En rapprochant la formule

$$g = n - (s_0 + s_1 + \dots + s_g)$$

déduite de la relation (32), il vient

$$s_{p+1} = s_{p+2} = \dots = s_g = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque. Si $s_1 = 0$, les équations du second degré du système sont des conséquences de ses équations linéaires (voir p. 36), par suite, le système a une solution à $n - s_0$ dimensions, s_0 étant le nombre des équations linéaires.

THÉORÈME 15. *Si la classe d'un système d'équations extérieures est inférieure au nombre de variables qui y figurent, le système est de première espèce.*

Désignons par c la classe d'un système. On a, par hypothèse, $c < n$, où n est le nombre des variables figurant dans les équations du système; celui-ci admet donc un élément plan caractéristique à $n - c$ dimensions (nº 33); nous le désignerons par E_{n-c}. Rappelons que E_{n-c} est une solution du système. Ceci posé, considérons maintenant une solution non singulière E_g quelconque à g dimensions. On sait que E_g doit passer par E_{n-c} (Théorème 9 du nº 33); par conséquent, l'élément E_g peut être décomposé en deux éléments plans, n'ayant aucun élément linéaire en commun, dont l'un est identique avec E_{n-c}, la dimension de l'autre, que nous désignerons par E_p, est égale à $g - (n - c)$; E_p étant contenu dans E_g est aussi une solution non singulière du système. Nous allons montrer que son élément polaire $H(E_p)$ se confond avec E_g. En effet, l'élément E_{n-c} étant caractéristique, tous ses éléments linéaires sont en involution avec E_p (voir nº 33), par conséquent, ils appartiennent à l'élément $H(E_p)$; il en est de même des éléments linéaires de E_p (p. 61). L'élément $H(E_p)$ contenant les deux parties E_{n-c} et E_p de E_g, contient aussi E_g. S'il contenait un élément linéaire e n'appartenant pas à E_g, celui-ci serait en involution avec E_{n-c} et avec E_p et, par conséquent, l'élément à $g+1$ dimensions, déterminé par E_g et e, serait une solution du système, ce qui est contraire à l'hypothèse, g étant le genre du système et E_g une solution non singulière à g dimensions. L'élément polaire $H(E_p)$ se confondant avec E_g, est une solution du système; il suffit maintenant de se rappeler le Théorème 10 pour se convaincre de la validité du Théorème qui était à démontrer. Nous avons supposé dans ce raisonnement que l'élément E_{n-c} ne se confond pas avec E_g; si ces deux éléments se confondaient, la dimension de l'élément plan caractéristique serait égale au genre g et, par conséquent, tous les caractères du système à partir de s_1 seraient nuls d'après le Théorème 10.

CHAPITRE III

GROUPE ET ESPACE SYMPLECTIQUE

§ 1. Généralités

35. Définition de l'espace symplectique. Soit Φ une forme extérieure quadratique

(1) $$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [x^\varkappa x^\lambda]$$

dont les coefficients satisfont, comme d'habitude, aux relations $a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0$. On sait que le rang de Φ est un nombre pair que nous désignerons par $2r$. On peut donc supposer que le nombre n de variables qui figurent dans Φ soit égal à $2r$:

(2) $$n = 2r.$$

Ces hypothèses entraînent l'inégalité

(3) $$a = |a_{\varkappa\lambda}| \neq 0.$$

Posons maintenant

(4) $$a^{\varkappa\lambda} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{\varkappa\lambda}},$$

où, dans le second membre, les quantités $a_{\varkappa\lambda}$ doivent être considérées comme indépendantes. Il est évident que les nouvelles grandeurs $a^{\varkappa\lambda}$ sont antisymétriques, et que l'on a

(5) $$a_{\lambda\varrho} a^{\varkappa\varrho} = \delta^\varkappa_\lambda.$$

Si l'on fait sur les variables $x^\varkappa$ la substitution définie par les formules

(6) $$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \bar{x}^\varrho,$$

de déterminant différent de zéro, les quantités $a_{\lambda\varrho}$ se changeront d'après les formules

(7) $$a_{\lambda\varrho} = Q^\mu_\lambda Q^\nu_\varrho \bar{a}_{\mu\nu},$$

Q^μ_ν étant les coefficients de la substitution inverse à (6):

(8) $$P^\varkappa_\varrho Q^\varrho_\lambda = P^\varrho_\lambda Q^\varkappa_\varrho = \delta^\varkappa_\lambda.$$

Nous allons montrer que la transformation des grandeurs $a^{\varkappa\lambda}$ est la suivante:

$$a^{\varkappa\lambda} = P^{\varkappa}_{\varrho} P^{\lambda}_{\sigma} \bar{a}^{\varrho\sigma}. \tag{9}$$

En effet, si dans l'égalité (5) on remplace les coefficients $a_{\lambda\varrho}$ par les expressions (7), on obtient la relation

$$Q^{\mu}_{\lambda} Q^{\nu}_{\varrho} \bar{a}_{\mu\nu} a^{\varkappa\varrho} = \delta^{\varkappa}_{\lambda}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette relation par P^{λ}_{σ} et que l'on somme par rapport à λ, en tenant compte des identités (8), on trouve

$$\delta^{\mu}_{\sigma} Q^{\nu}_{\varrho} \bar{a}_{\mu\nu} a^{\varkappa\varrho} = P^{\varkappa}_{\sigma}$$

ou

$$Q^{\nu}_{\varrho} \bar{a}_{\sigma\nu} a^{\varkappa\varrho} = P^{\varkappa}_{\sigma}.$$

En multipliant cette dernière par $Q^{\tau}_{\varkappa}$ et en sommant par rapport à $\varkappa$, on en déduit l'égalité

$$\bar{a}_{\sigma\nu} Q^{\tau}_{\varkappa} Q^{\nu}_{\varrho} a^{\varkappa\varrho} = \delta^{\tau}_{\sigma}.$$

D'autre part, d'après la définition des quantités $\bar{a}^{\tau\nu}$, on a

$$\bar{a}_{\sigma\nu} \bar{a}^{\tau\nu} = \delta^{\tau}_{\nu}.$$

Le déterminant $|\bar{a}_{\sigma\nu}|$ étant différent de zéro en vertu de l'inégalité (3), le rapprochement des deux dernières relations conduit à l'égalité

$$\bar{a}^{\tau\nu} = Q^{\tau}_{\varkappa} Q^{\nu}_{\varrho} a^{\varrho\varkappa}$$

qui est équivalente à la formule (9).

Considérons maintenant deux espaces affines dualistiques à $n=2r$ dimensions A_n et B_n rapportés respectivement aux repères R_n et S_n (cf. nº 2); les coordonnées d'un point par rapport à $R_n (S_n)$ seront désignées par $x^{\varkappa} (y_{\varkappa})$ (cf. nº 2). On a vu que les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ se transforment comme les composantes d'un bivecteur de l'espace B_n et les quantités $a^{\varkappa\lambda}$ comme les composantes d'un bivecteur de l'espace A_n. Si l'on introduit ces bivecteurs dans les espaces correspondants et si l'on suppose en outre que les origines des repères R_n et S_n se correspondent, les deux espaces A_n et B_n pourront être considérés comme confondus en un même espace. En effet, à tout vecteur $\{u^{\varkappa}\}$ de A_n on peut associer le vecteur de B_n de composantes $u_{\varkappa}$, déterminées par les formules

$$u_{\varkappa} = a_{\varrho\varkappa} u^{\varrho}, \tag{10}$$

et à tout vecteur $\{v_{\varkappa}\}$ de B_n — le vecteur de A_n de composantes

$$v^{\varkappa} = a^{\varkappa\varrho} v_{\varrho}. \tag{11}$$

Il est facile de vérifier que, si l'on applique la règle (11) aux composantes $u_{\varkappa}$ définies par les formules (10), on revient aux composantes $u^{\varkappa}$. De même les formules

$$y_{\varkappa} = a_{\varrho\varkappa} x^{\varrho}, \qquad x^{\varkappa} = a^{\varkappa\varrho} y_{\varrho} \tag{12}$$

établissent une correspondance biunivoque entre les points de A_n et B_n. On peut donc considérer les quantités $x^{\varkappa}$ et $y_{\varkappa}$, liées par les relations (12), comme les coordonnées contrevariantes et covariantes d'un même point et les grandeurs $u^{\varkappa}$ et $u_{\varkappa}$, satisfaisant aux relations (10), comme les composantes contrevariantes et covariantes d'un même vecteur d'un espace que nous appellerons *espace symplectique* et désignerons par G_n $(n=2r)$. A la forme (1) nous donnerons le nom de *forme fondamentale* et au bivecteur $\{a_{\varkappa\lambda}\}$ le nom de *bivecteur fondamental* de G_n; ses composantes contrevariantes sont les quantités $a^{\varkappa\lambda}$ et ses composantes mixtes sont déterminées par les formules

$$a^{\varkappa}_{\cdot\lambda} = a^{\varkappa\varrho} a_{\varrho\lambda}, \qquad a_{\varkappa}^{\cdot\lambda} = a^{\lambda\varrho} a_{\varkappa\varrho}.$$

En se servant des égalités (4), on vérifie facilement que l'on a

$$a^{\varkappa}_{\cdot\lambda} = \begin{cases} -1 & \text{pour } \varkappa=\lambda, \\ 0 & \text{pour } \varkappa\neq\lambda, \end{cases} \qquad a_{\varkappa}^{\cdot\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \varkappa=\lambda, \\ 0 & \text{pour } \varkappa\neq\lambda. \end{cases} \tag{13}$$

On a vu que les composantes du bivecteur fondamental permettent d'abaisser et d'élever les indices d'un vecteur; les règles (10) et (11) du jeu des indices s'étendent aux tenseurs d'ordres supérieures de la même façon qu'on le fait dans l'espace euclidien au moyen des composantes $g_{\varkappa\lambda}$ et $g^{\varkappa\lambda}$ du tenseur fondamental. Mais il y a ici une différence: les composantes $a_{\varkappa\lambda}$ et $a^{\varkappa\lambda}$ du bivecteur fondamental étant antisymétriques, il faut observer l'ordre des indices; on abaissera l'indice constamment à l'aide du premier indice de $a_{\varkappa\lambda}$ et on l'élèvera au moyen du second indice de $a^{\varkappa\lambda}$. On écrira par exemple

$$u_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = a^{\mu\varrho} u_{\varkappa\lambda\varrho}, \qquad v^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu} = a_{\varrho\mu} v^{\varkappa\lambda\varrho}.$$

36. Repère symplectique. On sait que la forme fondamentale (1) de l'espace G_n peut être réduite à l'expression canonique

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}]\ ^{15)}; \tag{14}$$

les composantes du bivecteur fondamental prendront par conséquent les valeurs

$$a_{\varkappa\lambda} = I_{\varkappa\lambda}, \qquad a^{\varkappa\lambda} = I^{\varkappa\lambda},$$

---

[15]) Nous convenons ici et dans la suite que les indices latins h, i, j, k parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, r$, les indices grecs — les valeurs de 1 jusqu'à $n=2r$.

où

(15) $I_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda-\varkappa=r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda-\varkappa|\neq r \end{cases}$ et $I^{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda-\varkappa=r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda-\varkappa|\neq r \end{cases}$

(cf. nº 18). La formule (14) peut donc être représentée sous la forme

(14′) $$\Omega=\frac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda].$$

Pour obtenir l'expression (14), il faut faire une substitution linéaire convenable sur les variables $x^\varkappa$, ce qui équivaut au remplacement du repère R_n par un autre de même origine; le nouveau repère ainsi obtenu est dit *repère symplectique*. Les formules (10) et (11) deviennent maintenant

$$u_\varkappa = I_{\varrho\varkappa}u^\varrho, \qquad u^\varkappa = I^{\varkappa\varrho}u_\varrho;$$

en tenant compte des égalités (15), on en déduit les relations suivantes entre les composantes contrevariantes et covariantes d'un vecteur par rapport au repère symplectique

(16) $$u_i = -u^{r+i}, \qquad u_{r+i} = u^i.$$

Ces règles s'étendent d'une manière évidente aux tenseurs d'ordres supérieurs; on aura par exemple

$$v_{\varkappa\lambda i} = -v_{\varkappa\lambda}{}^{r+i}, \qquad v_{\varkappa\lambda r+i} = v_{\varkappa\lambda}{}^{i}.$$

37. Opérations sur les tenseurs de l'espace G_n. Supposons que l'espace G_n soit rapporté à un repère symplectique; sa forme fondamentale Ω sera donc donnée par la formule (14). La valeur de Ω pour une paire ordonnée de deux vecteurs $U=\{u^\varkappa\}$, $V=\{v^\varkappa\}$ est égale à l'expression

$$\Omega[U,V]=I_{\varkappa\lambda}u^{[\varkappa}v^{\lambda]}$$

(cf. équation (8) au nº 11); pour abréger l'écriture nous désignerons cette valeur par $[U,V]$. En ayant égard aux formules (15), on pourra écrire

$$[U,V]=\sum_{i=1}^{r}(u^iv^{r+i}-v^iu^{r+i});$$

si l'on introduit les composantes covariantes de U et V à l'aide des formules (16), on obtient une seconde expression de $[U,V]$

$$[U,V]=\sum_{i=1}^{r}(u_iv_{r+i}-u_{r+i}v_i).$$

D'autre part, considérons le produit contracté des vecteurs U et V; on aura

$$u_\varrho v^\varrho = u_iv^i + u_{r+i}v^{r+i}.$$

Si l'on y introduit les composantes covariantes de V en se servant des formules (16), on obtient

$$u_\varrho v^\varrho=\sum_{i=1}^{r}(u_iv_{r+i}-u_{r+i}v_i).$$

La comparaison avec la dernière formule pour $[U,V]$ conduit à l'égalité

$$[U,V]=u_\varrho v^\varrho.$$

L'expression $[U,V]$ à laquelle nous donnerons le nom de *produit scalaire* des vecteurs U et V est évidemment invariante par la transformation linéaire des coordonnées de l'espace G_n. Il est évident que le produit scalaire jouit de la propriété suivante:

$$[U_1(h_1V_1+h_2V_2+\ldots+h_pV_p)]=h_1[U_1,V_1]+h_2[U_1,V_2]+\ldots+h_p[U_1,V_p],$$

les $V_1, V_2, \ldots, V_p$ étant des vecteurs et les $h_1, h_2, \ldots, h_p$ des scalaires.

La relation $[U,V]+[V,U]=0$ entraîne l'égalité

$$u_\varrho v^\varrho + u^\varrho v_\varrho = 0;$$

en particulier on a

$$u_\varrho u^\varrho = 0.$$

Si le produit scalaire $[U,V]$ est égal à zéro, les vecteurs U et V sont en involution relativement à la forme Ω (cf. nº 19). D'après les formules obtenues ci-dessus, la relation entre deux vecteurs qui sont en involution s'exprime de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^{r}u_{[i}u_{r+i]}=0.$$

Considérons maintenant deux bivecteurs $U_2=\{u_{\varkappa\lambda}\}$ et $V_2=\{v_{\varkappa\lambda}\}$; leur produit scalaire est donné par la formule

$$[U_2,V_2]=u_{\varrho\sigma}v^{\varrho\sigma}$$

ce qui peut s'écrire encore

$$[U_2,V_2]=u^{\varrho\sigma}v_{\varrho\sigma}$$

ou

$$[U_2,V_2]=I^{\varrho\varkappa}I^{\sigma\lambda}u_{\varkappa\lambda}v_{\varrho\sigma}.$$

En développant les calculs on obtient finalement

$$[U_2,V_2]=-4\sum_{h,i=1}^{r}u_{[h[i}v_{r+h]r+i]}.$$

Ces formules montrent que le produit $[U_2,V_2]$ est indépendant de l'ordre des facteurs:

$$[U_2,V_2]=[V_2,U_2].$$

Plus généralement le produit scalaire de deux p-vecteurs $U_p=\{u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$ et $V_p=\{v_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$ est donné par la formule

$$[U_p,V_p]=u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}v^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p};$$

par un calcul facile on vérifie l'égalité

$$u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}v^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}=(-1)^{\varkappa}u^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}v_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$$

d'où il résulte qu'on a

$$[U_p,V_p]=(-1)^p[V_p,U_p].$$

Le tenseur fondamental permet aussi d'effectuer l'opération de saturation des indices. Du p-vecteur U_p on obtient de cette façon le $(p-2)$-vecteur U_{p-2} des composantes

$$u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}\varrho\sigma}I^{\varrho\sigma}=u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}\varrho\varrho}.$$

ou

$$u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}\varrho\sigma}I^{\varrho\sigma}=u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}i}{}^{i}+u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}r+i}{}^{r+i}.$$

Si l'on y applique la règle de l'abbaissement des indices (cf. n° 36), il viendra

$$u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}\varrho\sigma}I^{\varrho\sigma}=2\sum_{i=1}^{r}u_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-2}i}{}^{r+i}.$$

En répétant cette opération on déduit de U_p une suite de multivecteurs de degrés $p-2,p-4,\ldots$ Si p est un nombre pair: $p=2h$, le dernier terme de la suite est un scalaire

$$u_0=2^h\sum_{i_1i_2\ldots i_h=1}^{r}u_{i_1r+i_1i_2r+i_2\ldots i_hr+i_h};$$

si $p=2h+1$, le dernier terme U_1 est un vecteur de composantes

$$2^h\sum_{i_1i_2\ldots i_h+1}^{r}u_{\varkappa i_1r+i_1i_2r+i_2\ldots i_hr+i_h}.$$

38. Groupe symplectique. Nous introduirons auparavant une notion qui nous sera utile dans les considérations suivantes.

Soit donné une matrice quadratique de degré $2r$

$$M=\left\|\begin{array}{ccc:ccc} a_1^1 & \ldots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \ldots & a_{2r}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^r & \ldots & a_r^r & a_{r+1}^r & \ldots & a_{2r}^r \\ \hdashline a_1^{r+1} & \ldots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \ldots & a_{2r}^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{2r} & \ldots & a_r^{2r} & a_{r+1}^{2r} & \ldots & a_{2r}^{2r} \end{array}\right\|.$$

Nous lui associons une autre matrice désignée par $\breve{M}$ appelée *matrice conjuguée* avec M:

$$\breve{M}=\left\|\begin{array}{ccc:ccc} a_{r+1}^{r+1} & \ldots & a_{r+1}^{2r} & -a_{r+}^{1} & \ldots & -a_{r+1}^{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2r}^{r+1} & \ldots & a_{2r}^{2r} & -a_{2r}^{1} & \ldots & -a_{2r}^{r} \\ \hdashline -a_1^{r+1} & \ldots & -a_1^{2r} & a_1^1 & \ldots & a_1^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_r^{r+1} & \ldots & -a_r^{2r} & a_r^1 & \ldots & a_r^r \end{array}\right\|.$$

Pour obtenir $\breve{M}$ il faut faire sur M successivement les opérations suivantes: on écrit la matrice transposée de M et on multiplie ensuite les éléments de ses r premières lignes et de ses r premières colonnes par -1; on fait passer les r dernières lignes à la première place et enfin on effectue un changement analogue sur l'ordre des colonnes. Il résulte immédiatement de cette définition que le déterminant de $\breve{M}$ est égal à celui de M. Il est aussi facile de voir que la matrice conjuguée avec $\breve{M}$ est identique avec M.

Ceci posé, revenons maintenant à la forme Φ dans la formule (1). La réduction de Φ à sa forme canonique est évidemment possible d'une infinité de manières (n° 18); l'ensemble des substitutions linéaires qui laissent invariante la forme canonique (14) constitue un groupe dit *groupe symplectique*; le groupe des transformations symplectiques à $n=2r$ variables sera désigné par Sp_n.

Soit

$$x^{\varkappa}=P_{\varrho}^{\varkappa}\bar{x}^{\varrho} \tag{17}$$

une transformation du groupe Sp_n. Celle-ci devant conserver la forme (14), on en déduit facilement les relations qui doivent être satisfaites par ses coefficients; les voici

$$\sum_{i=1}^{r}(P_{\varrho}^{i}P_{\sigma}^{r+i}-P_{\sigma}^{i}P_{\varrho}^{r+i})=I_{\varrho\sigma}, \tag{18'}$$

ce qui peut s'écrire encore

$$I_{\alpha\beta}P_{\varrho}^{\alpha}P_{\sigma}^{\beta}=I_{\varrho\sigma}. \tag{18''}$$

Le nombre de ces relations est égal au nombre des combinaisons deux à deux parmi les nombres $1,2,\ldots,2r$: $r(2r-1)$; comme le nombre des coefficients $P_{\varrho}^{\varkappa}$ est égal à $(2r)^2$, il s'ensuit que la transformation la plus générale du groupe des transformations symplectiques à $2r$ variables dépend de $r(2r+1)$ paramètres arbitraires. Dans la suite nous le montrerons encore d'une autre manière plus rigoureuse.

Remarquons que dans le cas $r=1$ le groupe symplectique se confond avec le groupe des transformations unimodulaires à deux variables.

Pour obtenir la transformation inverse à (17), on décomposera ces formules en deux groupes

$$x^i = P^i_\varrho \overline{x}^\varrho, \qquad x^{r+i} = P^{r+i}_\varrho \overline{x}^\varrho.$$

Si l'on fait la somme par rapport à i de ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par P^{r+i}_σ et $-P^i_\sigma$, on trouve

$$\sum_{i=1}^{r} (P^{r+i}_\sigma x^i - P^i_\varrho x^{r+i}) = \sum_{i=1}^{r} (P^i_\varrho P^{r+i}_\sigma - P^i_\sigma P^{r+i}_\varrho) \overline{x}^\varrho$$

ou, vu les identités (18′),

$$\sum_{i=1}^{r} (P^{r+i}_\sigma x^i - P^i_\varrho x^{r+i}) = I_{\varrho\sigma} \overline{x}^\varrho .$$

En y posant successivement $\sigma = r+j$ et $\sigma = j$, on obtient finalement les formules de la substitution inverse à (17)

$$(19) \qquad \overline{x}^j = \sum_{i=1}^{r} (P^{r+i}_{r+j} x^i - P^i_{r+j} x^{r+i}), \qquad \overline{x}^{r+j} = \sum_{i=1}^{r} (-P^{r+i}_j x^i + P^i_j x^{r+i}).$$

La matrice de la substitution (19) ayant la forme

$$\left\| \begin{array}{ccc:ccc} P^{r+1}_{r+1} & \dots & P^{2r}_{r+1} & -P^1_{r+1} & \dots & -P^r_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{r+1}_{2r} & \dots & P^{2r}_{2r} & -P^1_{2r} & \dots & -P^r_{2r} \\ \hdashline -P^{r+1}_1 & \dots & -P^{2r}_1 & P^1_1 & \dots & P^r_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P^{r+1}_r & \dots & -P^{2r}_r & P^1_r & \dots & P^r_r \end{array} \right\|,$$

elle est conjuguée avec la matrice de la substitution (17); les déterminants de ces deux matrices sont donc égaux d'après la remarque faite au commencement de ce paragraphe. D'autre part, la substitution (19) étant inverse à (17), son déterminant est égal à $1/\Delta$, Δ désignant le déterminant de la substitution (17). Il en résulte que $\Delta^2=1$. Pour préciser la valeur de Δ nous allons calculer la $r^{\text{ième}}$ puissance extérieure de la forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}];$$

on aura (cf. n⁰ 21)

$$[\Omega^r] = [x^1 x^{r+1} x^2 x^{r+2} \dots x^r x^{2r}]$$

ou

$$[\Omega^r] = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} [x^1 x^2 \dots x^{2r}].$$

Si l'on y fait la substitution (17), on obtient

$$[\overline{\Omega}^r] = \Delta (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} [\overline{x}^1 \overline{x}^2 \dots \overline{x}^{2r}].$$

Cette puissance devant être invariante vis-à-vis de la substitution du groupe symplectique, il en résulte que $\Delta=1$.

Nous avons ainsi démontré le

Théorème 1. *Le déterminant de la substitution symplectique est égal à* $+1$.

Si l'on porte les expressions (19) dans les formules (17), on doit obtenir des identités, les deux substitutions étant inverses l'une à l'autre. Cette remarque conduit aux relations

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{r} (P^\varrho_i P^\sigma_{r+i} - P^\sigma_{r+i} P^\varrho_i) = I^{\varrho\sigma}$$

qui sont équivalentes aux égalités (18′). Nous arrivons donc au théorème suivant:

Théorème 2. *Pour qu'une transformation linéaire*

$$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \overline{x}^\varrho$$

soit symplectique, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient chacun de deux systèmes de conditions équivalentes

$$\sum_{i=1}^{r} (P^i_\varrho P^{r+i}_\sigma - P^i_\sigma P^{r+i}_\varrho) = I_{\varrho\sigma}, \qquad \sum_{i=1}^{r} (P^\varrho_i P^\sigma_{r+i} - P^\sigma_i P^\varrho_{r+i}) = I^{\varrho\sigma}.$$

Les conditions pour qu'une transformation soit symplectique peuvent être encore énoncées de la façon suivante:

Théorème 3. *Pour qu'une transformation soit symplectique, il faut et il suffit que sa matrice inverse et sa matrice conjuguée soient identiques.*

Remarque. La comparaison des formules (17) et (19) montre que la transformation symplectique est *involutive*, c'est-à-dire identique à son inverse, si les coefficients satisfont aux relations linéaires

$$P^{r+i}_{r+j} = P^j_i, \qquad P^i_{r+j} = -P^j_{r+i}, \qquad P^{r+i}_j = -P^{r+j}_i$$

et aux relations quadratiques (18′).

Revenons maintenant à l'espace symplectique G_n $(n=2r)$ on supposant qu'il soit rapporté à un repère symplectique R_n et désignons par I_α les vecteurs dont R_n est composé.

Soient $x^\varkappa$ les coordonnées d'un point quelconque M de G_n. La transformation (17) du groupe Sp_n attribue à M un deuxième système de coordonnées $\overline{x}^\varrho$, rapportées à un repère $\overline{R}_n$ composé de vecteurs $\overline{I}_\alpha$ déterminés par les formules

$$\overline{I}_\alpha = P^\varrho_\alpha I_\varrho ;$$

la transformation (17) conservant la forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}],$$

$\bar{R}_n$ est donc bien un repère symplectique. On voit ainsi que, si l'on donne dans G_n un repère symplectique R_n et une transformation (17) vérifiant les conditions (18′), il existe un autre repère symplectique $\bar{R}_n$ tel que les coordonnées d'un point par rapport à R_n et $\bar{R}_n$ sont liées par les relations (17).

Les composantes contrevariantes du vecteur I_α étant toutes nulles à l'exception de la $\alpha^{\text{ième}}$ qui est égale à 1, il en résulte d'après les formules du n° 37 qu'on a

$$(21') \qquad [I_\alpha, I_\beta] = \begin{cases} 1 & \text{pour } \beta - \alpha = r, \\ 0 & \text{pour } |\beta - \alpha| \neq r, \end{cases}$$

ou

$$(21'') \qquad [I_\alpha, I_\beta] = I_{\alpha\beta}$$

(cf. n° 37). Ces relations caractérisent le repère symplectique. Imaginons pour le faire voir un système quelconque de n vecteurs $U_\alpha = P_\alpha^\varrho I_\varrho$ satisfaisant aux relations

$$(22) \qquad [U_\alpha, U_\beta] = I_{\alpha\beta}.$$

Nous montrerons d'abord que les vecteurs U_α sont indépendants. En effet, s'il existait entre les U_α une relation linéaire

$$q^\alpha U_\alpha = 0,$$

on en déduirait l'égalité

$$[q^\alpha U_\alpha, U_\beta] = 0,$$

β étant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. En tenant compte des relations (22), on en obtiendrait l'égalité

$$I_{\alpha\beta} q^\alpha = 0$$

ou, d'après la définition de $I_{\alpha\beta}$ (équation (15) du n° 36), $q^\beta = 0$, c'est ce qu'il fallait démontrer. L'indépendance des vecteurs U_α étant ainsi établie, envisageons le repère $\bar{R}_n$ de même origine que R_n, formé par les vecteurs $U_\alpha = \{P_\alpha^\varrho\}$. En désignant respectivement par x^ϱ et $\bar{x}^\varrho$ les coordonnées d'un point quelconque de G_n par rapport à R_n et $\bar{R}_n$, on a

$$(23) \qquad x^\varrho = P_\alpha^\varrho \bar{x}^\alpha.$$

Si l'on fait cette substitution dans la forme $\Omega = \frac{1}{2} I_{\varrho\sigma} [x^\varrho x^\sigma]$, il viendra

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} I_{\varrho\sigma} P_\alpha^\varrho P_\beta^\sigma [\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta].$$

Or en développant l'expression $[U_\alpha, U_\beta]$ dans le premier membre de la relation (22), on trouve (cf. n° 37)

$$I_{\varrho\sigma} P_\alpha^\varrho P_\beta^\sigma = I_{\alpha\beta}.$$

Si l'on rapproche cette égalité de la formule précédente, on obtient

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} [\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta],$$

ce qui prouve que le repère $\bar{R}_n$ est bien symplectique et que, par suite, la substitution (23) est une transformation du groupe symplectique Sp_n.

En résumant ces considérations on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Pour que le système de vecteurs U_α forme un repère symplectique, il faut et il suffit que ceux-ci vérifient les relations*

$$[U_\alpha, U_\beta] = I_{\alpha\beta}.$$

Pour compléter cette étude nous allons démontrer encore une propriété des repères symplectiques.

THÉORÈME 5. *Si l'on se donne deux repères symplectiques $\{U_\alpha\}$ et $\{V_\alpha\}$ de même origine, il existe une transformation symplectique qui les fait passer l'un dans l'autre.*

Posons en effet

$$V_\alpha = P_\alpha^\sigma U_\varrho;$$

on en déduit la relation

$$[V_\alpha, V_\beta] = P_\alpha^\varrho P_\beta^\sigma [U_\varrho, U_\sigma].$$

Les deux repères étant par hypothèse symplectiques, on a

$$[V_\alpha, V_\beta] = I_{\alpha\beta}, \qquad [U_\varrho, U_\sigma] = I_{\varrho\sigma}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la relation précédente, on obtient

$$I_{\alpha\beta} = I_{\varrho\sigma} P_\alpha^\varrho P_\beta^\sigma;$$

ce qui montre que la transformation $x^\varkappa = P_\varrho^\varkappa \bar{x}^\varrho$ est symplectique.

En terminant ce numéro, remarquons encore que l'espace symplectique à $n = 2r$ dimensions peut être défini comme une variété dont le *groupe fondamental* se compose de translations et de transformations du groupe Sp_n.

39. Variétés linéaires de l'espace symplectique. Considérons dans un espace symplectique G_n $(n = 2r)$ une variété linéaire E_p déterminée par un point arbitraire M et par p vecteurs linéairement distincts V_1, $V_2, \ldots, V_p$ issus de M et appelés *vecteurs de base* de E_p. Nous dirons que

E_p est une *variété involutive*[16]) si tous les vecteurs de sa base sont deux à deux en involution:

$$[V_i, V_j]=0 \qquad (i,j=1,2,\ldots,p). \tag{24}$$

Ces équations étant invariantes par les transformations du groupe fondamental de G_n (cf. nº 37), celles-ci changent une variété involutive en une autre de la même propriété. Il est aussi évident que tout sous-espace linéaire d'une variété involutive est aussi involutif. Si une variété linéaire est de dimension un (une droite), nous convenons aussi de l'appeler *variété involutive.*

Si un vecteur V est en involution avec tous les vecteurs d'une variété linéaire E_p, nous dirons que V est *en involution* avec E_p. Pour que V soit en involution avec E_p, il faut et il suffit évidemment qu'il soit en nvolution avec les vecteurs de la base de E_p.

THÉORÈME 6. *La dimension d'une variété involutive d'un espace symplectique à 2r dimensions est au plus égal à r.*

La démonstration de ce théorème est très simple. En effet, en adoptant le notations faites ci-dessus, formons le système d'équations

$$[V_i, X]=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p), \tag{25}$$

où X désigne le vecteur inconnu. Ces équations déterminent tous les vecteurs qui sont en involution avec E_p. Comme celles-ci sont linéaires par rapport aux composantes de X et indépendantes, elles admettent $2r-p$ solutions linéairement indépendantes. Les vecteurs V_i appartenant d'après les relations (24) aux solutions du système (25), il en résulte qu'il doit être $2r-p \geqslant p$, d'où $p \leqslant r$. On voit ainsi que la dimension de la variété involutive E_p ne peut pas surpasser la moitié de la dimension de l'espace G_n.

THÉORÈME 7. *Il existe dans l'espace symplectique G_n $(n=2r)$ des variétés involutives d'ordre maximum r.*

Supposons comme d'habitude que l'espace G_n est rapporté à un repère symplectique $R_n\{I_a\}$. D'après les égalités (21′) on a

$$[I_h, I_i]=0 \qquad (h,i=1,2,\ldots,r);$$

les vecteurs I_h $(h=1,2,\ldots,r)$ sont donc deux à deux en involution, par conséquent toute variété linéaire à r dimensions dont la base se compose de ces vecteurs est involutive.

[16]) Ces variétés sont aussi appelées *totalement isotropes*; je me sers du nom de *variétés involutives*, leur théorie n'étant qu'un cas particulier de celle des fonctions en involution de Lie. Cf. Lie [14], zweiter Abschnitt, p. 97.

Remarque. Dans le raisonnement précédent les vecteurs $I_1, I_2, \ldots, I_r$ pourraient être remplacés par un autre système de r vecteurs I_a tels que la différence des indices de deux quelconques d'eux ne soit pas égale à r; on peut prendre par exemple les vecteurs $I_1, I_2, I_{r+3}, I_{r+4}, \ldots, I_{2r}$.

THÉORÈME 8. *Toute variété involutive E_p $(p<r)$ est contenue dans une variété involutive d'ordre maximum.*

Soit $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ la base de E_p; le système d'équations (25) admet $2r-p$ solutions linéairement indépendantes et comme ce nombre est supérieur à r, p étant par hypothèse plus petit que r, il existe au moins une solution V_{p+1} indépendante des vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_p$. La variété linéaire E_{p+1} déterminée par un point arbitraire de E_p et par les vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_{p+1}$ est donc involutive et elle contient E_p. En procédant de cette manière de proche en proche, on trouve une suite de variétés involutives $E_p, E_{p+1}, \ldots, E_r$, dont chacune passe par toutes celles qui la précèdent.

Remarque. Soit donnée dans l'espace symplectique G_n, rapporté à un repère symplectique, un élément plan de dimension p formé d'origine 0 des coordonnées comme point d'appui et d'une variété linéaire E_p définie par les équations

$$x^\varkappa = x_1^\varkappa t^1 + x_2^\varkappa t^2 + \ldots + x_p^\varkappa t^p,$$

où $t^1, t^2, \ldots, t^p$ désignent des paramètres arbitraires; la base de E_p est donc composée des vecteurs $V_i = \{x_i^\varkappa\}$ $(i=1,2,\ldots,p)$. Pour que cet élément soit solution de l'équation extérieure

$$\Omega = \sum_{h=1}^{r} [x^h x^{r+h}] = 0,$$

il faut et il suffit d'après le Théorème 6 du nº 29 que Ω s'annule, si l'on y substitue aux variables $x^\varkappa$ leurs expressions écrites ci-dessus, c'est-à-dire qu'il soit identiquement

$$[t^h t^i] \sum_{j=1}^{r} (x_h^j x_i^{r+j} - x_i^j x_h^{r+j}) = 0.$$

Il en résulte qu'il doit être

$$\sum_{j=1}^{r} (x_h^j x_i^{r+j} - x_i^j x_h^{r+j}) = 0$$

ou

$$[V_h, V_i] = 0 \qquad (h,i=1,2,\ldots,p).$$

Les théorèmes démontrés précédemment permettent par suite d'énoncer les propositions suivantes:

a) *Pour qu'une variété linéaire E_p passant par l'origine O des coordonnées soit une solution de l'équation extérieure*

$$\Omega=\sum_{h=1}^{r}[x^h x^{r+h}]=0,$$

il faut et il suffit qu'elle soit involutive;

b) *La dimension d'une solution de l'équation $\Omega=0$ est au plus égale à r et elle peut atteindre ce nombre;*

c) *Toute solution de l'équation $\Omega=0$ de dimension $p<r$ fait partie d'une solution de dimension r.*

Un vecteur d'une variété linéaire de l'espace symplectique s'appelle son *vecteur distingué*, s'il est en involution avec tous les autres vecteurs de la variété. Il est clair que tous les vecteurs distingués d'une variété linéaire E_p constituent la base d'une variété involutive contenue dans E_p.

Théorème 9. *Le nombre des vecteurs distingués d'une variété linéaire E_p de base $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ est égal à la différence entre p et le rang de la matrice $\|[V_h, V_i]\|$.*

Soit $V=v^1V_1+v^2V_2+\ldots+v^pV_p$ un vecteur de E_p. Pour qu'il soit distingué, il faut et il suffit qu'il soit en involution avec les vecteurs de la base de E_p; les coefficients v^h doivent donc vérifier les p équations linéaires

(26) $$[V_h, V]=[V_h, V_1]v^1+[V_h, V_2]v^2+\ldots+[V_h, V_p]v^p=0 \qquad (h=1,2,\ldots,p).$$

Comme on a $[V_h, V_i]+[V_i, V_h]=0$, la matrice $\|[V_h, V_i]\|$ du système (26) est symétrique gauche, son rang est par suite un nombre pair que nous désignerons par $2q$. Le nombre de solutions linéairement indépendantes du système est donc égal à $p-2q$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *Toute variété linéaire de G_n dont la dimension est un nombre impair contient au moins un vecteur distingué.*

Théorème 10. *Si une variété linéaire E_r d'ordre maximum de base $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ est involutive, il existe un repère symplectique $\{U_a\}$ tel qu'il soit $U_h=V_h$ $(h=1,2,\ldots,r)$.*

Considérons pour le montrer le système de $r-1$ équations linéaires

$$[V_h, X]=0 \qquad (h=2,3,\ldots,r).$$

Celui-ci admet $r+1$ solutions linéairement indépendantes parmi lesquelles se trouvent les vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_r$, la variété E_r étant par hypothèse involutive. Désignons par V_{r+1} une solution indépendante de ceux-ci; on aura par suite

(27) $$[V_h, V_{r+1}]=0 \qquad (h=2,3,\ldots,r).$$

Le produit scalaire $[V_1, V_{r+1}]$ est différent de zéro, car autrement il existerait une variété involutive à $r+1$ dimensions ce qui est contraire au Théorème 6. Nous pouvons donc normer le vecteur V_{r+1} de façon qu'il soit

(28) $$[V_1, V_{r+1}]=1.$$

Le système de r équations linéaires

(29) $$[V_1, X]=0, \quad [V_3, X]=0, \quad [V_4, X]=0, \quad \ldots, \quad [V_{r+1}, X]=0,$$

admet r solutions indépendantes. Désignons par V_{r+2} une solution indépendante des vecteurs $V_2, V_3, \ldots, V_{r+1}$, qui vérifient tous les équations (29) et formons l'expression $[V_2, V_{r+2}]$. Celle-ci est différente de zéro, car dans le cas contraire le vecteur V_{r+2} serait en involution avec tous les vecteurs V_h $(h=1,2,\ldots,r)$ et par suite il serait contenu, d'après le Théorème 6, dans la variété E_r; on aurait alors

$$V_{r+2}=v^1V_1+v^2V_2+\ldots+v^rV_r.$$

V_{r+2} satisfaisant par définition à la dernière des équations (29), on en déduirait, en tenant compte des relations (27), l'égalité suivante

$$v^1[V_{r+1}, V_1]=0.$$

Le produit $[V_{r+1}, V_1]$ étant différent de zéro d'après la relation (28), il en résulterait l'égalité $v^1=0$. Le vecteur V_{r+2} s'exprimerait donc seulement an moyen des vecteurs $V_2, V_3, \ldots, V_r$ contrairement à sa définition. L'inégalité $[V_2, V_{r+2}]\neq 0$ étant ainsi établie, nous pouvons normer le vecteur V_{r+2} de manière qu'il soit

$$[V_2, V_{r+2}]=1.$$

En poursuivant ce procédé, on obtient $2r$ vecteurs V_a tels qu'il soit

$$[V_h, V_{r+h}]=1 \qquad (h=1,2,\ldots,r)$$

et que toutes les autres expressions $[V_\alpha, V_\beta]$ soient nulles. Les vecteurs V_a satisfont donc aux relations (21') ce qui prouve que le repère formé avec ceux-ci est symplectique (Théorème 4).

Théorème 11. *Si une variété linéaire $E_p (p<r)$ de base $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ est involutive, il existe un repère symplectique $\{U_a\}$ tel qu'il soit $U_h=V_h$ $(h=1,2,\ldots,p)$.*

Cette proposition est une conséquence immédiate des Théorèmes 8 et 10.

Une variété linéaire E de G_n sera appelée *variété polaire* d'une variété linéaire E_p, si tous les vecteurs qui sont en involution avec E_p, s'expriment linéairement par ceux de la base de E; cette relation entre les variétés E_p et E sera désignée par le symbole $E\circ E_p$. Il résulte immédiatement de la définition que si E est une variété polaire de E_p, la variété E_p est polaire de E: $E_p\circ E$.

THÉORÈME 12. *La dimension de la variété polaire d'une variété linéaire E_p est égale à $n-p$.*

Soit $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ la base de E_p; l'ensemble de vecteurs d'une variété polaire E étant par hypothèse identique avec celui des solutions du système d'équations linéaires

$$[V_h, X]=0 \qquad (h=1,2,\ldots,p),$$

il en résulte que la base de E se compose de $n-p$ vecteurs.

COROLLAIRE. *Les variétés polaires d'un hyperplan H sont des droites parallèles; nous dirons qu'elles sont des directrices de H.*

Il est facile de voir que, si l'on se donne une droite d, il existe un seul hyperplan passant par d et l'ayant pour directrice.

Les théorèmes suivants sont des conséquences presque immédiates de la définition des variétés polaires.

THÉORÈME 13. *Par chaque point d'une variété linéaire E passe une et seulement une variété polaire de E; leur partie commune est une variété involutive, dont la base est formée par les vecteurs distingués de E.*

THÉORÈME 14. *Si une variété linéaire E_p est involutive, elle fait partie de chaque variété polaire passant par l'un quelconque de ses points; si en particulier $p=r$, elle se confond avec chacune de ces variétés.*

THÉORÈME 15. *Si une variété linéaire E est dépourvue de vecteurs distingués, ses variétés polaires jouissent de la même propriété; la somme de E et de l'une quelconque de ses variétés polaires se confond avec tout l'espace G_n, les deux variétés n'ayant aucun vecteur en commun.*

THÉORÈME 16. *La variété polaire d'une droite d est un hyperplan; si celui-ci a un point en commun avec la droite d, il la contient toute.*

D'après le Corollaire du Théorème 9 la dimension d'une variété dépourvue de vecteurs distingués est un nombre pair. Nous allons démontrer sur ces variétés le suivant

THÉORÈME 17. *Si une variété linéaire E_{2p} est dépourvue de vecteurs distingués, on peut former sa base de $2p$ vecteurs*

$$U_1, U_2, \ldots U_p, \qquad V_1, V_2, \ldots, V_p,$$

choisis de telle manière, qu'il soit

$$[U_i, V_i]=1 \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

tous les autres produits scalaires étant nuls.

Le théorème étant évidemment vrai pour $p=1$, nous allons montrer que s'il était vrai pour $p=k-1$, il en serait de même pour $p=k$. Imaginons pour ce but une variété linéaire E_{2k} dépourvue de vecteurs distingués et désignons par U_1 et V_1 deux de ses vecteurs choisis de manière qu'il soit

$$(30) \qquad [U_1, V_1]=1.$$

Soit E une des variétés polaires de E_{2k}. Sa dimension est égale à $n-2k$ (Théorème 12); nous savons d'ailleurs qu'elle est aussi dépourvue de vecteurs distingués et qu'elle n'a aucun vecteur en commun avec E_{2k} (Théorème 15). Donc, si l'on adjoint à la base de E les vecteurs U_1 et V_1, on obtient une variété linéaire E' à $n-2k+2$ dimensions passant par E. Les variétés polaires de E' sont à $2k-2$ dimensions; soit $W_1, W_2, \ldots, W_{2k-2}$ la base de l'une d'elles. Tous ces vecteurs sont en involution avec E' et par suite avec E qui est un sous-espace de E'. Ils appartiennent donc à E_{2k}, celle-ci étant une variété polaire de E. U_1 et V_1 appartenant à E' ils sont en involution avec $W_1, W_2, \ldots, W_{2k-2}$; ils sont indépendants de ces vecteurs, car, si par exemple, le vecteur U_1 s'exprimerait linéairement au moyen de $W_1, W_2, \ldots, W_{2k-2}$, il devrait être en involution avec V_1 qui appartient à E'; or ceci est contraire à l'égalité (30). Nous pouvons donc prendre les vecteurs $U_1, V_1, W_1, W_2, \ldots, W_{2k-2}$ comme une base de E_{2k}. Une variété linéaire à $2(k-1)$ dimensions de base $\{W_1, W_2, \ldots, W_{2k-2}\}$ n'ayant aucun vecteur distingué, on peut, par hypothèse, remplacer sa base par une autre

$$U_2, U_3, \ldots, U_k, \qquad V_2, V_3, \ldots, V_k,$$

choisie de façon qu'il soit

$$[U_h, V_h]=1 \qquad (h=2,3,\ldots,k)$$

et que tous les autres produits scalaires soient nuls. Nous voyons ainsi que la base $U_1, U_2, \ldots, U_k, V_1, V_2, \ldots, V_k$ de la variété E_{2k} jouit de la propriété demandée, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 18. *Si une variété linéaire E_q contient h vecteurs distingués, on peut former sa base de q vecteurs*

$$U_1, U_2, \ldots, U_p, U_{p+1}, \ldots, U_{p+h}, \qquad V_1, V_2, \ldots, V_p \qquad (2p+h=q)$$

choisis de manière qu'il soit

$$[U_i, V_i]=1 \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

et que les autres produits scalaires soient nuls.

En effet, la différence $q-h$ étant un nombre pair (Théorème 9), posons $q-h=2p$ et désignons les vecteurs distingués de la base de E_q par $U_{p+1}, U_{p+2}, \ldots, U_{p+h}$. Un sous-espace linéaire de E_q déterminé par les vecteurs indépendants de $U_{p+1}, U_{p+2}, \dots, U_{p+h}$ est une variété linéaire à dimension $2p$ n'ayant aucun vecteur distingué. On peut donc lui appliquer le théorème précédent ce qui achève la démonstration.

Un raisonnement analogue à celui qui nous a conduit au Théorème 10 perment de démontrer les propositions suivantes:

THÉORÈME 19ª. *Si les vecteurs*

$$U_1, U_2, \dots, U_p$$

sont indépendants et deux à deux en involution, on peut trouver un repère symplectique $R_n\{I_\alpha\}$ tel qu'il soit $I_i = U_i$ $(i=1,2,\dots,p)$.

THÉORÈME 19ᵇ. *Si les vecteurs*

$$U_1, U_2, \dots, U_p, \qquad V_1, V_2, \dots, V_p,$$

sont indépendants et si l'on a $[U_i, V_i]=1$ $(i=1,2,\dots,p)$, tous les autres produits scalaires étant nuls, il existe un repère symplectique $R_n\{I_\alpha\}$ tel qu'il soit:

$$I_i = U_i, \qquad I_{r+i} = V_i \qquad (i=1,2,\dots,p).$$

THÉORÈME 19ᶜ. *Si les vecteurs*

$$U_1, U_2, \dots, U_p, U_{p+1}, \dots, U_{p+h}, \qquad V_1, V_2, \dots, V_p,$$

sont indépendants et si l'on a $[U_i, V_i]=1$ $(i=1,2,\dots,p)$, tous les autres produits scalaires étant nuls, il existe un repère symplectique $R_n\{I_\alpha\}$ tel qu'il soit

$$I_i = U_i \qquad (i=1,2,\dots,p+h),$$
$$I_{r+j} = V_j \qquad (j=1,2,\dots,p).$$

De ces propositions et des Théorèmes 11, 17, 18 résultent immédiatement les théorèmes suivants:

THÉORÈME 20. *Pour que deux variétés linéaires de l'espace symplectique soient équivalentes par rapport au groupe fondamental, il faut et il suffit qu'elles soient de la même dimension et du même nombre des vecteurs distingués.*

THÉORÈME 21. a) *Si une variété linéaire E_{2p} de l'espace symplectique est dépourvue de vecteurs distingués, tout vecteur de l'espace, issu d'un point de E_{2p} peut être décomposé en la somme de deux vecteurs involutifs dont l'un est situé dans E_{2p} et l'autre dans une variété polaire de E_{2p}.*

b) *Si une variété linéaire E_{2p+h} $(p \geqslant 0)$ a h vecteurs distingués, tout vecteur de l'espace issu d'un point de E_{2p+h} peut être décomposé en la somme de trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que V_1 soit situé dans E_{2p+h}, V_2 dans une variété linéaire à $n-(2p+2h)$ dimensions et V_3 dans une variété linéaire à h dimensions et qu'il soit $[V_1, V_2]=0$.*

40. Espaces symplectiques dégénérés. Nous avons défini au n° 38 l'espace symplectique en douant l'espace affine à $n=2r$ dimensions d'une forme quadratique extérieure de rang $2r$. Maintenant nous allons généraliser cette notion en introduisant dans un espace affine, dont la dimension n est un nombre pair ou impair, une forme quadratique extérieure Φ de rang $2s$ inférieur à n. L'espace ainsi défini sera appelé *espace symplectique dégénéré* et sera désigné par G_n^{2s}.

En faisant sur les coordonnées de l'espace une substitution convenable, nous pouvons ramener Φ à la forme canonique

$$\Phi = \sum_{i=1}^{s} [x^i x^{s+i}].$$

Le groupe fondamental de G_n^{2s} sera composé de translations et de transformations

$$(31) \qquad \begin{aligned} x^h &= P_i^h \bar{x}^i & (h, i = 1, 2, \dots, 2s), \\ x^j &= P_\varrho^j \bar{x}^\varrho, & (j = 2s+1, 2s+2, \dots, n;\ \varrho = 1, 2, \dots, n); \end{aligned}$$

les formules de la première ligne de (31) sont des transformations du groupe symplectique à $2s$ variables, celles de la seconde étant assujetties à la seule condition que la transformation (31) ne soit pas singulière. Il est facile de voir que la grande partie de notions et de propriétés de l'espace symplectique ordinaire peut être étendue aux espaces dégénérés avec des changements convenables. Nous n'y insisterons pas, en nous bornant à montrer que les variétés linéaires de l'espace symplectique ordinaire sont des espaces symplectiques dégénérés ou ordinaires avec une géométrie que leur confère l'espace ambiant.

En conservant les notations des numéros précédents, considérons un sous-espace linéaire E_q de G_n $(n=2r)$ dont nous supposons qu'il contienne h $(0 \leqslant h \leqslant r)$ vecteurs distingués. La différence $q-h$ étant un nombre pair, posons $q=2p+h$. Il résulte des Théorèmes 18 et 19ᶜ du n° 39 qu'on peut rapporter l'espace G_n à un repère symplectique $\{I_\alpha\}$ tel que son origine soit un point de E_q et que la base de E_q soit composée des vecteurs

$$I_1, I_2, \dots, I_p, I_{p+1}, \dots, I_{p+h},$$
$$I_{r+1}, I_{r+2}, \dots, I_{r+p}.$$

La variété E_p sera ainsi déterminée par les équations

$$x^{p+h+1} = 0, \quad x^{p+h+2} = 0, \quad \dots, \quad x^r = 0,$$
$$x^{r+p+1} = 0, \quad x^{r+p+2} = 0, \quad \dots, \quad x^{2r} = 0.$$

Si l'on lie les variables par ces équations, la forme fondamentale

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}]$$

de l'espace G_n subit une restriction en devenant

$$\bar{\Omega}=\sum_{j=1}^{p}[x^j x^{r+j}].$$

Nous lui donnerons le nom de *forme induite* dans la variété E_q par l'espace ambiant G_n. Le rang de $\bar{\Omega}$ étant $2p$, nous voyons donc que le rang de la forme induite dans un sous-espace linéaire E_q est égal ou inférieur à la dimension de E_q selon que l'on a $h=0$ ou $h\neq 0$. Dans le premier cas la variété E_q est un espace symplectique ordinaire, dans le second un espace dégénéré. Il est évident que, si la variété E_q est involutive, sa forme induite est nulle et la variété E_q est un espace affine général à q dimensions. Nous avons ainsi démontré le suivant

THÉORÈME 22. *Une variété linéaire E_q de l'espace G_n est un espace symplectique ordinaire ou dégénéré selon que l'on a $h=0$ ou $h\neq 0$, h désignant le nombre de vecteurs distingués de E_q.*

Remarquons encore que la forme induite d'une variété polaire de E_q est

$$\bar{\bar{\Omega}}=\sum_{l=p+h+1}^{r}[x^l x^{r+l}],$$

donc, si $h=0$, on a

$$\Omega=\bar{\Omega}+\bar{\bar{\Omega}}.$$

Les propositions obtenues ci-dessus nous permettent d'énoncer le Théorème 20 du n° 39 de la manière suivante:

THÉORÈME 23. *Pour que deux variétés linéaires d'un espace symplectique soient équivalentes par rapport au groupe symplectique, il faut et il suffit que leurs dimensions soient égales et que les formes induites que leur confère l'espace ambiant soient du même rang.*

§ 2. Propriétés du groupe symplectique

41. Transvections. Désignons comme auparavant par G_n l'espace symplectique à $n=2r$ dimensions rapporté à un repère symplectique $R_n(I_a)$ d'origine O. Parmi les transformations du groupe symplectique Sp_n signalons celles qui laissent invariants tous les points d'un hyperplan passant par l'origine O de R_n; ce sont les *transvections symplectiques* [17]. Il est clair qu'une transformation conservant les points d'un hyperplan quelconque a la forme $S^{-1}TS$, T étant une transvection et S une translation convenablement choisies.

[17]) J. Dieudonné [7], p. 9.

Soit

$$\omega=a_\varrho x^\varrho=0$$

l'équation d'un hyperplan H passant par l'origine des coordonnées O. Les coefficients de la forme linéaire ω sont des composantes covariantes d'un vecteur A; si l'on les remplace par les composantes contrevariantes en se servant des formules

$$a_r=-a^{r+h},\qquad a_{r+h}=a^h$$

(cf. n° 36, équation (16)) la forme ω deviendra

$$\omega=-\sum_{h=1}^{r}(a^{r+h}x^h-a^h x^{r+h}). \tag{1}$$

Remarquons que la droite passant par l'origine O et portée par le vecteur A est une directrice de l'hyperplan H (n° 39, Corollaire du Théorème 12).

La transformation linéaire qui conserve les points de H peut donc être représentée par les formules

$$\bar{x}^k=x^k+p^k\omega \tag{2}$$

ou

$$\bar{x}^k=x^k-p^k\sum_{h=1}^{r}(a^{r+h}x^h-a^h x^{r+h}),$$

$p^\varkappa$ désignant les composantes contrevariantes d'un vecteur P. Pour que cette transformation soit symplectique, il faut et il suffit qu'il soit identiquement

$$\sum_{i=1}^{r}[\bar{x}^i\bar{x}^{r+i}]=\sum_{i=1}^{r}[x^i x^{r+i}].$$

Si l'on y remplace $\bar{x}^i$ et $\bar{x}^{r+i}$ par les expressions déduites des formules (2), on obtient l'égalité

$$\sum_{i=1}^{r}p^i[\omega x^{r+i}]+\sum_{i=1}^{r}p^{r+i}[x^i\omega]=0.$$

En tenant compte de la formule (1), celle-ci devient

$$\frac{1}{2}\sum_{h,i=1}^{r}(a^{r+i}p^{r+h}-a^{r+h}p^{r+i})[x^h x^i]$$
$$+\sum_{h,i=1}^{r}(a^{r+h}p^i-a^i p^{r+h})[x^h x^{r+i}]-\frac{1}{2}\sum_{h,i=1}^{r}(a^h p^i-a^i p^h)[x^{r+h}x^{r+i}]=0.$$

Pour que cette relation soit identiquement satisfaite, il faut et il suffit que les vecteurs $P=\{p^\varkappa\}$ et $A=\{a^\varkappa\}$ soient linéairement liés:

$$p^\varkappa=\lambda a^\varkappa.$$

Les formules (3) prendront alors la forme

(4) $$\bar{x}^\varkappa = x^\varkappa - \lambda a^\varkappa \sum_{i=1}^{r} (a^{r+i} x^i - a^i x^{r+i});$$

c'est la transvection symplectique la plus générale. Si l'on y suppose que A soit un vecteur fixe et que l'on fait varier λ, on obtient un sous-groupe de Sp_n, composé de transvections; nous dirons que ces transvections sont *associées* à l'hyperplan H.

Si l'on désigne respectivement par X et $\bar{X}$ les vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{O\bar{M}}$, M et $\bar{M}$ étant les points de coordonnées respectives $x^\varkappa$ et $\bar{x}^\varkappa$ et que l'on tient compte de la formule

$$[A,X] = -\sum_{h=1}^{r} (a^{r+h} x^h - a^h x^{r+h}),$$

l'égalité (4) peut s'écrire sous la forme condensée

(5) $$\bar{X} = X + \lambda [A,X] A.$$

On voit d'après cette formule que la transvection formée au moyen du vecteur A conserve tous les vecteurs qui sont en involution avec A.

Désignons la transformation (5) par S et considérons une seconde transvection T formée au moyen d'un paramètre μ et d'un vecteur $B = \{b^\varkappa\}$ qui soit en involution avec A:

(6) $$\bar{X} = X + \mu [B,X] B, \qquad [A,B] = 0.$$

Le produit TS est donnée par la formule

$$\bar{X} = X + \lambda [A,X] A + \mu [B, (X + \lambda [A,X] A)] B.$$

L'expression $[A,B]$ étant par hypothèse nulle, la dernière formule se simplifie, et on a

(7) $$\bar{X} = X + \lambda [A,X] A + \mu [B,X] B.$$

On en conclut que les transvections S et T sont permutables et que leur produit laisse invariants tous les vecteurs qui sont en involution avec A et B. Si l'on désigne par H' l'hyperplan auquel les transvections du sous-groupe (6) sont associées, on peut encore dire que *les transformations du sous-groupe* (7) *conservent tous les points d'une variété linéaire à* $n-2$ *dimensions qui est l'intersection des hyperplans* H *et* H'.

Cette proposition peut être généralisée; en effet, imaginons q vecteurs linéairement distincts

$$A_1, A_2, \ldots, A_q$$

qui soient deux à deux en involution:

$$[A_h, A_i] = 0 \qquad (h,i = 1,2,\ldots,q),$$

et posons

$$\bar{X} = X + \lambda_i [A_i, X] A_i \qquad (i = 1,2,\ldots,q),$$

λ_i étant des paramètres arbitraires. Ces transvections engendrent un sous-groupe abélien à q paramètres du groupe symplectique. La transformation générale de ce sous-groupe a la forme

$$\bar{X} = X + \lambda^1 [A_1, X] A_1 + \lambda^2 [A_2, X] A_2 + \ldots + \lambda^q [A_q, X] A_q;$$

nous l'appellerons *transvection généralisée*. Elle conserve tous les points d'une variété linéaire à $n-q$ dimensions passant par l'origine des coordonnées. Comme le nombre de vecteurs de l'espace G_n $(n=2r)$, qui soient deux à deux en involution, ne peut pas surpasser r, il s'ensuit que l'ordre d'un sous-groupe des transvections généralisées est au plus égal à r et qu'il peut atteindre ce nombre.

Imaginons maintenant une variété linéaire E_q de l'espace G_n passant par l'origine O des coordonnées et désignons par h le nombre de ses vecteurs distingués. Nous pouvons choisir le repère symplectique auquel l'espace est rapporté de telle manière que la base de E_q soit composée des vecteurs

$$\begin{matrix} I_1, I_2, \ldots, I_p, I_{p+1}, \ldots, I_{p+h}, \\ I_{r+1}, I_{r+2}, \ldots, I_{r+p} \end{matrix} \qquad (2p+h=q)$$

(voir Théorèmes 18 et 19° du n° 39). Les vecteurs $I_{p+1}, I_{p+2}, \ldots, I_r$ étant deux à deux en involution et en involution avec E_q, il s'ensuit que les points de E_q sont conservés par les transformations d'un sous-groupe Γ_{r-p} de Sp_n; ce sous-groupe est engendré par les transvections formées au moyen des vecteurs $I_{p+1}, I_{p+2}, \ldots, I_r$. D'où

THÉORÈME 1. *Tous les points d'une variété linéaire* E_q *de* G *passant par l'origine des coordonnées et admettant* h *vecteurs distingués, sont invariants par les transformations d'un sous-groupe d'ordre* $r-p$ $(p=(q-h)/2)$ *de* Sp_n.

COROLLAIRE. *Si la variété linéaire* E_p *est involutive* $(q=h)$, *le sous-groupe qui conserve ses points est d'ordre* r.

42. Forme réduite d'une transformation symplectique. Soit donnée une transformation S du groupe symplectique Sp_n $(n=2r)$:

(8) $$\bar{x}^\varkappa = P^\varkappa_\varrho x^\varrho.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La matrice de la substitution* S *peut être ramenée à la forme*

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} t_1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & t_r & 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1/t_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/t_r \end{array} \right\|$$

au moyen des transformations symplectiques effectuées sur les variables $x^{\varkappa}$.

Pour démontrer ce théorème envisageons l'équation caractéristique de la transformation (8)

(9) $$|P^{\varkappa}_{\varrho} - \delta^{\varkappa}_{\varrho} t| = 0,$$

$\delta^{\varkappa}_{\varrho}$ étant les symboles de Kronecker. Le déterminant $|P^{\varkappa}_{\sigma}|$ étant égal à 1 (Théorème 1 du n⁰ 38), toutes les racines de l'équation (9) sont différentes de zéro. Soit t_1 l'une d'elles; le système d'équations

(10) $$P^{\varkappa}_{\varrho} x^{\varrho} = t_1 x^{\varkappa}$$

admettra donc une solution non nulle $x^{\varkappa} = a^{\varkappa}$.

Désignons par V le vecteur de composantes $a^{\varkappa}$ et supposons que l'on introduise des nouvelles variables $\bar{x}^{\varkappa}$ à l'aide d'une transformation symplectique T de matrice Q. On sait que dans le système des variables $\bar{x}^{\varkappa}$ la matrice de la transformation S sera égale au produit QPQ^{-1}, P désignant la matrice de S, et que l'équation caractéristique de S sera conservée. Il est facile de verifier que le vecteur V_1, que l'on obtient en effectuant sur V la transformation T, représente une solution du système d'équations correspondant au système (10) dans les variables $\bar{x}^{\varkappa}$. On peut donc supposer que les variables $x^{\varkappa}$ soient choisies de telle manière que la solution du système (10) soit composée des nombres

$$x^1 = 1, \qquad x^2 = 0, \qquad x^3 = 0, \qquad \ldots, \qquad x^{2r} = 0.$$

En les substituant dans les équations (10), on trouve qu'il doit être

(11) $$P^1_1 = t_1, \qquad P^2_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad P^{2r}_1 = 0.$$

La transformation (8) étant symplectique, ses coefficients sont assujettis aux relations

(12) $$\sum_{i=1}^{r} (P^i_{\varrho} P^{r+i}_{\sigma} - P^i_{\sigma} P^{r+i}_{\varrho}) = I_{\varrho\sigma}$$

(voir équation (18′) du n⁰ 38). Si l'on pose $\sigma = 1$ et que l'on tient compte des égalités (11), elles se réduisent aux suivantes:

$$P^1_1 P^{r+1}_{\sigma} = I_{1\sigma},$$

ce qui donne

(13) $$P^{r+1}_1 = P^{r+1}_2 = \ldots = P^{r+1}_r = P^{r+1}_{r+2} = \ldots = P^{r+1}_{2r} = 0, \qquad P^{r+1}_{r+1} = \frac{1}{t_1}.$$

Donc, si $r = 1$, les formules (8) deviennent

$$\bar{x}^1 = t_1 x^1 + P^1_2 x^2_1, \qquad \bar{x}^2 = \frac{1}{t_1} x^2,$$

et dans ce cas spécial le théorème est ainsi démontré.

Supposons maintenant que r soit supérieur à 1. En vertu des formules (11) et (13) l'équation (9) peut s'écrire

$$(t - t_1)\left(t - \frac{1}{t_1}\right) |P^{\varkappa'}_{\varrho'} - \delta^{\varkappa'}_{\varrho'} t| = 0 \qquad (\varkappa', \varrho' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r)$$

et la transformation (8) prend la forme

(14) $$\bar{x}^1 = t_1 x^1 + P^1_{\varrho'} x^{\varrho'}, \qquad \bar{x}^{r+1} = \frac{x^{r+1}}{t_1}, \qquad \bar{x}^{\varkappa'} = P^{\varkappa'}_{\varrho'} x^{\varrho'}$$
$$(\varkappa', \varrho' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r).$$

D'après les relations (12) il doit être

(15) $$\sum_{i=1}^{r} (P^i_{\varrho'} P^{r+i}_{\sigma'} - P^i_{\sigma'} P^{r+i}_{\varrho'}) = I_{\varrho'\sigma'} \qquad (\varrho', \sigma' = 2, 3, \ldots, r, r+2, \ldots, 2r);$$

le premier membre de cette relation peut être écrit comme suit

$$P^1_{\varrho'} P^{r+1}_{\sigma'} - P^1_{\sigma'} P^{r+1}_{\varrho'} + \sum_{j=2}^{r} (P^j_{\varrho'} P^{r+j}_{\sigma'} - P^j_{\sigma'} P^{r+j}_{\varrho'})$$

ou encore, les coefficients $P^{r+1}_{\varrho'}$ et $P^{r+1}_{\sigma'}$ étant tous nuls d'après les égalités (13)

$$\sum_{j=2}^{r} (P^j_{\varrho'} P^{r+j}_{\sigma'} - P^j_{\sigma'} P^{r+j}_{\varrho'}).$$

L'égalité (15) se réduit donc à la suivante

$$\sum_{j=2}^{r} (P^j_{\varrho'} P^{r+j}_{\sigma'} - P^j_{\sigma'} P^{r+j}_{\varrho'}) = I_{\varrho'\sigma'} \qquad (\varrho', \sigma' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r).$$

Nous voyons ainsi que la troisième des formules (14) représente une transformation symplectique à $2(r-1)$ variables $x^2, x^3, \ldots, x^r, x^{r+2}, x^{r+3}, \ldots, x^{2r}$. Si l'on suppose que le théorème à démontrer soit vrai dans le cas d'une transformation symplectique à $2(r-1)$ variables, la transformation

$$\bar{x}^{\varkappa'} = P^{\varkappa'}_{\varrho'} x^{\varrho'} \qquad (\varkappa', \varrho' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r)$$

peut être supposée réduite à la forme

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= t_2 x^2 + \lambda_2 x^{r+2}, & \bar{x}^{r+2} &= \frac{1}{t_2} x^{r+2}, \\ \bar{x}^3 &= t_3 x^3 + \lambda_3 x^{r+3}, & \bar{x}^{r+3} &= \frac{1}{t_3} x^{r+3}, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}^r &= t_r x^r + \lambda_r x^{2r}, & \bar{x}^{2r} &= \frac{1}{t_r} x^{2r}, \end{aligned}$$

et par suite les formules (14) deviennent, dans la même hypothèse,

$$(16) \qquad \begin{aligned} \bar{x}^1 &= t_1 x^1 + P^1_{\varrho'} x^{\varrho'}, & \bar{x}^{r+1} &= \frac{1}{t^1} x^{r+1}, \\ \bar{x}^2 &= t_2 x^2 + \lambda_2 x^{r+2}, & \bar{x}^{r+2} &= \frac{1}{t^2} x^{r+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}^r &= t_r x^r + \lambda_r x^{2r}, & \bar{x}^{2r} &= \frac{1}{t_r} x^{2r}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant qu'en posant $\varrho \neq 1$, $r+1$ et $\sigma = r+1$, la relation (12) devient

$$\sum_{i=1}^{r} (P^i_\varrho P^{r+i}_{r+1} - P^i_{r+1} P^{r+i}_\varrho) = 0.$$

Les coefficients de la transformation (16) devant vérifier cette condition, on en conclut qu'il doit être

$$P^1_\varrho P^{r+1}_{r+1} = 0,$$

d'où

$$P^1_\varrho = 0 \qquad (\varrho \neq 1, r+1),$$

le coefficient $P^{r+1}_{r+1} = 1/t_1$ étant différent de zéro. La première des formules (16) peut donc s'écrire comme il suit:

$$\bar{x}^1 = t_1 x^1 + \lambda_1 x^{r+1}.$$

Nous voyons ainsi que, si le théorème est supposé vrai pour $n = 2(r-1)$, il l'est encore pour $n = 2r$. Ceci achève la démonstration, car nous avons vu que la proposition est vraie pour $n = 2$. Remarquons que le Théorème 2 peut être énoncé comme il suit

THÉORÈME 2'. *Toute transformation symplectique peut être ramenée à la forme*

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= t_1 x^1 + \lambda_1 x^{r+1}, & \bar{x}^{r+1} &= \frac{1}{t_1} x^{r+1}, \\ \bar{x}^2 &= t_2 x^2 + \lambda_2 x^{r+2}, & \bar{x}^{r+2} &= \frac{1}{t_2} x^{r+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}^r &= t_r x^r + \lambda_r x^{2r}, & \bar{x}^{2r} &= \frac{1}{t_r} x^{2r}. \end{aligned}$$

Remarque. On voit sur les dernières formules que la transformation S est le produit de r transformations suivantes:

$$\bar{x}^i = t_i x^i + \lambda_i x^{r+i}, \qquad \bar{x}^{r+i} = \frac{1}{t_i} x^{r+i}, \qquad \bar{x}^\varkappa = x^\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, r; \varkappa \neq i, r+i).$$

Ceci nous permet de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Toute transformation symplectique est un produit de transvections symplectiques.*

D'après la Remarque ci-dessus, il suffit de le montrer pour une transformation symplectique de la forme

$$(17) \qquad \bar{x}^1 = \alpha x^1 + \beta x^2, \qquad \bar{x}^2 = \frac{1}{\alpha} x^2,$$

c'est-à-dire pour une transformation unimodulaire à deux variables. Nous y distinguerons deux cas suivant que l'on a $\alpha = 1$ ou $\alpha \neq 1$.

1⁰ Dans le cas $\alpha = 1$ la transformation (17) s'écrit

$$(17') \qquad \bar{x}^1 = x^1 + \beta x^2, \qquad \bar{x}^2 = x^2.$$

En vertu des formules (4) du n⁰ 41 une transvection à deux variables x^1 et x^2 a la forme

$$\bar{x}^1 = (1 - \lambda a^1 a^2) x^1 + \lambda (a^1)^2 x^2, \qquad \bar{x}^2 = -\lambda (a^2)^2 x^1 + (1 + \lambda a^1 a^2) x^2.$$

Si l'on y pose

$$a^1 = 1, \qquad a^2 = 0, \qquad \lambda = \beta,$$

elle devient identique avec la transformation (17'). On voit donc que celle-ci est elle-même une transvection.

2⁰ Supposons maintenant qu'il soit $\alpha \neq 1$ et considérons les quatre transformations:

$$R:\begin{cases}\bar{x}^1=x^1,\\ \bar{x}^2=-\mu x^1+x^2;\end{cases}\qquad S:\begin{cases}\bar{x}^1=x^1+\varkappa x^2,\\ \bar{x}^2=x^2;\end{cases}$$

$$T:\begin{cases}\bar{x}^1=x^1,\\ \bar{x}^2=-\nu x^1+x^2;\end{cases}\qquad U:\begin{cases}\bar{x}^1=x^1+\lambda x^2,\\ \bar{x}^2=x^2;\end{cases}$$

qui, comme on a vu plus haut, sont toutes des transvections. Un calcul aisé montre que le produit $UTSR$ donne la transformation

$$\bar{x}^1=(1-\varkappa\mu-\lambda\mu-\lambda\nu+\varkappa\lambda\mu\nu)x^1+(\varkappa+\lambda-\varkappa\lambda\nu)x^2,$$

$$\bar{x}^2=(\varkappa\mu\nu-\mu-\nu)x^1+(1-\varkappa\nu)x^2.$$

Pour l'identifier avec (17) il faut poser

$$1-\varkappa\mu-\lambda\mu-\lambda\nu+\varkappa\lambda\mu\nu=\alpha,\qquad \varkappa+\lambda-\varkappa\lambda\nu=\beta,$$

$$\varkappa\mu\nu-\mu-\nu=0,\qquad 1-\varkappa\nu=\frac{1}{\alpha}.$$

Ce système d'équations aux inconnues $\varkappa,\lambda,\mu,\nu$ est équivalent au suivant:

$$1-\varkappa\mu=\alpha,\qquad \varkappa+\frac{\lambda}{\alpha}=\beta,\qquad \alpha\nu+\mu=0.$$

Si $\beta\neq 0$, il est vérifié par les valeurs

$$\varkappa=\beta,\qquad \lambda=0,\qquad \mu=\frac{1-\alpha}{\beta},\qquad \nu=\frac{\alpha-1}{\alpha\beta},$$

si $\beta=0$, on peut le satisfaire en posant

$$\varkappa=1,\qquad \lambda=-\alpha,\qquad \mu=1-\alpha,\qquad \nu=\frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

On voit ainsi que dans tous les cas la transformation (17), si elle n'est pas une transvection, peut être décomposée en un produit de trois ou quatre transvections.

43. Transformations infinitésimales du groupe symplectique. Le groupe symplectique étant continu, il peut être engendré par les transformations infinitésimales de Lie. Or, dans ce numéro, nous allons déterminer ces transformations infinitésimales en démontrant un théorème qui peut s'énoncer ainsi:

THÉORÈME 4. *La transformation infinitésimale la plus générale du groupe symplectique Sp_n $(n=2r)$ est donnée par la formule*

$$Xf=(\Phi,f),$$

le symbole (Φ,f) désignant la parenthèse de Poisson formée pour les deux séries des variables $x^1,x^2,\dots,x^r$ et $x^{r+1},x^{r+2},\dots,x^{2r}$, f étant une fonction arbitraire et Φ la fonction quadratique

$$\Phi=\frac{1}{2}a_{\varrho\sigma}x^\varrho x^\sigma,$$

dont les coefficients satisfont seulement à la condition

$$a_{\varrho\sigma}=a_{\sigma\varrho}.$$

Soient

$$\delta x^\varkappa=a^\varkappa_\varrho x^\varrho\,\delta t \tag{18}$$

les équations d'une transformation infinitésimale du groupe symplectique Sp_n $(n=2r)$. Les expressions de $\delta x^\varkappa$ doivent donc satisfaire à la condition

$$I_{\alpha\varrho}[x^\alpha x^\varrho]=I_{\alpha\varrho}[(x^\alpha+\delta x^\alpha)(x^\varrho+\delta x^\varrho)],$$

si l'on y néglige les termes du second degré en δt. Cette relation peut être par suite remplacée par la suivante

$$I_{\alpha\varrho}[x^\alpha\delta x^\varrho]+I_{\alpha\varrho}[\delta x^\alpha x^\varrho]=0.$$

Si l'on change le rôle des indices α et ϱ dans le second membre et que l'on tient compte de l'égalité $I_{\varrho\alpha}=-I_{\alpha\varrho}$, on en déduit la condition

$$I_{\alpha\varrho}[x^\alpha\delta x^\varrho]=0.$$

En substituant aux δx^ϱ leurs expressions $a^\varrho_\beta x^\beta\delta t$, déduites des formules (18), on aura

$$I_{\alpha\varrho}a^\varrho_\beta[x^\alpha x^\beta]=0.$$

Cette relation devant être identiquement vérifiée, il en résulte que les coefficients dans les formules (18) sont assujettis aux conditions

$$I_{\alpha\varrho}a^\varrho_\beta+I_{\beta\varrho}a^\varrho_\alpha=0, \tag{19}$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que la transformation infinitésimale (18) soit symplectique. En posant dans les relations (19)

$$I_{\alpha\varrho}a^\varrho_\beta=-a_{\beta\alpha},\qquad I_{\varrho\beta}a^\varrho_\alpha=a_{\alpha\beta},$$

selon les règles du jeu des indices (n° 36), on les ramène finalement à la forme

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}. \tag{20}$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité $I_{\sigma\beta}a^\sigma_\alpha=a_{\alpha\beta}$ par $I^{\varrho\beta}$ et que l'on somme par rapport à β, en tenant compte de la relation $I^{\varrho\beta}I_{\sigma\beta}=\delta^\varrho_\sigma$, on obtient

$$\delta^\varrho_\sigma a^\sigma_\alpha=I^{\varrho\beta}a_{\beta\alpha}$$

ou

$$a^{\varrho}_{\alpha} = I^{\varrho\beta} a_{\beta\alpha}.$$

Ceci permet de présenter les formules (18) sous la forme

$$\delta x^{\varkappa} = a_{\varrho\sigma} I^{\varkappa\sigma} x^{\varrho}\,\delta t.$$

Si l'on substitue ces expressions dans la formule

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}}\,\delta x^{\varkappa},$$

où f désigne une fonction quelconque des variables $x^{\varkappa}$, et que l'on pose $\delta f = Xf\,\delta t$, on en déduit le symbole de la transformation infinitésimale la plus générale du groupe Sp_n

$$Xf = a_{\varrho\sigma} I^{\varkappa\sigma} x^{\varrho} \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}} \tag{21}$$

dont les coefficients sont assujettis à l'unique condition (20). En posant

$$X^{\varrho\sigma} f = (I^{\varkappa\varrho} x^{\sigma} + I^{\varkappa\sigma} x^{\varrho}) \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}}, \tag{22}$$

le symbole (21) prendra la forme

$$Xf = \frac{1}{2} a_{\varrho\sigma} X^{\varrho\sigma} f. \tag{23}$$

Remarquons que les expressions $X^{\varrho\sigma}f$ sont symétriques dans leurs indices:

$$X^{\varrho\sigma} f = X^{\sigma\varrho} f.$$

Introduisons maintenant la forme quadratique du second degré en les variables $x^{\varkappa}$:

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} x^{\sigma};$$

on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\sigma}} = a_{\varrho\sigma} x^{\varrho}$$

et par suite la formule (21) pourra être écrite comme il suit

$$Xf = I^{\varkappa\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\sigma}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}}.$$

En tenant compte des égalités

$$I^{\varkappa\sigma} + I^{\sigma\varkappa} = 0, \qquad I^{\varkappa\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \sigma = \varkappa + r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\sigma - \varkappa| \neq r, \end{cases}$$

la dernière expression de Xf prendra la forme

$$Xf = \sum_{h=1}^{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{r+h}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^{h}} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^{h}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}} \right)$$

ou

$$Xf = (\Phi, f), \tag{24}$$

le symbole (Φ, f) désignant la parenthèse de Poisson pour la paire des fonctions Φ, f et pour les deux séries des variables $x^1, x^2, \dots, x^r$ et $x^{r+1}, x^{r+2}, \dots, x^{2r}$.

Remarquons que la parenthèse de Poisson est le produit scalaire symplectique de deux vecteurs $\{\partial f/\partial x^{\varrho}\}$ et $\{\partial \Phi/\partial x^{\varrho}\}$ (cf. n° 35).

Le théorème étant ainsi démontré, revenons aux formules (22); on peut distinguer entre elles trois familles en posant successivement: 1° $\varrho, \sigma \leqslant r$, 2° $\varrho \leqslant r$, $\sigma > r$ et 3° $\varrho, \sigma > r$. On obtient ainsi respectivement les formules suivantes:

$$\begin{aligned} &1^{\circ}\quad X^{hi} f = x^{h} \frac{\partial f}{\partial x^{r+i}} + x^{i} \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}, \\ &2^{\circ}\quad X^{h,r+i} f = -x^{h} \frac{\partial f}{\partial x^{i}} + x^{r+i} \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}, \qquad (h, i = 1, 2, \dots, r). \\ &3^{\circ}\quad X^{r+h,r+i} f = x^{r+h} \frac{\partial f}{\partial x^{i}} + x^{r+i} \frac{\partial f}{\partial x^{h}} \end{aligned} \tag{25}$$

Un calcul facile permet de vérifier que les parenthèses de ces transformations s'expriment de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &(X^{hi} X^{jk}) = 0, \qquad (X^{r+h,r+i} X^{r+j,r+k}) = 0, \\ &(X^{hi} X^{j,r+k}) = -(\delta_{kh} X^{ij} f + \delta_{ki} X^{hj} f), \\ &(X^{hi} X^{r+j,r+k}) = \delta_{jh} X^{i,r+k} f + \delta_{ji} X^{h,r+k} f + \delta_{kh} X^{i,r+j} f + \delta_{ki} X^{h,r+j} f, \\ &(X^{h,r+i} X^{j,r+k}) = \delta_{ij} X^{h,r+k} f - \delta_{kh} X^{j,r+i} f, \\ &(X^{h,r+i} X^{r+j,r+k}) = -\delta_{hj} X^{r+k,r+i} f - \delta_{hk} X^{r+j,r+i} f \\ &\qquad\qquad (h, i, j, k = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \tag{26}$$

δ_{ij} désignant les symboles de Kronecker. De ces relations qui nous seront utiles plus tard, il résulte en particulier que chacune de trois familles (25) de transformations infinitésimales engendre un sous-groupe du groupe symplectique. C'est une conséquence du fait que les parenthèses des transformations de chacune de ces familles s'expriment par les transformations de la famille même. Ajoutons encore que le premier et le troisième de ces sous-groupes sont des groupes abéliens, leurs parenthèses étant toutes nulles.

Les transformations finies des groupes à un paramètre engendrés respectivement par $X^{hi}f$, $X^{h,r+i}f$ et $X^{r+h,r+i}f$ ont la forme

$$X^{hi}f:\quad \bar{x}^j=x^j, \qquad (j=1,\dots,r),$$
$$\bar{x}^{r+h}=x^{r+h}+tx^i,\qquad \bar{x}^{r+i}=x^{r+i}+tx^h,$$
$$\bar{x}^{r+k}=x^{r+k} \qquad (k\neq h,i);$$
$$X^{h,r+i}f:\quad \bar{x}^i=x^i+tx^h,\qquad \bar{x}^j=x^j,$$
$$\bar{x}^{r+h}=x^{r+h}-tx^{r+i},\qquad x^{r+j}=x^{r+j} \qquad (j\neq h);$$
$$X^{r+h,r+i}f:\quad \bar{x}^h=x^h+tx^{r+i},\qquad \bar{x}^i=x^i+tx^{r+h},\qquad \bar{x}^j=x^j$$
$$\bar{x}^{r+k}=x^{r+k} \qquad (k=1,2,\dots,r;\ j\neq h,i).$$

Nous allons montrer que *les transformations infinitésimales* (25) *sont linéairement indépendantes*, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation linéaire à coefficients constants. En effet, supposons qu'il soit identiquement

$$\sum_{h,i=1}^{r}(\alpha_{hi}X^{hi}f+\beta_{hi}X^{h,r+i}f+\gamma_{hi}X^{r+h,r+i}f)=0,$$

$\alpha_{hi}=\alpha_{ih}$, β_{hi} et $\gamma_{hi}=\gamma_{ih}$ étant des constantes. En y substituant à $X^{hi}f, X^{h,r+i}$ et $X^{r+h,r+i}f$ leurs expressions données ci-dessus, on obtient la relation

$$\sum_{h,i=1}^{r}\Big(\alpha_{hi}x^h\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}+\alpha_{hi}x^i\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}-\beta_{hi}x^h\frac{\partial f}{\partial x^i}+\beta_{hi}x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}$$
$$+\gamma_{hi}x^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x^i}+\gamma_{hi}x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^h}\Big)=0.$$

Si l'on y change le rôle des indices h et i dans le premier et dans le dernier terme du premier membre, on trouve

$$\sum_{h,i=1}^{r}\Big((2\gamma_{hi}x^{r+h}-\beta_{hi}x^h)\frac{\partial f}{\partial x^i}+(2\alpha_{hi}x^i+\beta_{hi}x^{r+i})\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\Big)=0.$$

Les coefficients de $\partial f/\partial x^i$ et de $\partial f/\partial x^{r+h}$ devant être identiquement nuls, il en résulte

$$\alpha_{hi}=0,\qquad \beta_{hi}=0,\qquad \gamma_{hi}=0,$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons maintenant que le nombre des transformations (25) du premier et du troisième groupe est égal à $r(r+1)$ et celui du deuxième groupe est égal à r^2; le nombre total de ces transformations est par suite $r(2r+1)$. D'où le

THÉORÈME 5. *Le nombre de transformations infinitésimales indépendantes du groupe symplectique Sp_n $(n=2r)$ est égal à $r(2r+1)$, autrement dit, ce groupe est à $r(2r+1)$ paramètres.*

Remarque. Il résulte des théorèmes ainsi démontrés que les trois sous-groupes, dont il était question, sont respectivement à $r(r+1)/2$, r^2 et $r(r+1)/2$ paramètres.

D'après le Théorème 4 la transformation infinitésimale la plus générale du groupe Sp_n se déduit de la fonction

$$\Phi=\frac{1}{2}a_{\varrho\sigma}x^\varrho x^\sigma \qquad (a_{\varrho\sigma}=a_{\sigma\varrho})$$

au moyen de la parenthèse de Poisson. Or, la fonction quadratique Φ peut être mise sous la forme

$$\Phi=\frac{1}{2}\varepsilon_\varkappa(\omega^\varkappa)^2,\qquad \varepsilon_\varkappa=0,\pm1,$$

$\omega^\varkappa$ désignant une forme linéaire des variables x^λ:

$$\omega^\varkappa=\sum_{h=1}^{r}(a_\varkappa^{r+h}x^h-a_\varkappa^h x^{r+h}).$$

On en déduit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^h}=\sum_{\varkappa=1}^{2r}\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^{r+h}\omega^\varkappa,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x^{r+h}}=-\sum_{\varkappa=1}^{2r}\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^h\omega^\varkappa.$$

Si l'on substitue ces expressions dans la formule

$$(\Phi,f)=\sum_{h=1}^{r}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x^{r+h}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^h}-\frac{\partial\Phi}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\Big)$$

on aura

$$(\Phi,f)=\sum_{\varkappa=1}^{2r}\sum_{h=1}^{r}\varepsilon_\varkappa\omega^\varkappa\Big(a_\varkappa^h\frac{\partial f}{\partial x^h}+a_\varkappa^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa^{r+h}}\Big)$$

ou

$$(\Phi,f)=\sum_{\varkappa,\varrho=1}^{2r}\varepsilon_\varkappa\omega^\varkappa a_\varkappa^\varrho\frac{\partial f}{\partial x^\varrho}.$$

Donc, si l'on pose

$$X_\varkappa f=\sum_{\varrho=1}^{2r}\varepsilon_\varkappa\omega^\varkappa a_\varkappa^\varrho\frac{\partial f}{\partial x^\varrho},$$

la transformation infinitésimale du groupe Sp_n prendra la forme

$$Xf=\sum_{k=1}^{2r}X_\varkappa f. \tag{27}$$

Remarquons que l'équation

$$\omega^{\varkappa}=\sum_{h=1}^{2r}(a_{\varkappa}^{r+h}x^h-a_{\varkappa}^{h}x^{r+h})=0$$

représente un hyperplan H passant par l'origine des coordonnées. On voit que $X_{\varkappa}f$, laissant invariants tous les points de H, est une transvection infinitésimale. La formule (27) montre donc que toute transformation infinitésimale du groupe symplectique Sp_n et, par suite, toute transformation finie peut être composée de transvections dont le nombre est au plus égal à n. Ce raisonnement fournit ainsi une autre démonstration, du Théorème 3 (n⁰ 42), un peu complété.

Considérons, par exemple, la transformation infinitésimale

$$X^{hi}f=x^h\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}+x^i\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}.$$

On peut l'écrire

$$X^{hi}f=\frac{1}{2}(x^h+x^i)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}+\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\right)+\frac{1}{2}(x^h-x^i)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}-\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\right);$$

on voit ainsi que $X^{hi}f$ est égale à la somme de deux transvections dont l'une conserve les points de l'hyperplan $x^h+x^i=0$ et l'autre ceux de l'hyperplan $x^h-x^i=0$.

On a pour les autres transformations (26) des représentations analogues

$$X^{h,r+i}f=\frac{1}{2}(x^h+x^{r+i})\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i}}-\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\right)+\frac{1}{2}(x^h-x^{r+i})\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i}}+\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}\right),$$

et

$$X^{r+h,r+i}f=\frac{1}{2}(x^{r+h}+x^{r+i})\left(\frac{\partial f}{\partial x^{h}}+\frac{\partial f}{\partial x^{i}}\right)+\frac{1}{2}(x^{r+h}-x^{r+i})\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i}}-\frac{\partial f}{\partial x^{h}}\right).$$

Les résultats obtenus dans ce numéro nous permettent de démontrer l'important théorème sur les groupes symplectiques. Le voici

THÉORÈME 6. *Tout groupe symplectique est un groupe simple.*

Pour le démontrer supposons que le groupe Sp_n $(n=2r)$ admette un sous-groupe invariant g. Soit Yf la transformation infinitésimale la plus générale de g; d'après la formule (23) on peut l'écrire comme suit

$$Yf=a_{hi}X^{hi}f+a_{h,r+i}X^{h,r+i}f+a_{r+h,r+h}X^{r+h,r+i}f, \tag{28}$$

$$a_{hi}=a_{ih},\qquad a_{r+h,r+i}=a_{r+i,r+h}.$$

Le sous-groupe g étant par hypothèse invariant, il résulte du théorème classique de Lie[18]) que la parenthèse (X,Y), où Xf désigne une transformation arbitraire du groupe Sp_n, doit appartenir à g.

a) Supposons d'abord que dans la formule (28) l'un des coefficients $a_{r+h,r+i}$ soit différent de zéro; admettons par exemple que ce soit le coefficient $a_{r+j,r+k}$ et posons $Xf=X^{jj}f$ dans la parenthèse (X,Y); en tenant compte des formules (26), on obtient succesivement

$$(X^{jj},Y)=\sum_{h,i=1}^{r}a_{h,r+i}(X^{jj},X^{h,r+i})+\sum_{h,i=1}^{r}a^{r+h,r+i}(X^{jj},X^{r+h}X^{r+i}),$$

$$(X^{jj},Y)=-2\sum_{h,i=1}^{r}a_{h,r+i}\delta_{ij}X^{jh}f+2\sum_{h,i=1}^{r}a_{r+h,r+i}(\delta_{hj}X^{j,r+i}f+\delta_{ij}X^{j,r+h}f)$$

et

$$(X^{jj},Y)=-2\sum_{h=1}^{r}a_{h,r+j}X^{jh}f+2\sum_{i=1}^{r}a_{r+j,r+i}X^{j,r+i}f+2\sum_{h=1}^{r}a_{r+h,r+j}X^{j,r+h}f.$$

Si l'on remplace dans le dernier terme l'indice de sommation h par i, on aura finalement

$$(X^{jj},Y)=-2\sum_{h=1}^{r}a_{h,r+j}X^{jh}f+4\sum_{i=1}^{r}a_{r+i,r+j}X^{j,r+h}f.$$

Cette transformation appartenant à g, il en est de même de la parenthèse $(X^{kk},(X^{jj},Y))$. Si l'on développe cette expression et que l'on tient compte de l'égalité $(X^{kk},X^{jk})=0$, qui résulte de la première des relations (26), on obtient, par un même procédé que celui appliqué ci-dessus, la formule suivante:

$$(X^{kk},(X^{jj},Y))=4\sum_{i=1}^{i}a_{r+i,r+j}(X^{kk}X^{j,r+i}).$$

Si l'on tient compte encore de la seconde des relations (26), on aura

$$(X^{kk},(X^{jj},Y))=-4\sum_{i=1}^{r}a_{r+i,r+j}2\delta_{ik}X^{kj}f$$

ou

$$(X^{kk},X^{jj}Y)=-8a_{r+j,r+k}X^{jk}f.$$

Le coefficient $a_{r+j,r+k}$ étant par hypothèse différent de zéro, nous en concluons que le sous-groupe g doit contenir la transformation infinitésimale $X^{jk}f$. Il en résulte que $(X^{jk},X^{h,r+i})$ doit aussi appartenir à g quels que soient les indices h et i. Mais on a, en vertu des formules (26)

$$(X^{jk},X^{h,r+i})=-(\delta_{ij}X^{kh}f+\delta_{ik}X^{jh}f)\qquad(h,i=1,2,\dots,r).$$

---

[18]) S. Lie [14], I, p. 261.

Si l'on y pose $i=j$, il viendra

$$(X^{jk}, X^{h,r+j}) = -(X^{kh}f + \delta_{jk}X^{jh}f).$$

Il résulte de cette formule que g doit contenir la transformation infinitésimale $X^{kh}f$. Nous avons ainsi montré que, si le coefficient $a_{r+j,r+k}$ dans la formule (28) est différent de zéro, le sous-groupe g contient toutes les transformations $X^{kh}f$ $(h=1,2,\ldots,r)$. Par un calcul analogue au précédent, on en déduit que toutes les transformations $X^{hi}f$ $(h,i=1,2,\ldots,r)$ appartiennent au sous-groupe g.

b) Supposons maintenant que l'un des coefficients a_{hi} dans la formule (28) soit différent de zéro; admettons que ce soit le coefficient a_{jk} et calculons la parenthèse $(X^{r+j,r+j}, Y)$ qui, par hypothèse, est contenue dans g. Si l'on remplace Yf par l'expression (28) et que l'on tient compte de la seconde des relations (26), il viendra

$$(X^{r+j,r+j}, Y) = \sum_{h,i=1}^{r} a_{hi}(X^{r+j,r+j}, X^{hi}) + \sum_{h,i=1}^{r} a_{h,r+i}(X^{r+j,r+j}, X^{h,r+i}).$$

En ayant égard aux autres identités (26), on pourra écrire successivement

$$(X^{r+j,r+j}, Y) = -2\sum_{h,i=1}^{r} a_{hi}(\delta_{jh}X^{i,r+j}f + \delta_{ji}X^{h,r+j}f) + 2\sum_{h,i=1}^{r} a_{j,r+i}\delta_{hj}X^{r+j,r+i}f$$

et par suite

$$(X^{r+j,r+j}, Y) = -2\sum_{i=1}^{r} a_{ji}X^{i,r+j}f - 2\sum_{h=1}^{r} a_{hj}X^{h,r+j}f + 2\sum_{i=1}^{r} a_{j,r+i}X^{r+j,r+i}f.$$

En remplaçant dans le second terme l'indice de sommation h par i, il viendra finalement

$$(X^{r+j,r+j}, Y) = -4\sum_{i=1}^{r} a_{ij}X^{i,r+j}f + 2\sum_{i=1}^{r} a_{j,r+j}X^{r+j,r+i}f.$$

Si l'on forme de suite la parenthèse $\big(X^{r+k,r+k}, (X^{r+j,r+j}, Y)\big)$, on trouve par un calcul semblable

$$\big(X^{r+k,r+k}, (X^{r+j,r+j}, Y)\big) = -8a_{jk}X^{r+j,r+k}f.$$

Donc, si le coefficient a_{jk} dans la formule de Yf est différent de zéro, le sous-groupe g contient la transformation infinitésimale $X^{r+j,r+k}f$. Un procédé analogue à celui que nous avons précédemment appliqué permet de montrer que toutes les transformations de forme $X^{r+h,r+i}f$ $(h,i=1,\ldots,r)$ font aussi partie du sous-groupe g.

Les développements a) et b) nous ont montré que, si le sous-groupe invariant du groupe symplectique contient l'une quelconque des transformations infinitésimales $X^{hi}f$ ou $X^{r+h,r+i}f$, il les contient toutes; on

voit donc qu'il faut distinguer deux cas suivant que le sous-groupe g contienne toutes les transformations infinitésimales $X^{hi}f$ et $X^{r+h,r+i}f$ $(h,i=1,2,\ldots,r)$ ou qu'il n'en contienne aucune.

Considérons d'abord le premier cas; g contenant par hypothèse toutes les transformations $X^{hi}f$ et $X^{r+j,r+k}f$, il contient aussi leurs parenthèses $(X^{hi}, X^{r+j,r+k})$. Or, on a en vertu de la quatrième des relations (26)

$$(X^{hi}, X^{r+j,r+k}) = \delta_{jh}X^{i,r+k}f + \delta_{ji}X^{h,r+k}f + \delta_{kh}X^{i,r+j}f + \delta_{ki}X^{h,r+j}f. \tag{29}$$

Si l'on y pose $h=i=j=k$, il viendra

$$(X^{hh}, X^{r+h,r+h}) = 4X^{h,r+h}f \qquad (h=1,2,\ldots,r).$$

De même en supposant $h\neq i$ et $i=j=k$, on aura

$$(X^{hi}, X^{r+i,r+i}) = 2X^{h,r+i}f \qquad (h,i=1,2,\ldots,r).$$

On voit ainsi que dans le cas considéré ici le sous-groupe g contient toutes les transformations infinitésimales $X^{\varrho\sigma}f$ et par suite il se confond avec le groupe total Sp_n.

Dans le deuxième cas, le sous-groupe g ne contenant par hypothèse aucune transformation de la forme $X^{hi}f$ et $X^{r+h,r+i}f$, sa transformation générale a la forme

$$Yf = \sum_{h,i=1}^{r} a_{h,r+i}X^{h,r+i}f. \tag{30}$$

Si l'on forme la parenthèse (X^{jj}, Y) $(j=1,2,\ldots,r)$, en se servant des formules (26), on trouve

$$(X^{jj}, Y) = -2\sum_{h,i=1}^{r} a_{h,r+i}\delta_{ij}X^{jh}f$$

ou

$$(X^{jj}, Y) = -2\sum_{h=1}^{r} a_{h,r+j}X^{jh}f.$$

Si les coefficients $a_{h,r+j}$ n'étaient pas tous nuls, le sous-groupe contiendrait, comme on l'a vu ci-dessus, toutes les transformations X^{hi} et $X^{r+h,r+i}f$, contrairement à l'hypothèse. Il s'ensuit que la transformation (30) est identiquement nulle, le sous-groupe g se réduit donc à la transformation identique.

Le groupe symplectique, n'ayant aucun sous-groupe invariant autre que l'identité et que le groupe même, est un groupe simple.

44. Le groupe symplectique et le groupe orthogonal. Il est intéressant de comparer les propriétés du groupe symplectique et du groupe orthogonal opérant sur les mêmes variables x^κ au nombre $n=2r$.

Nous avons vu (Théorème 2 du n° 43) que la transformation infinitésimale la plus générale du groupe symplectique se déduit de la forme quadratique ordinaire

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varrho\sigma} x^\varrho x^\sigma \qquad (a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho})$$

en posant

$$Xf = (\Phi, f)$$

où

$$(\Phi, f) = \sum_{h=1}^{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{r+h}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^h} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^h} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}} \right).$$

Désignons maintenant par O_n le groupe orthogonal opérant sur les variables $x^\varkappa$ et posons

$$\Psi = \frac{1}{2} b_{\varrho\sigma} [x^\varrho x^\sigma], \qquad b_{\varrho\sigma} + b_{\sigma\varrho} = 0.$$

Soit $\{\Psi, f\}$ le produit scalaire ordinaire des vecteurs $\{\partial\Psi/\partial x^\varrho\}$ et $\{\partial f/\partial x^\varrho\}$:

$$\{\Psi, f\} = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\varrho} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^\varrho},$$

$\partial\Psi/\partial x$ désignant la dérivée de la forme quadratique extérieure Ψ (cf. n° 13). On a donc

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\varrho} = b_{\varrho\sigma} x^\sigma;$$

si l'on substitue cette expression de $\partial\Psi/\partial x^\varrho$ dans la dernière égalité et que l'on tient compte du fait que les coefficients sont antisymétriques, on obtient

$$\{\Psi, f\} = \frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} b_{\varrho\sigma} \left(x^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} - x^\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \right).$$

Or, on sait que les expressions

$$Y^{\varrho\sigma} f = x^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} - x^\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \tag{31}$$

sont des transformations infinitésimales du groupe orthogonal O_n. Elles sont antisymétriques en leurs indices

$$Y^{\varrho\sigma} f + Y^{\sigma\varrho} f = 0$$

et par conséquent le nombre des indépendantes est égal à $n(n-1)/2$ ou $r(2r-1)$. Nous voyons donc que le produit scalaire ordinaire $\{\Psi, f\}$ des vecteurs $\{\partial\Psi/\partial x^\varrho\}$ et $\{\partial f/\partial x^\varrho\}$ représente la transformation infinitésimale

la plus générale du groupe orthogonal O_n, si Ψ désigne la forme quadratique extérieure des variables $x^\varkappa$.

On voit ainsi que du Théorème 2 on obtient un théorème analogue, concernant les groupes orthogonaux, en remplaçant la forme quadratique ordinaire Φ par la forme quadratique extérieure Ψ et le produit scalaire symplectique des vecteurs $\{\partial f/\partial x^\varrho\}$ et $\{\partial\Phi/\partial x^\varrho\}$ par le produit scalaire ordinaire des vecteurs $\{\partial f/\partial x^\varrho\}$ et $\{\partial\Psi/\partial x^\varrho\}$.

Considérons maintenant deux groupes G_r et G_s continus et finis de Lie des transformations opérant sur les mêmes variables. Supposons que G_r soit engendré par les transformations infinitésimales $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ et G_s par les transformations $Y_1 f, Y_2 f, \ldots, Y_s f$. Nous appellerons *produit des groupes* G_r et G_s l'ensemble de tous les produits des transformations de G_r et G_s et nous le désignerons par $G_r \cdot G_s$. Cet ensemble forme un nouveau groupe dont les transformations infinitésimales génératrices sont déterminées par $X_h f, Y_i f$ et par les parenthèses (X_h, Y_i) $(h=1,2,\ldots,r;$ $i=1,2,\ldots,s)$.

Ceci posé, nous allons démontrer le suivant

Théorème 7. *Le produit $Sp_n \cdot O_n$ $(n=2r)$ du groupe symplectique et du groupe orthogonal, opérant sur les mêmes variables $x^\varkappa$, est égal au groupe linéaire unimodulaire à n^2-1 paramètres.*

Remarquons en premier lieu que les déterminants des transformations de Sp_n et O_n étant égaux à 1, toutes les transformations du produit $Sp_n \cdot O_n$ sont unimodulaires. Pour prouver la validité du Théorème il faut montrer que l'on obtient ainsi toutes les transformations du groupe unimodulaire. Or, on sait que ce groupe est engendré par les transformations infinitésimales[19])

$$x^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \quad (\varkappa \neq \lambda), \qquad x^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} - x^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda},$$

où l'on ne doit pas sommer. Il suffit donc de faire voir que toutes ces transformations se déduisent par des opérations linéaires des transformations infinitésimales $X^{\varrho\sigma} f$ du groupe Sp_n, de celles $Y^{\varrho\sigma} f$ du groupe O_n et de leurs parenthèses. Pour établir cette proposition, nous ferons usage des formules (25) et (31); on aura respectivement

$$X^{hi} f = x^h \frac{\partial f}{\partial x^{r+i}} + x^i \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}},$$

$$X^{h,r+i} f = x^h \frac{\partial f}{\partial x^i} - x^{r+i} \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}},$$

$$X^{r+h,r+i} f = x^{r+h} \frac{\partial f}{\partial x^i} + x^{r+i} \frac{\partial f}{\partial x^h}$$

[19]) S. Lie [14], I, p. 579.

et

$$Y^{\varrho\sigma}f = x^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} - x^\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}.$$

On en déduit d'abord les égalités

$$X^{hh}f = 2x^h \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}, \qquad X^{r+h,r+h}f = 2x^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x^h},$$

ensuite les relations suivantes:

$$(X^{hh}, Y^{hi}) = 2x^i \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}} \qquad (h\neq i),$$

$$(X^{hh}, Y^{i,r+h}) = -2x^h\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (h\neq i),$$

$$(X^{r+h,r+h}, Y^{hi}) = 2x^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (h\neq i),$$

$$(X^{r+h,r+h}, Y^{h,r+i}) = 2x^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}} \qquad (h\neq i).$$

Il résulte de ces formules que le produit $Sp_n\cdot O_n$ contient toutes les transformations infinitésimales de la forme

$$Uf = x^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (\varkappa\neq\lambda). \tag{32}$$

Il contient donc en particulier la transformation

$$Uf = x^h \frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}$$

et, par suite, la parenthèse

$$(U, X^{r+h,r+i}) = x^h \frac{\partial f}{\partial x^h} - x^{r+h}\delta^h_i \frac{\partial f}{\partial x^{r+i}} - x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}.$$

Si l'on y suppose $h\neq i$, il viendra

$$(U, X^{r+h,r+i}) = x^h \frac{\partial f}{\partial x^h} - x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}} \qquad (h\neq i).$$

D'autre part on a

$$X^{h,r+h}f = x^h \frac{\partial f}{\partial x^h} - x^{r+h}\frac{\partial f}{\partial x^{r+h}}.$$

On voit ainsi que le produit $Sp_n\cdot O_n$ contient toutes les transformations infinitésimales de la forme

$$x^h \frac{\partial f}{\partial x^h} - x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}. \tag{33}$$

On en déduit, par des opérations linéaires, qu'il contient aussi les opérateurs

$$x^h \frac{\partial f}{\partial x^h} - x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad x^{r+h} \frac{\partial f}{\partial x^{r+h}} - x^{r+i}\frac{\partial f}{\partial x^{r+i}}, \tag{34}$$

où l'on ne doit pas sommer. Les expressions (33) et (34) peuvent donc être résumées en une seule

$$x^\varkappa \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} - x^\lambda\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

Ce résultat rapproché du précédent (32) achève la démonstration du Théorème.

Désignons par H le groupe d'homothéties; H est un groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale

$$Zf = x^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}.$$

THÉORÈME 8. *Le produit des groupes des transformations symplectiques, des transformations orthogonales et de celles d'homothéties, opérant sur les mêmes variables au nombre $n=2r$, est égal au groupe linéaire général à n^2 paramètres.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème précédent et du fait bien connu que le groupe linéaire général s'obtient en adjoignant au groupe linéaire unimodulaire celui d'homothéties.

L'ordre du groupe des transformations unimodulaires à $n=2r$ variables étant $4r^2-1$ et ceux des groupes Sp_n et O_n étant respectivement $r(2r+1)$ et $r(2r-1)$, il est clair que Sp_n et O_n ont un sous-groupe en commun. Nous allons le déterminer. Rappelons pour ce but les formules (22) et (31):

$$X^{\varrho\sigma}f = (I^{\varkappa\varrho}x^\sigma + I^{\varkappa\sigma}x^\varrho)\frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}, \qquad Y^{\varrho\sigma}f = x^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} - x^\sigma\frac{\partial f}{\partial x^\varrho},$$

dont la deuxième peut encore s'écrire

$$Y^{\varrho\sigma}f = (\delta^{\varkappa\varrho}x^\sigma - \delta^{\varkappa\sigma}x^\varrho)\frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}, \qquad \delta^{\varrho\sigma} = \begin{cases}1 & \text{pour } \varrho=\sigma,\\ 0 & \text{pour } \varrho\neq\sigma.\end{cases}$$

On obtient les transformations communes à Sp_n et O_n en écrivant la condition

(35) $$a_{\varrho\sigma} X^{\varrho\sigma} f = b_{\varrho\sigma} Y^{\varrho\sigma} f,$$

où les paramètres doivent vérifier les égalités

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}, \qquad b_{\varrho\sigma} + b_{\sigma\varrho} = 0.$$

En remplaçant dans la relation (35) $X^{\varrho\sigma}f$ et $Y^{\varrho\sigma}f$ par leurs expressions données ci-dessus, on aura

$$a_{\varrho\sigma}(I^{\varkappa\varrho}x^\sigma + I^{\varkappa\sigma}x^\varrho)\frac{\partial f}{\partial x^\varkappa} = b_{\varrho\sigma}(\delta^{\varkappa\varrho}x^\sigma - \delta^{\varkappa\sigma}x^\varrho)\frac{\partial f}{\partial x^\varkappa},$$

d'où il résulte

$$a_{\varrho\sigma}(I^{\varkappa\varrho}x^\sigma + I^{\varkappa\sigma}x^\varrho) = b_{\varrho\sigma}(\delta^{\varkappa\varrho}x^\sigma - \delta^{\varkappa\sigma}x^\varrho),$$

ou

$$a_{\varrho\sigma} I^{\varkappa\varrho} x^\sigma = b_{\varrho\sigma}\delta^{\varkappa\varrho}x^\sigma.$$

Cette condition devant être identiquement vérifiée on en déduit l'égalité

$$a_{\varrho\sigma} I^{\varkappa\varrho} = b_{\varrho\sigma}\delta^{\varkappa\varrho}.$$

Si l'on y pose successivement $\varkappa = h$ et $\varkappa = r+h$, on trouve respectivement

$$b_{\sigma h} = -a_{\sigma,r+h}, \qquad b_{\sigma,r+h} = a_{\sigma h}.$$

On obient donc la plus générale transformation commune aux groupes Sp_n et O_n, si dans la formule $Yf = b_{\sigma\varrho} Y^{\sigma\varrho} f$ les coefficients $b_{\varrho\sigma}$ seront remplacés par les coefficients $a_{\varrho\sigma}$ conformément aux dernières égalités; il viendra ainsi

$$Yf = -a_{\sigma,r+h} Y^{\sigma h} f + a_{\sigma h} Y^{\sigma,r+h} f$$

ou, si l'on développe les deux sommes du second membre,

$$Yf = -a_{i,r+h}Y^{ih}f - a_{r+i,r+h}Y^{r+i,h}f + a_{ih}Y^{i,r+h}f + a_{r+i,h}Y^{r+i,r+h}f.$$

Si l'on change le rôle des indices de sommation h et i dans le deuxième et le quatrième terme et que l'on tient compte des égalités $a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}$ et $Y^{\varrho\sigma}f = -Y^{\sigma\varrho}f$, on en déduit la formule

$$Yf = a_{i,r+h}(Y^{hi}f + Y^{r+h,r+i}f) - (a_{hi} + a_{r+h,r+i})Y^{r+h,i}f.$$

Les coefficients $a_{i,r+h}$, $a_{hi} + a_{r+h,r+i}$ étant complétement arbitraires et le second étant symétrique en h et i, on en conclut que la transformation générale du sous-groupe commun à Sp_n et O_n est engendrée par les transformations infinitésimales

$$Y^{hi}f + Y^{r+h,r+i}f, \qquad Y^{r+h,i}f + Y^{r+i,h}f \qquad (h,i = 1,2,\dots,r).$$

La première de ces transformations étant symétrique et la seconde anti-symétrique en les indices h et i, leur nombre et, par suite, l'ordre du sous-groupe commun à Sp_n et O_n est égal à r^2.

45. Formes extérieures invariantes par le groupe symplectique. On sait que la forme canonique

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}]$$

et, par conséquent, aussi ses puissances sont invariantes par le groupe symplectique Sp_{2r}, en vertu de la définition même de Sp_{2r}. Nous allons montrer qu'inversement toute forme extérieure invariant par le groupe Sp_{2r} est égale à une puissance de Ω à un facteur numérique près.

Rappelons d'abord qu'en posant

(36) $$\Pi_i = [x^i x^{r+i}]$$

on a la formule

(37) $$[\Omega^p] = p! \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} [\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\dots\Pi_{i_p}],$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \dots, r$ (cf. nº 21).

Remarquons encore que, si l'on se donne une transformation infinitésimale

$$Xf = \zeta^\varrho \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \qquad (\zeta^\varrho \text{ forme linéaire des variables } x^\varkappa)$$

d'un groupe linéaire, les accroissements infinitésimaux des variables $x^\varkappa$ sont donnés par les formules $\delta x^\varkappa = \zeta^\varkappa \delta t$; par conséquent si l'on effectue Xf sur le monôme

$$\Psi = [x^\varrho x^\sigma],$$

la variation $\delta\Psi$ que subit celui-ci est égale à la différence

$$[(x^\varrho + \zeta^\varrho\delta t)(x^\sigma + \zeta^\sigma\delta t)] - [x^\varrho x^\sigma].$$

En négligeant les termes du second degré en δt, on en déduit la formule suivante

(38) $$\delta\Psi = ([\zeta^\varrho x^\sigma] + [x^\varrho \zeta^\sigma])\delta t,$$

qui se généralise d'une manière évidente au cas des monômes de degrés quelconques.

Ceci posé, nous allons montrer en premier lieu que le degré d'une forme extérieure invariante par le groupe symplectique est nécessairement un nombre pair. En effet, soit

(39) $$\Phi_q = \frac{1}{q!} a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_q}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_q}]$$

une forme extérieure à $n=2r$ variables $x^\varkappa$ dont nous supposons qu'elle soit invariante par Sp_{2r}; pour exprimer qu'elle jouit de cette propriété nous n'avons qu'à appliquer les transformations infinitésimales de Sp_n, données par les formules (25) du n° 43. En posant $h=i=1$ dans la dernière de celles-ci, on obtient

$$X^{r+1,r+1}f=x^{r+1}\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

et, par conséquent, les accroissements infinitésimaux que subissent les variables $x^\varkappa$ par $X^{r+1,r+1}f$ sont de la forme

$$\delta x^1=x^{r+1}\delta t, \qquad \delta x^\lambda=0 \qquad (\lambda\neq 1).$$

En se servant de ces formules, il est facile de voir qu'en effectuant sur la forme (39) la transformation $X^{r+1,r+1}f$ on lui fait subir la variation

$$\delta\Phi_q=\frac{1}{(q-1)!}a_{1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}[x^{r+1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_q}]\delta t.$$

Cette variation ne peut être nulle que si l'on a

$$a_{1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}=0 \qquad (\varkappa_2,\varkappa_3,\ldots,\varkappa_q\neq r+1);$$

autrement dit dans chaque terme de Φ_q contenant la variable x^1, la variable x^{r+1} doit aussi figurer. Le raisonnement étant général, nous en concluons que Φ_q ne peut contenir que les termes de la forme

$$a[x^{i_1}x^{r+i_1}x^{i_2}x^{r+i_2}\ldots x^{i_p}x^{r+i_p}]$$

et que par suite son degré est un nombre pair: $q=2p$, c'est ce que nous avions à prouver. La forme (39) peut donc s'écrire de la manière suivante:

$$\Phi_{2p}=\frac{1}{p!}a_{i_1i_2\ldots i_p}[\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}] \qquad (i_1,i_2,\ldots,i_p=1,2,\ldots,r); \tag{40}$$

les facteurs Π_i, définis par la formule (36), étant du second degré, l'expression en parenthèse dans le second membre de l'égalité (39) ne varie pas, si l'on permute ses facteurs d'une manière arbitraire; nous pouvons donc supposer que les coefficients $a_{i_1i_2\ldots i_p}$ sont aussi symétriques dans leurs indices.

Maintenant nous allons effectuer sur la forme Φ_{2p} la transformation infinitésimale

$$X^{12}f=x^1\frac{\partial f}{\partial x^{r+2}}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^{r+1}}$$

que l'on déduit de la première des formules (25) du n° 43, en y posant $h=1$ et $i=2$. Les accroissements infinitésimaux des variables $x^\varkappa$ correspondants à $X^{12}f$ sont

$$\delta x^{r+1}=x^2\delta t, \qquad \delta x^{r+2}=x^1\delta t, \qquad \delta x^\lambda=0 \qquad (\lambda\neq r+1,r+2).$$

En se servant de ces formules et de la formule (38), on obtient pour les variations des monômes Π_i les expressions suivantes:

$$\delta\Pi_1=[x^1x^2]\delta t, \qquad \delta\Pi_2=[x^2x^1]\delta f, \qquad \delta\Pi_i=0 \qquad (i\neq 1,2). \tag{41}$$

Remarquons maintenant que le second membre de l'égalité (40) peut être décomposé en quatre sommes:

$$\Phi_{2p}=\frac{1}{(p-2)!}a_{12i_3\ldots i_p}[\Pi_1\Pi_2\Pi_{i_3}\ldots\Pi_{i_p}]+\frac{1}{(p-1)!}a_{1i_2\ldots i_p}\Pi_1\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}a_{2i_2\ldots i_p}[\Pi_2\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]+\frac{1}{p!}a_{i_1i_2\ldots i_p}[\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]$$
$$(i_1,i_2,\ldots,i_p=3,4,\ldots,r).$$

En tenant compte des formules (41), il est facile de démontrer que les variations effectuées par la transformation $X^{12}f$, sur la première et la quatrième somme, sont nulles et que celles subies sur la seconde et la troisième, sont respectivement égales aux expressions

$$\frac{1}{(p-1)!}a_{1i_2\ldots i_p}[x^1x^2\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]\delta t$$

et

$$\frac{1}{(p-1)!}a_{2i_2\ldots i_p}[x^2x^1\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]\delta t.$$

On aura par suite

$$\delta\Phi_{2p}=\frac{1}{(p-1)!}(a_{1i_2\ldots i_p}-a_{2i_2\ldots i_p})[x^1x^2\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}]\delta t$$
$$(i_2,i_3,\ldots,i_p=3,4,\ldots,r).$$

Pour que la forme Φ_{2p} soit invariante par la transformation $X^{12}f$ il faut donc qu'il soit

$$a_{1i_2\ldots i_p}=a_{2i_2\ldots i_p} \qquad (i_2,i_3,\ldots,i_p\neq 1,2).$$

Le raisonnement étant général, on en conclut que tous les coefficients de la forme Φ_{2p} doivent être égaux; on arrive ainsi à la formule

$$\Phi_{2p}=a\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_p)}[\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_p}],$$

où la somme est étendue à toutes les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \ldots, r$. En comparant la dernière expression de Φ_{2p} avec la formule (37), on trouve l'égalité

$$\Phi_{2p} = \frac{a}{p!}[\Omega^p]$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. Nous pouvons donc énoncer le suivant

THÉORÈME 9. *La forme canonique*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} [x^i x^{r+i}]$$

et ses puissances sont les seules formes extérieures invariantes par le groupe des transformations symplectiques.

§ 3. Invariants du groupe symplectique

46. Systèmes de vecteurs. Supposons que dans l'espace symplectique G_n $(n=2r)$, rapporté à un repère symplectique R_n, soit donné un système F_p de p vecteurs indépendants $U_h = \{u_h^\varkappa\}$ $(h=1,2,\ldots,p)$. On sait (n⁰ 39) que les produits scalaires symplectiques des vecteurs U_h

$$[U_h, U_i] = \sum_{j=1}^{r} (u_h^j u_i^{r+j} - u_i^j u_h^{r+j}) \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, p)$$

sont invariants par le groupe symplectique Sp_n. Nous allons montrer que *ces produits forment le système complet des invariants de F_p*, autrement dit: si l'on se donne un second système $\overline{F}_p$ de p vecteurs indépendants et que l'on puisse faire correspondre les vecteurs de F_p et $\overline{F}_p$, un à un, de telle manière que les produits scalaires correspondants soient égaux, il existe alors au moins une transformation du groupe Sp_n qui fait passer le système F_p en $\overline{F}_p$.

Nous allons d'abord démontrer cette proposition dans le cas $p=n$. Le système F_n se compose ici de n vecteurs indépendants $U_\alpha = \{u_\alpha^\varkappa\}$. Formons les deux matrices conjuguées (cf. n⁰ 38)

$$U = \left\| \begin{matrix} u_1^1 & \ldots & u_r^1 & u_{r+1}^1 & \ldots & u_{2r}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^r & \ldots & u_r^r & u_{r+1}^r & \ldots & u_{2r}^r \\ u_1^{r+1} & \ldots & u_r^{r+1} & u_{r+1}^{r+1} & \ldots & u_{2r}^{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{2r} & \ldots & u_r^{2r} & u_{r+1}^{2r} & \ldots & u_{2r}^{2r} \end{matrix} \right\|$$

et

$$\breve{U} = \left\| \begin{matrix} u_{r+1}^{r+1} & \ldots & u_{r+1}^{2r} & -u_{r+1}^1 & \ldots & -u_{r+1}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{2r}^{r+1} & \ldots & u_{2r}^{2r} & -u_{2r}^1 & \ldots & -u_{2r}^r \\ -u_1^{r+1} & \ldots & -u_1^{2r} & u_1^1 & \ldots & u_1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -u_r^{r+1} & \ldots & -u_r^{2r} & u_r^1 & \ldots & u_r^r \end{matrix} \right\|.$$

On sait que les déterminants de U et $\breve{U}$ sont égaux et que, les vecteurs U_α étant indépendants, ils sont par suite tous les deux différents de zéro. Posons encore $[U_\alpha, U_\beta] = a_{\alpha\beta}$; d'après les formules du n⁰ 37, on aura donc

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{r} (u_\alpha^i u_\beta^{r+i} - u_\beta^i u_\alpha^{r+i}).$$

Un calcul facile montre que le produit $U \times \breve{U}$ est égal à la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \ldots & a_{r\,r+1} & a_{r+1\,r+1} & \ldots & a_{2r\,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\,2r} & \ldots & a_{r\,2r} & a_{r+1\,2r} & \ldots & a_{2r\,2r} \\ a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1\,r+1} & \ldots & a_{1\,2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r\,r+1} & \ldots & a_{r\,2r} \end{matrix} \right\|. \tag{1}$$

Le déterminant de cette matrice est différent de zéro, puisqu'il est égal au produit de ceux des matrices $\breve{U}$ et U. On vérifie aisément que le déterminant $A = |a_{\alpha\beta}|$ se déduit de celui de la matrice (1) par le changement de l'ordre des lignes et qu'il est par conséquent aussi différent de zéro. Remarquons que le déterminant A est symétrique gauche et que tous ses éléments sont invariants par le groupe symplectique Sp_n.

Nous allons montrer à présent qu'il existe un repère symplectique $R_n\{I_\alpha\}$ tel que les composantes des vecteurs du système F_n sont des invariants par rapport au groupe Sp_n.

Considérons d'abord le cas $r=1$. Le déterminant A prend ici la forme

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix};$$

on a par suite $A=a_{12}^2$ et, comme A est différent de zéro, il en résulte l'inégalité $a_{12}\neq 0$ ou $[U_1, U_2]\neq 0$. Posons maintenant

$$I_1=U_1, \qquad I_2=\frac{1}{[U_1,U_2]}U_2;$$

on aura par conséquent $[I_1,I_2]=1$, ce qui signifie que le repère R_2, formé des vecteurs I_1 et I_2, est un repère symplectique de l'espace G_2. Comme on a $U_1=I_1, U_2=[U_1,U_2]I_2$, les composantes des vecteurs du système F_2 par rapport à R_2 sont des invariants vis-à-vis du groupe Sp_2.

Supposons maintenant que la proposition que nous avons à établir soit vraie pour $r=m-1$; nous ferons voir que, dans cette hypothèse, elle est aussi valide pour $r=m$. En effet, les vecteurs du système F_n $(n=2m)$ étant linéairement distincts, le déterminant A est différent de zéro et, par conséquent, l'un au moins de ses éléments l'est aussi. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que ce soit l'élément $a_{1\,m+1}$ et introduisons un nouveau système de vecteurs au moyen de la substitution

$$V_1=U_1, \qquad V_{m+1}=\frac{1}{a_{1\,m+1}}U_{m+1}, \qquad V_\varrho=U_\varrho+a_\varrho U_1+b_\varrho U_{m+1} \quad (\varrho\neq 1, m+1).$$

Les vecteurs V_α sont évidemment indépendants et l'on a

$$(2) \qquad [V_1,V_{m+1}]=1.$$

On peut déterminer les coefficients a_ϱ, b_ϱ de manière qu'il soit

$$(3) \qquad [V_1,V_\varrho]=[V_{m+1},V_\varrho]=0 \qquad (\varrho\neq 1,\ m+1).$$

En effet on a

$$[V_1,V_\varrho]=a_{1\varrho}+a_{1\,m+1}b_\varrho=0, \qquad [V_{m+1},V_\varrho]=a_{m+1\,\varrho}+a_{m+1\,1}a_\varrho;$$

il faut donc poser

$$a_\varrho=\frac{a_{m+1\,\varrho}}{a_{1\,m+1}}, \qquad b_\varrho=\frac{a_{1\varrho}}{a_{m+1,1}},$$

ce qui donne des valeurs bien déterminées, l'invariant $a_{1\,m+1}$ étant par hypothèse différent de zéro. Remarquons que les composantes des vecteurs U_α par rapport au repère composé des vecteurs V_α sont invariantes par le groupe Sp_n, car ils s'expriment tous au moyen des grandeurs $a_{\alpha\varrho}$. Envisageons maintenant le système des vecteurs $V_2, V_3, \ldots, V_m, V_{m+2}, \ldots$ $\ldots, V_{2m}$ et imaginons un sous-espace linéaire à $2(m-1)$ dimensions qui les contient. Ce sous-espace étant dépourvu de vecteurs distingués, est un espace symplectique ordinaire en vertu du Théorème 22 du n° 40; par conséquent d'après l'hypothèse faite ci-dessus, il existe un repère

symplectique $R_{2(m-1)}$ formé des vecteurs $I_2, I_3, \ldots, I_m, I_{m+2}, \ldots, I_{2m}$ tel que les composantes des vecteurs V_ϱ $(\varrho\neq 1, m+1)$ par rapport à $R_{2(m-1)}$ sont invariants par le groupe symplectique $Sp_{2(m-1)}$. Adjoignons aux vecteurs du repère $R_{2(m-1)}$ les deux vecteurs

$$I_1=V, \qquad I_{m+1}=V_{m+1}.$$

Il résulte des relations (2) et (3) et du procédé qui nous a conduit au repère $R_{2(m-1)}$ que les vecteurs $I_1, I_2, \ldots, I_{2m}$ forment un repère symplectique R_{2m} de l'espace G_n $(n=2m)$. Les raisonnements précédents permettent aussi de voir que les composantes des vecteurs U_α par rapport à R_{2m} sont invariants par le groupe symplectique Sp_{2m}, ce qui achève la démonstration de la proposition, celle-ci étant vraie pour $r=1$.

On peut donc énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *Si l'on se donne dans l'espace symplectique G_n un système de n vecteurs indépendants U_α, il existe un repère symplectique R_n tel que les composantes des vecteurs U_α par rapport à R_n s'expriment au moyen des invariants*

$$[U_\alpha, U_\beta] \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,n).$$

Supposons maintenant que dans G_n soit donné un système F_q de q $(q<n)$ vecteurs indépendants $U_l=\{U_l^\varkappa\}$ $(l=1,2,\ldots,q)$ et imaginons une variété linéaire E_q, passant par l'origine des coordonnées O et ayant pour base les vecteurs de F_q. Or, nous avons montré au n° 39 (Théorèmes 11, 17, 18 et 19[abc]) qu'il existe dans G_n un repère symplectique R_n d'origine O tel que q de ses vecteurs sont contenus dans E_q. Les raisonnements qui nous ont conduit aux théorèmes cités, permettent de calculer les composantes des vecteurs U_l par rapport à R_n. Ces raisonnements peuvent être complétés d'une manière facile pour montrer que ces composantes s'expriment au moyen des produit scalaires symplectiques $[U_h, U_i]$ $(h,i=1,2,\ldots,q)$; il suffit au fond d'appliquer, avec des changements convenables, les développements au moyen desquels nous avons précédemment établi le Théorème 1. Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si l'on se donne dans G_n un système de q vecteurs indépendants U_l, il existe un repère symplectique R_n tel que les composantes des vecteurs U_l par rapport au repère R_n s'expriment au moyen des invariants $[U_h, U_i]$ $(h,i=1,2,\ldots,q)$.*

Considérons maintenant un second système $\bar F_q$ de q vecteurs indépendants $\bar U_l$ et supposons qu'il soit

$$[\bar U_h, \bar U_i]=[U_h,U_i] \qquad (h,i=1,2,\ldots,q).$$

D'après le Théorème 2 il existe un repère $\bar R_n$ par rapport auquel les composantes des vecteurs $\bar U_l$ sont des fonctions des produits scalaires symplectiques $[\overline{U}_h, \overline{U}_i]$. Il en résulte que la transformation symplectique qui fait passer du repère R_n à $\overline{R}_n$ transforme les vecteurs U_l en les vecteurs $\overline{U}_l$. D'où le

THÉORÈME 3. *Les produits scalaires symplectiques d'un système de vecteurs de l'espace symplectique G_n forment le système complet d'invariants de celui-ci.*

Application. Si dans l'espace symplectique G_n est donnée une courbe C au moyen des équations

$$x^\varkappa = x^\varkappa(t),$$

on en déduit une suite infinie des vecteurs

$$\left\{\frac{dx^\varkappa}{dt}\right\}, \left\{\frac{d^2x^\varkappa}{dt^2}\right\}, \ldots$$

Il est facile de remplacer le paramètre t par un autre, de sorte que ces vecteurs soient liés intrinsèquement avec la courbe; leurs produits scalaires symplectiques seront alors des covariants différentiells de C par rapport au groupe symplectique Sp_n. En faisant usage des théorèmes démontrés précédemment, on peut ainsi développer la théorie des courbes de l'espace symplectique G_n; cette remarque s'étend évidemment à d'autres variétés de G_n.

47. Polynôme caractéristique d'une forme quadratique extérieure. Pour aborder la théorie des invariants d'une forme quadratique extérieure nous introduirons dans ce numéro les notions de polynôme caractéristique et d'équation caractéristique d'une forme quadratique extérieure.

Considérons dans ce but une forme quadratique extérieure à $n=2r$ variables $x^\varkappa$

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$$

et posons

$$\Psi = \Phi - S\Omega,$$

S étant un paramètre arbitraire et Ω désignant la forme canonique

$$\sum_{h=1}^{r} [x^i x^{r+i}].$$

Nous appellerons *polynôme caractéristique* de Φ l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ de la forme Ψ, multiplié par $(-1)^r r!$ (cf. n° 22), et nous le désignerons par $W(S)$.

Le déterminant d'une forme quadratique extérieure étant égal au carré de son agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ (voir p. 34), on aura

$$W^2(S) = |a_{\varkappa\lambda} - SI_{\varkappa\lambda}|. \tag{4}$$

Pour trouver le polynôme $W(S)$ il faut calculer la puissance $[(\Phi - S\Omega)^r]$ (cf. n° 22); les formes Φ et Ω étant de degré pair, leurs produits sont indépendants de l'ordre de leurs facteurs et, par conséquent, on aura

$$[(\Phi - S\Omega)^r] = [\Phi^r] - \binom{r}{1} S[\Phi^{r-1}\Omega] + \binom{r}{2} S^2 [\Phi^{r-2}\Omega^2] + \ldots + (-1)^r S^r [\Omega^r]$$

ou

$$[(\Phi - S\Omega)^r] = \sum_{h=0}^{r} (-1)^h \binom{r}{h} S^h [\Phi^{r-h}\Omega^h]. \tag{5}$$

En vertu des formules (6) du n° 22 et (4) du n° 26, on trouve pour les puissances extérieures $[\Phi^{r-h}]$ et $[\Omega^h]$ les deux expressions suivantes:

$$[\Phi^{r-h}] = (r-h)! \sum_{(\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{2r-2h})} (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2r-2h})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\ldots x^{2r-2h}]$$

et

$$[\Omega^h] = h! \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_h)} [\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_h}], \qquad \Pi_i = [x^i x^{r+i}],$$

$(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2r-2h})$ désignant ici, comme au n° 22, l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r-2h$ de la forme Φ; le premier des symboles Σ indique la sommation étendue à toutes les combinaisons $2r-2h$ à $2r-2h$ des nombres $1, 2, \ldots, 2r$ et le second — la sommation étendue à toutes les combinaisons h à h des indices $1, 2, \ldots, r$. Si l'on porte ces expressions de $[\Phi^{r-h}]$ et de $[\Omega^h]$ dans la formule (5), on obtient

$$[(\Phi - S\Omega)^r]$$
$$= r! \sum_{h=0}^{r} (-1)^h S^h \sum_{(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2r-2h})} (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{2r-2h})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\ldots x^{\varrho_{2r-2h}}] \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_h)} [\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\ldots\Pi_{i_h}].$$

Il est facile de se convaincre, en développant les produits qui y figurent, que la dernière formule peut s'écrire comme suit:

$$[(\Phi - S\Omega)^r]$$
$$= r! \sum_{h=0}^{r} (-1)^h S^h \sum_{(s_1, s_2, \ldots, s_{r-h})} (s_1, r+s_1, \ldots, s_{r-h}, r+s_{r-h}) \times$$
$$\times [x^{s_1}x^{r+s_1}\ldots x^{s_{r-h}}x^{r+s_{r-h}}x^{i_1}x^{r+i_1}\ldots x^{i_h}x^{r+i_h}],$$

$\sum\limits_{s_1, s_2, \ldots s_{r-h}}$ désignant ici la somme étendue à toutes les combinaisons des indices $1, 2, \ldots, r$ pris $r-h$ à $r-h$, et les valeurs des indices $i_1, i_2, \ldots, i_h$ devant être choisies dans chaque terme de sorte que la suite $s_1, s_2, \ldots, s_{r-h}$, $i_1, i_2, \ldots, i_h$ soit une permutation, d'ailleurs quelconque, des nombres $1, 2, \ldots, r$. On peut donc présenter le résultat d'une manière plus simple

$$[(\Phi - S\Omega)^r] = r! \sum_{h=0}^{r} (-1)^h S^h \sum_{(s_1, s_2, \ldots, s_{r-h})} (s_1, r+s_1, \ldots, s_{r-h}, r+s_{r-h})[x^1 x^2 \ldots x^{2r}]$$

ou encore

$$[(\Phi-S\Omega)^r]=r!\sum_{h=0}^{r}(-1)^h\varrho_{r-h}S^h[x^1x^2\ldots x^{2r}],$$

où l'on a posé

(6) $$\varrho_{r-h}=\sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_{r-h})}(s_1,r+s_1,\ldots,s_{r-h},r+s_{r-h}).$$

L'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ de la forme $\Phi-S\Omega$ étant égal, d'après la définition (cf. nº 22), au coefficient du produit $[x^1x^2\ldots x^{2r}]$ dans la puissance $[(\Phi-S\Omega)^r]$, il est, par suite, identique avec l'expression

$$(-1)^r r!\,(S^r-\varrho_1S^{r-1}+\ldots+(-1)^r\varrho_n).$$

En se reportant à la définition du polynôme caractéristique $W(S)$ de Φ, donnée au commencement de ce numéro, on obtient l'égalité

(7) $$W(S)=S^r-\varrho_1S^{r-1}+\ldots+(-1)^r\varrho_n.$$

L'équation que l'on obtient en annulant $W(S)$

(8) $$S^r-\varrho_1S^{r-1}+\ldots+(-1)^r\varrho_r=0$$

sera appelée *l'équation caractéristique* de la forme Φ et ses racines s'appelleront les *nombres caractéristiques* de Φ.

Nous avons montré (Théorème 5 du nº 22) que l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ d'une forme quadratique extérieure à $2r$ variables est une densité $2r$-vectorielle de poids $+1$; le déterminant d'une transformation symplectique étant égal à $+1$, on en conclut que l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ de la forme $\Phi-S\Omega$ et, par suite, le polynôme caractéristique $W(S)$ de Φ sont invariants par les transformations symplectiques. Comme le paramètre S dans polynôme $W(S)$ est arbitraire, il en résulte le

THÉORÈME 4. *Les coefficients du polynôme caractéristique d'une forme quadratique extérieure Φ à $n=2r$ variables et, par suite, les nombres caractéristiques de Φ sont des invariants de la forme par rapport au groupe symplectique Sp_n.*

La formule (6) donne en particulier

$$\varrho_1=\sum_{s=1}^{r}(s,r+s);$$

d'autre part, en posant $h=1$ dans l'égalité (6) du nº 22, on trouve

$$(s,r+s)=a_{s,r+s}.$$

Par conséquent le premier coefficient du polynôme $W(S)$ est donné par la formule

$$\varrho_1=\sum_{s=1}^{r}a_{s,r+s}.$$

On voit ainsi que la somme des coefficients $a_{s,r+s}$ de la forme Φ est invariante par le groupe Sp_n.

Pour le dernier coefficient du polynôme caractéristique on a la formule

$$\varrho_r=(1,r+1,2,r+2,\ldots,r,2r)$$

ou

$$\varrho_r=(-1)^r(1,2,3,\ldots,2r-1,2r).$$

Le déterminant $|a_{\varkappa\lambda}|$ étant égal au carré de l'agrégat de Pfaff $(1,2,\ldots,2r-1,2r)$, on en conclut que le coefficient ϱ_r est différent de zéro, si la forme Φ est de rang $2r$; par conséquent il en est de même pour toutes les racines de l'équation caractéristique de Φ.

Remarquons enfin que, si le rang de Φ est un nombre $2q<2r$, toutes les puissances $[\Phi^{q+1}],[\Phi^{q+2}],\ldots,[\Phi^r]$ sont des formes nulles (Théorème 4 du nº 21), et la formule (5) ne contient que les puissances $S^r,S^{r-1},\ldots,S^q$. Le polynôme caractéristique devient dans ce cas

$$W(S)=S^r-\varrho_1S^{r-1}+\ldots+(-1)^q\varrho_qS^q,$$

d'où il s'ensuit que 0 est une racine q^{uple} de l'équation caractéristique; inversement, si 0 est une racine q^{uple} de l'équation caractéristique, le rang de Φ est égal à $2q$.

48. Réduction d'une forme quadratique extérieure au moyen des transformations du groupe symplectique. En adoptant les notations du numéro précédent, formons le système associé à la forme Ψ qui peut être écrite comme suit:

$$\Psi=\frac{1}{2}\,a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]-\frac{1}{2}\,SI_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda];$$

nous y supposons, comme auparavant, que les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ soient des nombres réels et que le rang de Φ soit égal au nombre $n=2r$ des variables $x^\varkappa$. Le système associé à Ψ se compose des équations linéaires

(9) $$(a_{\varkappa\varrho}-SI_{\varkappa\varrho})x^\varrho=0$$

(cf. nº 14). Dans les investigations suivantes, nous allons distinguer trois cas.

1er cas. Supposons d'abord que l'équation caractéristique (8) de la forme Φ admette r racines réelles distinctes que nous désignerons par $S_1,S_2,\ldots,S_r$. On aura donc

(10) $$S_h\neq S_i \qquad (h,i=1,2,\ldots,r).$$

On sait qu'en vertu de sa définition, le polynôme caractéristique de Φ est égal, à un facteur numérique près, à l'agrégat d'ordre $2r$ de la forme $\Phi-S\Omega$. Le carré de cet agrégat étant égal au déterminant de la forme $\Phi - S\Omega$ ou, ce qui est la même chose, au déterminant du système (9), il s'ensuit que, si l'on substitue dans ces équations à S l'une quelconque des racines de l'équation caractéristique, on obtient un système admettant une solution non nulle.

Posons dans (9) successivement $S = S_h$ et $S = S_i$ $(h \neq i)$; on obtient ainsi deux systèmes d'équations

(11) $$(a_{\varkappa\varrho} - S_h I_{\varkappa\varrho}) x^\varrho = 0, \qquad (a_{\varkappa\varrho} - S_i I_{\varkappa\varrho}) x^\varrho = 0.$$

En les retranchant, on trouve les relations

$$(S_h - S_i) I_{\varkappa\varrho} x^\varrho = 0$$

d'où il s'ensuit, vu l'inégalité (10),

$$I_{\varkappa\varrho} x^\varrho = 0.$$

Le déterminant $|I_{\varkappa\varrho}|$ du dernier système d'équations ayant la forme suivante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, sa valeur étant égale à 1; on en conclut que le dernier système d'équations n'admet que la solution $x^\varkappa = 0$. Nous voyons ainsi que les équations (11) n'admettent aucune solution commune non nulle.

Désignons maintenant par $\{x_h^\varrho\}$ un vecteur non nul satisfaisant aux équations (9) si l'on y pose $S = S_h$. Nous allons montrer que les vecteurs $\{x_h^\varrho\}$ $(h = 1, 2, \dots, r)$ sont linéairement distincts. Supposons dans ce but que le vecteur $\{x_i^\varrho\}$ s'exprime linéairement au moyen des vecteurs indépendants $\{x_{h_p}^\varrho\}$ $(p = 1, 2, \dots, s; h_p \neq i)$ et admettons plus précisément qu'il soit

$$x_i^\varrho = t^1 x_{h_1}^\varrho + t^2 x_{h_2}^\varrho + \dots + t^s x_{h_s}^\varrho;$$

nous pouvons supposer, ce qui ne restreint pas la généralité, que tous les coefficients $t^1, t^2, \dots, t^s$ soient différents de zéro. En portant ces expressions dans les relations

$$(a_{\varkappa\varrho} - S_i I_{\varkappa\varrho}) x_i^\varrho = 0,$$

il vient

$$\sum_{p=1}^{s} t^p a_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho - S_i \sum_{p=1}^{s} t^p I_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho = 0.$$

En tenant compte des relations

$$a_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho - S_{h_p} I_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho = 0$$

qui sont par hypothèse satisfaites, la dernière égalité peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{s} t^p S_{h_p} I_{\varkappa\varrho} x_{h_p} - S_i \sum_{p=1}^{s} t^p I_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho = 0$$

ou

$$\sum_{p=1}^{s} t^p (S_{h_p} - S_i) I_{\varkappa\varrho} x_{h_p}^\varrho = 0.$$

Toutes les différences $S_{h_p} - S_i$ étant différentes de zéro, en vertu de l'hypothèse $h_p \neq i$ et de l'inégalité (10), il en résulterait que les vecteurs $\{x_{h_p}^\varrho\}$ sont linéairement dépendants contrairement à ce que nous avons supposé.

Nous voyons donc que les vecteurs $\{x_h^\varrho\}$ $(h = 1, 2, \dots, r)$ sont linéairement distincts. Nous allons montrer qu'ils sont deux à deux en involution par rapport à la forme canonique

$$\Omega = \frac{1}{2} I_{\varkappa\lambda} [x^\varkappa x^\lambda].$$

En effet, les vecteurs $\{x_h^\lambda\}$ et $\{x_i^\lambda\}$ $(h \neq i)$ satisfont par hypothèse aux équations

$$(a_{\varkappa\lambda} - S_h I_{\varkappa\lambda}) x_h^\lambda = 0, \qquad (a_{\varkappa\lambda} - S_i I_{\varkappa\lambda}) x_i^\lambda = 0.$$

Si l'on multiplie ces relations respectivement par $x_i^\varkappa$ et $x_h^\varkappa$ et que l'on fait ensuite la sommation par rapport à $\varkappa$, il viendra

$$a_{\varkappa\lambda} x_i^\varkappa x_h^\lambda - S_h I_{\varkappa\lambda} x_h^\lambda x_i^\varkappa = 0, \qquad a_{\varkappa\lambda} x_i^\lambda x_h^\varkappa - S_i I_{\varkappa\lambda} x_h^\varkappa x_i^\lambda = 0.$$

Remarquons que les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ et $I_{\varkappa\lambda}$ sont antisymétriques; donc, si l'on ajoute les dernières égalités, membre à membre, on obtient la relation

$$(S_h - S_i) I_{\varkappa\lambda} x_h^\varkappa x_i^\lambda = 0.$$

L'expression $S_h - S_i$ étant différente de zéro, il en résulte

$$I_{\varkappa\lambda} x_h^\varkappa x_i^\lambda = 0,$$

ce qui signifie que les vecteurs $\{x_h^\lambda\}$ et $\{x_i^\lambda\}$ sont bien en involution par rapport à Ω (cf. nº 19), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Ceci établi, nous pouvons donc former dans l'espace G_n un repère symplectique composé de $n = 2r$ vecteurs I_α choisis de telle manière qu'il soit

$$I_h = \{x_h^\lambda\} \qquad (h = 1, 2, \dots, r)$$

(cf. n° 39, Théorème 19[a]). Si l'on rapporte l'espace à ce repère, ce qui exige d'effectuer sur les variables primitives une transformation symplectique, le vecteur $\{x_h^\lambda\}$ aura pour coordonnées les nombres

$$x_h^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda = h, \\ 0 & \text{pour} \quad \lambda \neq h, \end{cases}$$

et, comme il doit satisfaire aux équations

$$(a_{\varkappa\lambda} - S_h I_{\varkappa\lambda}) x_h^\lambda = 0,$$

il viendra

$$a_{\varkappa h} - S_h I_{\varkappa h} = 0,$$

d'où il suit

$$a_{h,r+h} = S_h, \qquad a_{h\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa \neq r+h).$$

Nous avons ainsi montré qu'en faisant sur les variables une transformation symplectique on ramène $\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$ à la forme

$$(12) \qquad \Phi = \sum_{h=1}^{r} S_h [x^h x^{r+h}];$$

c'est la forme canonique de Φ relativement au groupe symplectique. Nous avons ainsi montré que dans le cas échéant les racines de l'équation caractéristique d'une forme quadratique extérieure forment le système complet de ses invariants par rapport au groupe symplectique; autrement dit *deux formes quadratiques extérieures ayant le même polynôme caractéristique, sont équivalentes relativement à Sp_n*.

Remarquons encore que la forme (12) reste inaltérée, si l'on assujettit les variables $x^\varkappa$ à une transformation du groupe symplectique laissant invariants chacun des monômes $[x^h x^{r+h}]$.

2[ième] cas. Supposons en second lieu que les racines de l'équation caractéristique (8) de la forme Φ soient différentes, mais qu'il y ait parmi celles-ci des nombres imaginaires. Les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ de Φ étant par hypothèse réels, à chacune racine imaginaire correspond une autre conjuguée. En procédant de la même manière que dans le premier cas, on peut ramener Φ à la forme (12), bien que la transformation symplectique que l'on doit maintenant appliquer ne soit pas réelle. Supposons, pour fixer les idées, qu'il soit $S_1 = a + bi$ et $S_2 = a - bi$. Dans la somme du second membre de la formule (12) on aura par suite des termes suivants:

$$(13) \qquad (a+bi)[x^1 x^{r+i}] + (a-bi)[x^2 x^{r+2}].$$

Effectuons sur les variables $x^\varkappa$ la substitution suivante:

$$(14) \qquad \begin{gathered} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\bar{x}^1 + \bar{x}^{r+2}), \qquad x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\bar{x}^2 + \bar{x}^{r+1}), \\ x^{r+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(i\bar{x}^{r+1} + \bar{x}^2), \qquad x^{r+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(i\bar{x}^{r+2} + \bar{x}^1), \\ x^\varrho = \bar{x}^\varrho \qquad (\varrho \neq 1, 2, r+1, r+2). \end{gathered}$$

Il est facile de vérifier que cette transformation conserve la forme canonique

$$\Omega = \sum_{h=1}^{r} [x^h x^{r+h}]$$

et que, par suite, elle appartient au groupe symplectique Sp_n. Si l'on transforme la somme (13) au moyen des formules (14), il viendra

$$a\{[\bar{x}^1 \bar{x}^{r+1}] + [\bar{x}^2 \bar{x}^{r+2}]\} + b\{[\bar{x}^1 \bar{x}^2] - [\bar{x}^{r+1} \bar{x}^{r+2}]\}.$$

Si l'équation caractéristique de la forme Φ admet $2q$ racines imaginaires, et si l'on choisit les notations de manière qu'il soit

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + b_1 i, & S_3 &= a_2 + b_2 i, & \ldots, && S_{2q-1} &= a_q + b_q i, \\ S_2 &= a_1 - b_1 i, & S_4 &= a_2 - b_2 i, & \ldots, && S_{2q} &= a_q - b_q i, \end{aligned}$$

une transformation symplectique permet de réduire la forme Φ à l'expression

$$(15) \qquad \begin{aligned} \Phi = \sum_{h=1}^{q} a_h \{[x^{2h-1} x^{r+2h-1}] + [x^{2h} x^{r+2h}]\} \\ + \sum_{h=1}^{q} b_h \{[x^{2h-1} x^{2h}] - [x^{r+2h-1} x^{r+2h}]\} + \sum_{j=2q+1}^{r} S_j [x^j x^{r+j}]. \end{aligned}$$

Cette formule représente donc la forme canonique de Φ dans le cas, où son équation caractéristique admet $2q$ racines imaginaires conjuguées.

Ces considérations nous permettent d'énoncer le suivant

Théorème 5. *Si l'équation caractéristique d'une forme quadratique extérieure a toutes les racines distinctes, cette forme peut être ramenée par les transformations du groupe symplectique à une expression canonique (12) ou (15); par conséquent, deux formes de cette espèce et du même rang sont équivalentes par rapport à ce groupe, si leurs polynômes caractéristiques sont égaux.*

3[ième] cas. Supposons enfin que l'équation caractéristique (8) de Φ ait des racines multiples. Dans cette hypothèse, cette forme peut être réduite au moyen des transformations du groupe symplectique, mais elle n'admet pas d'expression canonique, par conséquent, le Théorème 5 cesse d'être valide. Pour éviter de longs calculs, nous présenterons la méthode de réduction, en nous bornant au cas, où l'équation caractéristique admet une racine double S_1, toutes les autres étant des racines simples; nous les désignerons par $S_3, S_4, \ldots, S_r$.

Le déterminant

$$|a_{\varkappa\lambda} - SI_{\varkappa\lambda}| \tag{16}$$

étant égal au carré du polynôme caractéristique de Φ, S_1 est par conséquent racine quadruple de l'équation que l'on obtient en annulant ce déterminant (voir nº 47, équation (4)). On en conclut qu'en posant $S = S_1$ dans les équations (9) on obtient un système

$$(a_{\varkappa\varrho} - S_1 I_{\varkappa\varrho}) x^{\varrho} = 0 \tag{17}$$

admettant une solution non nulle. Une transformation symplectique permet d'introduire de nouvelles variables, telles que cette solution soit composée des nombres

$$x^1 = 1, \qquad x^2 = x^3 = \ldots = x^n = 0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (17), on en déduit les relations

$$a_{\varkappa 1} - S_1 I_{\varkappa 1} = 0.$$

Si l'on y tient compte des valeurs des coefficients $I_{\varkappa\varrho}$, on obtient les formules

$$a_{1,r+1} = S_1, \qquad a_{1\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa \neq r+1).$$

La forme Φ peut donc être écrite comme suit:

$$\Phi = S_1 [x^1 x^{r+1}] + \frac{1}{2} a_{\varkappa'\lambda'} [x^{\varkappa'} x^{\lambda'}] + a_{r+1,\lambda'} [x^{r+1} x^{\lambda'}] \tag{18}$$

$$(\varkappa', \lambda' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r)$$

et le déterminant (16) prend la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & S_1 - S & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \ldots & a_{2,2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{r2} & \ldots & 0 & a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & \ldots & a_{r,2r} \\ -S_1 + S & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,r} & 0 & a_{r+1,r+2} & \ldots & a_{r+1,2r} \\ 0 & a_{r+2,2} & \ldots & a_{r+2,r} & a_{r+2,r+1} & 0 & \ldots & a_{r+2,2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{2r2} & \ldots & a_{2rr} & a_{2r,r+1} & a_{2r,r+2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

En le développant on est conduit à la formule

$$|a_{\varkappa\lambda} - SI_{\varkappa\lambda}| = (S - S_1)^2 |a_{\varkappa'\lambda'} - SI_{\varkappa'\lambda'}| \tag{19}$$

$$(\varkappa', \lambda' = 2, 3, \ldots, r, r+1, r+2, \ldots, 2r).$$

S_1 étant une racine quadruple de l'équation $|a_{\varkappa\lambda} - SI_{\varkappa\lambda}| = 0$, elle est par conséquent une racine double de l'équation

$$|a_{\varkappa'\lambda'} - SI_{\varkappa'\lambda'}| = 0. \tag{20}$$

Considérons maintenant la forme

$$\Phi' = \frac{1}{2} a_{\varkappa'\lambda'} [x^{\varkappa'} x^{\lambda'}] \qquad (\varkappa', \lambda' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r)$$

à $2r-2$ variables; le carré de son agrégat de Pfaff d'ordre $2(r-1)$ est égal au déterminant figurant dans le premier membre de l'égalité (20). Il résulte de cette remarque et de précédents développements que toutes les racines de l'équation caractéristique de Φ' sont simples et que l'une d'elles est égale à S_1. Les autres racines de cette équation sont les mêmes que les racines simples de l'équation caractéristique de Φ; cela résulte de la formule (19) et de l'hypothèse faite sur l'équation caractéristique de Φ. En vertu des résultats que nous avons obtenu en étudiant le premier cas, on peut donc réduire Φ' à la forme canonique, en effectuant sur les variables $x^2, x^3, \ldots, x^r, x^{r+2}, \ldots, x^{2r}$ une transformation symplectique

$$\Phi' = S_1 [x^2 x^{r+2}] + S_3 [x^3 x^{r+3}] + \ldots + S_r [x^r x^{2r}].$$

En portant cette expression dans la formule (18), il vient finalement

$$\Phi = S_1 \{[x^1 x^{r+1}] + [x^2 x^{r+2}]\} + S_3 [x^3 x^{r+2}] + \ldots + S_r [x^r x^{2r}] + a_{r+1,\lambda'} [x^{r+1} x^{\lambda'}]$$

$$(\lambda' = 2, 3, \ldots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r).$$

C'est la forme réduite de Φ.

Si S_1 est une racine q^{uple} de l'équation caractéristique de Φ, toutes les autres racines $S_{q+1}, S_{q+2}, \ldots, S_r$ de celle-ci étant simples, on peut appliquer la même méthode pour trouver l'expression réduite de Φ et l'on trouve ainsi

$$\Phi = S_1 \{[x^1 x^{r+1}] + \ldots + [x^q x^{r+q}]\} + S_{q+1} [x^{q+1} x^{r+q+1}] + \ldots$$
$$\ldots + S_r [x^r x^{2r}] + a_{r+h,\lambda'} [x^{r+h} x^{\lambda'}]$$

$$(\lambda' = h+1 \ldots, r, r+h, r+h+1, \ldots, 2r).$$

Ce résultat se généralise facilement, si l'équation caractéristique a plusieurs racines multiples.

On voit sur les dernières formules que, dans le cas considéré ici, deux formes quadratiques extérieures du même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement équivalentes par rapport au groupe symplectique.

EXEMPLE. Nous allons appliquer les résultats obtenus dans ce numéro au cas $n=4$ $(r=2)$. Soit

$$\Phi=a_{13}[x^1x^2]+a_{13}[x^1x^3]+a_{14}[x^1x^4]+a_{23}[x^2x^3]+a_{24}[x^2x^4]+a_{34}[x^3x^4];$$

on a

$$[\Phi^2]=2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})[x^1x^2x^3x^4]$$

tandis que

$$\Omega=[x^1x^3]+[x^2x^4] \qquad \text{et} \qquad [\Omega^2]=-2[x^1x^2x^3x^4].$$

Le carré extérieur de la forme $\Psi=\Phi-S\Omega$ est égal à l'expression

$$\{(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})+(a_{13}+a_{24})S-S^2\}[x^1x^2x^3x^4].$$

L'équation caractéristique de Φ peut donc s'écrire

$$S^2-J_1S-J_2=0, \tag{21}$$

où l'on a posé

$$J_1=a_{13}+a_{24}, \qquad J_2=a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23};$$

ces deux grandeurs sont des invariants rationnels de Φ.

Si le discriminant $D=J_1^2+4J_2$ de l'équation (21) est positif, la forme Φ peut être réduite au moyen d'une transformation symplectique à l'expression

$$S_1[x^1x^3]+S_2[x^2x^4];$$

si $D<0$ et si l'on pose $S_1=a+bi$, $S_2=a-bi$, la forme canonique de Φ peut être écrite comme suit:

$$a\{[x^1x^3]+[x^2x^4]\}+b\{[x^1x^2]-[x^3x^4]\}.$$

Si enfin $D=0$, Φ peut être réduit à l'expression

$$S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^4]\}+a_{32}[x^3x^2].$$

Remarquons que les deux formes $S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^1]\}+a_{32}[x^3x^2]$ et $S_1\{[x^1x^3]+[x^2x^1]\}$ ont le même polynôme caractéristique $-(S-S_1)^2$ néanmoins elles ne sont pas équivalentes par rapport au groupe symplectique.

CHAPITRE IV

DIVERSES APPLICATIONS

§ 1. Déterminants

49. Déterminants. La théorie des formes extérieures va nous permettre de démontrer d'une façon très simple principales propriétés des déterminants[20]). Les raisonnements dont nous ferons usage pour ce but ne sont basés que sur les notions fondamentales de la théorie des formes extérieures exposées aux n^{os} 6-9.

Dans ce but imaginons deux séries des variables x^ϱ et y_ϱ et les formes extérieures construites respectivement avec x^ϱ et y_ϱ [21]). Nous allons aussi considérer les produits et les sommes des produits des formes de ces deux classes, en supposant qu'ils obéissent à des lois ordinaires du calcul (cf. n^0 25).

Prenons maintenant deux systèmes de formes linéaires

$$\omega^\varkappa=a_\varrho^\varkappa x^\varrho, \qquad \varphi_\varkappa=a_\varkappa^\varrho y_\varrho \tag{1}$$

et effectuons la somme $\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa$; on aura

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=a_\varrho^\varkappa x^\varrho\cdot y_\varkappa$$

ou

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=a_\varrho^\varkappa y_\varkappa\cdot x^\varrho.$$

D'après la seconde des formules (1) ceci peut s'écrire comme suit

$$\omega^\varkappa\cdot y_\varkappa=\varphi_\varrho\cdot x^\varrho.$$

En évaluant la $n^{\text{ième}}$ puissance de deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$[\omega^1\omega^2\ldots\omega^n]\cdot[y_1y_2\ldots y_n]=[\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n]\cdot[x^1x^2\ldots x^n]. \tag{2}$$

Si l'on développe les deux produits extérieurs $[\omega^1\omega^2\ldots\omega^n]$ et $[\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n]$, on obtient

$$[\omega^1\omega^2\ldots\omega^n]=\Delta[x^1x^2\ldots x^n], \qquad [\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n]=\Delta^*[y_1y_2\ldots y_n], \tag{3}$$

[20]) Cf. N. G. Tchébotareff [21], p. 12.

[21]) Nous supposons comme dans tout ce qui suit que les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$.