

Wstęp

Książka niniejsza ma za zadanie zaznajomić czytelnika z podstawami nowocześnie ujętej teorii prawdopodobieństwa przez zapoznanie go z elementami tej teorii (księga pierwsza) oraz z aparatem teorii funkcji rzeczywistych niezbędnym przy jej studiowaniu (księga druga).

W zasadzie dla zrozumienia niniejszej książki wystarczą te wiadomości z analizy matematycznej, które wchodzą w program wykładów na pierwszym i drugim roku studiów uniwersyteckich. Te wiadomości z abstrakcyjnych działów matematyki, które są użyte w niniejszej książce, a które wykraczają poza ramy kursu analizy, zestawione są krótko w poniższym wstępie. Czytelnik obznajomiony z elementami teorii mnogości, topologii i teorii funkcji zmiennej rzeczywistej może niniejszy wstęp opuścić, bez obawy trudności w zrozumieniu właściwego tekstu.

1. Teoria mnogości, a w szczególności teoria mocy zbiorów

Zakładamy, że czytelnik obznajomiony jest z pojęciem zbioru, stosunkiem przynależności elementu do zbioru i najprostszymi działaniami na zbiorach. Przypominamy więc tylko, że przynależność elementu x do zbioru X oznaczamy symbolem $x \in X$. Na oznaczenie przynależności elementów $x_1, x_2, \dots$ (w ilości skończonej lub nieskończonej) do zbioru X piszemy $x_1, x_2, \dots \in X$, zamiast $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots$. Dla oznaczenia, że element x nie należy do zbioru X , piszemy $x \notin X$.

Elementy zbiorów, w wypadku gdy o nich nie będziemy zakładali, że są zbiorami, będziemy oznaczali małymi literami alfabetu łacińskiego $a, b, c, \dots, p, q, u, v, w, \dots, x, y, z$, zbiory — dużymi literami łacińskimi, $A, B, \dots, U, V, W, \dots, X, Y, Z$, wreszcie *klasy* zbiorów to znaczy zbiory, których elementami są zbiory — literami $A, B, \dots, U, V, W, \dots, X, Y, Z$.

Sumę, iloczyn i różnicę dwóch zbiorów X, Y oznaczamy odpowiednio przez

$$X+Y, \quad X \cdot Y, \quad X-Y.$$

Symbolami

$$\sum_{i=1}^n X_i, \quad \prod_{i=1}^n X_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \prod_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \sum_{X \in X} X, \quad \prod_{X \in X} X$$

oznaczamy odpowiednio: sumę i iloczyn zbiorów $X_1, X_2, \dots, X_n$, sumę i iloczyn ciągu zbiorów $X_1, X_2, \dots$, sumę i iloczyn wszystkich zbiorów należących do klasy X .

Przypominamy, że *suma* zbiorów jest zbiorem składającym się z tych i tylko tych elementów, które należą do przynajmniej jednego składnika; *iloczyn* jest zbiorem tych i tylko tych elementów, które należą do wszystkich czynników. *Różnica* zbiorów $X-Y$ jest zbiorem tych elementów, które należą do X , a nie należą do Y . *Zbiór pusty*, to znaczy zbiór nie zawierający żadnych elementów, oznaczamy przez 0 . Przypominamy, że zachodzą następujące wzory:

$$(1.1) \quad X+(Y+Z)=(X+Y)+Z, \quad X \cdot (Y \cdot Z)=(X \cdot Y) \cdot Z,$$

$$(1.2) \quad X+Y=Y+X, \quad X \cdot Y=Y \cdot X,$$

$$(1.3) \quad X \cdot (Y+Z)=X \cdot Y+X \cdot Z, \quad X+Y \cdot Z=(X+Y)(X+Z),$$

$$(1.4) \quad X+0=X, \quad X \cdot 0=0,$$

$$(1.5) \quad X+X=X, \quad X \cdot X=X,$$

$$(1.6) \quad X-X=0,$$

$$(1.7) \quad (X-Y)-Z=X-(Y+Z),$$

$$(1.8) \quad X-(Y-Z)=(X-Y)+X \cdot Y \cdot Z,$$

$$(1.9) \quad Y \cdot \sum_{X \in X} X = \sum_{X \in X} (X \cdot Y), \quad Y + \prod_{X \in X} X = \prod_{X \in X} (X+Y),$$

$$(1.10) \quad \sum_{X \in X} X + \sum_{X \in Y} X = \sum_{X \in Y+Y} X, \quad \prod_{X \in X} X \cdot \prod_{X \in Y} X = \prod_{X \in X+Y} X.$$

Jeżeli każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y , to mówimy, że X jest zawarty w Y lub też że X jest podzbiorem Y , i piszemy XCY .

Oczywiście,

$$(1.11) \quad XCY \text{ i } YCX \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X=Y.$$

$$(1.12) \quad XCY \text{ i } YCZ \text{ pociąga } XCZ.$$

$$(1.13) \quad XCX+Y, \quad X \cdot YCX, \quad X-YCX.$$

Jeżeli XCY i $X \neq Y$, to mówimy, że X jest zawarte właściwie w Y lub że X jest podzbiorem właściwym Y . Tak np. zbiór wszyst-

kich liczb parzystych $P=(2,4,6,\dots)$ jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich liczb naturalnych $N=(1,2,3,\dots)$.

Jeżeli XCY , to różnica $Y-X$ nazywa się *uzupełnieniem zbioru X w zbiorze Y* .

Jeżeli XCY dla każdego $X \in A$, wówczas

$$(1.14) \quad \prod_{X \in A} X = Y - \sum_{X \in A} (Y-X), \quad \sum_{X \in A} X = Y - \prod_{X \in A} (Y-X).$$

Zbiór, którego jedynymi elementami są $x_1, x_2, \dots$ (w ilości skończonej lub nieskończonej), oznaczamy przez $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$; w szczególności $\langle x \rangle$ jest zbiorem, którego jedynym elementem jest x .

Parą nazywamy zbiór $\langle x, y \rangle$ złożony z dwóch przedmiotów (różnych). W parze $\langle x, y \rangle$ nie jest wyróżniony żaden z jej elementów jako pierwszy ani też jako drugi; para $\langle x, y \rangle$ jest identyczna z parą $\langle y, x \rangle$, co zapisujemy symbolicznie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Jeżeli wśród dwóch przedmiotów x, y jeden, np. x , jest wyróżniony jako pierwszy, a pozostały, w tym przypadku y , jako drugi, mówimy, że mamy do czynienia z *parą uporządkowaną*. Parę uporządkowaną przedmiotów x, y oznaczamy przez $\langle x, y \rangle$. Podobnie, mając danych n przedmiotów, wśród których jest wyróżniony pierwszy z nich, drugi z nich, itd., mówimy, że mamy do czynienia z *ciągiem n -elementowym*. Ciąg złożony z elementów $x, y, \dots, w$ oznaczamy przez $\langle x, y, \dots, w \rangle$; kolejność występowania przedmiotów w tym zapisie stanowi o kolejności elementów w ciągu (tak więc w naszym przypadku x jest pierwszym, y drugim, ..., w ostatnim przedmiotem ciągu). Ciąg 2-elementowy jest parą uporządkowaną. Zwracamy uwagę, że w ciągach n -elementowych niekoniecznie wszystkie elementy muszą być różne, w szczególności para $\langle x, x \rangle$ ma jako pierwszy i drugi element x ; jest ona różna zarówno od trójki $\langle x, x, x \rangle$, jak też od zbioru $\langle x \rangle$. Czytelnik łatwo zauważy, że ciąg n -elementowy $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ można uważać za funkcję f określoną dla pierwszych n liczb naturalnych i taką, że $f(i) = x_i$ dla $i=1, 2, \dots, n$.

Produktem kartezjańskim zbiorów X_1 i X_2 nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle x_1, x_2 \rangle$ takich, że $x_1 \in X_1$, a $x_2 \in X_2$. Produkt taki oznaczamy przez $X_1 \times X_2$. Tak np. w przypadku gdy $X_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, $X_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, mamy $X_1 \times X_2 = \langle \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle, \langle y_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle \rangle$. *Produktem kartezjańskim n zbiorów $X_1, X_2, \dots, X_n$* nazywamy zbiór wszystkich ciągów n -elementowych $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ takich, że $x_i \in X_i$ dla $i=1, 2, \dots, n$. Oznacza się go $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Należy zauważyć, że w produkcie kartezjań-

skim $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ niektóre, nawet wszystkie zbiory $X_1, X_2, \dots, X_n$ mogą być identyczne. W przypadku gdy $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, produkt $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ oznaczamy przez X^n i nazywamy *potęgą kartezjańską zbioru X* .

Czytelnik łatwo zauważy, że traktując punkty p płaszczyzny kartezjańskiej jako pary uporządkowane liczb $\langle x, y \rangle$, gdzie x i y są odpowiednio odcietą i rzędną punktu p , traktujemy płaszczyznę jako potęgę R_1^2 , gdzie R_1 jest zbiorem liczb rzeczywistych. Z tych samych względów trójwymiarowa przestrzeń kartezjańska może być uważana za potęgę R_1^3 .

Niech T będzie dowolnym zbiorem i niech każdemu $t \in T$ będzie przyporządkowany pewien zbiór X_t ; *produktem kartezjańskim zbiorów X_t* będziemy nazywali zbiór wszystkich funkcji f określonych dla elementów T i takich, że $f(t) \in X_t$. Produkt taki oznaczamy przez $\prod_{t \in T} X_t$. W przypadku gdy T jest zbiorem liczb naturalnych $T = (1, 2, 3, \dots)$, piszemy również $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, a w przypadku

$T = (1, 2, 3, \dots, n)$ piszemy $\prod_{i=1}^n X_i$, przy czym produkt ten identyfikujemy z produktem $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Jeżeli wszystkie czynniki produktu $\prod_{t \in T} X_t$ są różne, to znaczy, jeżeli $X_{t_1} \neq X_{t_2}$ dla $t_1 \neq t_2$, to oznaczając przez A klasę złożoną ze zbiorów X_t ($t \in T$) i tylko z nich, możemy omawiany produkt zapisać jako $\prod_{x \in A} X$. Uważamy, że produkt $\prod_{x \in A} X$ jest zbiorem wszystkich funkcji f określonych dla elementów klasy A i takich, że $f(X) \in X$, i identyfikujemy go w tym wypadku z produktem $\prod_{t \in T} X_t$.

Niech X i Y będą dwoma zbiorami, f funkcją określoną na X i taką, że $f(x) \in Y$. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje jednoznacznie X na Y* , jeżeli dla każdego $y \in Y$ istnieje dokładnie jedno $x \in X$ takie, że $f(x) = y$. Dwa zbiory X i Y są *równoliczne* lub *równej mocy*, jeżeli istnieje funkcja f odwzorowująca jednoznacznie X na Y . Każdy zbiór jest równoliczny z samym sobą; jeżeli X jest równoliczny z Y , to Y jest równoliczny z X , a prócz tego z równoliczności zbiorów X i Y oraz Y i Z wynika równoliczność zbiorów X i Z . Na oznaczenie, że dwa zbiory X i Y są równoliczne, piszemy $\bar{X} = \bar{Y}$.

Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\leq n$ nazywa się zbiorem *mocy n* . Oczywiście wyrażenie, że X jest *mocy n* , oznacza po prostu, że X ma dokładnie n elementów. Te zbiory, które

są *mocy n* przy pewnym n naturalnym, nazywamy zbiorami *skończonymi* lub zbiorami *skończonej mocy*. Istnieją jednak zbiory, które nie są skończonej mocy; nazywamy je zbiorami *nieskończonymi*. Zbiorem nieskończonym jest np. zbiór liczb naturalnych N , zbiór liczb parzystych P , zbiór liczb rzeczywistych R_1 . Jeżeli X jest podzbiorem właściwym Y , a Y jest zbiorem skończonym, to X nie może zawierać tyle samo elementów co Y , innymi słowy X i Y nie mogą być równoliczne. Inaczej wygląda sytuacja, gdy Y jest zbiorem nieskończonym. Udowodnimy, że P jest równoliczne z N , choć, jak wiemy, P jest podzbiorem właściwym N .

Przyjmijmy $f(n) = \frac{1}{2}n$ dla $n \in P$. Funkcja f odwzorowuje jednoznacznie P na N , a więc P jest równoliczne z N .

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych N nazywamy *przelicznymi* lub *mocy $\aleph_0$* . Na oznaczenie, że zbiór X jest *mocy $\aleph_0$* , piszemy $\bar{X} = \aleph_0$. W szczególności $\bar{N} = \aleph_0$, a prócz tego dwa zbiory *mocy $\aleph_0$* są między sobą równoliczne. Aby udowodnić, że X jest *mocy $\aleph_0$* , wystarczy, na podstawie definicji, znaleźć funkcję f odwzorowującą jednoznacznie N na X . Jeżeli f jest taką funkcją, to w ciągu

$$f(1), f(2), f(3), \dots$$

występują wszystkie elementy zbioru X i każdy tylko raz. Z drugiej strony, jeżeli potrafimy ustawić elementy zbioru X w ciąg nieskończony

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

tak, aby każdy element występował w tym ciągu raz i tylko raz, to przyjmując $f(n) = x_n$ odwzorowujemy jednoznacznie N na X , więc X jest *mocy $\aleph_0$* . Na to więc, aby udowodnić przeliczalność zbioru X , wystarczy ustawić wszystkie jego elementy w ciąg nieskończony złożony z samych różnych wyrazów. Posługując się tą uwagą udowodnimy:

(1.15) *Podzbiór nieskończony zbioru przeliczalnego jest sam przeliczalny.*

Niech $X \subset Y$ i $\bar{Y} = \aleph_0$. Zbiór Y można na mocy założenia ustawić w ciąg złożony z samych różnych wyrazów

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

Elementy zbioru X tworzą podciąg tego ciągu

$$y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, \dots$$

Gdyby ten podciąg był skończony, to zbiór X byłby również skończony wbrew założeniu, a więc podciąg ten jest nieskończony, złożony z samych różnych wyrazów i występują w nim wszystkie elementy zbioru X , skąd wynika, że $\bar{X} = s_0$, co należało okazać.

(1.16) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym, to X^n jest też zbiorem przeliczalnym.*

Powyższe twierdzenie udowodnimy najpierw w przypadku $X=N$. Rozpatrzmy zbiór P_n liczb k kształtu $k = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, gdzie $p_1, p_2, \dots, p_n$ są początkowymi liczbami pierwszymi ($p_1=2, p_2=3, \dots$), a $k_1, k_2, \dots, k_n \in N$. Zbiór ten jest nieskończony i $P_n \subset N$, więc na mocy (1.15) $\bar{P}_n = s_0$. Dla $\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle \in N^n$ założymy $f(\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle) = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$. Funkcja f odwzorowuje jednoznacznie zbiór N^n na zbiór P_n , skąd wynika, że $\bar{N}^n = s_0$. Niech teraz X będzie zbiorem przeliczalnym i niech φ odwzorowuje jednoznacznie X na N . Dla $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in X^n$ założymy $f(\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle) = \langle \varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n) \rangle$. Funkcja f odwzorowuje jednoznacznie X^n na N^n , więc z przeliczalności N^n wynika $\bar{X}^n = s_0$, co należało okazać.

(1.17) *Jeżeli każdy ze zbiorów $X_1, X_2, X_3, \dots$ jest przeliczalny, to suma $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest przeliczalna.*

Niech funkcja f_m odwzorowuje zbiór X_m jednoznacznie na N i przyjmijmy $\varphi(x) = k$ dla $x \in \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $x \in X_k$. Określając funkcję f dla $x \in \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ wzorem $f(x) = \langle \varphi(x), f_{\varphi(x)}(x) \rangle$, odwzorowujemy jednoznacznie zbiór $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ na pewien podzbiór nieskończony P zbioru N^2 . Ponieważ, zgodnie z (1.16), $\bar{N}^2 = s_0$, więc również $\bar{P} = s_0$, a co za tym idzie $\sum_{i=1}^{\infty} X_i = s_0$, co należało okazać.

(1.18) *Zbiór wszystkich ciągów skończonych złożonych z elementów zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.*

Zbiorem wszystkich ciągów skończonych elementów zbioru X jest oczywiście zbiór $\sum_{n=1}^{\infty} X^n$. Z (1.16) i (1.17) wynika, że jest on przeliczalny, jeżeli tylko X jest zbiorem przeliczalnym.

(1.19) *Zbiór liczb wymiernych W jest przeliczalny.*

Dla $x \in W$ założymy $f(x) = \langle k, l, m \rangle$, gdzie $k, l, m \in N$, a k, l są względnie pierwsze oraz $k/l = x$ i $m=1$, jeżeli $x > 0$ i $k/l = -x$ i $m=2$, jeżeli $x < 0$, wreszcie $k=l=m=2$ dla $x=0$. Funkcja f odwzorowuje W na pewien podzbiór nieskończony zbioru N^3 , a więc $\bar{W} = s_0$.

(1.20) *Każdy zbiór nieskończony zawiera podzbiór przeliczalny.*

Niech X będzie zbiorem nieskończonym, a x dowolnym jego elementem; założymy $f(1) = x$ i przypuścimy, że wyznaczyliśmy już wartości funkcji f dla liczb $1, 2, \dots, n$ tak, aby $f(k) \neq f(l)$ dla $k \neq l$. Zbiór $X - \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ nie jest pusty; gdyby bowiem tak było, X musiałby być zbiorem dokładnie n -elementowym, a więc skończonym, wbrew założeniu. Niech z będzie dowolnym elementem zbioru $X - \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$. Założymy $f(n+1) = z$. W ten sposób przez indukcję wyznaczyliśmy funkcję f w całym zbiorze N , a ponieważ jest ona różnowartościowa, więc zbiór jej wartości jest przeliczalny; jest on jednak podzbiorem zbioru X , więc twierdzenie jest udowodnione.

Z twierdzenia (1.20) wynika, że moc s_0 jest w pewnym sensie najmniejszą nieskończonością. Powstaje pytanie, czy jest ona jedyną nieskończonością, tzn. czy każdy zbiór nieskończony jest mocy s_0 , czyli równoliczny ze zbiorem N . Odpowiedź jest przecząca. Istnieją zbiory nieskończone, nie będące mocy s_0 . Ze względu na (1.20) o zbiorach tych mówimy, że są *mocy większej niż s_0* . Udowodnimy następujące twierdzenie:

(1.21) *Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych i rosnących liczb naturalnych nie jest przeliczalny.*

Oznaczmy przez C zbiór wszystkich rozważanych ciągów i przypuścimy, że jest on przeliczalny. Istnieje wtedy funkcja f odwzorowująca w sposób jednoznaczny zbiór N na C . Mamy więc

$$f(1) = \{k_i^{(1)}\}, f(2) = \{k_i^{(2)}\}, \dots, f(n) = \{k_i^{(n)}\}, \dots,$$

gdzie $\{k_i^{(n)}\}$ jest ciągiem nieskończonym i rosnącym liczb naturalnych. Określimy teraz indukcyjnie ciąg nieskończony rosnący liczb naturalnych, a więc element zbioru C , który nie jest wartością funkcji f dla żadnego naturalnego n . Założymy $l_1 = k_1^{(1)} + 1$, $l_2 = \max(l_1, k_2^{(2)}) + 1$ i ogólnie $l_{n+1} = \max(l_n, k_n^{(n)}) + 1$. Łatwo sprawdzić, że ciąg $\{l_i\}$ jest rosnący i że nie jest on wartością funkcji f dla żad-

nej liczby naturalnej n . Gdyby bowiem $f(n) = \{k_i^{(n)}\} = \{l_i\}$, to mielibyśmy $k_i^{(n)} = l_i$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$. Ale w wypadku $n = 1$ mamy $l_1 = k_1^{(1)} + 1 \neq k_1^{(1)}$, zaś w wypadku $n > 1$ mamy $l_n = \max(l_{n-1}, k_n^{(n)}) + 1 > k_n^{(n)}$, a więc $l_n \neq k_n^{(n)}$. Funkcja f nie odwzorowuje więc zbioru N na zbiór C , wbrew założeniu, co kończy dowód naszego twierdzenia.

Podobnie dowodzi się, że zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych, zbiór liczb rzeczywistych R_1 , jak też każdy ze zbiorów R_1^n , nie są przeliczalne. Z drugiej strony jednak dowodzi się, że wszystkie one są równoliczne. Zbiór równoliczny ze zbiorem R_1 nazywamy zbiorem *mocy continuum*. A więc wszystkie wyżej wymienione zbiory są *mocy continuum*.

Istnieją zbiory nieskończone nie równoliczne ani z N , ani z R_1 , takim jest np. zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych. Interesujących się tymi sprawami odsyłamy do podręczników poświęconych specjalnie teorii mnogości.

Wprowadzimy obecnie pewien praktyczny sposób określania zbiorów. Niech X będzie dowolnym zbiorem, $\Phi(x)$ pewnym warunkiem, który może, lecz nie musi być spełniony przez elementy zbioru X . Zbiór X_0 tych elementów zbioru X , które spełniają warunek $\Phi(x)$, oznaczamy przez $E[\Phi(x)]$. Dla przykładu, biorąc za X zbiór N , za $\Phi(x)$ zaś warunek $x - 4 \in N$, mamy $E[x - 4 \in N] = \{1, 2, 3, 4\}$. Czytelnik sprawdzi łatwo, że następujące zbiory: $E[x/2 \in N]$, $E[0 \leq x < 1]$, $E[\text{istnieją takie } k, l \in N, \text{ że } k/l = x]$ i $E[x < \omega]$ są odpowiednio zbiorem liczb naturalnych parzystych, zbiorem liczb z odcinka $[0, 1]$, zbiorem liczb wymiernych dodatnich, zbiorem pustym. W wypadku, gdy nie ma obaw nieporozumienia, np. jeśli wszystkie rozważania dotyczą zbioru R_1 lub jakiegoś innego ustalonego zbioru X_0 , piszemy zamiast $E[\Phi(x)]$ krótko $E[\Phi(x)]$.

2. Przestrzenie kartezjańskie R_n

Przestrzenią kartezjańską n -wymiarową ($n > 1$) nazywamy zbiór R_1^n ; jest to zbiór wszystkich ciągów n -elementowych $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, złożonych z liczb rzeczywistych. Zgodnie z wieloletnią tradycją matematyczną oznaczamy n -wymiarową przestrzeń kartezjańską przez R_n , elementy jej nazywamy *punktami* i oznaczamy nie przez $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, lecz przez $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pamiętając jednak, że punkt

$p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nie jest zbiorem elementów $x_1, x_2, \dots, x_n$, lecz ciągiem tych elementów. Zbiór R_1 nazywamy *przestrzenią 1-wymiarową* lub *prostą*, zbiór R_2 *przestrzenią 2-wymiarową* lub *płaszczyzną*.

Uogólniając znane pojęcie odległości dwóch punktów na prostej, płaszczyźnie i w przestrzeni będziemy nazywali *odległością dwóch punktów* $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ przestrzeni R_n liczbę $\varrho(p, q)$ określoną wzorem:

$$(2.1) \quad \varrho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Mamy w szczególności na prostej $\varrho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$, na płaszczyźnie zaś $\varrho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Odległość ϱ w przestrzeni R_n ma następujące własności:

$$(2.2) \quad \varrho(p, q) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p = q,$$

$$(2.3) \quad \varrho(p, q) = \varrho(q, p),$$

$$(2.4) \quad \varrho(p, q) \leq \varrho(p, r) + \varrho(r, q) \quad (\text{nierówność trójkątowa}).$$

Dwie pierwsze własności wynikają bezpośrednio z (2.1), dla dowodu (2.4) używamy tzw. nierówności Schwarza-Buniakowskiego:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Niech $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $r = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(x_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(z_i - y_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |(x_i - y_i)(x_i - z_i)| + \sum_{i=1}^n |(x_i - y_i)(z_i - y_i)|, \end{aligned}$$

a stosując nierówność Schwarza otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \\ &+ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ otrzymujemy

$$\varrho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} = \varrho(p, r) + \varrho(r, q),$$

co należało okazać.

Niech $p_1, p_2, \dots$ będzie ciągiem punktów przestrzeni R_n ; mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny* do punktu $p \in R_n$, i piszemy $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, jeśli $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(p_m, p) = 0$. Innymi słowy,

(2.5) $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że dla $m > m_\varepsilon$ jest $\varrho(p_m, p) < \varepsilon$.

Wychodząc z określenia (2.1) czytelnik łatwo wykaże, że

(2.6) Na to, aby ciąg punktów $p_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ był zbieżny do punktu $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, potrzeba i wystarcza, aby $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

W ten sposób zbieżność według metryki ϱ daje się sprowadzić do zbieżności współrzędnych.

Zbiór FCR_n nazywamy *zamkniętym*, jeśli z $p_1, p_2, \dots \in F$ i $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ wynika $p \in F$, czyli jeśli granice ciągów punktów należących do niego również do niego należą.

Zbiór GCR nazywamy *otwartym*, jeśli uzupełnienie $R_n - G$ jest zbiorem zamkniętym.

Zbiory kształtu

$$\begin{aligned} & E_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n} [(a_i < x_i < b_i), i = 1, 2, \dots, n] \\ \text{oraz} & E_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n} [(a_i \leq x_i \leq b_i), i = 1, 2, \dots, n], \end{aligned}$$

gdzie $a_i, b_i \in R_i$ i $a_i < b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, nazywamy odpowiednio *przedziałami otwartymi* i *zamkniętymi*. Jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ są liczbami wymiernymi, to przedział (otwarty lub zamknięty) nazywa się *wymiernym*.

Z (2.6) i znanych własności granicy liczb wynika:

(2.7) Na to, aby $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, potrzeba i wystarcza, aby każdy otwarty i wymierny przedział zawierający punkt p zawierał również prawie wszystkie punkty $p_1, p_2, \dots$ (to znaczy, aby nie zawierał co najwyżej skończonej ilości punktów $p_1, p_2, \dots$),

a dalej:

(2.8) Na to, aby zbiór GCR_n był otwarty, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego punktu $p \in G$ istniał przedział otwarty i wymierny ICG taki, że $p \in I$.

Z (2.8) wynika oczywisty zresztą fakt, że przedział otwarty jest zbiorem otwartym, a dalej:

(2.9) Suma dowolnej ilości (nawet nieskończonej) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Udowodnimy jeszcze:

(2.10) Każdy zbiór otwarty jest sumą przedziałów otwartych i wymiernych.

Niech G będzie zbiorem otwartym; rozpatrzmy sumę S wszystkich przedziałów otwartych i wymiernych ICG . Oczywiście SCG , ponieważ każdy składnik sumy S jest zawarty w G , z drugiej zaś strony, jeżeli $p \in G$, to na mocy (2.8) istnieje przedział otwarty i wymierny I taki, że $p \in ICG$, więc $p \in S$, skąd wynika, że GCS . W rezultacie, ponieważ SCG i GCS , mamy $G = S$, a więc G jest sumą przedziałów otwartych i wymiernych, co należało okazać.

Przechodząc do zbiorów zamkniętych widzimy przede wszystkim, wprost z określenia zbioru zamkniętego, że przedział zamknięty jest zbiorem zamkniętym, a dalej udowodnimy:

(2.11) Iloczyn dowolnej ilości zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym.

Niech A będzie klasą zbiorów zamkniętych; każdy zbiór $R_n - F$, gdzie $F \in A$, jest więc zbiorem otwartym. Z (2.9) wynika, że suma $\sum_{F \in A} (R_n - F)$ jest również zbiorem zamkniętym, ale na mocy (1.14) $\prod_{F \in A} F = R_n - \sum_{F \in A} (R_n - F)$, więc iloczyn $\prod_{F \in A} F$, jako uzupełnienie zbioru otwartego, jest zbiorem otwartym, co należało okazać.

Każdy przedział otwarty $I = E[(a_i < x_i < b_i), i = 1, 2, \dots, n]$ jest jednoznacznie określony przez podanie $2n$ liczb $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ takich, że $a_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n$. Wynika z tego, że zbiór wszystkich przedziałów wymiernych przestrzeni R_n jest równoliczny ze zbiorem

$$E_{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \in W^{2n}} [(x_i < x_{i+n}), i = 1, 2, \dots, n].$$

Zbiór ten jest oczywiście nieskończony, a jako zawarty w przeliczalnym zbiorze W^{2n} jest przeliczalny, a więc:

(2.12) Zbiór wszystkich przedziałów otwartych i wymiernych jest przeliczalny.

Zbiór $X \subset R_n$ nazywa się *gęsty* w zbiorze $Y \subset R_n$, jeżeli każdy punkt zbioru Y jest granicą pewnego ciągu punktów zbioru X . Udowodnimy, że:

(2.13*) Istnieją zbiory $X \subset R_n$ przeliczalne i gęste w R_n ,

a w szczególności:

(2.13) Zbiór W^n , to znaczy tych punktów R_n , których wszystkie współrzędne są wymierne, jest gęsty w R_n .

Wynika to łatwo z (2.6) i z tego, że jak wiadomo z analizy, każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych.

(2.14) Zbiór zamknięty F jest gęsty w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subset F$.

Wynika to wprost z określenia zbioru zamkniętego.

Zbiorem *nigdzie niegęstym* nazywamy zbiór $X \subset R_n$ taki, który nie jest gęsty w żadnym przedziale otwartym.

(2.15) Na to, aby zbiór zamknięty F był *nigdzie niegęsty*, potrzeba i wystarcza, aby nie zawierał żadnego przedziału otwartego.

Wynika to z (2.14).

(2.16) Zbiór zamknięty F , którego uzupełnienie $R_n - F$ jest gęste w R_n , jest *nigdzie niegęsty*.

Gdyby bowiem istniał przedział otwarty ICF , to jego uzupełnienie $R_n - I$ byłoby zbiorem zamkniętym i zawierałoby $R_n - F$. Żaden więc punkt należący do I nie mógłby być granicą ciągu punktów z $R_n - I$, a więc tym bardziej z $R_n - F$, wbrew założeniu, że $R_n - F$ jest gęste w R_n .

Jak wiemy ((2.9) i (2.11)), suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, iloczyn dowolnej ilości zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym. Jednak sumy nawet tylko przeliczalnej ilości zbiorów zamkniętych nie muszą być zamknięte, jak też i iloczyny nawet tylko przeliczalnej ilości zbiorów zamkniętych nie muszą być zamknięte.

Zbiór X nazywa się zbiorem F_σ , symbolicznie $X \in F_\sigma$, jeśli istnieje ciąg zbiorów zamkniętych $F_1, F_2, \dots$ taki, że $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

Podobnie X nazywa się zbiorem G_δ ($X \in G_\delta$), jeśli istnieją zbiory otwarte $G_1, G_2, \dots$ takie, że $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$.

Oczywiście, każdy zbiór zamknięty F jest zbiorem F_σ , podobnie jak każdy zbiór otwarty G jest zbiorem G_δ . Wystarczy dla przekonania się o tym założyć $F_i = F$ oraz $G_i = G$ dla $i = 1, 2, \dots$, wtedy mamy $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = F$ i $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = G$.

Istnieją jednak zbiory F_σ i zbiory G_δ nie będące ani zbiorami zamkniętymi, ani otwartymi. Dla przykładu udowodnimy:

(2.17) Każdy przedział otwarto-domknięty

$$I = E[(a_i \leq x_i < b_i), i = 1, 2, \dots, n],$$

gdzie $a_i < b_i$, jest sumą przeliczalnej ilości przedziałów zamkniętych i równocześnie iloczynem przeliczalnej ilości przedziałów otwartych, a więc zarazem zbiorem F_σ i G_δ .

Założmy $I_k = E[(a_i \leq x_i < b_i - 1/k), i = 1, 2, \dots, n]$ oraz $J_k = E[(a_i - 1/k < x_i < b_i), i = 1, 2, \dots, n]$. Ponieważ $a_i < b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, więc I_k , począwszy od pewnego k , jest rzeczywiście przedziałem zamkniętym. Łatwo sprawdzić, że $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ oraz $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$, co należało okazać.

(2.18) Uzupełnienie zbioru F_σ jest zbiorem G_δ , uzupełnienie zbioru G_δ jest zbiorem F_σ .

Niech $X \in F_\sigma$ i $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$; ze wzoru (1.14) wynika

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = R_n - \bigcap_{i=1}^{\infty} (R_n - F_i), \text{ więc } R_n - X = R_n - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (R_n - F_i),$$

co dowodzi, że $R_n - X \in G_\delta$. Analogiczny dowód drugiej części twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

(2.19) Suma przeliczalnej ilości zbiorów F_σ jest zbiorem F_σ , iloczyn przeliczalnej ilości zbiorów G_δ jest zbiorem G_δ .

Wynika to z (1.17) i własności sumy przeliczalnej zbiorów.

Uogólniając pojęcie zbiorów F_σ i G_δ nazwiemy zbiorem $F_{\sigma\sigma}$ każdy zbiór X będący iloczynem przeliczalnej ilości zbiorów F_σ , a zbiorem $G_{\sigma\sigma}$ — zbiór będący sumą przeliczalnej ilości zbiorów G_δ . Postępując podobnie dalej możemy zdefiniować klasy zbiorów $F_{\sigma\sigma\sigma}$, $G_{\sigma\sigma\sigma}$, $F_{\sigma\sigma\sigma\sigma}$, $G_{\sigma\sigma\sigma\sigma}$ itd. Żadna jednak z tych klas nie będzie miała własności:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} &\text{Jeśli } X_1, X_2, \dots \in A, \text{ to } \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \in A \text{ i } \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \in A. \\ &\text{Jeśli } X \in A, \text{ to } R_n - X \in A. \end{aligned}$$

W rozdziale I (§ 9, str. 48) udowodnimy istnienie klasy B_n zawierającej wszystkie zbiory otwarte (przestrzeni R_n — stąd indeks n przy B), posiadającej własność (2.20) i najmniejszej spośród wszystkich klas o tych własnościach, to znaczy takiej, że jeśli dowolna klasa A zawiera zbiory otwarte i posiada własność (2.20), to $B_n \subset A$. Klasę B_n nazywamy *klasą zbiorów borelowskich przestrzeni R_n* . Z własności (2.20) i z należenia do niej zbiorów otwartych wynika, że należą do niej również wszystkie zbiory zamknięte, zbiory G_δ , F_σ , $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$ itd.

Zbiorem *I kategorii* w przestrzeni R_n nazywamy każdy zbiór będący sumą przeliczalnej ilości zbiorów nigdzie niegęstych tej przestrzeni.

(2.21) *Zbiór F_σ , którego uzupełnienie jest gęste w R_n , jest zbiorem I kategorii.*

Niech X będzie sumą zbiorów zamkniętych $F_1, F_2, \dots$ i przypuścimy, że $R_n - X = R_n - \sum_{i=1}^{\infty} F_i$ jest zbiorem gęstym w R_n . Ponieważ $R_n - \sum_{i=1}^{\infty} F_i \subset R_n - F_i$, $i=1, 2, \dots$, więc każdy zbiór $R_n - F_i$, jako zawierający zbiór gęsty w R_n , jest sam gęsty w R_n . Na podstawie (2.16) każdy zbiór F_i jest nigdzie niegęsty, a więc $X = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$ jest zbiorem I kategorii, co należało okazać.

(2.22) *Suma przeliczalnej ilości zbiorów I kategorii jest zbiorem I kategorii.*

Wynika to z (1.17) i własności sumy przeliczalnej zbiorów.

Zbiór $X \subset R_n$ nazywa się zbiorem *zwartym*, jeśli z każdego ciągu $p_1, p_2, p_3, \dots$ punktów należących do X można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu zbioru X .

Jak wiadomo, przedziały zamknięte, czyli odcinki zamknięte, przestrzeni R_1 są zwarte; na podstawie (2.6) wyprowadzimy z tego jako wniosek:

(2.23) *Każdy przedział zamknięty $I = E[(a_i \leq x_i \leq b_i), i=1, 2, \dots, n]$ jest zwarty.*

Niech $p_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m=1, 2, 3, \dots$, będą punktami rozważanego przedziału. Z ciągu liczbowego $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \dots$, jako z ciągu ograniczonego liczbami a_1 i b_1 , można wybrać podciąg zbieżny

$x_1^{(k_1)}, x_1^{(k_2)}, x_1^{(k_3)}, \dots$. Z kolei rozważmy ciąg $x_2^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, x_2^{(k_3)}, \dots$: jest on również ograniczony, a mianowicie liczbami a_2 i b_2 , więc można z niego wybrać ciąg zbieżny $x_2^{(k_{i_1})}, x_2^{(k_{i_2})}, x_2^{(k_{i_3})}, \dots$. Ciąg $x_1^{(k_{i_1})}, x_1^{(k_{i_2})}, x_1^{(k_{i_3})}, \dots$ jest również zbieżny jako podciąg ciągu zbieżnego $x_1^{(k_1)}, x_1^{(k_2)}, x_1^{(k_3)}, \dots$. Powtarzając to postępowanie n -krotnie, dochodzimy do ustalenia takiego ciągu indeksów $s_1, s_2, s_3, \dots$, że wszystkie ciągi $x_i^{(s_1)}, x_i^{(s_2)}, x_i^{(s_3)}, \dots$, $i=1, 2, \dots, n$, są zbieżne jako podciągi pewnych ciągów zbieżnych wybranych z ciągów ograniczonych. Mamy wtedy na podstawie (2.6):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{s_m} = (\lim_{m \rightarrow \infty} x_1^{(s_m)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x_2^{(s_m)}, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} x_n^{(s_m)}),$$

a więc ciąg $p_{s_1}, p_{s_2}, p_{s_3}, \dots$ jest zbieżny, co należało okazać.

(2.24) *Iloczyn zstępującego ciągu przedziałów $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ zamkniętych jest niepusty.*

Niech $p_1, p_2, p_3, \dots$ będzie ciągiem punktów takich, że $p_i \in I_i$ dla $i=1, 2, 3, \dots$. Ponieważ wszystkie punkty tego ciągu należą do I_1 , więc na podstawie (2.23) można z niego wybrać podciąg zbieżny $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots$. Oczywiście $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots \in I_i$, więc tym bardziej $p_{s_i}, p_{s_{i+1}}, p_{s_{i+2}}, \dots \in I_i$ dla $i=1, 2, 3, \dots$, a ponieważ I_i jest przedziałem domkniętym, więc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{s_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{s_{i+m}} = p \in I_i \quad \text{dla } i=1, 2, 3, \dots$$

Wynika z tego, że $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$, co należało okazać.

(2.25) *Jeżeli X jest zbiorem nigdzie niegęstym, to w każdym przedziale zamkniętym I zawiera się przedział zamknięty I^* nie zawierający żadnego punktu zbioru X .*

Niech $I = E[(a_i \leq x_i \leq b_i), i=1, 2, \dots, n]$, gdzie $a_i < b_i$, $i=1, 2, \dots, n$; rozpatrzmy przedział otwarty $I_0 = E[(a_i < x_i < b_i), i=1, 2, \dots, n] \subset I$. Ponieważ X jest zbiorem nigdzie niegęstym, więc X nie jest gęste w I_0 , a tym samym istnieje punkt $p = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in I_0$ nie będący granicą żadnego ciągu punktów z X . Rozpatrzmy ciąg przedziałów

$$I_m = E[(c_i - 1/m \leq x_i \leq c_i + 1/m), i=1, 2, 3, \dots];$$

wszystkie te przedziały, z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości, są zawarte w I , gdyż $a_i < c_i < b_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Niech m_0 będzie taką

liczbą, że wszystkie przedziały $I_{m_0}, I_{m_0+1}, I_{m_0+2}, \dots$ są już zawarte w I . Gdyby teraz wszystkie zbiory $I_{m_0} \cdot X, I_{m_0+1} \cdot X, I_{m_0+2} \cdot X, \dots$ były niepuste, to wybierając ciąg punktów $p_1, p_2, \dots$ tak, aby $p_i \in I_{m_0+i} \cdot X$, mielibyśmy, jak łatwo zauważyć, $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, wbrew założeniu, że p nie jest granicą punktów z X . Istnieje więc taki przedział $I_{m_0+i} \subset I$, że $I_{m_0+i} \cdot X = 0$, co należało okazać.

(2.26) Jeżeli X jest zbiorem I kategorii, to do każdego przedziału zamkniętego I należy punkt p nie należący do X .

Niech $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, gdzie X_i są zbiorami nigdzie niegęstymi. Na mocy (2.25) istnieje przedział zamknięty $I_1 \subset I$ taki, że $I_1 \cdot X_1 = 0$. Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy już m przedziałów takich, że $I \supset I_1 \supset \dots \supset I_m$ oraz $I_1 \cdot X_1 = I_2 \cdot X_2 = \dots = I_m \cdot X_m = 0$; jako przedział I_{m+1} weźmiemy dowolny przedział zamknięty zawarty w I_m i taki, że $I_{m+1} \cdot X_{m+1} = 0$. W ten sposób wyznaczyliśmy ciąg zstępujący $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ przedziałów zamkniętych, a więc na podstawie (2.26) $\prod_{i=1}^{\infty} I_i \neq 0$. Istnieje więc punkt $p \in \prod_{i=1}^{\infty} I_i$; gdyby jednak $p \in X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, to dla pewnego m mielibyśmy $p \in X_m$, a więc ponieważ $p \in I_m$, także $p \in I_m \cdot X_m$, wbrew założeniu $I_m \cdot X_m = 0$. W ten sposób $p \in I$, ale $p \notin X$, co należało okazać.

(2.27) Uzupełnienie zbioru I kategorii jest gęste w przestrzeni R_n .

Niech X będzie zbiorem I kategorii. Dla $p \in R_n - X$ można przyjąć $p_i = p$, $i = 1, 2, \dots$, wtedy $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$. Dla dowodu (2.27) wystarczy więc ograniczyć się do punktów $p \in X$. Niech $p = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; podobnie jak w dowodzie twierdzenia (2.27) rozpatrzmy ciąg przedziałów zamkniętych $I_m = \overline{E}[(c_i - 1/m \leq x_i \leq c_i + 1/m), i = 1, 2, \dots, n]$. Na podstawie (2.26) istnieje ciąg punktów $p_1, p_2, \dots$ takich, że $p_m \in I_m$ dla $m = 1, 2, \dots$ i $p_m \notin X$, więc $p_m \in I_m - X \subset R_n - X$. Jak łatwo sprawdzić, $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, co kończy dowód.

Z (2.27) wynika łatwo:

(2.28) Żaden zbiór X zawierający przedział, a w szczególności cała przestrzeń R_m , nie jest zbiorem I kategorii.

3. Przestrzenie metryczne i przestrzenie $\mathcal{L}^*$

Niech R będzie dowolnym zbiorem, ρ funkcją rzeczywistą dwu zmiennych określoną na R i przyjmującą tylko wartości ≥ 0 . Jeżeli dla dowolnych $p, q, r \in R$ funkcja ρ spełnia warunki (2.2), (2.3) i (2.4), to nazywamy ją *metryką* w R , elementy R *punktami*, liczbę $\rho(p, q)$ *odległością* punktów p i q , wreszcie zbiór R *przestrzenią metryczną*.

W szczególności każda przestrzeń kartezjańska R_n jest przestrzenią metryczną z metryką określoną wzorem (2.1). Również każdy podzbiór X przestrzeni R_n (a nawet dowolnej przestrzeni metrycznej R) może być rozważany jako przestrzeń metryczna z tą samą metryką. Jeżeli bowiem metryka ρ spełnia warunki (2.2), (2.3) i (2.4) dla wszystkich punktów przestrzeni, to spełnia je tym bardziej dla punktów należących do pewnego jej podzbioru.

Zbieżność ciągu punktów $p_1, p_2, \dots \in R$ określa się w przestrzeniach metrycznych tak samo jak w przestrzeniach kartezjańskich, to znaczy warunkiem:

$$(3.1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(p_m, p) = 0.$$

Niektóre pojęcia i twierdzenia dotyczące przestrzeni kartezjańskich przenoszą się bezpośrednio na przypadek dowolnych przestrzeni metrycznych, tak np. przenoszą się pojęcia: zbioru zamkniętego i otwartego, zbiorów F_σ i G_δ , zbiorów borelowskich i twierdzenia: (2.5), (2.9), (2.11), (2.14), (2.18), (2.19), (2.21), (2.22). W dowodach ich należy zastąpić pojęcia przedziału otwartego i zamkniętego pojęciami kuli otwartej i domkniętej, przy czym przez *kulę otwartą* o środku $p \in R$ i promieniu a rozumie się zbiór $\overline{E}_{q \in R}[\rho(p, q) < a]$, a przez *kulę domkniętą* o tym samym promieniu i środku — zbiór $\overline{E}_{q \in R}[\rho(p, q) \leq a]$.

Niektóre inne pojęcia i twierdzenia dotyczące przestrzeni kartezjańskich a związane wyraźnie z pojęciem przedziału można przenieść na przypadek dowolnych przestrzeni metrycznych, zastępując w ich określeniu lub wysłowieniu pojęcie przedziału przez pojęcie kuli. Nie wszystkie jednak twierdzenia poprzedniego paragrafu przenoszą się na przypadek przestrzeni metrycznych. Takimi na przykład są twierdzenia (2.13*), (2.23) i (2.28). Nie przenoszą się one na przypadek przestrzeni metrycznych, to znaczy istnieją przestrzenie, które nie posiadają własności wyrażonych przez te twierdzenia.

Wszystkie natomiast twierdzenia i pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych dotyczą również przestrzeni kartezjańskich jako szczególnego przypadku przestrzeni metrycznych.

Odległością punktu $p \in R$ od zbioru $X \subset R$ w przestrzeni metrycznej R z metryką ϱ nazywamy liczbę $\delta(p, X)$ określoną wzorem

$$(3.2) \quad \delta(p, X) = \inf_{x \in X} \varrho(p, x),$$

a odległością dwóch zbiorów $X \subset R$ i $Y \subset R$ nazywamy liczbę $\delta(X, Y)$ określoną wzorem

$$(3.3) \quad \delta(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \varrho(x, y).$$

Oczywiście, ze względu na nieujemność metryki

$$(3.4) \quad \delta(p, X) \geq 0, \quad \delta(X, Y) \geq 0,$$

a dalej:

(3.5) Na to, aby istniał ciąg punktów $p_1, p_2, \dots \in X$ zbieżny do punktu $p \in R$, potrzeba i wystarcza, aby $\delta(p, X) = 0$.

(3.6) Jeżeli $\delta(X, Y) > 0$, to $X \cdot Y = 0$.

W przestrzeniach kartezjańskich mamy ponadto

$$(3.7) \quad \varrho(X, R_n - X) = 0,$$

co ogólnie w przestrzeniach metrycznych nie zachodzi.

Podamy jeszcze kilka własności granicy w przestrzeniach metrycznych.

(3.8) Jeżeli dla każdego m mamy $p_m = p$, to $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$.

(3.9) Jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, a $k_1 < k_2 < \dots$ jest ciągiem rosnącym liczb naturalnych, to $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m} = p$.

(3.10) Jeżeli ciąg $p_1, p_2, \dots$ nie jest zbieżny do punktu p (to znaczy bądź wcale nie jest zbieżny, bądź $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = q \neq p$), to istnieje podciąg $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ tego ciągu taki, że żaden jego podciąg nie jest zbieżny do p .

Twierdzenia (3.8) i (3.9) wynikają wprost z określenia (3.1), udowodnimy więc szczegółowo tylko twierdzenie (3.10). Jeżeli ciąg $p_1, p_2, \dots$ nie jest zbieżny do punktu p , to istnieje (na podstawie określenia (3.1)) takie $\varepsilon > 0$, że zbiór tych m , dla których $\varrho(p_m, p) >$

$> \varepsilon > 0$, jest nieskończony. Niech więc $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ będzie takim podciągiem ciągu $p_1, p_2, \dots$, że $\varrho(p_{k_i}, p) > \varepsilon$. Mamy jednak $\delta(p, (p_{k_1}, p_{k_2}, \dots)) \geq > \varepsilon > 0$, więc na mocy (3.5) żaden podciąg tego ciągu nie jest zbieżny do p , co należało okazać.

Niech teraz R będzie dowolnym zbiorem i przypuśćmy, że pewnym ciągom $p_1, p_2, \dots$ elementów R przyporządkowaliśmy jednoznacznie pewien element $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m \in R$ zwany granicą ciągu, tak aby spełnione były twierdzenia (3.8), (3.9) i (3.10). Zbiór R nazywamy wtedy przestrzenią $\mathcal{L}^*$, te zaś ciągi, którym została przypisana granica, nazywamy ciągami zbieżnymi. Powyżej udowodniliśmy, że przestrzenie metryczne są przestrzeniami $\mathcal{L}^*$ ze względu na granicę określoną przez (3.1). Udowodnimy dwie własności granicy w przestrzeniach $\mathcal{L}^*$.

(3.11) Jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, to $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_0+m} = p$.

Wynika to natychmiast z (3.9).

(3.12) Jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ i $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = p$, to ciąg zestawiony $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, \dots$ jest zbieżny i jego granicą jest p .

Dowód. Gdyby ciąg zestawiony nie był zbieżny do p , to na mocy (3.10) istniałby pewien jego podciąg $r_1, r_2, \dots$, który nie zawierałby żadnego podciągu zbieżnego do p . W ciągu $r_1, r_2, \dots$ występuje bądź nieskończenie wiele wyrazów p_m , bądź też nieskończenie wiele wyrazów q_m ; w każdym jednak wypadku można z niego wybrać podciąg $r_{k_1}, r_{k_2}, \dots$ składający się bądź z samych wyrazów p_m , bądź z samych wyrazów q_m . A więc na mocy (3.9) $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{k_m} = p$, wbrew założeniu.

Na przypadek przestrzeni $\mathcal{L}^*$ można przenieść pojęcie zbioru zamkniętego jako takiego, do którego wraz z wszystkimi elementami ciągu zbieżnego należy również jego granica, i pojęcie zbioru zwartego jako takiego, z którego przeliczalnej ilości elementów daje się wyjąć ciąg zbieżny do granicy będącej jego elementem.

4. Funkcje rzeczywiste w przestrzeniach R_n

Niech f będzie funkcją przyporządkowującą każdemu punktowi $p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ pewną liczbę rzeczywistą $f(p) = f((x_1, x_2, \dots, x_n))$. Funkcję taką nazywamy funkcją rzeczywistą w R_n ; czytelnik łatwo

się zorientuje, że funkcję taką można uważać za zwykłą funkcję n zmiennych, będziemy też pisać $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, zamiast $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Mówimy, że funkcja f nazywa się *ciągłą* w punkcie $p \in R_n$, jeżeli dla każdego ciągu punktów $p_1, p_2, \dots \in R_n$ takiego, że $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, mamy $\lim_{m \rightarrow \infty} f(p_m) = f(p)$. Należy zauważyć, że w określeniu powyższym pierwsza granica jest granicą w R_n , druga jest zwykłą granicą ciągu liczb.

Z określenia granicy w przestrzeni R_n wynika:

(4.1) *Na to, aby funkcja f była ciągła w punkcie p , potrzeba i wystarczy, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\eta > 0$, że dla punktów $q \in R_n$, w których jest spełniona nierówność $\varrho(p, q) < \eta$, było $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$.*

Korzystając z tego, że ciąg $1/k$ dąży do 0, gdy k rośnie, można powiedzieć:

(4.2) *Na to, aby funkcja f nie była ciągła w punkcie p , potrzeba i wystarczy, aby istniało takie naturalne k , że przy każdym naturalnym l istnieją punkty $q \in R_n$ takie, że $\varrho(p, q) < 1/l$ oraz $|f(p) - f(q)| \geq 1/k$.*

Punkt, w którym funkcja nie jest ciągła, nazywa się *punktem nieciągłości* funkcji. Funkcja, która nie ma punktów nieciągłości, a więc funkcja ciągła w każdym punkcie przestrzeni R_n , nazywa się *funkcją ciągłą*.

(4.3) *Jeżeli funkcja f jest ciągła, to zbiór $\bigcup_{p \in R_n} [f(p) \geq a]$ jest zamknięty przy każdym rzeczywistym a .*

Niech $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ i przypuścimy, że $f(p_m) \geq a$, $m = 1, 2, \dots$; wtedy, na mocy ciągłości funkcji f , $\lim_{m \rightarrow \infty} f(p_m) = f(p) \geq a$, co należało okazać.

Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą w R_n . Oznaczmy przez A_k zbiór takich punktów $p \in R_n$, że dla każdego l istnieje punkt $q \in R_n$ spełniający warunki

$$(4.4) \quad \varrho(p, q) < \frac{1}{l} \quad \text{ i } \quad |f(p) - f(q)| \geq \frac{1}{k}.$$

(4.5) *Na to, aby punkt p był punktem nieciągłości funkcji f , potrzeba i wystarczy, aby przy pewnym k było $p \in A_k$.*

Wynika to od razu z (4.2).

$$(4.6) \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ jest zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji } f.$$

Wynika to z (4.5).

$$(4.7) \quad \text{Jeżeli } p_1, p_2, \dots \in A_k \text{ i } \lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p, \text{ to } p \in A_{2k}.$$

Niech l będzie dowolną liczbą naturalną, p_m zaś punktem rozważanego ciągu takim, że $\varrho(p, p_m) < 1/2l$; ponieważ $p_m \in A_k$, więc istnieje taki punkt q , że $\varrho(p_m, q) < 1/2l$ i $|f(p_m) - f(q)| \geq 1/k$. Z nierówności trójkąta wynika $\varrho(p, q) \leq \varrho(p, p_m) + \varrho(p_m, q) < 1/l$. Jeżeli teraz $|f(p) - f(p_m)| \geq 1/2k$, to ponieważ $\varrho(p, p_m) < 1/2l$, więc warunek (4.5) jest spełniony. Jeżeli jednak $|f(p) - f(p_m)| < 1/2k$, to z nierówności trójkąta (w tym wypadku dla metryki w R_1) $1/k \leq |f(p_m) - f(q)| \leq |f(p_m) - f(p)| + |f(p) - f(q)|$, a więc $|f(p) - f(q)| \geq 1/2k$, co dowodzi, że warunek (4.5) jest również spełniony, a ponieważ l było dowolne, więc $p \in A_{2k}$.

(4.8) *Zbiór punktów nieciągłości dowolnej funkcji f w przestrzeni R_n jest zbiorem F_σ .*

Dowód. Z (4.6) wynika, że należy tylko udowodnić, że zbiór $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ jest F_σ . Oznaczmy przez $\bar{A}_k$ zbiór wszystkich granic ciągów elementów z A_k . Mamy oczywiście $A_k \subset \bar{A}_k$ i $\bar{A}_k \subset A$ na podstawie (4.7), a więc z jednej strony $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$, z drugiej zaś strony $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k \subset A$ i ostatecznie $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$. Wykażemy, że każdy zbiór $\bar{A}_k$ jest zamknięty, przez co dowód twierdzenia będzie zakończony.

Niech $p_{lm} \in A_k$ dla $l, m = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{l \rightarrow \infty} p_{lm} = p_m$ i $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$.

Oznaczając przez X zbiór złożony ze wszystkich punktów p_{lm} , mamy $X \subset A_k$ i $\delta(p, X) = 0$; z (3.5) wynika, że istnieje ciąg elementów z X , a więc i z A_k , którego granicą jest p . Na podstawie określenia zbioru $\bar{A}_k$ mamy $p \in \bar{A}_k$, co należało okazać.

Niech $f_1, f_2, \dots$ będzie ciągiem funkcji w przestrzeni R_n . Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny do funkcji f* , jeżeli w każdym punkcie $p \in R_n$ mamy $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(p) = f(p)$; mówimy, że ciąg ten jest *jednostajnie zbieżny do funkcji f* , jeżeli $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(p) = f(p)$, i to jednostajnie względem $p \in R_n$, tzn. jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie naturalne m_ε , że dla $m > m_\varepsilon$ i każdego punktu $p \in R_n$ mamy $|f(p) - f_m(p)| < \varepsilon$. Czy

telnik łatwo udowodni, że zbiór wszystkich funkcji zarówno ze zwykłą, jak też i jednostajną zbieżnością jest przestrzenią $\mathcal{L}^*$. Różnica zasadnicza między tymi dwoma zbieżnościami wyraża się między innymi w tym, że

(4.10) *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $f_1, f_2, \dots$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f , to funkcja f jest ciągła,*

co dla zwykłej zbieżności nie zachodzi.

Dowód (4.10). Niech p będzie dowolnym punktem R_n . Z jednostajnej zbieżności ciągu $f_1, f_2, \dots$ wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie m , że $|f(q) - f_m(q)| < \varepsilon/3$ dla każdego $q \in R_n$. Z drugiej strony, ponieważ funkcja f_m jest ciągła, więc istnieje takie $\eta > 0$, że $|f_m(p) - f_m(q)| < \varepsilon/3$, jeśli $\varrho(p, q) < \eta$. Mamy tedy przy $\varrho(p, q) < \eta$

$$|f(p) - f_m(p)| < \varepsilon/3,$$

$$|f_m(p) - f_m(q)| < \varepsilon/3,$$

$$|f_m(q) - f(q)| < \varepsilon/3$$

i ostatecznie $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$, czyli funkcja f jest ciągła w punkcie p , a ponieważ p był dowolnym punktem, więc f jest ciągła w całej przestrzeni R_n , co należało okazać.

Czytelnik łatwo sam skonstruuje przykład ciągu funkcji ciągłych zbieżnych niejednostajnie do funkcji nieciągłej.

Na zakończenie zauważmy, że w rozważaniach tego paragrafu nie robiliśmy użytku z tego, że R_n jest przestrzenią kartezjańską, a tylko z tego, że jest przestrzenią metryczną. Wszystkie więc uzyskane tu wyniki stosują się do dowolnych przestrzeni metrycznych. Nie będziemy jednak robili w dalszym ciągu z tego użytku.

Rozdział I

Algebra Boole'a

§ 1. Uwagi wstępne, treść rozdziału

Znamy obecnie różne, nieraz mocno od siebie odbiegające sposoby wprowadzania pojęcia prawdopodobieństwa: teoria „klasyczna” w różnych odmianach, teorie aksjomatyczne: Bohlmann, Keynesa, Kołmogorowa, teoria „częstościowa” Misesa¹⁾ i inne. Porównanie tych sposobów prowadzi do następujących spostrzeżeń:

1° Prawdopodobieństwo bywa określane rozmaicie, zawsze jednak jest ono liczbą nieujemną, nie większą od jedności, przyporządkowaną pewnym przedmiotom.

2° Co do natury przedmiotów, którym zostaje przyporządkowane prawdopodobieństwo, panuje rozbieżność między poszczególnymi teoriami, w każdym jednak razie można uważać za ustalone, że przedmioty te (zdarzenia, zdania, zbiory, cechy) tworzą tak zwane *ciała Boole'a*, to znaczy określone są dla nich działania podlegające specjalnym prawom formalnym, mianowicie prawom tak zwanej *algebry Boole'a*, którą intuicyjnie określić można jako algebrę wyrazów: „nie”, „i” oraz „lub”.

Wobec tego podajemy w tym rozdziale zarys teorii ciał Boole'a, a więc: ich określenie przez postulaty (§ 2), elementarne twierdzenia algebry Boole'a (§§ 3 i 4), związek teorii ciał Boole'a z teorią zbiorów częściowo uporządkowanych (§ 5), określenie działań nieskończonych w ciałach Boole'a i prawa nimi rządzące (§ 6), zastosowa-

¹⁾ G. Bohlmann, *Lebensversicherungsmethodik*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil II, Leipzig 1900-1904, str. 857-917.

J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, London and New York 1921, II wyd., 1929.

A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik II.3 (1933).

R. Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Wien 1931.