

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY

KAZIMIERZ KURATOWSKI REDAKTOR NACZELNY  
KAROL BORSUK, BRONISŁAW KNASTER, STANISŁAW MAZUR,  
WACŁAW SIERPIŃSKI, HUGO STEINHAUS, WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI

TOM XXXI

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

02538  
[31-1]

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI

FORMES EXTÉRIEURES ET LEURS  
APPLICATIONS

VOLUME I

WARSZAWA 1954

02338

COPYRIGHT, 1954, by  
 PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
 WARSZAWA (Poland) Krakowskie Przedmieście 79

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
 in any form, by mimeograph or any other means,  
 without permission in writing from the publishers.



PRINTED IN POLAND

X-108/155  
 24.I.55  
 2000 10/11/55

## PRÉFACE

L'ouvrage dont je publie aujourd'hui la première Partie est la reproduction, avec plusieurs modifications et extensions, d'un cours professé à la Faculté des Sciences de l'Université de Wrocław. Ce volume a pour objet l'Algèbre des formes extérieures et ses diverses applications, en particulier l'application à la théorie du Groupe symplectique et à celle de l'Espace symplectique; le second volume, qui paraîtra prochainement, sera consacré à l'Analyse des formes extérieures différentielles.

Ce volume se compose de quatre chapitres. Au premier, après l'introduction concernant l'espace affine et les formes alternées (§ 1, 2), je présente les principaux théorèmes et notions de la théorie. J'y introduis (§ 3) les formes extérieures comme les symboles de certaines fonctions de plusieurs séries de variables, en définissant auparavant d'une manière formelle les notions de somme et du produit de ces symboles. Les propriétés de la somme et du produit ont été ensuite justifiées aux nos 11 et 12, où l'on trouve les définitions de la valeur d'une forme et du changement de variables. Je ne me suis pas servi de la notion d'anneau algébrique dans l'exposition de la théorie, la somme des formes extérieures de divers degrés n'ayant trouvé aucune application; il semble aussi impossible de définir d'une manière intrinsèque la valeur de telle somme. Dans les pages suivantes (§ 4) on trouve l'application des propositions générales à l'étude des formes du second degré qui jouent le rôle prépondérant dans les applications. Le dernier paragraphe de ce chapitre traite des formes-densités et des formes adjointes à une forme donnée.

Le second chapitre comprend la théorie des équations extérieures qui sont, comme on le sait, à la base de la résolution du problème de Pfaff dont l'étude sera donnée dans un chapitre du second volume.

Au troisième chapitre je considère des applications à la théorie du Groupe et de l'Espace symplectique. Après avoir donné les principales propriétés du groupe symplectique, j'étudie ici la théorie des variétés linéaires de l'espace symplectique et je complète la théorie des formes extérieures quadratiques en introduisant les notions de polynôme caractéristique et de nombres caractéristiques. Les résultats obtenus ici seront appliqués dans le second volume à la théorie des formes différentielles extérieures du second degré et permettront de résoudre le problème d'équivalence de telles formes.

Le Chapitre IV contient diverses applications. Au premier paragraphe je montre une méthode simple de démonstration des principaux théorèmes sur les déterminants en moyennant les formes extérieures; au second paragraphe je présente la théorie de la rotation dans les espaces euclidien et symplectique et enfin au dernier — j'envisage l'application de la théorie des formes extérieures à la théorie des complexes linéaires. L'exposé de la théorie que je donne dans ce volume suppose la connaissance préalable des éléments du Calcul tensoriel.

L'index bibliographique placé à la fin du volume se borne aux ouvrages et mémoires les plus importants qui se rattachent aux objets traités; je me propose de donner dans le second volume une bibliographie détaillée de la théorie des formes extérieures.

Władysław Śtebodziński

## CHAPITRE I

### FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES FORMES EXTÉRIEURES

#### § 1. Préliminaires

**1. Corps de base.** Dans les considérations qui suivent nous prendrons comme *corps de base*, sauf avis contraire, le corps des nombres réels; cela veut dire que les variables et les coefficients des formes que nous nous allons envisager prennent des valeurs réelles. Mais il faut remarquer que presque tous les raisonnements qui suivent restent valables si l'on remplace le corps des nombres réels par celui des nombres complexes.

**2. Espace affine.** Nous désignerons constamment par  $A_n$  l'espace affine à  $n$  dimensions, rapporté à un repère  $R_n$  formé d'un point  $O$  comme origine et de  $n$  vecteurs indépendants  $X_\alpha$ <sup>1)</sup>. Soient  $x^\alpha$  les coordonnées d'un point arbitraire  $M$  de  $A_n$  par rapport à  $R_n$ . Si l'on passe du repère  $R_n(0, X_\alpha)$  à un autre  $\bar{R}_n(0, \bar{X}_\alpha)$  à l'aide d'une substitution linéaire

$$(1) \quad \bar{X}_\alpha = P_\alpha^\beta X_\beta$$

de déterminant  $\Delta = |P_\alpha^\beta|$  différent de zéro, les coordonnées du point  $M$  seront transformées d'après les formules

$$(2) \quad x^\alpha = P_\alpha^\beta \bar{x}^\beta;$$

la transformation inverse se fera par les égalités

$$(3) \quad \bar{x}^\alpha = Q_\alpha^\beta x^\beta,$$

dont les coefficients satisfont aux relations

$$(4) \quad P_\alpha^\beta Q_\beta^\lambda = P_\beta^\lambda Q_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\lambda,$$

$\delta_\alpha^\lambda$  désignant les symboles de Kronecker

$$\delta_\alpha^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha = \lambda, \\ 0 & \text{pour } \alpha \neq \lambda. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Dans tout le livre les indices grecs parcourent les valeurs 1, 2, ..., n.

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] P. Bidal et G. de Rham, *Les formes différentielles harmoniques*, Comm. Math. Helv. 19 (1946/7), p. 1-49.
- [2] E. Cartan, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 16 (1899), p. 239-332.
- [3] — *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris 1922.
- [4] — *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, Paris 1922.
- [5] — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris 1945.
- [6] — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, deuxième éd., Paris 1946.
- [7] J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, Act. Sc. et Ind. 1040 (1948).
- [8] (S. P. Finikoff) С. П. Фиников, *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*, Москва-Ленинград 1948.
- [9] G. Frobenius, *Über das Pfaffsche Problem*, Journal f. Math. 82 (1879), p. 230-315.
- [10] E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris 1922.
- [11] H. Grassmann, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 Bde, Leipzig 1894-1911.
- [12] Th.-H. Lepage, *Sur certaines congruences de formes alternées*, Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège 15 (1946), p. 21-31.
- [13] T. Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Roma 1925.
- [14] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3 Absch., Leipzig 1930.
- [15] G. Pary, *Sur la divisibilité des formes alternées par des formes quadratiques régulières dans un espace à  $2n$  dimensions*, Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège 16 (1847), p. 24-30.
- [16] (P. K. Rachevski) П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, Москва-Ленинград 1947.
- [17] J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin 1924.
- [18] — *Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen  $p$ -Vektoren und  $W$ - $p$ -Vektoren und den korrespondierenden Dichten*, Proc. Kön. Akad. v. Wet. Amsterdam 41 (1938), p. 709-716.
- [19] — and D. v. Dantzig, *On Ordinary Quantities and  $W$ -quantities*, Comp. Math. 7 (1940), p. 447-474.
- [20] — and W. v. d. Kulk, *Pfaffs Problem and its Generalizations*, Oxford 1949.
- [21] (N. G. Tchébotareff) Н. Г. Чеботарев, *Введение в теорию алгебр*, Москва — Ленинград 1949.
- [22] J. M. Thomas, *Differential systems*, Amer. Math. Soc. Publ. 21 (1937).
- [23] E. v. Weber, *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig 1900.
- [24] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie*, Groningen 1923.

## INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

- Adjointe-e*, -s 50.
- Agrégat de Pfaff* 34.
- Alternation des indices* 3.
- Base de la variété de complexes* 142.
- Bivecteur fondamental de l'espace symplectique* 75, — simple 28.
- Caractères d'un système d'équations extérieures* 65.
- Carré extérieur* 11.
- Classe des formes extérieures (symboliques)* 9, — d'un système d'équations extérieures 69.
- Complexes analytiques* 142, — dextrorsum 147, — linéaire 142, — sinistrorsum 147, — spécial 143.
- Complexes en involution* 142, — linéairement indépendants 142.
- Composantes covariantes et contrevariantes* 2.
- Contrevariant  $W$ - $p$ -vecteur* 43.
- Corps de base* 1.
- Covariant  $W$ - $n$ -vecteur* 43.
- Degré d'une forme densité* 37.
- Directrices d'un hyperplan* 88.
- Diviseur d'une forme extérieure* 24.
- Divisibilité des formes extérieures* 24.
- $E_p$*  41.
- $\begin{matrix} +1 & -1 \\ \mathbb{E} & \mathbb{E} \end{matrix}$  42.
- $\mathbb{E}_p$  42.
- Élément caractéristique d'un système d'équations extérieures* 67, — ordinaire 63, — plan 3, — plan contenu dans un autre élément 5, — plan de dimension zéro 4, — polaire d'un élément plan 30, 61, — singulier 63.
- Éléments en involution par rapport à un système d'équations extérieures* 60.
- Équation caractéristique d'une forme quadratique extérieure* 124, — extérieure 51.
- Équivalents systèmes d'équations extérieures* 58.
- Espace symplectique* 75, — dégénéré 91.
- Espaces dualistiques* 2.
- Faisceau de complexes* 142, — linéaire d'éléments plans 6.
- Forme alternée* 5, — adjointe 43, — canonique 18, — densité 37, — extérieure (symbolique) 10, — extérieure régulière 21, — extérieure singulière 21, — fondamentale de l'espace symplectique 75, — induite 92, — linéaire 10, — mixte 14, — nulle 10, — simple 26, simplifiée 12.
- Formes extérieures égales* 10, — linéaires indépendantes 22.
- Genre d'un système d'équations extérieures* 64.
- Groupe fondamental de l'espace symplectique* 83, — symplectique 79.
- Hyperplan polaire d'un point relativement à un complexe de droites* 146.
- Indéterminée* 9.
- Matrice polaire d'un élément plan* 61, — conjuguée 79.
- Monôme extérieur (grassmannien)* 9, — nul 9, facteur de  $-$  9, coefficient de  $-$  9.
- Monômes semblables* 9.
- Nombres caractéristiques d'une forme quadratique extérieure* 124.
- Ordre d'un complexe linéaire* 142.
- Poids d'une forme densité* 37.
- Point d'appui d'un élément plan* 3.
- Pôle d'un hyperplan relativement à un complexe de droites* 146.

- Polynôme caractéristique* d'une forme quadratique extérieure 122.  
*Produit* extérieur 10, — des formes extérieures 11, — des groupes 111, — scalaire dans l'espace symplectique 77.  
*Rang* d'un complexe de droites 146, — d'un ensemble de formes extérieures 22, — d'une forme extérieure 20.  
*Règle* de Kramer 136.  
*Repère* symplectique 76.  
*Rotation* symplectique 139.  
*Solution* d'une équation extérieure 51, — ordinaire 64, — régulière 64, — singulière 64.  
*Somme* des formes extérieures 10.  
*Sous-espaces* conjugués relativement à un complexe 147.  
*Suite* complémentaire des indices 44, — régulière des solutions 64.  
*Système* associé à une forme extérieure 20, — associé à un ensemble de formes 22, — caractéristique 69, — d'équations de première espèce 71.  
*Systèmes* dualistiques 40.  
*Tenseur* antisymétrique 3, — covariant et contrevariant 2, — de Levi-Civita 43.  
*Théorème* de Laplace 135.  
*Transformation* symplectique involutive 81.  
*Transvections* associées à un hyperplan 94, — symplectiques 92, — symplectiques généralisées 95.  
*Valeur* de la forme extérieure 14, — du monôme extérieur 10.  
*Variable* 9.  
*Variables* dualistiques 40.  
*Variété* involutive 84, — polaire d'une variété linéaire 87, — totalement isotrope 84.  
*Variétés* dualistiques 40.  
*Vecteur* covariant  $W$ - $n$  43, — distingué d'une variété linéaire 86.  
*Vecteurs* de base d'une variété linéaire 83, — en involution 29, 84.  
*W*-forme 47.  
*W*- $n$ -vecteur 43.  
*W*-scalaire 43.



TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	V
CHAPITRE I. FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES FORMES EXTÉRIEURES	
§ 1. Préliminaires . . . . .	1
1. Corps de base. 2. Espace affiné.	
§ 2. Eléments plans. Formes alternées . . . . .	3
3. Eléments plans. 4. Formes alternées. 5. Faisceaux d'éléments plans.	
§ 3. Formes extérieures . . . . .	8
6. Monôme extérieur. 7. Forme extérieure (définition). 8. Somme des formes extérieures. 9. Produit extérieur. 10. Forme simplifiée d'une expression extérieure. 11. Valeur d'une forme extérieure. 12. Changement de variables. 13. Dérivées d'une forme extérieure. 14. Rang d'une forme extérieure. 15. Formes linéaires. 16. Divisibilité des formes extérieures. 17. Applications.	
§ 4. Formes quadratiques extérieures . . . . .	29
18. Rang d'une forme quadratique extérieure. 19. Vecteurs en involution. 20. Forme canonique. 21. Puissances d'une forme quadratique extérieure. 22. Agrégats de Pfaff. 23. Divisibilité par les formes quadratiques extérieures.	
§ 5. Formes-densités. Formes adjointes . . . . .	37
24. Formes-densités. 25. Systèmes dualistiques de variables. 26. Les grands $E_p, E, E$ et $\tilde{E}$ . 27. Formes adjointes.	
CHAPITRE II. ÉQUATIONS EXTÉRIEURES . . . . .	51
28. Définition. 29. Critères pour les solutions. 30. Systèmes d'équations extérieures. 31. Détermination des solutions. 32. Caractères et genre d'un système d'équations extérieures. 33. Eléments caractéristiques et classe d'un système. 34. Systèmes de première espèce.	
CHAPITRE III. GROUPE ET ESPACE SYMPLECTIQUE . . . . .	73
§ 1. Généralités . . . . .	
35. Définition de l'espace symplectique. 36. Repère symplectique. 37. Opérations sur les tenseurs de l'espace $G_n$ . 38. Groupe symplectique. 39. Variétés linéaires de l'espace symplectique. 40. Espaces symplectiques dégénérés.	
§ 2. Propriétés du groupe symplectique . . . . .	92
41. Transvections. 42. Forme réduite d'une transformation symplectique. 43. Transformations infinitésimales du groupe symplectique. 44. Le groupe symplectique et le groupe orthogonal. 45. Formes extérieures invariantes par le groupe symplectique.	

Table des matières.	154
§ 3. Invariants du groupe symplectique . . . . .	118
46. Systèmes de vecteurs. 47. Polynôme caractéristique d'une forme quadratique extérieure. 48. Réduction d'une forme quadratique extérieure au moyen des transformations du groupe symplectique.	
CHAPITRE IV. DIVERSES APPLICATIONS	
§ 1. Déterminants . . . . .	133
49. Déterminants.	
§ 2. Rotations infinitésimales . . . . .	136
50. Rotations dans l'espace euclidien. 51. Rotations symplectiques.	
§ 3. Complexes linéaires . . . . .	141
52. Généralités. 53. Complexes spéciaux. 54. Complexes de droites. 55. Complexes de droites de l'espace projectif à trois dimensions.	
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	150
INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES . . . . .	151



Państwowe Wydawnictwo  
Naukowe  
Wydanie pierwsze. Nakład  
1425 egz. Ark. wyd. 10,5,  
druk. 9/16. Papier druk.  
sat. kl. V, 70 g, 70×100.  
Oddano do składu 21.  
VIII 53. Podp. do druku  
12. X 54 r. Drukukończono  
w listopadzie 1954 roku.  
Zamówienie nr. 608/53  
P-4-34803. Cena zł. 24,60.  
Wrocławska Drukarnia  
Naukowa