On voit sur les dernières formules que, dans le cas considéré ici, deux formes quadratiques extérieures du même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement équivalentes par rapport au groupe symplectique.

Exemple. Nous allons appliquer les résultats obtenus dans ce numéro au cas $n=4$ $(r=2)$. Soit

$$\Phi=a_{13}[x^1x^2]+a_{13}[x^1x^3]+a_{14}[x^1x^4]+a_{23}[x^2x^3]+a_{24}[x^2x^4]+a_{34}[x^3x^4];$$

on a

$$[\Phi^2]=2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})[x^1x^2x^3x^4]$$

tandis que

$$\Omega=[x^1x^3]+[x^2x^4] \qquad \text{et} \qquad [\Omega^2]=-2[x^1x^2x^3x^4].$$

Le carré extérieur de la forme $\Psi=\Phi-S\Omega$ est égal à l'expression

$$\{(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})+(a_{13}+a_{24})S-S^2\}[x^1x^2x^3x^4].$$

L'équation caractéristique de Φ peut donc s'écrire

$$S^2-J_1S-J_2=0, \tag{21}$$

où l'on a posé

$$J_1=a_{13}+a_{24}, \qquad J_2=a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23};$$

ces deux grandeurs sont des invariants rationnels de Φ.

Si le discriminant $D=J_1^2+4J_2$ de l'équation (21) est positif, la forme Φ peut être réduite au moyen d'une transformation symplectique à l'expression

$$S_1[x^1x^3]+S_2[x^2x^4];$$

si $D<0$ et si l'on pose $S_1=a+bi$, $S_2=a-bi$, la forme canonique de Φ peut être écrite comme suit:

$$a\{[x^1x^3]+[x^2x^4]\}+b\{[x^1x^2]-[x^3x^4]\}.$$

Si enfin $D=0$, Φ peut être réduit à l'expression

$$S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^4]\}+a_{32}[x^3x^2].$$

Remarquons que les deux formes $S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^1]\}+a_{32}[x^3x^2]$ et $S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^1]\}$ ont le même polynôme caractéristique $-(S-S_1)^2$ néanmoins elles ne sont pas équivalentes par rapport au groupe symplectique.

CHAPITRE IV

DIVERSES APPLICATIONS

§ 1. Déterminants

49. Déterminants. La théorie des formes extérieures va nous permettre de démontrer d'une façon très simple principales propriétés des déterminants[20]. Les raisonnements dont nous ferons usage pour ce but ne sont basés que sur les notions fondamentales de la théorie des formes extérieures exposées aux n^os 6-9.

Dans ce but imaginons deux séries des variables x^ϱ et y_ϱ et les formes extérieures construites respectivement avec x^ϱ et y_ϱ [21]. Nous allons aussi considérer les produits et les sommes des produits des formes de ces deux classes, en supposant qu'ils obéissent à des lois ordinaires du calcul (cf. n° 25).

Prenons maintenant deux systèmes de formes linéaires

$$\omega^\varkappa=a^\varkappa_\varrho x^\varrho, \qquad \varphi_\varkappa=a^\varrho_\varkappa y_\varrho \tag{1}$$

et effectuons la somme $\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa$; on aura

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=a^\varkappa_\varrho x^\varrho\cdot y_\varkappa$$

ou

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=a^\varkappa_\varrho y_\varkappa\cdot x^\varrho.$$

D'après la seconde des formules (1) ceci peut s'écrire comme suit

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=\varphi_\varrho\cdot x^\varrho.$$

En évaluant la $n^{\text{ième}}$ puissance de deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^n]\cdot[y_1y_2\dots y_n]=[\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n]\cdot[x^1x^2\dots x^n]. \tag{2}$$

Si l'on développe les deux produits extérieurs $[\omega^1\omega^2\dots\omega^n]$ et $[\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n]$, on obtient

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^n]=\Delta[x^1x^2\dots x^n], \qquad [\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n]=\Delta^*[y_1y_2\dots y_n], \tag{3}$$

[20]) Cf. N. G. Tchébotareff [21], p. 12.

[21]) Nous supposons comme dans tout ce qui suit que les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \dots, n$.

$\varDelta$ et $\varDelta^*$ désignant respectivement le déterminant de la matrice

$$M=\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{matrix} \right\|$$

et celui de la matrice transposée de M. Si l'on porte les expressions (3) dans la relation (2), il en résulte l'égalité

$$\varDelta=\varDelta^*.$$

Nous avons ainsi démontré que *la valeur du déterminant ne change pas, si l'on échange ses lignes avec ses colonnes.*

Si l'on permute dans le produit extérieur $[\omega^1\dots\omega^i\dots\omega^j\dots\omega^n]$ deux facteurs ω^i et ω^j, on aura comme on sait

$$[\omega^1\dots\omega^i\dots\omega^j\dots\omega^n]=-[\omega^1\dots\omega^j\dots\omega^i\dots\omega^n];$$

en se basant sur cette relation et sur la première des formules (3), on est conduit immédiatement au *théorème sur la permutation de deux lignes d'un déterminant.*

De même de l'identité

$$[\omega^1\dots(\omega^i+h\omega^j)\dots\omega^j\dots\omega^n]=[\omega^1\dots\omega^i\dots\omega^j\dots\omega^n],$$

où h est un paramètre arbitraire, on déduit la *propriété du déterminant de conserver sa valeur, si aux éléments d'une ligne on ajoute les éléments d'une autre multipliés par un facteur arbitraire.*

Pour obtenir le *théorème sur la multiplication des déterminants*, effectuons sur les formes $\omega^\varkappa$ la substitution de matrice

$$\left\| \begin{matrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n \end{matrix} \right\|,$$

dont le déterminant soit désigné par $\varDelta_1$. On obtient ainsi n nouvelles formes

(4) $$\tau^\varkappa=b_\varrho^\varkappa\omega^\varrho,$$

dont le produit extérieur est donné par la formule

$$[\tau^1\tau^2\dots\tau^n]=\varDelta_1[\omega^1\omega^2\dots\omega^n],$$

qui, d'après la première des égalités (3), peut être mise sous la forme

(5) $$[\tau^1\tau^2\dots\tau^n]=\varDelta\varDelta_1[x^1x^2\dots x^n].$$

D'autre part, en remplaçant dans l'égalité (4) les symboles ω^ϱ par leurs expressions (1), on arrive à la formule

$$\tau^\varkappa=c_\lambda^\varkappa x^\lambda$$

dont les coefficients sont donnés par les formules

$$c_\lambda^\varkappa=b_\varrho^\varkappa a_\lambda^\varrho.$$

Donc en développant le produit $[\tau^1\tau^2\dots\tau^n]$ on trouve

(6) $$[\tau^1\tau^2\dots\tau^n]=D[x^1x^2\dots x^n],$$

où

$$D=|c_\lambda^\varkappa|.$$

Le rapprochement des égalités (5) et (6) conduit à la relation

$$D=\varDelta\cdot\varDelta_1,$$

ce qui exprime la loi de multiplication des déterminants.

Pour démontrer le *théorème de Laplace*, nous partirons de l'identité

(7) $$[\omega^1\omega^2\dots\omega^n]=[[\omega^1\dots\omega^h][\omega^{h+1}\dots\omega^n]].$$

Si l'on développe les trois produits qui y figurent, on obtient respectivement

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^n]=\varDelta[x^1x^2\dots x^n],$$

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^h]=a^1_{[\varrho_1}a^2_{\varrho_2}\dots a^h_{\varrho_h]}\cdot[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_h}]$$

et

$$[\omega^{h+1}\omega^{h+2}\dots\omega^n]=a^{h+1}_{[\varrho_{h+1}}a^{h+2}_{\varrho_{h+2}}\dots a^n_{\varrho_n]}\cdot[x^{\varrho_{h+1}}x^{\varrho_{h+2}}\dots x^{\varrho_n}].$$

En se servant de ces formules, l'identité (7) pourra s'écrire comme suit

$$\varDelta[x^1x^2\dots x^n]=a^1_{[\varrho_1}\dots a^h_{\varrho_h]}a^{h+1}_{[\varrho_{h+1}}\dots a^n_{\varrho_n]}[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_n}].$$

Remarquons encore que le second membre de cette relation peut être mis sous la forme

$$[x^1x^2\dots x^n]\cdot h!(n-h)!\sum^n\pm a^1_{[\varrho_1}\dots a^h_{\varrho_h]}a^{h+1}_{[\varrho_{h+1}}\dots a^n_{\varrho_n]},$$

où l'on doit étendre la sommation à toutes les permutations des nombres $1,2,\dots,n$, en affectant chaque terme du signe $+$ ou $-$ selon la parité de la permutation.

Rappelons maintenant que les expressions $h!a^1_{[\varrho_1}\dots a^h_{\varrho_h]}$ sont identiques avec les mineurs du $h^{\text{ième}}$ degré déduits de h premières lignes du déterminant

$$\left| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{matrix} \right|$$

et que les expressions

$$a^{h+1}_{[\varrho_{h+1}}\dots a^n_{\varrho_n]}$$

jouent un rôle analogue relativement aux $n-h$ dernières lignes. Cette remarque achève la démonstration du Théorème de Laplace.

L'emploi des formes extérieures nous permet aussi de démontrer aisément la *règle de Kramer*. Considérons, dans ce but, le système de n équations

$$a_\varrho^1 y_1 + a_\varrho^2 y_2 + \ldots + a_\varrho^n y_n = a_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

aux inconnues $y_\varkappa$ et un système de n indéterminées auxiliaires $x^\varkappa$. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (7) par x^ϱ et que l'on somme par rapport à ϱ, on sera conduit, en ayant égard à la première des égalités (1), à l'égalité suivante:

$$\omega^1 y_1 + \omega^2 y_2 + \ldots + \omega^n y_n = \omega, \tag{8}$$

où l'on a posé

$$\omega = a_\varrho x^\varrho. \tag{9}$$

Multiplions les deux membres de la relation (8) extérieurement par le produit $[\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^{\varkappa-1} \omega^{\varkappa+1} \ldots \omega^n]$; il viendra

$$[\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^n] y_\varkappa = [\omega^1 \ldots \omega^{\varkappa-1} \omega\, \omega^{\varkappa+1} \ldots \omega^n],$$

les coefficients de toutes les inconnues différentes de $y_\varkappa$ étant nuls. En tenant compte de la première des formules (3) et en se servant d'une formule analogue pour le produit $[\omega^1 \ldots \omega^{\varkappa-1} \omega \omega^{\varkappa+1} \ldots \omega^n]$, où ω doit être remplacé par l'expression (9), on obtient précisément les formules de Kramer.

§ 2. Rotations infinitésimales

50. Rotations dans l'espace euclidien. La théorie des formes quadratiques extérieures, et en particulier le théorème fondamental de cette théorie (Théorème 1 du nº 18) trouvent une application simple à l'étude des rotations instantanées d'un corps solide dans l'espace euclidien.

Pour le montrer désignons par $x^\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées de l'espace euclidien E_n rapporté à un repère cartésien R_n formé d'un point O comme origine et de n vecteurs indépendants $X_\varkappa$[22]). Supposons que tout l'espace E_n est animé d'une rotation rigide autour de l'origine des coordonnées O et considérons deux de ses points $M(x^\varkappa)$ et $M'(x'^\varkappa)$. La distance de ces points est donnés par la formule

$$MM'^2 = g_{\varkappa\lambda}(x^\varkappa - x'^\varkappa)(x^\lambda - x'^\lambda),$$

$g_{\varkappa\lambda}$ désignant comme d'habitude les composantes du tenseur fondamental de E_n; MM' étant par hypothèse indépendant du temps t, on en déduit par différentiation par rapport à t la relation

[22]) Nous désignerons dans ce numéro par n un nombre qui peut être pair ou impair.

$$g_{\varkappa\lambda}(x^\varkappa - x'^\varkappa)\left(\frac{dx^\lambda}{dt} - \frac{dx'^\lambda}{dt}\right) = 0.$$

Si l'on y pose $V^\lambda = dx^\lambda/dt$ et $V'^\lambda = dx'^\lambda/dt$, on aura

$$g_{\varkappa\lambda}(x^\varkappa - x'^\varkappa)(V^\lambda - V'^\lambda) = 0$$

ou

$$(x^\varkappa - x'^\varkappa)(V_\varkappa - V'_\varkappa) = 0, \tag{10}$$

$V_\varkappa = g_{\varkappa\lambda} V^\lambda$ et $V'_\varkappa = g_{\varkappa\lambda} V'^\lambda$ désignant respectivement les composantes covariantes des vitesses de M et M'. D'autre part les longueurs de OM et OM', déterminées par les formules

$$OM^2 = g_{\varkappa\lambda} x^\varkappa x^\lambda \quad \text{et} \quad OM'^2 = g_{\varkappa\lambda} x'^\varkappa x'^\lambda,$$

devant aussi être indépendantes de t, le mouvement étant une rotation autour de O, on en déduit par un calcul analogue au précédent, les relations suivantes:

$$V_\varkappa x^\varkappa = 0, \qquad V'_\varkappa x'^\varkappa = 0. \tag{11}$$

En les rapprochant de l'égalité (10), en trouve

$$V_\varkappa x'^\varkappa + V'_\varkappa x^\varkappa = 0.$$

Si l'on prend successivement comme M', les extrémités des vecteurs $X_\varkappa$ du repère R_n, on conclut de la dernière relation que les composantes V_λ sont des formes linéaires des variables x^λ aux coefficients indépendants du temps t:

$$V_\varkappa = a_{\varkappa\lambda} x^\lambda. \tag{12}$$

En substituant ces expressions dans la première des égalités (11), on est conduit à la relation

$$a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa x^\lambda = 0.$$

Celle-ci devant être identiquement satisfaite, on en conclut que les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ sont antisymétriques:

$$a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0.$$

Nous voyons ainsi que toute rotation instantanée de l'espace E_n est définie par un tenseur antisymétrique $A = \{a_{\varkappa\lambda}\}$. Remarquons encore que la montée des indices dans la formule (12) permet l'écrire comme suit

$$V^\varkappa = a^{\varkappa\lambda} x_\lambda, \tag{13}$$

$a^{\varkappa\lambda}$ étant les composantes contrevariantes de A et

$$x_\lambda = g_{\lambda\varrho} x^\varrho$$

les coordonnées covariantes de M.

Au tenseur A on peut associer la forme quadratique extérieure

$$\Phi = \frac{1}{2} a^{\varkappa\lambda} [x_\varkappa x_\lambda] \tag{14}$$

dont le rang sera désigné par $2r$; nous l'appliquerons pour étudier de plus près les propriétés des rotations. Remarquons d'abord que si l'on effectue sur les coordonnées une substitution linéaire, les coordonnées covariantes $x_\varkappa$ se changeront aussi par une transformation linéaire. Or, nous savons que cette transformation peut être choisie de manière que Φ se réduise à la forme canonique

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x_i x_{r+i}]$$

et que, par suite, les composantes contrevariantes du tenseur A prennent les valeurs

$$a^{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda = r+\varkappa, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda-\varkappa| \neq r. \end{cases}$$

Dans le système des coordonnées ainsi adopté, les formules (13) pour les composantes contrevariantes de la vitesse instantanée de M prendront la forme

$$V^i = x_{r+i}, \qquad V^{r+i} = -x_i, \qquad V^p = 0 \tag{15}$$
$$(i=1,2,\ldots,r; \quad p = 2r+1, 2r+2, \ldots, n).$$

Il résulte de ces formules que tous les points d'un $(n-2r)$-plan passant par l'origine des coordonnées et défini par $2r$ équations linéaires

$$x_i = g_{i\lambda} x^\lambda = 0, \qquad x_{r+i} = g_{r+i,\lambda} x^\lambda = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

ont des vitesses nulles.

Nous constatons ainsi que dans une rotation de l'espace E_n autour d'un point fixe, dans chaque moment la rotation instantanée se fait autour d'un m-plan dont la dimension est déterminée par une forme quadratique extérieure. Si la dimension de E_n est un nombre impair, il existe toujours une variété linéaire dont les points sont invariables; la dimension de cette variété est au moins égale à 1. Si n est pair et si le rang de Φ est égal à n, il y a seulement un point de vitesse nulle.

51. Rotations symplectiques. L'espace symplectique admet un mouvement continu qui a de l'analogie avec la rotation autour d'un point fixe dans l'espace euclidien et auquel nous consacrons ce numéro.

Soit G_n $(n=2r)$ l'espace symplectique rapporté à un repère affine quelconque R_n, composé d'un point O comme origine et de n vecteurs indépendants X_n, et doué de la forme fondamentale

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [x^\varkappa x^\lambda].$$

Supposons que G_n est animé d'un mouvement continu ayant l'origine O pour point fixe. Considérons deux points arbitraires $M(x^\varkappa)$ et $M'(x'^\varkappa)$ de G_n et la valeur de la forme fondamentale pour les deux vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$; on aura (cf. n^0 11)

$$\Phi[\overline{OM}, \overline{OM'}] = a_{\varkappa\lambda} x^{[\varkappa} x'^{\lambda]}$$

ou

$$\Phi[\overline{OM}, \overline{OM'}] = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} (x^\varkappa x'^\lambda - x^\lambda x'^\varkappa). \tag{16}$$

Nous dirons que le mouvement considéré est une *rotation symplectique* autour de O, si la valeur $\Phi[\overline{OM}, \overline{OM'}]$ est indépendante du temps t. En dérivant par rapport à t les deux membres, de l'égalité (16), on trouve la condition suivante pour que le mouvement jouisse de la propriété demandée:

$$a_{\varkappa\lambda} \frac{dx^\varkappa}{dt} x'^\lambda + a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa \frac{dx'^\lambda}{dt} - a_{\varkappa\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} x'^\varkappa - a_{\varkappa\lambda} x^\lambda \frac{dx'^\varkappa}{dt} = 0.$$

En y changeant le rôle des indices $\varkappa$ et λ dans le deuxième et dans le troisième terme du premier membre, on en déduit la relation

$$a_{\varkappa\lambda} \frac{dx^\varkappa}{dt} x'^\lambda - a_{\varkappa\lambda} \frac{dx'^\varkappa}{dt} x^\lambda = 0.$$

En désignant par $V^\varkappa$ et $V'^\varkappa$ les composantes contrevariantes des vitesses de deux points ($V^\varkappa = dx^\varkappa/dt, V'^\varkappa = dx'^\varkappa/dt$), on ramène la condition trouvée à la forme

$$a_{\varkappa\lambda} V^\varkappa x'^\lambda = a_{\varkappa\lambda} V'^\varkappa x^\lambda.$$

L'abbaissement des indices au moyen des formules

$$a_{\varkappa\lambda} V^\varkappa = V_\lambda \qquad \text{et} \qquad a_{\varkappa\lambda} V'^\varkappa = V'_\lambda$$

(cf. n^0 31, équation (10)) conduit finalement à la relation

$$V_\lambda x'^\lambda = V'_\lambda x^\lambda. \tag{17}$$

En prenant pour M' successivement les extrémités des vecteurs $X_\varkappa$ du repère R_n, on en conclut que les composantes covariantes de la vitesse de M sont des expressions linéaires des coordonnées de M à coefficients indépendants du temps. On peut donc poser

$$V_\lambda = h_{\lambda\varrho} x^\varrho, \tag{18}$$

$h_{\lambda\varrho}$ désignant des constantes.

La substitution de ces expressions et des expressions analogues pour les composantes V'_λ dans la relation (17) nous fournit l'égalité suivante:

$$h_{\lambda\varrho} x^\varrho x'^\lambda = h_{\lambda\varrho} x'^\varrho x^\lambda$$

ou, si l'on change le rôle des indices λ et ϱ dans le second membre,

$$(h_{\lambda\varrho} - h_{\varrho\lambda}) x^\varrho x'^\lambda = 0.$$

Cette condition devant être identiquement satisfaite, il en résulte que les coefficients $h_{\lambda\varrho}$ dans la formule (18) doivent être symétriques: $h_{\lambda\varrho} = h_{\varrho\lambda}$.

La montée des indices dans l'égalité (18) donne de même

$$V^\lambda = -h^{\lambda\varrho} x_\varrho, \tag{19}$$

où l'on a introduit les coordonnées covariantes x_ϱ de M en posant

$$x_\varrho = a_{\varrho\sigma} x^\sigma; \tag{20}$$

remarquons que les nouveaux coefficients $h^{\lambda\varrho}$ sont aussi symétriques.

Nous voyons ainsi que la rotation symplectique instantanée est représentée par un tenseur symétrique de composantes covariantes (contrevariantes) $h_{\lambda\varrho}$ $(h^{\lambda\varrho})$. A ce tenseur correspond la forme quadratique ordinaire

$$F = h^{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

qui, à même titre que le tenseur $\{h_{\lambda\mu}\}$, peut servir pour représenter la rotation symplectique instantanée.

Or, on sait qu'une transformation linéaire des coordonnées x_λ permet de réduire F à la forme canonique

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1),$$

si r est son rang. En adoptant ce système des coordonnées, on aura

$$h^{ii} = \varepsilon_i, \quad h^{jj} = 0, \quad h^{\lambda\mu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = r+1, r+2, \ldots, n;\ \lambda \neq \mu).$$

En se raportant à la formule (19) on est conduit aux égalités suivantes:

$$V^i = -\varepsilon_i x_i, \qquad V^j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = r+1, r+2, \ldots, n).$$

On en conclut que les points d'un $(n-r)$-plan passant par le point O et défini par les équations linéaires

$$X_i = a_{i\sigma} x^\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ont tous des vitesses nulles; nous dirons que la rotation symplectique instantanée se fait autour de ce $(n-r)$-plan, dont la dimension est, comme on le voit, déterminée par le rang de la forme F. Si $r = n$, ce $(n-r)$-plan se réduit au point O.

Exemple. Si $n = 4$, il y a quatre cas à distinguer:

1° si le rang r de F est égal à 4, la rotation se fait autour de O;

2° si $r = 3$, et si l'on suppose, en conservant les notations adoptées ci-dessus, $h^{44} = 0$, la rotation admet un axe défini par les équations

$$a_{1\varrho} x^\varrho = 0, \qquad a_{2\varrho} x^\varrho = 0, \qquad a_{3\varrho} x^\varrho = 0;$$

3° si $r = 2$, et si l'on suppose $h^{33} = h^{44} = 0$, il y a une rotation autour du plan

$$a_{1\varrho} x^\varrho = 0, \qquad a_{2\varrho} x^\varrho = 0;$$

4° si, enfin, $r = 3$, et si l'on suppose $h^{22} = h^{33} = h^{44} = 0$, la rotation admet un hyperplan dont les points ont des vitesses nulles; l'équation de cet hyperplan a la forme

$$a_{1\varrho} x^\varrho = 0.$$

§ 3. Complexes linéaires

52. Généralités. Aux chapitres précédents nous nous sommes servis des notions de l'espace affine E_n pour définir la valeur d'une forme extérieure ou les solutions d'une équation extérieure. Or, à l'espace affine à n dimensions, rapporté à un repère d'origine O, on peut lier un espace projectif P_{n-1} à $n-1$ dimensions, en faisant correspondre à une droite de E_n issue de O, un point de l'espace P_{n-1}; si les équations $x^i = \zeta^i t$ représentent une telle droite, les coefficients ζ^i seront les coordonnées d'un point de P_{n-1}. Cette remarque nous permettra d'appliquer la théorie des formes extérieures à l'étude des propriétés des complexes de l'espace projectif, si l'on fait des changements convenables dans les énoncés des définitions et des théorèmes aux chapitres I et II.

Dans ce but désignons par $x^\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées homogènes d'un point arbitraire de l'espace projectif P_{n-1} et par $y_\varkappa$ les variables dualistiques (cf. n° 25) qui jouent maintenant le rôle des coordonnées tangentielles de P_{n-1}, et supposons que l'on se donne p points linéairement indépendants de P_{n-1}: $M_i(x_i^\varkappa)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; ceux-ci déterminent dans P_{n-1} un $(p-1)$-plan P_{p-1}, dont les coordonnées plückeriennes sont proportionnelles aux expressions

$$x^{\varkappa_1}_{[1}x^{\varkappa_2}_{2}\dots x^{\varkappa_p}_{p]}.$$

Une relation linéaire entre les coordonnées plückeriennes

$$(1)\qquad a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}x^{\varkappa_1}_{[1}x^{\varkappa_2}_{2}\dots x^{\varkappa_p}_{p]}=0$$

aux coefficients antisymétriques, représente un *complexe linéaire* K_{p-1} de $(p-1)$-plans P_{n-1}; le nombre $p-1$ sera appelé *l'ordre du complexe*. En posant

$$(2)\qquad \Phi_p=\frac{1}{p!}\,a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_p}]$$

nous pouvons remplacer l'équation (1) par l'équation symbolique

$$(3)\qquad \Phi_p=0,$$

qui, à même titre que l'équation (1), peut servir pour déterminer le complexe K_{p-1}. Nous convenons aussi de dire que la forme Φ_p définit un *complexe analytique*; il résulte de ce mode de langage qu'en faisant varier le facteur ϱ dans le produit $\varrho\Phi_p$, on obtient une infinité de complexes analytiques ayant tous pour support géométrique le complexe K_{p-1}.

Si l'on a h complexes analytiques définis par les formes extérieures $\Phi^1_p, \Phi^2_p, \dots, \Phi^h_p$ de degré p, on dit que ces complexes sont *linéairement indépendants* si une relation à coefficients constants de la forme

$$\varrho_1\Phi^1_p+\varrho_2\Phi^2_p+\dots+\varrho_h\Phi^h_p=0$$

entraîne nécessairement la nullité de tous les coefficients ϱ; il est évident que le nombre de complexes indépendants d'ordre $p-1$ est égal à $\binom{n}{p}$. Un système de $\binom{n}{p}$ complexes indépendants d'ordre $p-1$ sera appelé la *base de la variété des complexes d'ordre* $p-1$. L'ensemble de complexes défini par la formule

$$\Phi_p=\varrho_1\Phi^1_p+\varrho_2\Phi^2_p+\dots+\varrho_n\Phi^n_p,$$

dont les coefficients sont constants, s'appelle *faisceau de complexes d'ordre* $p-1$.

Si deux complexes K_{p-1} et K_{n-p-1} sont représentés respectivement par les formes extérieures Φ_p et Φ_{n-p} satisfaisant à la condition

$$[\Phi_p\Phi_{n-p}]=0,$$

nous dirons que K_{p-1} et K_{n-p-1} sont *en involution*.

Envisageons un complexe quelconque K_{p-1} défini par l'équation (3). La forme adjointe-e à Φ_p s'écrit comme il suit

$$\Psi_{n-p}=\sum_{\bar\varkappa_1\bar\varkappa_2\dots\bar\varkappa_p} a_{\bar\varkappa_1\bar\varkappa_2\dots\bar\varkappa_p}[y_{\varkappa_1}y_{\varkappa_2}\dots y_{\varkappa_{n-p}}],$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons p à p des nombres $1,2,\dots,n$ et $\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_{n-p}$ étant choisis de façon que la suite $\bar\varkappa_1,\bar\varkappa_2,\dots,\bar\varkappa_p$, $\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_{n-p}$ soit une permutation paire des mêmes nombres (cf. n⁰ 27, équation (11)). Les formes Φ_p et Ψ_{n-p} étant associées l'une à l'autre d'une manière univoque, on voit que le complexe K_{p-1} peut être déterminé indifféremment par l'une ou l'autre de deux équations $\Phi_p=0$ et $\Psi_{n-p}=0$; à la deuxième d'elles correspond une équation multilinéaire à $n-p$ séries de variables représentant le complexe en coordonnées tangentielles.

En terminant ces généralités, faisons encore la remarque suivante: si un $(p-1)$-plan P_{p-1} est déterminé par le système de $n-p$ équations

$$\omega^h(x)=a^h_\varrho x^\varkappa=0 \qquad (h=1,2,\dots,n-p)$$

linéairement indépendantes, la condition pour que P_{p-1} appartienne au complexe K_{p-1} défini par l'équation (3), s'exprime par la relation

$$(4)\qquad [\Phi_p\omega^1\omega^2\dots\omega^{n-p}]=0$$

(voir Théorème 7 au n⁰ 29).

53. Complexes spéciaux. Nous dirons que le complexe K_{p-1}, défini par l'équation (3), est un *complexe spécial*, si Φ_p est une forme simple, c'est-à-dire si elle peut être décomposée en un produit de p formes linéaires distinctes $\tilde\omega^1, \tilde\omega^2, \dots, \tilde\omega^p$:

$$\Phi_p=[\tilde\omega^1\tilde\omega^2\dots\tilde\omega^p]$$

(cf. n⁰ 16).

Ceci posé, supposons qu'il soit donné un $(p-1)$-plan P_{p-1} défini par le système de $n-p$ équations linéaires indépendantes

$$(5)\qquad \omega^j(x)=0 \qquad (j=1,2,\dots,n-p).$$

Pour que P_{p-1} appartienne au complexe spécial K_{p-1} correspondant à la forme Φ_p donnée ci-dessus, il faut et il suffit, d'après la remarque faite à la fin du numéro précédent, qu'il soit

$$[\tilde\omega^1\tilde\omega^2\dots\tilde\omega^p\omega^1\omega^2\dots\omega^{n-p}]=0.$$

Il résulte de cette relation que les facteurs de son premier membre sont linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe au moins une relation entre eux de la forme suivante:

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\tilde\omega^i(x)+\sum_{j=1}^{n-p}\beta_j\omega^j(x)=0$$

à coefficients constants, dont l'un au moins est différent de zéro (Théorème 3 au n° 15). On voit de plus que, chacun de deux systèmes $\tilde{\omega}^i$ et ω^j étant formé de formes linéairement distinctes, l'un au moins des coefficients α_i et l'un au moins des coefficients β_j sont différents de zéro; supposons, par exemple, qu'il soit $\alpha_1 \neq 0$. Imaginons maintenant p points $X_i(x_i^\varkappa)$ linéairement distincts du $(p-1)$-plan P_{p-1} défini par les équations (5); on aura donc les égalités

$$\omega^j[X_i]=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,n-p).$$

Celles-ci rapprochées de l'identité (6), entraînent les relations

$$\alpha_1\tilde{\omega}[X_i]+\alpha_2\tilde{\omega}^2[X_i]+\ldots+\alpha_p\tilde{\omega}^p[X_i]=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

En ajoutant ces égalités, après avoir multiplié chacune d'elles par un paramètre arbitraire, on obtient une relation de la forme suivante:

$$\alpha_1\lambda^i\tilde{\omega}^1[X_i]+\alpha_2\lambda^i\tilde{\omega}^2[X_i]+\ldots+\alpha_p\lambda^i\tilde{\omega}^p[X_i]=0. \tag{7}$$

Or, nous pouvons déterminer les paramètres λ_i de manière qu'il soit

$$\lambda^i\tilde{\omega}^2[X_i]=0, \qquad \lambda^i\tilde{\omega}^3[X_i]=0, \qquad \ldots, \qquad \lambda^i\tilde{\omega}^p[X_i]=0$$

ou, en se servant des égalités $\lambda^i\tilde{\omega}^j[X_i]=\tilde{\omega}^j[\lambda^i X_i]$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}^2[\lambda^1X_1+\lambda^2X_2+\ldots+\lambda^pX_p]=0,\\
&\tilde{\omega}^3[\lambda^1X_1+\lambda^2X_2+\ldots+\lambda^pX_p]=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tilde{\omega}^p[\lambda^1X_1+\lambda^2X_2+\ldots+\lambda^pX_p]=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Par conséquent, en vertu de la relation (7), il sera identiquement

$$\alpha_1\tilde{\omega}^1[\lambda^1X_1+\ldots+\lambda^pX_p]=0$$

ou, α_1 étant différent de zéro,

$$\tilde{\omega}^1[\lambda^1X_1+\lambda^2X_2+\ldots+\lambda^pX_p]=0. \tag{9}$$

Les expressions $\lambda^1x_1^k+\lambda^2x_2^k+\ldots+\lambda^px_p^k$ sont les coordonnées d'un point du $(p-1)$-plan P_{p-1}, appartenant par hypothèse au complexe spécial K_{p-1}; les égalités (8) et (9) montrent que ce point appartient aussi au $(n-p-1)$-plan P_{n-p-1} déterminé par les équations

$$\tilde{\omega}^1(x)=0, \qquad \tilde{\omega}^2(x)=0, \qquad \ldots, \qquad \tilde{\omega}^p(x)=0.$$

D'où le

THÉORÈME 1. *Si un complexe d'ordre $p-1$ est spécial, tous les $(p-1)$-plans qui en font partie coupent un $(n-p-1)$-plan déterminé.*

Ce théorème admet une réciproque:

THÉORÈME 2. *Les $(p-1)$-plans qui coupent un $(n-p-1)$-plan forment un complexe spécial.*

En effet imaginons un $(n-p-1)$-plan arbitraire P_{n-p-1} déterminé au moyen des équations linéaires

$$\tilde{\omega}^i(x)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p); \tag{10}$$

pour qu'un $(p-1)$-plan défini par le système d'équations linéaires

$$\omega^j(x)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,n-p)$$

coupe le $(n-p-1)$-plan P_{n-p-1}, il faut et il suffit que les formes $\tilde{\omega}^i$ et ω^j soient liées par une au moins relation

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\tilde{\omega}^i(x)+\sum_{j=1}^{n-p}\beta_j\omega^j=0 \tag{11}$$

à coefficients constants dont l'un au moins est différent de zéro. Nout pouvons supposer comme ci-dessus qu'il soit $\alpha_1\neq 0$. En multiplians l'identité (11) extérieurement par le produit $[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}^3\ldots\tilde{\omega}^p\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-p}]$ on trouve

$$\alpha_1[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2\ldots\tilde{\omega}^p\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-p}]=0$$

ou

$$[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2\ldots\tilde{\omega}^p\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-p}]=0.$$

En y posant

$$\Phi_p=[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2\ldots\tilde{\omega}^p]$$

on aura

$$[\Phi_p\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-p}]=0$$

ce qui montre que tout $(p-1)$-plan coupant P_{n-p-1} fait partie du complexe spécial défini par l'équation $\Phi_p=0$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

54. Complexes de droites. Dans les considérations de ce numéro nous nous bornons au cas, où la dimension de l'espace projectif P_{n-1} est un nombre impair que nous désignerons par $2r-1$; on aura donc $n=2r$.

Un complexe de droites (complexe d'ordre un) de l'espace P_{n-1} est défini par une équation quadratique extérieure

$$\Phi=\frac{1}{2}\,a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]=0. \tag{12}$$

On sait qu'à l'aide des transformations linéaires des variables $x^\varkappa$ la forme Φ peut être réduit à la forme canonique

$$\sum_{i=1}^{s}[x^ix^{s+i}];$$

le nombre $2s$ sera appelé le *rang du complexe*. Si, en particulier le rang est égal à 2, le complexe est spécial; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le carré extérieur de Φ soit une forme nulle: $[\Phi^2]=0$ (cf. n⁰ 21). Le Théorème 1 du numéro précédent peut maintenant s'énoncer comme il suit:

THÉORÈME 3. *Tout complexe spécial d'ordre un est formé de droites coupant un $(n-2)$-plan.*

Désignons par $M_0(x_0^\varkappa)$ un point arbitraire de l'espace P_{n-1}, et considérons l'équation linéaire

$$a_{\varkappa\lambda}x_0^\lambda x^\varkappa=0. \tag{13}$$

Si le rang de Φ est égal à $2r$, le déterminant $|a_{\varkappa\lambda}|$ est différent de zéro et, par suite, l'équation (13) représente un hyperplan bien déterminé qui porte le nom de *l'hyperplan polaire* de M_0; celui-ci s'appelle *pôle de l'hyperplan* (13). On voit ainsi que le complexe de droites de rang $2r$ subordonne à tout point de l'espace un hyperplan bien déterminé. Inversement, dans la même hypothèse, à tout hyperplan H à l'équation $a_\varkappa x^\varkappa=0$, on peut faire correspondre un point déterminé. Pour le trouver il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$a_{\varkappa\lambda}x_0^\lambda=\varrho a_\varkappa,$$

où ϱ désigne un paramètre arbitraire. Il résulte de ces raisonnements que tout complexe de droites de rang $2r$ induit une correspondance biunivoque entre les points et les hyperplans de l'espace P_{2r-1}; si le rang du complexe est inférieur à $2r$, cette proposition tombe en défaut. Les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ de l'équation (12) étant antisymétriques, celle-ci est vérifiée, si l'on y pose $x_\varkappa=x_0^\varkappa$, donc tout hyperplan passe par le point qui lui correspond.

Considérons une droite quelconque d du complexe de rang $2r$ et désignons par $M_0(x_0^\varkappa)$ et $M_1(x_1^\varkappa)$ deux de ses points. Les coordonnées plückeriennes $x_{[1}^\varkappa x_{0]}^\lambda$ de d devant satisfaire à l'équation (12), on aura la relation $a_{\varkappa\lambda}x_{[1}^\varkappa x_{0]}^\lambda=0$ ou $a_{\varkappa\lambda}x_0^\lambda x_1^\varkappa=0$. En rapprochant cette égalité de l'équation (13), on en conclut que le point M_1 et, par suite, toute la droite d sont situés dans l'hyperplan polaire de M_0. On vérifie aussi aisément que les hyperplans polaires de tous les points de l'hyperplan (13) passent par M_0.

En nous plaçant comme plus haut dans l'hypothèse que le rang du complexe K, défini par l'équation (12), est égal à $2r$, considérons encore un $(h-1)$-plan P_{h-1} déterminé par h points linéairement distincts $M_i(x_i^\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,h)$. Les coordonnées d'un point arbitraire M de P_{p-1} sont données par les formules

$$x^\lambda=q^1x_1^\lambda+q^2x_2^\lambda+\ldots+q^hx_h^\lambda \tag{14}$$

où $q^1,q^2,\ldots,q^h$ désignent des paramètres arbitraires. En remplaçant x_0^λ dans l'équation (13) par les expressions (14), on trouve l'équation de l'hyperplan polaire de M:

$$q^1(a_{\varkappa\lambda}x_1^\lambda x^\varkappa)+q^2(a_{\varkappa\lambda}x_2^\lambda x^\varkappa)+\ldots+q^h(a_{\varkappa\lambda}x_h^\lambda x^\varkappa)=0.$$

Il en résulte que les hyperplans polaires de tous les points de P_{h-1} passent par le $(n-h-1)$-plan P_{n-h-1} défini par les équations

$$a_{\varkappa\lambda}x_1^\lambda x^\varkappa=0,\qquad a_{\varkappa\lambda}x_2^\lambda x^\varkappa=0,\qquad \ldots,\qquad a_{\varkappa\lambda}x_h^\lambda x^\varkappa=0.$$

Nous allons montrer que la relation entre P_{h-1} et P_{n-h-1} est symétrique: les hyperplans de tous les points de P_{n-h-1} passent par P_{h-1}. En effet, soient $\bar{x}^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire $\overline{M}$ de P_{n-h-1}; elles vérifient donc les relations

$$a_{\varkappa\lambda}x_1^\lambda\bar{x}^\varkappa=0,\qquad a_{\varkappa\lambda}x_2^\lambda\bar{x}^\varkappa=0,\qquad \ldots,\qquad a_{\varkappa\lambda}x_h^\lambda\bar{x}^\varkappa=0 \tag{15}$$

et l'équation de l'hyperplan polaire de $\overline{M}$ s'écrit comme suit

$$a_{\varkappa\lambda}\bar{x}^\lambda x^\varkappa=0.$$

Si l'on y substitue aux variables $x^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire de P_{h-1}, données par les formules (14), on obtient une relation qui est identiquement satisfaite en vertu des égalités (15); notre assertion est ainsi établie. Deux variétés linéaires de P_{n-1} jouissant de la propriété que l'hyperplan polaire d'un point quelconque de l'une d'elles passe par l'autre s'appellent *sous-espaces conjugués relativement au complexe*; on voit que la somme des dimensions de deux sous-espaces conjugués est égale à $n-2$; le sous-espace conjugué avec une droite est donc un $(n-3)$-plan.

Le nombre de complexes de droites linéairement indépendents est égal à $\binom{n}{2}$. Les complexes spéciaux, par exemple, définis par les équations extérieures

$$[x^\varkappa x^\lambda]=0 \qquad (\varkappa,\lambda=1,2,\ldots,n;\ \varkappa<\lambda)$$

sont évidemment linéairement distincts, on peut donc les prendre comme base de la variété de complexes de droites de l'espace P_{n-1}.

55. Complexes de droites de l'espace projectif à trois dimensions. Dans l'espace projectif P_3 $(n=4)$ tout complexe linéaire peut être de rang quatre (complexe ordinaire) ou de rang deux (complexe spécial). Si la forme quadratique extérieure Φ représente un complexe analytique ordinaire, nous dirons que ce complexe est *dextrorsum* ou *sinistrorsum* suivant que le coefficient a dans la formule $[\Phi^2]=a[x^1x^2x^3x^4]$ est positif ou négatif.

Le nombre de complexes linéairement indépendants est égal à 6. En désignant par Φ_i $(i=1,2,3,4,5,6)$ six formes quadratiques extérieures linéairement distinctes, tout complexe linéaire de P_3 peut être défini par l'équation $\Phi=0$, où Φ est donnée par la formule

$$\Phi = z^i \Phi_i \qquad (i=1,2,\ldots,6) \tag{16}$$

dont les coefficients sont des constantes arbitraires. Les formes Φ_i étant quadratiques, les produits extérieurs $[\Phi_i\Phi_i]$ sont indépendants de l'ordre des facteurs. Donc, si l'on pose

$$[\Phi_i\Phi_j] = [\Phi_j\Phi_i] = a_{ij}[x^1x^2x^3x^4],$$

le carré extérieur de la forme (16) pourra être écrit de la manière suivante:

$$[\Phi^2] = a_{ij}z^iz^j[x^1x^2x^3x^4] \qquad (i,j=1,2,\ldots,6;\ a_{ij}=a_{ji}).$$

En se servant de la notation

$$F(z,z) = a_{ij}z^iz^j \tag{17}$$

la dernière formule prend la forme

$$[\Phi^2] = F(z,z)[x^1x^2x^3x^4].$$

Pour que le complexe linéaire défini par l'équation $\Phi=0$ soit spécial, il faut que les paramètres z^i satisfassent à la relation $F(z,z)=0$.

Considérons encore deux complexes linéaires représentés par les équations extérieures $\Phi=z^i\Phi_i=0$ et $\Phi'=y^i\Phi_i=0$; pour que ceux-ci soient en involution (p. 142), il faut qu'il soit $[\Phi\Phi']=0$. En développant le produit, cette condition prend la forme

$$a_{ij}y^iz^j[x^1x^2x^3x^4]=0 \qquad \text{ou} \qquad F(y,z)=a_{ij}y^iz^j=0.$$

Remarquons que la forme $F(y,z)$ est une forme bilinéaire déduite de $F(z,z)$. Nous voyons ainsi qu'à l'étude des complexes linéaires de P_3 s'associe d'une manière naturelle, la forme quadratique ordinaire à six variables. Si l'on change la base de la variété de complexes, en faisant sur les formes Φ une substitution linéaire, les variables z dans F seront assujetties à une transformation contregrédiente.

Pour déterminer la signature de F prenons comme base de la variété de complexes linéaires les six complexes représentés respectivement par les formes suivantes:

$$\Phi_1=[x^1x^2]+[x^3x^4], \qquad \Phi_4=[x^1x^2]-[x^3x^4],$$
$$\Phi_2=[x^1x^3]+[x^4x^2], \qquad \Phi_5=[x^1x^3]-[x^4x^2],$$
$$\Phi_3=[x^1x^4]+[x^2x^3], \qquad \Phi_6=[x^1x^4]-[x^2x^3],$$

Il est facile de vérifier que ces formes sont linéairement indépendantes et que l'on a

$$[\Phi_1^3]=[\Phi_2^2]=[\Phi_3^2]=1, \qquad [\Phi_4^2]=[\Phi_5^2]=[\Phi_6^2]=-1,$$
$$[\Phi_i\Phi_j]=0 \qquad (i,j=1,2,\ldots,6;\ i\neq j)$$

On voit sur ces relations que les complexes K_1,K_2,K_3 sont dextrorsum et les trois derniers sinistrorsum; deux complexes différents sont en involution. Par conséquent, la relation (13) devient maintenant

$$F=(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2-(z^4)^2-(z^5)^2-(z^6)^2.$$

Désignons par A_i les sommets du tetraèdre de référence de P_3 en posant

$$A_1=(1,0,0,0), \qquad A_2=(0,1,0,0), \qquad A_3=(0,0,1,0), \qquad A_5=(0,0,0,1).$$

On vérifie facilement que A_1A_2 et A_3A_4, A_1A_3 et A_2A_4, A_1A_4 et A_2A_3 sont respectivement conjugués par rapport aux complexes K_1 et K_4, K_2 et K_5, K_3 et K_6.

Remarque. Si l'on prend pour base six complexes analytiques définis par les formes

$$\Psi_1=[x^1x^2], \qquad \Psi_2=[x^1x^3], \qquad \Psi_3=[x^1x^4],$$
$$\Psi_4=[x^3x^4], \qquad \Psi_5=[x^4x^2], \qquad \Psi_6=[x^2x^3],$$

la forme $F(z,z)$ deviendra

$$2(z^1z^4+z^2z^5+z^3z^6).$$