) lub w książce A. Mostowskiego, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne XVIII, Warszawa-Wrocław 1948.

zdania prawdziwe i fałszywe. Zbiór wszystkich takich zdań utworzonych za pomocą pewnej ilości danych słów tworzy ciało Boole'a.

Podamy dwa przykłady takich ciał Boole'a. Elementami pierwszego z nich nie będą właściwie zdania w ścisłym znaczeniu, lecz *funkcje zdaniowe*. Funkcja zdaniowa tym się różni od zdania, że występują w niej jedna lub więcej zmiennych przebiegających pewien zbiór. Funkcje zdaniowe nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. W logice dwuwartościowej rozpatrujemy tylko takie funkcje zdaniowe, które po podstawieniu do nich w miejsce zmiennych wartości ze zbioru, jaki przebiegają zmienne, dają zdania prawdziwe albo fałszywe.

Tak na przykład wypowiedzi „x jest liczbą wymierną", „$x \leqslant y$", „$x+3=y$" są funkcjami zdaniowymi. Pierwsza z nich na przykład dla $x=3$ daje zdanie prawdziwe „3 jest liczbą wymierną", a dla $x=\sqrt{2}$ daje zdanie fałszywe. Należy pamiętać, że istnieją pewne wypowiedzi, w których występują zmienne, lecz które mimo to nie są funkcjami zdaniowymi. Do takich należą np.

$$„\inf_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \sin x = -1", „\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 1", „\text{dla każdego } x: -1 \leqslant \sin x \leqslant +1".$$

W pierwszym i ostatnim przykładzie mamy zdania prawdziwe, w drugim fałszywe. We wszystkich tych przykładach zmienna x jest związana operatorami: w pierwszym operatorem „$\inf\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}$", w drugim operatorem „$\int_0^{2\pi} \ldots dx$", w trzecim wreszcie operatorem „dla każdego x". Zmienne zdaniowe nie związane operatorami nazywamy *zmiennymi wolnymi*. Funkcje zdaniowe są to takie wypowiedzi, w których występują zmienne zdaniowe wolne.

Istnieją funkcje zdaniowe, które dla każdej wartości ze zbioru, który przebiegają zmienne, dają zdania prawdziwe: istnieją też takie, które niezależnie od wartości zmiennej dają zawsze zdania fałszywe. Przykładem są tu funkcje „$x \leqslant x$" oraz „$x<x$"; pierwsza z nich jest tożsamościowo prawdziwa w zbiorze liczb rzeczywistych, to znaczy daje zawsze zdanie prawdziwe, jeżeli tylko x jest liczbą rzeczywistą, druga natomiast jest w tym zbiorze tożsamościowo fałszywa.

Dwie funkcje zdaniowe $u(x,y,\ldots,w)$ i $v(x,y,\ldots,w)$ rozpatrywane na zbiorze X, to znaczy przy założeniu, że ich zmienne przebiegają zbiór X, będziemy uważali za identyczne, jeżeli dla każdych $x,y,\ldots,w$ ze zbioru X zawsze bądź obie dają zdania prawdziwe, bądź obie dają zdania fałszywe. Można też sformułować to w ten sposób: funkcje $u(x,y,\ldots,w)$ i $v(x,y,\ldots,w)$ uważamy za identyczne, jeżeli funkcja „$u(x,y,\ldots,w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x,y,\ldots,w)$" jest tożsamościowo prawdziwa w zbiorze X.

Niech S będzie zbiorem wszystkich funkcji zdaniowych napisanych za pomocą zmiennych $x_1,x_2,x_3,\ldots$ i słów „mniejsze od", „nie większe od", „lub", „oraz" i „nieprawda, że". Elementami zbioru S będą więc np. funkcje „$x_1<x_2$" i „$x_2 \leqslant x_3$" lub „nieprawda, że $x_3<x_2$". O zmiennych $x_1,x_2,x_3,\ldots$ założymy, że przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Określimy następujące działania na elementach u,v zbioru S:

(11.1) $u+v$ jest funkcją zdaniową „u lub v",

(11.2) $u\cdot v$ jest funkcją zdaniową „u oraz v",

(11.3) u' jest funkcją zdaniową „nieprawda, że u".

Tak np. jeżeli u jest funkcją zdaniową „$x_1<x_2$", v zaś funkcją „$x_2\leqslant x_1$ lub $x_1\leqslant x_3$", to $u+v$ jest funkcją

$$„x_1<x_2 \quad \text{lub} \quad (x_2\leqslant x_1, \quad \text{lub} \quad x_1\leqslant x_3)",$$

$u\cdot v$ funkcją

$$„x_1<x_2 \quad \text{oraz} \quad (x_2\leqslant x_1 \quad \text{lub} \quad x_1\leqslant x_3)",$$

u' zaś funkcją

$$„\text{nieprawda, że} \quad x_1\leqslant x_2".$$

Funkcja „nieprawda, że $x_1\leqslant x_2$" jest oczywiście, stosownie do umowy dotyczącej identyczności dwóch funkcji, identyczna w zbiorze liczb rzeczywistych z funkcją „$x_2<x_1$".

Zachodzi następujące twierdzenie:

(11.4) *Zbiór S jest ciałem Boole'a ze względu na działania określone przez* (11.1)-(11.3).

Twierdzenia tego nie będziemy szczegółowo dowodzili. Dowód jego należy do tej części logiki, która nazywa się dwuwartościowym rachunkiem zdań i zajmuje się teorią słów „lub" „oraz" i „nieprawda, że", to jest tych słów, które łącząc dwa zdania (albo funkcje zdaniowe) tworzą nowe zdania (funkcje zdaniowe).

Jeżeli przez $R_1^{\aleph_0}$ oznaczymy zbiór wszystkich ciągów $\{c_n\}$ liczb rzeczywistych, a funkcji $u(x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_n})$ przyporządkujemy zbiór $X(u)=\underset{\{c_n\}\in R_1^{\aleph_0}}{E}[u(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_n})]$, to, jak łatwo zauważyć, klasa wszystkich zbiorów kształtu $X(u)$ będzie tworzyła ciało zbiorów izomorficzne z ciałem S. W szczególności, funkcji tożsamościowo prawdziwej będzie przyporządkowany zbiór $R_1^{\aleph_0}$, funkcji zaś tożsamościowo fałszywej — zbiór pusty.

Twierdzenie (11.4) usprawiedliwia użycie przez nas w paragrafie 9 symbolu $\prod_{i=1}^{n} W_i$ na oznaczenie warunku polegającego na łącznym zachodzeniu warunków $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Warunek jest bowiem pewną funkcją zdaniową, spełnianie zaś lub niespełnianie warunku przez pewne elementy jest równoważne z otrzymywaniem z tej funkcji zdaniowej, dla tych właśnie elementów, zdań prawdziwych lub fałszywych. Warunek polegający na łącznym zachodzeniu warunków $W_1, W_2, \ldots, W_n$ jest oczywiście funkcją zdaniową „W_1 oraz W_2 oraz ... oraz W_n", czyli według określenia (11.2) funkcją $W_1 \cdot W_2 \cdot \ldots \cdot W_n$, w skrócie – zgodnie z (4.9) i (4.10) – $\prod_{i=1}^{n} W_i$.

Podamy jeszcze inny przykład. Niech $S_0^{(N)}$ będzie zbiorem wszystkich zdań kształtu

(11.5) „w n-tym rzucie wyrzucono k oczek",

gdzie $n=1,2,\ldots,N$, $k=1,2,\ldots,6$. Zbiór $S_0^{(N)}$ składa się więc dokładnie z $6 \cdot N$ zdań, które otrzymujemy z funkcji zdaniowej (11.5), wstawiając za n liczby naturalne $\leqslant N$, za k zaś liczby naturalne $\leqslant 6$.

Oznaczmy przez $S^{(N)}$ najmniejszy zbiór zdań zawierający zbiór $S_0^{(N)}$ i taki, że wraz ze zdaniami α, β należą do niego również zdania „α lub β", „α oraz β" i „nieprawda, że α". Zbiór $S^{(N)}$ będzie więc zbiorem zdań powstających ze zdań zbioru $S_0^{(N)}$ przez łączenie ich słowami „lub", „oraz" i poprzedzanie słowami: „nieprawda, że". Do zbioru $S^{(N)}$ (dla $N \geqslant 10$) wejdzie np. zdanie „w czwartym rzucie wyrzucono 3 oczka oraz, w dziesiątym rzucie wyrzucono 4 oczka lub w dziesiątym rzucie wyrzucono 2 oczka". Przecinek po słowie „oraz" wskazuje, że zdanie to nam mówi o wyrzuceniu w czwartym rzucie 3 oczek, a w dziesiątym 4 lub 2 oczek, nie zaś o wyrzuceniu w czwartym i dziesiątym rzucie odpowiednio 3 i 4 oczek lub w dziesiątym 2 oczek. Gracz grający partię składającą się z N ($\geqslant 10$) rzutów sześcienną kostką do gry i obstawiający w czwartym rzucie 3, zaś w dziesiątym rzucie 4 i 2, liczy właśnie na prawdziwość tego zdania.

Umówmy się teraz uważać dwa zdania zbioru $S^{(N)}$ za identyczne, jeżeli każde z nich wynika z drugiego na mocy poprawnych

logicznie rozumowań, lecz bez żadnych specjalnych założeń o rzutach, o których te zdania mówią. Tak np. zdanie „w trzecim rzucie wyrzucono 4 oczka oraz w piątym rzucie wyrzucono 4 oczka" i zdanie „w piątym rzucie wyrzucono 4 oczka oraz w trzecim rzucie wyrzucono 4 oczka" uważamy za identyczne, oba one wyrażają bowiem tę samą treść, niezależnie od tego, o jakich rzutach się mówi.

Wprowadzając dla elementów α, β zbioru $S^{(N)}$ (podobnie jak poprzednio dla elementów zbioru S) działania:

(11.6) $\alpha+\beta$ jest zdaniem „α lub β",

(11.7) $\alpha \cdot \beta$ jest zdaniem „α oraz β",

(11.8) α' jest zdaniem „nieprawda, że α",

uzyskujemy ciało Boole'a zdań.

Zdania zbioru $S^{(N)}$ są tak zbudowane, że nadają się do omawiania za ich pomocą gry polegającej na N-krotnym rzucie sześcienną kostką do gry, której ścianki zostały oznaczone odpowiednio jednym, dwoma, ..., sześcioma oczkami. Ciało Boole'a utworzone z $S^{(N)}$ przez określenie działań (11.6)-(11.8) nie uwzględnia żadnych wiadomości, które mamy normalnie o takiej grze, a które wynikają z materialnych własności naszej kostki i z umów co do takiego, a nie innego jej używania. Nie uwzględnia ona jednym słowem opisu gry. Jakie są wiadomości o tej grze, które możemy wyrazić za pomocą zdań $S^{(N)}$? Otóż tylko te, że w każdym rzucie coś nam wypadnie, i to, że w żadnym rzucie nie wypadną dwa różne wyniki. Oznaczając przez $\alpha_{n,k}$ zdanie „w n-tym rzucie wyrzucono k oczek", możemy powiedzieć, że opis naszej gry zawiera się w dwóch zdaniach:

$$(11.9)\quad \prod_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{6} \alpha_{n,k} [= (\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2}+\ldots+\alpha_{1,6}) \cdot (\alpha_{2,1}+\alpha_{2,2}+\ldots+\alpha_{2,6}) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{N,1}+\alpha_{N,2}+\ldots+\alpha_{N,6})],$$

$$(11.10)\quad \prod_{n=1}^{N} \prod_{\substack{k,l=1\\ k<l}}^{6} (\alpha_{n,k} \cdot \alpha_{n,e})' [= (\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{1,2})' \cdot (\alpha_{1,2} \cdot \alpha_{1,3})' \cdot \ldots \cdot (\alpha_{1,5} \cdot \alpha_{1,6})' \cdot \ldots \cdot (\alpha_{N,1} \cdot \alpha_{N,2})' \cdot (\alpha_{N,2} \cdot \alpha_{N,3})' \cdot \ldots \cdot (\alpha_{N,5} \cdot \alpha_{N,6})'].$$

Określmy teraz stosunek $\equiv$ zachodzący między dwoma zdaniami zbioru $S^{(N)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde z nich wynika z drugiego oraz ze zdań (11.9) i (11.10) na drodze poprawnych logicznie rozumowań. Z praw logiki wynika, że relacja $\equiv$ jest kongruencją w ciele $S^{(N)}$. Dzieląc ciało $S^{(N)}$ przez tę kongruencję lub rozpatrując ciało $S^{(N)}$, rel$\equiv$, uzyskujemy ciało Boole'a zdań będące opisem gry polegającej na N rzutach sześcienną kostką.

W gruncie rzeczy zdania zbioru $S^{(N)}$ są tylko pozornie zdaniami; w sposób zupełnie naturalny możemy rozpatrywać je jako funkcje zdaniowe. Co prawda, w funkcji (11.5) występują tylko dwie zmienne wolne n i k i aby uzyskać zdania zbioru $S_0^{(N)}$ dokonaliśmy za nie podstawień konkretnych wartości, lecz mimo to zdania te nie uzyskały wartości logicznej, ich wartość logiczna zmienia się bowiem od partii do partii. Widać z tego, że zdania zbioru $S_0^{(N)}$ (a więc i zdania zbioru $S^{(N)}$) są funkcjami zdaniowymi, w których zmienna wolna przebiega zbiór wszystkich N-rzutowych partii kością do gry, przy czym na wartość logiczną tych zdań nie wpływa oczywiście kiedy, gdzie i przez kogo dana partia została rozegrana, a tylko jaki w danej partii uzyskano wynik; wynik — to znaczy N-elementowy ciąg wyników w poszczególnych rzutach. Funkcję zdaniową (11.5) należałoby więc napisać w postaci

(11.5*) „w n-tym rzucie partii p wyrzucono k oczek''.

Wtedy zdania $a_{k,n}$ zbioru $S_0^{(N)}$ są funkcjami zmiennej p przebiegającej zbiór wszystkich N-rzutowych partii kostką, który w gruncie rzeczy jest zbiorem P wszystkich ciągów $\langle k_1, k_2, \ldots, k_N\rangle$, gdzie $1 \leqslant k_i \leqslant 6$ są liczbami całkowitymi. Zdanie (11.5*) możemy czytać „na n-tym miejscu w ciągu p stoi liczba k''. Niech $\alpha \in S^{(N)}$; z założenia α jest zdaniem zbudowanym ze zdań kształtu (11.5*), a więc funkcją zdaniową zmiennej p. Uwidocznijmy to pisząc $\alpha(p)$. Przyporządkujmy zdaniu $\alpha(p)$ zbiór

$$X(\alpha) = \mathop{E}_{p \in P}[\alpha(p)].$$

Klasa $\mathbf{X}$ wszystkich zbiorów kształtu $X(\alpha)$ (jest to właściwie klasa $\boldsymbol{W}(P)$) jest ciałem zbiorów izomorficznym z ciałem $S^{(N)}$. Przy takim ujęciu konstrukcja drugiego przykładu jest analogiczna do konstrukcji pierwszego przykładu. W klasycznym rachunku prawdopodobieństwa rozważając N-rzutową grę kostką rozważa się właściwie ciało $\mathbf{X}$, nazywając jego elementy *zdarzeniami*.

Na zakończenie należy jeszcze zwrócić uwagę, że każde ciało Boole'a, którego elementami są zdania, jest co najwyżej przeliczalne. Zdania są bowiem skończonymi ciągami znaków (liter, cyfr, łączników itd.), których jest przeliczalnie wiele (por. wstęp, str. 6). Ciało takie, o ile jest nieskończone, nie jest przeliczalnie addytywne, co wynika z (6.11).

§ 12. Atomy, ciała atomowe

Pojęcie atomu zostało do teorii ciał Boole'a wprowadzone już w 1891 r. przez E. Schrödera[1]), a w roku 1935 zostało ono przypomniane i dokładniej zbadane przez A. Tarskiego[2]). W dalszym ciągu pojęcie to będzie odgrywało ważną rolę przy formułowaniu klasycznej definicji prawdopodobieństwa oraz przy określaniu zmiennej losowej.

Określenie 9. Element u ciała U nazywamy *atomem* tego ciała, jeśli nie jest on pusty, a prócz tego jeśli jedynym różnym od niego elementem w nim zawartym jest 0.

Innymi słowy, na to, żeby u było atomem ciała U, musi być

(12.1) $$u \neq 0,$$

a prócz tego musi zachodzić warunek

(12.2) *z* $v \rightarrow u$ *wynika* $v=0$ *lub* $v=u$.

Przykłady. W ciele $\boldsymbol{W}(X)$ atomami są zbiory jednopunktowe i tylko one: zbiory jednopunktowe są atomami każdego ciała zbiorów, mogą jednak w ciele zbiorów istnieć atomy będące zbiorami wielopunktowymi. W najmniejszym ciele zbiorów rozpostartym na przedziałach kształtu $\mathop{E}[n \leqslant x < n+1]$, gdzie n jest liczbą całkowitą, atomami są te i tylko te przedziały; w ciele figur elementarnych $\boldsymbol{N}_n$ żaden zbiór nie jest atomem; żaden element ciała S określonego w § 11 nie jest atomem.

Atomami ciała $S^{(N)}$ są elementy kształtu $\prod_{n=1}^{N} \alpha_{k_n,n}$. Odpowiadający im zbiór $X\left(\prod_{n=1}^{N}\alpha_{k_n,n}\right)$ składa się z jednego tylko ciągu $\langle k_1, k_2, \ldots, k_N\rangle$.

Łatwo widzieć, że zachodzą następujące twierdzenia:

(12.3) *Każde dwa różne atomy ciała U są rozłączne.*

(12.4) *Jeżeli u nie jest atomem ciała U, to istnieje taki różny od u i niepusty element $v \in U$, że $v \rightarrow u$.*

W przypadku, gdy $\equiv$ jest kongruencją ciała U i rozpatrujemy ciało U, rel$\equiv$, atomem tego ciała nazywamy każdy taki element $u \in U$, że $[u]$ jest atomem ciała $U/\equiv$.

[1]) E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, tom II, rozdz. 1, Lipsk 1891, str. 318-349.

[2]) A. Tarski, *Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I*, Fund. Math. 24 (1935), por. § 2, str. 131-138.

W szczególności:

(12.5) *u jest atomem ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi* $u\equiv 0$ (czyli u nie jest równoważne 0), *a ponadto każdy element zawarty* $\mathrm{rel}\equiv$ *w u jest bądź równoważny* 0, *bądź też kongruentny z u.*

(12.6) *Jeżeli u jest atomem ciała U, to $[u]$ jest bądź atomem ciała $U/\equiv$, bądź jest w tym ciele elementem pustym, a więc u jest bądź atomem ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$, bądź $u\equiv 0$.*

Określenie 10. Zbiór $A\subset U$ nazywamy zbiorem *atomów reprezentacyjnych*, a jego elementy *atomami reprezentacyjnymi* ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$, jeśli każdy atom ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$ jest kongruentny z jednym i tylko jednym elementem zbioru A.

Zbiór atomów reprezentacyjnych nie jest na ogół przez ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$ jednoznacznie wyznaczony. Jest tak tylko wtedy, gdy bądź $\equiv$ jest identycznością, bądź $U, \mathrm{rel}\equiv$ nie posiada całkiem atomów. W różnych zagadnieniach, w których występują ciała zrelatywizowane, wygodnie jest operować pojęciem zbioru atomów reprezentacyjnych, przy czym na ogół jest rzeczą obojętną, który z wielu możliwych zbiorów bierzemy w danym przypadku pod uwagę. Zbiór atomów ciała U będziemy oznaczali przez $At(U)$, zbiór zaś atomów reprezentacyjnych (zresztą dowolny) ciała $U, \mathrm{rel}\equiv$ przez $At(U, \equiv)$.

Twierdzenie 8. *Jeżeli $u\in At(U)$, a $V\subset U$ jest podciałem ciała U i $u\in V$, to $u\in At(V)$.*

Dowód. Element niepusty ciała U jest oczywiście też elementem niepustym każdego podciała, do którego należy. Gdyby $u\in At(U)$ nie był atomem w V, to na mocy (12.4) istniałby niepusty element $v\in V$ zawarty w u i różny od u. Ale z $V\subset U$ wynika $v\in U$, więc u nie jest atomem U wbrew założeniu.

Twierdzenie 8 mówi nam, że własność „być atomem" zachowuje się przy braniu podciał danego ciała. Nie jest jednak na odwrót: z $V\subset U$ i $u\in At(V)$ nie wynika na ogół, że $u\in At(U)$.

Określenie 11.

(a) Ciało U (lub $U, \mathrm{rel}\equiv$) nazywa się *atomowym*, jeżeli każdy jego niepusty element zawiera atom.

(b) Ciało U (lub ciało $U, \mathrm{rel}\equiv$) nazywa się *bezatomowym*, jeżeli $At(U)=0$ [lub $At(U, \equiv)=0$].

Mówimy o ciele U, że jest *skończone*, jeżeli U jest zbiorem skończonym. O ciele $U, \mathrm{rel}\equiv$ mówimy, że jest skończone, jeżeli ciało $U/\equiv$ jest skończone.

Twierdzenie 9. *Każde ciało skończone jest atomowe.*

Dowód. Oczywiście wystarczy ograniczyć się do ciał nie zrelatywizowanych. Niech więc U będzie ciałem skończonym. Oznaczmy dla $u\in U$ przez $f(u)$ dowolny element ciała U zawarty w u, niepusty, jeżeli u jest niepuste, i różny od u, jeżeli u nie jest atomem. Na mocy (12.4) funkcja f o takich własnościach istnieje. $u=f(u)\neq 0$ oznacza, że u jest atomem; $f(u)=0$ zachodzi tylko dla $u=0$. Niech $u_0\in U$ będzie dowolnym niepustym elementem. Rozpatrzmy ciąg iteracji funkcji f po elemencie u_0:

(*) $$u_0, f(u_0), ff(u_0), fff(u_0), \ldots, f^{(n)}(u_0), \ldots$$

Z własności funkcji f wynika, że wszystkie elementy tego ciągu są niepuste i każdy jest zawarty we wszystkich poprzednich, a ze skończoności zbioru U wynika, że nie mogą one wszystkie być różne. Niech więc $k<l\leqslant n$ i niech

$$f^{(k)}(u_0)=f^{(n)}(u_0).$$

Udowodnimy, że

$$f^{(k)}(u_0)=f^{(l)}(u_0).$$

Rzeczywiście, na mocy własności ciągu (*) mamy

$$f^{(l)}(u_0)\to f^{(k)}(u_0) \quad \text{i} \quad f^{(k)}(u_0)=f^{(n)}(u_0)\to f^{(l)}(u_0),$$

skąd wynika, że

$$f^{(k)}(u_0)=f^{(l)}(u_0).$$

Z udowodnionej własności wynika, że istnieją w ciągu (*) dwa elementy sąsiadujące identyczne:

$$f^{(k)}(u_0)=f^{(k+1)}(u_0).$$

Jako niepuste są one atomami zawartymi w u_0, a ponieważ u_0 było dowolnym niezerowym elementem ciała U, więc ciało to jest atomowe.

Twierdzenie 10. *Każde zupełnie addytywne i atomowe ciało U jest izomorficzne z ciałem $\boldsymbol{W}\big(At(U)\big)$.*

Dowód. Przyjmijmy dla $u\in U$

$$h(u)=\underset{x\in At(U)}{E}[x\to u].$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja h ustala homomorfizm ciała U z ciałem $W(At(U))$ i ponadto jest jednoznaczna, gdyż dla $X \subset At(U)$ mamy

$$h^{-1}(X) = {\sum_{u \in X}}' u,$$

gdzie h^{-1} jest funkcją odwrotną do h. Należy zauważyć, że dla każdego $X \subset At(U)$ element $\sum_{u \in X} u$ istnieje na mocy zupełnej addytywności ciała U. W szczegółowym dowodzie twierdzenia 10 musielibyśmy się oprzeć na następującej własności ciał atomowych, którą warto osobno zanotować:

(12.7) *Jeżeli U jest ciałem atomowym, to dla każdego $u \in U$*

$$u = \sum_{\substack{v \in At(U) \\ v \to u}} v.$$

Mamy bowiem $v \to u$ dla każdego v ze zbioru, po którym się sumuje. Jeżeli zaś tę własność ma jakiś element $w \in U$, to element $u \cdot w'$ nie zawiera żadnego atomu, ponieważ zaś U jest ciałem atomowym więc $u \cdot w' = 0$, skąd wynika, że $u \to w$. Obie własności sumy są spełnione, co dowodzi słuszności tezy.

Z (12.7) wynika natychmiast

(12.8) *Jeżeli U jest ciałem atomowym, $u, v \in U$ i każdy atom zawarty w u jest również zawarty w v, to $u \to v$.*

§ 13. Metoda scalania atomów

Metoda, którą tu omówimy, służy do konstruowania podciał ciał atomowych i zupełnie addytywnych. Zaczniemy od pewnego twierdzenia grającego rolę pomocniczą.

(13.1) *Jeżeli U, rel$\equiv$ jest ciałem zupełnie addytywnym i $W \subset U$ zbiorem elementów niepustych, parami rozłącznych i takich, że $\sum_{w \in W} w \equiv 1$, to najmniejsze zupełnie addytywne i nasycone podciało ciała U, rel$\equiv$ zawierające W jest zbiorem elementów $v \in U$ spełniających dla pewnego $X \subset W$ równoważność $v \equiv \sum_{w \in X} w$; jest ono ciałem atomowym, W zaś zbiorem jego atomów reprezentacyjnych.*

D o w ó d. Oznaczmy podciało, o które chodzi, przez V; elementy $\sum_{w \in X} w$ należą oczywiście do ciała V, a ponieważ jest ono zbiorem nasyconym, więc należą do niego również wszystkie elementy równo-

ważne rozpatrywanym sumom; z drugiej strony jednak dla $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{W}(W)$ mamy

$$\sum_{X \in \boldsymbol{X}} \sum_{w \in X} w = \sum_{\substack{w \in \sum X \\ X \in \boldsymbol{X}}} w,$$

a dla $X \subset W$

$$\Big(\sum_{w \in X} w\Big)' = \sum_{w \in W - X} w,$$

skąd na podstawie (8.5) i (8.4) wnioskujemy o słuszności pierwszej części twierdzenia. Druga część twierdzenia wynika natychmiast z uwagi, że dla podzbiorów X_1 i X_2 zbioru W wzory $\sum_{v \in X_1} v \to \sum_{v \in X_2} v$, rel$\equiv$ i $X_1 \subset X_2$ są bądź równocześnie prawdziwe, bądź równocześnie fałszywe.

Mówimy, że klasa zbiorów B jest *dysjunkcją* zbioru A, jeśli $A \subset \sum_{X \in \boldsymbol{B}} X$, zbiory zaś $A \cdot X$, gdzie $X \in \boldsymbol{B}$, są parami rozłączne.

OKREŚLENIE 12. Niech U, rel$\equiv$ będzie zupełnie addytywnym ciałem, $A = At(U, \equiv)$ zbiorem jego atomów reprezentujących, $\boldsymbol{B}$ dysjunkcją zbioru A, a w niech będzie zbiorem elementów kształtu $\sum_{u \in A \cdot X} u$, gdzie $X \in \boldsymbol{B}$. Najmniejsze, zupełnie addytywne i nasycone podciało ciała U, rel$\equiv$ zawierające zbiór W nazywamy *podciałem scalonym względem dysjunkcji* $\boldsymbol{B}$.

TWIERDZENIE 11. *Jeżeli V jest ciałem scalonym względem dysjunkcji $\boldsymbol{B}$, a W zbiorem elementów kształtu $\sum_{u \in A \cdot X} u$, $X \in \boldsymbol{B}$, to V jest ciałem atomowym, W jest zbiorem jego atomów reprezentacyjnych i każdy jego element v spełnia dla pewnego $X \subset W$ równoważność $v \equiv \sum_{w \in X} w$.*

D o w ó d. Wystarczy stwierdzić, że zbiór W podany w określeniu 12 spełnia założenie twierdzenia (13.1), co pozostawiamy czytelnikowi.

Podamy jeszcze pewne częściowe odwrócenie twierdzenia 11.

TWIERDZENIE 12. *Każde zupełnie addytywne i nasycone podciało ciała zupełnie addytywnego i atomowego, jest ciałem scalonym względem pewnej dysjunkcji.*

D o w ó d. Niech V, rel$\equiv$ będzie zupełnie addytywnym podciałem atomowego i zupełnie addytywnego ciała U, rel$\equiv$, a $At(U, \equiv)$ niech będzie zbiorem atomów reprezentacyjnych ciała U, rel$\equiv$.

Przyjmijmy $u_1 \sim u_2$ dla $u_1, u_2 \in At(U, \equiv)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ bądź równocześnie $u_1+u_2 \to v$, rel$\equiv$, bądź $u_1+u_2 \to v'$, rel$\equiv$. Tak określona relacja jest równoważnością w zbiorze $At(U_1 \equiv)$. Oznaczając klasę jej zbiorów abstrakcji przez $\boldsymbol{B}$ sprawdzamy łatwo, że V, rel$\equiv$ jest ciałem scalonym względem dysjunkcji $\boldsymbol{B}$.

Jako wniosek z twierdzenia 12 otrzymujemy

(13.2) *Każde zupełnie addytywne podciało ciała zupełnie addytywnego i atomowego jest atomowe.*

Przykład. Przyporządkujmy każdemu przedziałowi

$$I_n = E[n \leqslant x < n+1], \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

prostej R_1 klasę I_n zbiorów jednopunktowych zawartych w I_n $\left(I_n = \underset{(x)}{E}[(x) \subset I_n]\right)$ i oznaczmy przez $\boldsymbol{B}$ rodzinę tych wszystkich klas. $\boldsymbol{B}$ określa dysjunkcję zbioru atomów ciała $\boldsymbol{W}(R_1)$. Ciało scalone względem dysjunkcji $\boldsymbol{B}$ jest ciałem wszystkich sum $\sum_{k=1}^{\infty} I_{n_k}$, atomami w nim są przedziały I_n.

§ 14. Przykłady i zadania

(14.1) Udowodnić, że jeżeli dla pewnego u mamy $uv = uw$ i $u+v = u+w$, to $u = w$.

(14.2) Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \prod_{i=1}^{n-1} u_i'\right).$$

(14.3) *Granicą górną (dolną) ciągu* $\{u_i\}$ elementów ciała przeliczalnie addytywnego nazywamy element

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_n = \overline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, u_n \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} u_n = \underline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, u_n\right),$$

a ciąg $\{u_i\}$ nazywamy *zbieżnym*, jeżeli

$$\overline{\mathrm{Limes}}_{i\to\infty}\, u_i = \underline{\mathrm{Limes}}_{i\to\infty}\, u_i.$$

(I) Udowodnić, że

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n \to \underline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, u_n \to \overline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, u_n \to \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(II) Udowodnić, że w przypadku ciała zbiorów $\overline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, X_n$ jest zbiorem tych elementów, które należą do nieskończenie wielu zbiorów X_n, $\underline{\mathrm{Limes}}_{n\to\infty}\, X_n$ zaś jest zbiorem tych elementów, które nie należą tylko do skończonej ilości zbiorów X_n.

(14.4) Niech R będzie zbiorem nieskończonym. Przyjmijmy dla $X, Y \in \boldsymbol{W}(R)$, że $X \equiv Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XY' + X'Y$ jest zbiorem skończonym.

Udowodnić, że relacja $\equiv$ jest kongruencją ciała $\boldsymbol{W}(R)$; kongruencja ta nie jest przeliczalna.

(14.5) W każdej przestrzeni $\mathcal{L}^*$ (por. wstęp, str. 19) klasa zbiorów zarazem otwartych i domkniętych stanowi ciało zbiorów.

(14.6) Niech U_1 i U_2 będą dwoma ciałami Boole'a. Przyjmijmy dla $\langle u_1, u_2 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle \in U_1 \times U_2$ (por. wstęp, str. 3)

$$\langle u_1, u_2 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1 + v_1,\ u_2 + v_2 \rangle,$$
$$\langle u_1, u_2 \rangle \odot \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1 v_1,\ u_2 v_2 \rangle,$$
$$\langle u_1, u_2 \rangle^{\circledcirc} = \langle u', u' \rangle.$$

Udowodnić, że iloczyn kartezjański $U_1 \times U_2$ jest ciałem Boole'a ze względu na działanie $\oplus$, $\odot$ i $^{\circledcirc}$, a

$$U_1 \times U_2 \hom U_1 \quad \text{i} \quad U_1 \times U_2 \hom U_2.$$

Uwaga. Dla dowodu tego ostatniego należy przyjąć:

$$h_1(\langle u_1, u_2 \rangle) = u_1, \qquad h_2(\langle u_1, u_2 \rangle) = u_2.$$

(14.7) Udowodnić, że na to, żeby $u \equiv v$, potrzeba i wystarcza, aby $uv' + u'v \equiv 0$.

(14.8) Udowodnić, że relacja zawierania mnogościowego indukuje w klasie obszarów wypukłych płaszczyzny strukturę; struktura ta nie jest ciałem Boole'a.