Mais la suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_{n-p}$ étant paire d'après la définition d'une suite complémentaire (p. 44), on a

$$[x^{\lambda_1} \ldots x^{\lambda_p} x^{\bar{\lambda}_1} \ldots x^{\bar{\lambda}_{n-p}}] = [x^1 x^2 \ldots x^n].$$

La dernière égalité prendra donc la forme

$$[\Phi \tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)} \sqrt{g}\, C [x^1 x^2 \ldots x^n];$$

c'est ce que nous voulions montrer.

Corollaire. *Le second membre de la dernière égalité étant indépendant de l'ordre des formes $\Phi$ et $\Psi$, on en déduit $[\Phi\tilde{\Psi}] = [\Psi\tilde{\Phi}]$; d'autre part, on a $[\Psi\tilde{\Phi}] = (-1)^{p(n-p)}[\tilde{\Phi}\Psi]$, car les formes $\Psi$ et $\tilde{\Phi}$ sont respectivement de degrés $p$ et $n-p$. Il en résulte l'égalité*

$$[\Phi\tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)}[\tilde{\Phi}\Psi].$$

Remarque. Pour distinguer les adjointes d'une forme extérieure, formées au moyen des grandeurs $\overset{+1}{\mathfrak{E}}$, $\overset{-1}{\mathfrak{E}}$ et de la grandeur $\tilde{\mathfrak{E}}$, nous les appellerons respectivement *adjointes-e et adjointes-ε.*

---

CHAPITRE II

# ÉQUATIONS EXTÉRIEURES

**28. Définition.** Soit $\Omega$ une forme extérieure de degré $p$; en l'annulant, on obtient l'équation extérieure

(1) $$\Omega = 0,$$

dont les *solutions* sont, par définition, tous les éléments plans $E_q$ qui vérifient la condition: si l'on choisit une suite quelconque

(2) $$V_1, V_2, \ldots, V_p$$

de $p$ vecteurs issus de l'origine des coordonnées de l'espace affine $A_n$, et situés dans $E_q$, la valeur de $\Omega$, pour cette suite, est nulle (cf. nº 11). Pour indiquer qu'un élément plan $E_q$ est solution de l'équation extérieure $\Omega = 0$, on écrit $\Omega(E_q) = 0$.

La définition de la solution d'une équation extérieure s'étend d'une manière évidente aux systèmes d'équations extérieures.

Si $q < p$, les vecteurs de la suite (2) ne sont pas linéairement indépendants, et, par suite, la valeur de $\Omega$ est nulle quel que soit l'élément $E_q$. D'où le

Théorème 1. *Tout élément plan de dimension plus petite que $p$ est une solution d'une équation extérieure de degré $p$.*

Il en résulte que, si l'on cherche les solutions à $p$ dimensions d'un système d'équations extérieures, on peut négliger toutes les équations de celui-ci dont le degré est supérieur à $p$.

Il résulte aussi immédiatement de la définition donnée ci-dessus, que tout élément plan, contenu dans un autre élément vérifiant l'équation (1), est aussi solution de celle-ci.

**29. Critères pour les solutions.** Nous établirons dans ce numéro divers critères qui permetront de reconnaître, si un élément plan est solution d'une équation extérieure, ou d'un système d'équations extérieures. Le caractère de ces critères dépend, bien entendu, du mode au moyen duquel l'élément plan est déterminé.

A. Soit $E_q$ une solution de l'équation

(3) $$\Omega = \frac{1}{p!} a_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} [x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \ldots x^{\varkappa_p}] = 0,$$

dont le degré $p$ ne surpasse pas $q$; admettons que $E_q$ soit défini par ses coordonnées plückeriennes. Si

$$\{x_i^\varkappa\} \qquad (i=1,2,\ldots,p) \tag{4}$$

sont $p$ vecteurs déterminant un élément plan à $p$ dimensions, contenu dans $E_q$, on a, par hypothèse,

$$\frac{1}{p!}\,a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_p^{\varkappa_p]} = 0.$$

Cette égalité exprime que l'élément plan, défini par les vecteurs (4), appartient au faisceau linéaire

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} = 0 \tag{5}$$

d'éléments plans à $p$ dimensions (cf. nº 5). Cette remarque peut être énoncée sous la forme du

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation* (3) *soit vérifiée par un élément $E_q$, où $q \geqslant p$, il faut et il suffit que tous les éléments plans à $p$ dimensions, contenus dans $E_q$ appartiennent au faisceau linéaire* (5).

De ce théorème et du Théorème 2 du nº 5 résulte immédiatement le critère

THÉORÈME 3. *Pour que l'équation extérieure*

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \ldots x^{\varkappa_p}] = 0$$

*ait pour solution un élément plan $E_q$, il faut et il suffit que les coordonnées plückeriennes $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$ de $E_q$ satisfassent aux relations*

$$a_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{q-p}\varrho_1\ldots\varrho_p} = 0. \tag{6}$$

Pour obtenir toutes les solutions de l'équation (3), il faut donc trouver la solution la plus générale du système des équations (6), qui sont linéaires par rapport aux quantités antisymétriques $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$. Mais, celles-ci, étant les coordonnées plückeriennes d'un élément plan, doivent être composantes d'un $q$-vecteur simple (cf. nº 4). Pour être complet, il faut donc ajouter, aux équations (6), d'autres relations exprimant les conditions pour que les quantités $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$ jouissent de la propriété demandée. Pour trouver ces relations nous démontrerons d'abord le

THÉORÈME 4. *Pour que les quantités $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$ antisymétriques en tous leurs indices soient les coordonnées plückeriennes d'un élément plan à $q$ dimensions, il faut et il suffit que la forme extérieure à variables $y_\varkappa$*

$$\Phi = \frac{1}{q!}\, x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}[y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_q}] \tag{7}$$

*soit de rang $q$.*



En effet, si les quantités antisymétriques $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$ sont les coordonnées plückeriennes d'un élément plan, on peut déterminer $q$ vecteurs indépendants $\{x_i^\varkappa\}$ tels qu'il soit

$$x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q} = x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q]}.$$

Si l'on porte ces expressions dans le second membre de la formule (7), on trouve

$$\Phi = \frac{1}{q!}\, x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q]}[y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_q}],$$

ou

$$\Phi = x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q}[y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_q}].$$

La forme $\Phi$ peut donc être représentée comme produit de $q$ formes linéaires de variables $y_\varkappa$

$$\Phi = [x_1^{\varkappa_1} y_{\varkappa_1} \cdot x_2^{\varkappa_2} y_{\varkappa_2} \cdot \ldots \cdot x_q^{\varkappa_q} y_{\varkappa_q}].$$

En faisant la substitution

$$\bar{y}_h = x_h^\varkappa y_\varkappa, \quad \bar{y}_{q+1} = y_{q+1}, \quad \ldots, \quad \bar{y} = y_n \qquad (h=1,2,\ldots,q),$$

on obtient

$$\Phi = [\bar{y}_1 \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_q], \tag{8}$$

ce qui montre que la forme $\Phi$ est de rang $q$. Réciproquement, si $\Phi$ est de rang $q$, elle peut se mettre sous la forme (8) par une substitution linéaire

$$\bar{y}_\varkappa = x_\varkappa^\varrho y_\varrho.$$

On aura, par conséquent,

$$\Phi = [x_1^{\varkappa_1} y_{\varkappa_1} \cdot x_2^{\varkappa_2} y_{\varkappa_2} \cdot \ldots \cdot x_q^{\varkappa_q} y_{\varkappa_q}],$$

ce qui peut s'écrire

$$\Phi = x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q}[y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_q}],$$

ou

$$\Phi = \frac{1}{q!}\, x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q]}[y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_q}].$$

La comparaison avec la formule (7) conduit aux égalités

$$x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q} = x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_q^{\varkappa_q]},$$

c. q. f. d.

Pour avoir, sous forme explicite, les conditions que doivent vérifier les quantités $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$, il suffit d'appliquer le Théorème 2 du nº 14, d'après lequel le rang de la forme (7) doit être égal à celui de son système associé. Or, le système associé de la forme (7) se compose des équations

$$\frac{\partial^{q-1}\Phi}{\partial y_{\varkappa_1} \partial y_{\varkappa_2} \ldots \partial y_{\varkappa_{q-1}}} = 0 \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{q-1} = 1,2,\ldots,n). \tag{9}$$

La forme $\Phi$ n'étant, bien entendu, nulle, on peut supposer, par exemple, $x^{12\ldots q}\neq 0$. Le système (9) contient, entre autres, les $q$ équations suivantes:

(10) $$x^{12\ldots q}y_i+\psi_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,q),$$

$\psi_i$ désignant une forme linéaire aux variables $y_{q+1},y_{q+2},\ldots,y_n$; on obtient ces équations en attribuant, dans l'équation (9), aux indices $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{q-1}$, respectivement les valeurs $1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,q$. Les équations (10) sont indépendantes, et, comme elles sont au nombre $q$, pour que le rang du système d'équations (9) soit égal à $q$, il faut et il suffit que toutes les autres équations du système soient des conséquences des relations (10). Donc, si l'on tire les valeurs de $y_1,y_2,\ldots,y_q$ de ces relations, et qu'on les porte dans toutes les autres équations du système (9), on obtient des égalités qui doivent être identiquement satisfaites. En écrivant que tous les coefficients des variables $y_\varkappa$, dans les égalités ainsi obtenues, sont nuls, on trouve les relations cherchées entre les quantités $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$. Celles-ci seront évidemment quadratiques et homogènes par rapport à $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$. Il serait facile de se convaincre qu'elles restent vraies même si l'on suppose $x^{12\ldots q}=0$. Nous le montrerons en nous bornant au cas, le plus simple, $n=2$.

Supposons donc que l'on se donne un système de quantités antisymétriques $x^{\varkappa\lambda}$. Les équations (7) et (9) deviendront maintenant respectivement

(7′) $$\Phi=\frac{1}{2}x^{\varkappa\lambda}[y_\varkappa y_\lambda],$$

(9′) $$\frac{\partial\Phi}{\partial x^\varkappa}=x^{\varkappa\lambda}y_\lambda=0 \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n).$$

Si l'on suppose $x^{12}\neq 0$, et qu'on pose, dans l'équation (9′), successivement $\varkappa=1$ et $\varkappa=2$, on obtient les équations

$$x^{12}y_2+x^{13}y_3+\ldots+x^{1n}y_n=0,$$
$$x^{21}y_1+x^{23}y_3+\ldots+x^{2n}y_n=0.$$

En portant les valeurs de $y_1$ et de $y_2$, tirées de ces relations, dans l'équation (9′), celle-ci devient

$$\sum_{h=3}^{n}(x^{\varkappa 1}x^{2h}+x^{\varkappa 2}x^{h1}+x^{\varkappa h}x^{12})y_h=0 \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n).$$

Cette relation devant être une identité, on en déduit

(11) $$x^{\varkappa 1}x^{2\lambda}+x^{\varkappa 2}x^{\lambda 1}+x^{\varkappa\lambda}x^{12}=0 \qquad (\varkappa,\lambda=1,2,\ldots,n).$$



Nous avons démontré cette égalité pour $\lambda=3,4,\ldots,n$, mais on voit qu'elle est aussi vraie pour $\lambda=1$ et $\lambda=2$. Remarquons maintenant que la relation (11) reste inaltérée, si l'on permute les indices $1,2,\varkappa,\lambda$ d'une manière arbitraire. Donc, on aurait obtenu la même relation, si, au lieu de supposer qu'il soit $x^{12}\neq 0$, l'on supposerait qu'une autre des quantités $x^{\varkappa 1}, x^{\varkappa 2}, x^{\lambda 1}, x^{\lambda 2}$ et $x^{\varkappa\lambda}$ était différente de zéro. En résumant, on peut énoncer le

Théorème 5. *Pour que les quantités antisymétriques $x^{\varkappa\lambda}$ soient les coordonnées plückeriennes d'un élément plan à deux dimensions, il faut et il suffit qu'aient lieu les relations*

$$x^{\varkappa\lambda}x^{\mu\nu}+x^{\varkappa\mu}x^{\nu\lambda}+x^{\varkappa\nu}x^{\lambda\mu}=0 \qquad (\varkappa,\lambda,\mu,\nu=1,2,\ldots,n).$$

Les résultats obtenus ci-dessus nous permettent de compléter le Théorème 3: *pour que les quantités antisymétriques $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_q}$ représentent une solution de l'équation* (3), *il faut et il suffit qu'elles vérifient les équations linéaires* (6) *et les équations quadratiques et homogènes qui expriment les conditions pour que ces quantités soient les coordonnées plückeriennes d'un élément plan.*

Exemples. 1° Considérons l'équation extérieure à quatre variables

$$[x^1x^3]+[x^2x^4]=0.$$

Pour que l'élément $E_2\{x^{\varkappa\lambda}\}$ soit solution de celle-ci, il faut et il suffit, d'après les Théorèmes 3 et 5, que

$$x^{13}+x^{24}=0, \qquad x^{12}x^{34}+x^{13}x^{42}+x^{14}x^{23}=0.$$

On voit donc que l'équation donnée a une infinité de solutions à deux dimensions. Cherchons encore, s'il existe une solution à trois dimensions $E_3(x^{\varkappa\lambda\mu})$. D'après le Théorème 3, il faut qu'il soit pour cela

$$x^{\varkappa 13}+x^{\varkappa 24}=0 \qquad (\varkappa=1,2,3,4).$$

Il en résulte $x^{\varkappa\lambda\mu}=0$, donc il n'existe aucune solution à trois dimensions.

2° Soit un système de deux équations à quatre variables

(12) $$[x^1x^2]+[x^1x^3]=0, \qquad [x^1x^4]=0.$$

Pour que les quantités antisymétriques $x^{\varkappa\lambda}$ représentent une solution du système (12), il faut et il suffit qu'elles satisfassent aux relations

$$x^{12}+x^{31}=0, \qquad x^{41}=0, \qquad x^{12}x^{34}+x^{13}x^{42}+x^{14}x^{23}=0,$$

qui peuvent s'écrire

$$x^{12}+x^{13}=0, \qquad x^{14}=0, \qquad x^{12}(x^{34}-x^{24})=0.$$

On voit donc que le système (11) a deux familles de solutions à deux dimensions

$$x^{12}=a,\quad x^{13}=-a,\quad x^{14}=0,\quad x^{23}=b,\quad x^{24}=c,\quad x^{34}=c,$$

et

$$x^{12}=0,\quad x^{13}=0,\quad x^{14}=0,\quad x^{23}=a,\quad x^{24}=b,\quad x^{34}=c,$$

$a,b,c$ étant arbitraires.

B. Nous établirons maintenant les critères pour les solutions d'une équation extérieure en supposant que celles-ci soient définies par un système d'équations linéaires et homogènes en les variables $x^{\varkappa}$.

Admettons pour ce but qu'un élément plan $E_q$ soit déterminé par le système de $n-q$ équations indépendantes

$$\omega^h=a^h_\varrho x^\varrho=0 \qquad (h=1,2,\ldots,n-q), \tag{13}$$

et supposons que celui-ci soit solution de l'équation de degré $p\leqslant q$

$$\Omega=\frac{1}{p!}\,a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_p}]=0.$$

Par un changement de variables, le système (13) peut être ramené à la forme

$$\omega^h=x^h=0 \qquad (h=1,2,\ldots,n-q). \tag{14}$$

Imaginons maintenant un élément plan $E_p$ contenu dans $E_q$ et déterminé par $p$ vecteurs linéairement indépendants; il résulte des équations (14) que les coordonnées plückeriennes $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ de $E_p$, calculées avec ces vecteurs, sont toutes nulles si l'un des indices $\varkappa$ est inférieur à $n-q+1$. La relation qui, d'après le Théorème 3, doit être satisfaite par les coordonnées $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ se réduit donc à la suivante:

$$\sum_{(h_1h_2\ldots h_p)} a_{h_1h_2\ldots h_p}x^{h_1h_2\ldots h_p}=0 \qquad (h_1,h_2,\ldots,h_p=n-p+1,n-p+2,\ldots,n).$$

Les coordonnées $x^{h_1h_2\ldots h_p}$ pouvant prendre des valeurs arbitraires, il en résulte

$$a_{h_1h_2\ldots h_p}=0 \qquad (h_1,h_2,\ldots,h_p=n-p+1,n-p+2,\ldots,n).$$

Ceci montre que, dans la forme $\Omega$, figurent seulement les variables $x^1,x^2,\ldots,x^{n-p}$, et que, par suite, elle s'annule, si l'on pose $x^1=x^2=\ldots$ $\ldots=x^{n-p}=0$. En revenant aux variables arbitraires, on peut énoncer ce résultat sous la forme du

THÉORÈME 6. *Pour que l'élément plan $E_q$, défini par de $n-q$ équations linéaires* (13) *soit solution d'une équation extérieure $\Omega=0$, il faut et il suffit que la forme $\Omega$ s'annule, si on lie les variables par les équations* (13).



On peut donner à ce Théorème une forme plus commode pour les applications. Si la forme $\Omega$ est une conséquence des équations (13), elle doit contenir dans chaque terme l'une au moins des formes linéaires $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{n-q}$; elle peut donc s'écrire comme suit

$$\Omega=[\Phi_1\omega^1]+[\Phi_2\omega^2]+\ldots+[\Phi_{n-q}\omega^{n-q}]. \tag{15}$$

On aura, par conséquent,

$$[\Omega\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-q}]=0.$$

Inversement, si cette relation est vérifiée, on peut présenter $\Omega$ par la formule (15). D'où le

THÉORÈME 7. *Pour que l'élément plan $E_q$, défini par les équations linéaires*

$$\omega^1=0,\quad \omega^2=0,\quad \ldots,\quad \omega^{n-q}=0,$$

*soit solution d'une équation extérieure $\Omega$, il faut et il suffit qu'il soit*

$$[\Omega\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-q}]=0.$$

EXEMPLES. 1⁰ Soit l'équation quadratique à $2r$ variables

$$\sum_{i=1}^{r}[x^ix^{r+i}]=0.$$

Cherchons s'il existe une solution $E_r$ définie par les équations

$$x^{r+i}-\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x^j=0 \qquad (i=1,2,\ldots,r).$$

En remplaçant, dans l'équation donnée, les variables $x^{r+i}$ par leurs valeurs tirées des équations linéaires, on obtient la relation

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}[x^ix^j]=0$$

qui doit être identiquement satisfaite; on en déduit les conditions $a_{ij}=a_{ji}$.

2⁰ Considérons l'équation de degré $n-1$

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}[x^1x^2\ldots x^{i-1}x^{i+1}\ldots x^n]=0.$$

Pour qu'elle ait pour solution un élément plan $E_{n-1}$, défini par l'équation linéaire

$$\omega=a_\varrho x^\varrho=0,$$

il faut et il suffit, d'après le théorème 7, qu'il soit

$$[\Omega\omega]=[x^1x^2\ldots x^n]\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k=0.$$

Il en résulte la condition

$$a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n = 0;$$

l'équation $\Omega = 0$ a donc une infinité de solution à $n-1$ dimensions.

**30. Systèmes d'équations extérieures.** Deux systèmes d'équations extérieures sont dits *équivalents*, s'ils admettent les mêmes solutions. Soit, par exemple, un système composé de trois équations linéaires et de deux équations du second degré

$$(16) \qquad \omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \Omega^1 = 0, \quad \Omega^2 = 0.$$

On obtient un système équivalent à ce dernier en posant

$$(17) \quad \begin{aligned} &\varpi^h = p_1^h \omega^1 + p_2^h \omega^2 + p_3^h \omega^3 = 0 && (h = 1, 2, 3), \\ &\bar{\Omega}^i = q_1^i \Omega^1 + q_2^i \Omega^2 + [\tau_1^i \omega^1] + [\tau_2^i \omega^2] + [\tau_3^i \omega_3] && (i = 1, 2), \end{aligned}$$

où $\tau_1^i, \tau_2^i, \tau_3^i$ sont des formes linéaires arbitraires et $p$, $q$ — des constantes assujetties seulement aux conditions $|p_j^h| \neq 0$, $|q_k^i| \neq 0$. Pour se convaincre qu'une solution quelconque $E_p$ de l'un de ces systèmes est aussi une solution de l'autre, il suffit d'appliquer le critère donné au numéro précédent (p. 56). Il serait aussi facile de montrer que le système le plus général équivalent au système (16) et de même degré que (16) est donné par les équations (17).

On peut se servir de ces remarques pour simplifier le système (16). Pour ce but adjoignons aux formes $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, $n-3$ formes linéaires $\omega^4$, $\omega^5, \ldots, \omega^n$ telles que le système $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ soit composé de formes indépendantes, et exprimons les formes $\Omega^1, \Omega^2$ par les formes $\omega^\varkappa$. Si l'on sépare les termes qui contiennent l'une quelconque des formes $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ on pourra écrire

$$\Omega^i = \frac{1}{2} a^i_{\varrho'\sigma'} [\omega^{\varrho'} \omega^{\sigma'}] + [\Pi_1^i \omega^1] + [\Pi_2^i \omega^2] + [\Pi_3^i \omega^3]$$

$$(i = 1, 2;\ \varrho', \sigma' = 3, 4, \ldots, n),$$

les symboles $\Pi_1^i, \Pi_2^i, \Pi_3^i$ désignant des combinaisons linéaires des formes $\omega^\varkappa$. La dernière formule s'écrit

$$\Omega^i \equiv \frac{1}{2} a^i_{\varrho'\sigma'} [\omega^{\varrho'} \omega^{\sigma'}] \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2;\ \varrho', \sigma' = 4, 5, \ldots, n),$$

l'égalité

$$\Phi \equiv \Psi\ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p)$$

exprimant que deux formes $\Phi$ et $\Psi$ de même degré sont égales, si l'on y fait abstraction des termes qui contiennent l'une quelconque des formes linéaires $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$.



On voit ainsi que le système (16) est équivalent au suivant:

$$\omega^1 = 0, \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega^3 = 0, \qquad \frac{1}{2} a^i_{\varrho'\sigma'} [\omega^{\varrho'} \omega^{\sigma'}] = 0.$$

En particulier, si l'on a $\Omega^i \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^2, \omega^3)$, le système donné est équivalent au système composé des équations linéaires $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$.

Considérons maintenant le système

$$(18) \qquad \omega^i = 0, \qquad \Omega^j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_0;\ j = 1, 2, \ldots, s),$$

où $\Omega^j$ sont des formes du second degré, et supposons qu'un élément plan $E_p$ soit l'une de ses solutions à $p$ dimensions. Admettons que $E_p$ soit déterminé par un système de $n-p$ équations linéaires indépendantes. Les premiers membres des équations (18) devant s'annuler lorsqu'on lie les variables par les équations de $E_p$, il en résulte que les équations de $E_p$ peuvent être mises sous la forme

$$(19) \quad \omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{s_0} = 0, \quad \omega^{s_0+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{n-p} = 0.$$

Pour exprimer que les équations $\Omega^j = 0$ sont des conséquences des équations (19), introduisons $p$ nouvelles formes auxiliaires $\omega^{n-p+1}$, $\omega^{n-p+2}, \ldots, \omega^n$, indépendantes entre elles et des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-p}$. Les équations $\Omega^j = 0$ peuvent alors s'écrire

$$\Omega^j = \frac{1}{2} a^j_{\varrho'\sigma'} [\omega^{\varrho'} \omega^{\sigma'}] + [\tau_1 \omega^{n-p+1}] + [\tau_2 \omega^{n-p+2}] + \ldots + [\tau_p \omega^n] = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s;\ \varrho', \sigma' = 1, 2, \ldots, n-p),$$

les symboles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ désignant des combinaisons linéaires des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$.

De cette remarque découle le procédé pratique suivant pour trouver toutes les solutions à $p$ dimensions du système (18): on introduit d'abord $n - s_0$ formes linéaires $\omega^{s_0+1}, \omega^{s_0+2}, \ldots, \omega^n$, indépendantes entre elles et des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{s_0}$ et l'on écrit

$$\Omega^j = \frac{1}{2} a^j_{\varrho\sigma} [\omega^\varrho \omega^\sigma];$$

on forme ensuite le système de $n-p$ équations linéaires

$$(20) \quad \begin{aligned} &\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega^{s_0} = 0, \\ &l^h_{s_0+1} \omega^{s_0+1} + l^h_{s_0+2} \omega^{s_0+2} + \ldots + l^h_n \omega^n = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-p-s_0), \end{aligned}$$

et on cherche à déterminer les coefficients $l$ de manière que les équations $\Omega^j = 0$ soient des conséquences des équations (20).

EXEMPLE. Soit donné le système

$$\omega^1 = x^4 + x^1 + x^2 - x^3 = 0, \qquad \omega^2 = x^5 - x^1 - x^2 + x^3 = 0,$$

$$\Omega = [x^1x^2] + [x^2x^3] + [x^3x^1] + [x^4x^1] + [x^4x^2] + [x^5x^3] = 0.$$

Remarquons d'abord qu'on a ici

$$\Omega \equiv [x^1x^2] + [x^2x^3] + [x^3x^1] \pmod{\omega^1, \omega^2}.$$

Pour trouver les solutions à deux dimensions, on adjoint aux équations $\omega^1=0, \omega^2=0$ une relation entre trois variables $x^1, x^2, x^3$:

$$k_1x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 = 0.$$

Si l'on porte l'expression de $x^3$, tirée de cette relation, dans l'équation

$$[x^1x^2] + [x^2x^3] + [x^3x^1] = 0,$$

on obtient

$$(k_1 + k_2 + k_3)[x^1x^2] = 0.$$

On voit ainsi que le système donné admet toute une famille de solutions à deux dimensions, définies par les équations

$$x^4 + x^1 + x^2 - x^3 = 0, \quad x^5 - x^1 - x^2 + x^3 = 0, \quad k_1x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 = 0,$$

où les coefficients $k$ sont liés par la relation $k_1+k_2+k_3=0$.

**31. Détermination des solutions.** Proposons nous maintenant le problème suivant: étant donnée une solution $E_p$ d'un système d'équations extérieures, déterminer, s'il existe, une solution à $p+1$ dimensions passant par $E_p$.

Considérons, pour fixer les idées, le système composé de $s_0$ équations linéaires indépendantes et de $s$ équations quadratiques

$$(21) \qquad \omega^i = a^i_\varrho x^\varrho = 0, \qquad \Omega^j = \frac{1}{2} a^j_{\varrho\sigma}[x^\varrho x^\sigma] = 0 \qquad (i=1,2,\dots,s_0;\, j=1,2,\dots,s)$$

c'est d'ailleurs le cas qui arrive le plus souvent dans les applications[14]). Imaginons maintenant deux éléments linéaires $e$ et $e'$, solutions du système (21); ces éléments sont dits *en involution* par rapport au système donné si l'élément à deux dimensions déterminé par ceux-ci est, lui-aussi, une solution du système. Les conditions pour que les éléments $e$ et $e'$ soient en involution s'expriment donc par les relations

$$\omega^i(e)=0, \qquad \omega^i(e')=0, \qquad \Omega^j(e,e')=0 \qquad (i=1,2,\dots,s_0;\, j=1,2,\dots,s).$$

Le Théorème 3 du nº 29, appliqué au système (21), peut maintenant s'énoncer comme suit:

[14]) Toutes les considérations suivantes de ce Chapitre se rapportent au système (21).



THÉORÈME 8. *Pour qu'un élément plan $E_p$ soit solution du système (21), il faut et il suffit que deux éléments linéaires quelconques de $E_p$ soient en involution.*

Supposons qu'un élément plan $E_p$ soit déterminé par $p$ éléments linéaires distincts $e_1, e_2, \dots, e_p$; si $E_p$ est une solution du système (21), on a

$$(22) \quad \omega^i(e_k)=0, \quad \Omega^j(e_k,e_l)=0 \quad (i=1,2,\dots,s_0;\, j=1,2,\dots,s;\, k,l=1,2,\dots,p).$$

Soit $e$ un élément linéaire distinct des éléments $e_1, e_2, \dots, e_p$; pour que l'élément à $p+1$ dimensions, déterminé par $e_1, e_2, \dots, e_p, e$, soit solution du système (21), il faut et il suffit, d'après le théorème énoncé ci-dessus, qu'il soit

$$(23) \quad \omega^i(e)=0, \quad \Omega^j(e_k,e)=0 \quad (i=1,2,\dots,s_0;\, j=1,2,\dots,s;\, k=1,2,\dots,p).$$

Remarquons que le système des équations (23) est linéaire par rapport aux composantes $e$, et qu'en vertu des relations (22), les éléments $e_1, e_2, \dots, e_p$ font partie de l'ensemble de ses solutions si l'on y regarde $e$ comme étant une indéterminée. Si un élément linéaire $e$ satisfait aux équations (23), il est dit *en involution avec* $E_p$. Comme ces équations sont linéaires, les éléments linéaires qui sont en involution avec $E_p$ déterminent un élément plan appelé *élément polaire* de $E_p$ que nous désignons par $H(E_p)$; d'après ce qu'on a remarqué plus haut, l'élément $E_p$ appartient à $H(E_p)$. La matrice du système d'équations (23) qui représentent l'élément $H(E_p)$ est dite *matrice polaire* de $E_p$; son rang est au plus égal à $n-p$, puisque les équations (23) admettent au moins $p$ solutions $e_1, e_2, \dots, e_p$.

Si le rang de la matrice polaire de $E_p$ est égal à $n-p$, il n'y a pas d'éléments linéaires distincts de $e_1, e_2, \dots, e_p$ qui soient en involution avec $E_p$, et, par conséquent, il n'existe aucun élément $E_{p+1}$, passant par $E_p$, qui soit solution du système (21). Si ce rang est égal à $n-p-r_{p+1}$, où $r_{p+1}>0$, il y a $r_{p+1}$ éléments linéaires distincts, n'appartenant pas à $E_p$, qui sont en involution avec $E_p$. Si on les désigne par $e'_1, e'_2, \dots, e'_{r_{p+1}}$, l'élément le plus général de cette espèce est de la forme

$$\lambda^1 e'_1 + \lambda^2 e'_2 + \dots + \lambda^{r_{p+1}} e'_{r_{p+1}},$$

où $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{r_{p+1}}$ sont des paramètres arbitraires. Tous ces éléments forment un élément plan contenu dans $H(E_p)$; nous le désignerons par $H'(E_p)$. Aux éléments linéaires de $H'(E_p)$ correspondent des solutions à $p+1$ dimensions passant par $E_p$; elles dépendent donc de $r_{p+1}-1$ paramètres arbitraires.

Remarquons que les éléments plans $H(E_p)$ et $H'(E_p)$ ne sont pas en général des solutions du système (21).

En terminant ce numéro, nous allons montrer comment peut-on former les équations de $H(E_p)$, si $E_p$ est défini par un système d'équations linéaires. On a remarqué au n° 30 que les équations de $E_p$ peuvent être représentées sous la forme (19) et que les équations du second degré du système (21) peuvent alors s'écrire

$$\Omega^j = \frac{1}{2} a^j_{\varrho'\sigma'}[\omega^{\varrho'}\omega^{\sigma'}] + [\tau^j_{\varrho''}\omega^{n-p+\varrho''}] = 0$$
$$(j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=1,2,\ldots,n-p;\ \varrho''=1,2,\ldots,p),$$

où sont conservées les notations introduites au n° 30.

En particulier, les symboles $\tau^j_{\varrho''}$ désignent ici des combinaisons linéaires des formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-p}$

$$(24)\qquad \tau^j_{\varrho''} = c^j_{\varrho''1}\omega^1 + c^j_{\varrho''2}\omega^2 + \ldots + c^j_{\varrho''n-p}\omega^{n-p}.$$

Les équations (23) devant être vérifiées par un élément linéaire quelconque $e$ qui soit en involution avec $E_p$, celui-ci doit satisfaire aux relations

$$\omega^1(e)=0,\qquad \omega^2(e)=0,\qquad \ldots,\qquad \omega^{s_0}(e)=0,$$

$$(25)\qquad a^j_{\varrho'\sigma'}[\omega^{\varrho'}(e_h)\,\omega^{\sigma'}(e) - \omega^{\varrho'}(e)\,\omega^{\sigma'}(e_h)] + \tau^j_{\varrho''}(e_h)\,\omega^{n-p+\varrho''}(e) - \tau^j_{\varrho''}(e)\,\omega^{n-p+\varrho}(e_h) = 0$$
$$(j=1,2,\ldots,s;\ h=1,2,\ldots,p;\ \varrho',\sigma'=1,2,\ldots,n-p;\ \varrho''=1,2,\ldots,p).$$

L'élément $E_p$ étant défini par équations (19), on a, par hypothèse,

$$\omega^{\varrho'}(e_h)=0\qquad (\varrho'=1,2,\ldots,n-p;\ h=1,2,\ldots,p)$$

et, par suite, en vertu des formules (24),

$$\tau^j_{\varrho''}(e_h)=0\qquad (\varrho''=1,2,\ldots,p;\ h=1,2,\ldots,p).$$

Le système (25) peut donc être remplacé par les équations

$$\omega^i(e)=0,\qquad \tau^j_{\varrho''}(e)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho''=1,2,\ldots,p);$$

c'est le système cherché des relations qui déterminent l'élément $H(E_p)$.

**32. Caractères et genre d'un système d'équations extérieures.** L'application de la méthode développée au numero précédent permet de déterminer toutes les solutions de divers ordres d'un système d'équations extérieures, et de distinguer parmi celles-ci les solutions régulières et les solutions singulières.

Reprenons pour ce but le système (21)

$$\omega^i=0,\qquad \Omega^j=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s).$$



Pour qu'un élément linéaire $e$ soit solution de ces équations, il faut et il suffit, d'après le Théorème 1 du n° 28, qu'il vérifie les équations

$$(26)\qquad \omega^i(e)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0).$$

Ces équations étant par hypothèse linéairement indépendantes, le rang du système (26) est égal à $s_0$. Le nombre de solutions distinctes des équations (26) est donc égal à $n-s_0$ et la solution, la plus générale, à une dimension, du système (21) dépend de $r_1=n-s_0-1$ paramètres arbitraires.

Choisissons arbitrairement un élément linéaire $e_1$ vérifiant les équations (26); son élément polaire $H(e_1)$ est défini par les équations

$$(27)\qquad \omega^i(e),\qquad \Omega^j(e_1,e)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s).$$

Le rang du système (27) dépend en général du choix de l'élément $e_1$; nous le désignerons par $s_0+s_1$ dans le cas où $e_1$ est un élément arbitraire satisfaisant aux équations (26). Remarquons que $s_1$ est au plus égal au nombre $s$ des équations du second degré du système (21). Puisque le système admet la solution évidente $e=e_1$, le rang du système (27) est au plus égal à $n-1$; s'il atteint ce nombre, il n'y a pas d'éléments linéaires, distincts de $e_1$, qui soient en involution avec celui-ci, et, par suite, le système (21) n'admet pas de solutions à deux dimensions passant par $e_1$. Si le rang $s_0+s_1$ du système (27) est inférieur à $n-1$, il existe au moins un élément plan $E_2$ contenant $e_1$ qui soit solution du système (21). Le nombre des solutions du système (27), indépendantes entre elles et de $e_1$, est égal à

$$r_2=n-(s_0+s_1)-1.$$

Donc, la plus générale solution à deux dimensions du système (21), passant par $e_1$, dépend de $n-(s_0+s_1)-2$ paramètres arbitraires.

Un élément linéaire $e_1$ vérifiant les équations (26) s'appelle *régulier* si le rang du système (27) est égal à $s_0+s_1$; si ce rang est inférieur à $s_0+s_1$, il est dit *singulier*. Les conditions auxquelles doit satisfaire un élément singulier sont des conditions d'égalité; elles s'obtiennent on égalant à zéro tous les déterminants d'ordre $s_0+s_1$ de la matrice des équations (27), linéaires par rapport aux composantes de l'élément inconnu $e$. Un élément plan à deux dimensions, solution du système (21), est dit élément *ordinaire*, s'il contient au moins un élément linéaire régulier.

Soit $E_2$ une solution ordinaire du système (21) définie par deux éléments linéaires distincts; ces éléments satisfont par hypothèse aux relations

$$(28)\qquad \omega^i(e_1)=0,\qquad \omega^i(e_2)=0,\qquad \Omega^j(e_1,e_2)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s)$$

(voir équations (22) au n° 31). Pour trouver une solution $E_3$ passant par $E_2$, il faut écrire les équations de l'élément polaire $H(E_2)$; on les obtient en posant $p=2$ dans les équations (23) du n° 31

$$(29)\qquad \omega^i(e)=0,\qquad \Omega^j(e_1,e)=0,\qquad \Omega^j(e_2,e)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s).$$

Les équations (27) faisant partie du système (29), le rang de celui-ci est est au moins égal à $s_0+s_1$; nous le désignerons par $s_0+s_1+s_2$ si $E_2$ est une solution ordinaire arbitraire. Remarquons aussi que le nombre $s_2$ est au plus égal à $s_1$, car les équations (29) s'obtiennent en adjoignant au système (27) les équations $\Omega^j(e_2,e)=0$ qui sont de même forme que les équations $\Omega^j(e_1,e)=0$. Remarquons encore qu'en vertu des relations (28), le système (29) admet deux solutions distinctes $e_1$ et $e_2$, par conséquent, son rang $s_0+s_1+s_2$ est au plus égal à $n-2$. En résumant, on a

$$s_1 \geqslant s_2, \qquad s_0+s_1+s_2 \leqslant n-2.$$

Si $s_0+s_1+s_2=n-2$, l'élément polaire $H(E_2)$ défini par les équations (29), se confond avec $E_2$, et, par suite, il n'existe aucun élément plan à trois dimensions, passant par $E_2$, qui soit solution du système (21). Si le nombre $s_0+s_1+s_2$ est inférieur à $n-2$, il y a au moins une solution à trois dimensions. Le nombre des solutions du système (29), indépendantes entre elles et de $e_1$ et $e_2$, est égal à

$$r_3=n-(s_0+s_1+s_2)-2;$$

autrement dit, la dimension de l'élément $H'(E_2)$ est égale à $r_3$.

Si, pour une solution ordinaire $E_2$, le rang du système (29) atteint le nombre $s_0+s_1+s_2$, on dit que celle-ci est une *solution régulière*; toute solution à trois dimensions passant par $E_2$ s'appelle *solution ordinaire*. Si, pour une solution $E_2$, le rang du système (29) s'abaisse, ou si tous les éléments linéaires appartenant à $E_2$ sont des solutions singulières, on dit que $E_2$ est une *solution singulière*.

On peut poursuivre ce procédé de proche en proche en généralisant en même temps les définitions des solutions régulières et singulières. Finalement, on arrivera à une solution régulière $E_g$ telle que son élément polaire se confonde avec $E_g$, le rang de $H(E_g)$ étant égal à $n-g$. Il n'y aura, par suite, aucune solution à $g+1$ dimensions passant par $E_g$.

On trouve ainsi une suite de solutions

$$E_1, E_2, \ldots, E_g \tag{30}$$

telle que chacun des éléments $E_i$ soit une solution régulière passant par toutes celles qui la précédent et qu'il n'existe aucune solution à $g+1$ dimensions contenant $E_g$; le rang des équations qui définissent le système polaire $H(E_i)$ sera désigné par $s_0+s_1+\ldots+s_i$. L'élément polaire $H(E_g)$ se confondant avec $E_g$, on a

$$s_0+s_1+\ldots+s_g=n-g.$$

L'entier $g$ est dit *genre* du système (21); à la suite (30) nous donnerons le nom de *suite régulière* de solutions.



Le genre $g$ indique l'ordre maximum d'une solution non singulière du système. Il peut arriver que le système admette des solutions singulières dont la dimension surpasse le nombre $g$.

Remarque. Il résulte immédiatement des considérations précédentes que tout élément non singulier $E_g$, qui passe par un élément non singulier $E_p$, est contenu dans l'élément polaire $H(E_p)$.

On voit qu'au système (21) sont liés d'une façon invariante $g+1$ entiers

$$s_0, s_1, \ldots, s_g \tag{31}$$

satisfaisant aux conditions

$$s_0 \geqslant s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_g, \qquad s_0+s_1+\ldots+s_g=n-g; \tag{32}$$

les entiers (31) portent le nom de *caractères* du système (21); rappelons que $s_0$ est le nombre des équations linéaires du système (21), et qu'on a $s_i \leqslant s$ $(i=1,2,\ldots,g)$, $s$ désignant, comme auparavant, le nombre des équations du second degré dans le système (21) (cf. p. 63). Si $E_p$ est une solution régulière quelconque, le rang de son système polaire est égal à $s_0+s_1+\ldots+s_p$; l'élément $H(E_p)$ contient donc $n-(s_0+s_1+\ldots+s_p)$ éléments linéaires indépendants parmi lesquels il y a $p$ éléments appartenant à $E_p$. Le nombre de solutions du système polaire de $E_p$, qui ne sont pas contenues dans $E_p$, est donc égal à $n-p-(s_0+s_1+\ldots+s_p)$; ce nombre a été désigné au nº 30 par $r_{p+1}$; par suite, on peut écrire

$$r_{p+1}=n-p-(s_0+s_1+\ldots+s_p) \qquad (p=1,2,\ldots,g). \tag{33}$$

D'après l'égalité de la deuxième ligne de (32), on a $r_{g+1}=0$. Si l'on pose encore

$$r_1=n-s_0, \tag{34}$$

on obtient une suite décroissante de nombres entiers $r_1, r_2, \ldots, r_g$; le terme $r_i$ $(i>1)$ de cette suite indique le nombre des éléments linéaires qui sont en involution avec un élément plan $E_{i-1}$, solution régulière du système (21), et qui ne sont pas contenus dans $E_i$.

La formule (33) entraîne l'égalité

$$r_p-r_{p+1}=s_p+1 \qquad (p=1,2,\ldots,g), \tag{35}$$

d'où il résulte

$$r_p-r_{p+1} \geqslant r_{p+2}-r_{p+1},$$

car, d'après les inégalités (32), les caractères $s_p$ ne peuvent augmenter avec $p$. On a remarqué plus haut que $s_p \leqslant s$; en rapprochant la relation (35), on en déduit l'inégalité $r_p-r_{p+1} \leqslant s+1$. Si l'on ajoute les inégalités

$$r_1-r_2\leqslant s+1,$$
$$r_2-r_3\leqslant s+1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_g\leqslant s+1,$$

il vient

$$r_1\leqslant g(s+1),$$

ou, d'après (34),

$$n-s_0\leqslant g(s+1).$$

On voit ainsi que le genre du système (21) est au moins égal, à une unité près, au quotient du nombre $n-s_0$ par le nombre $s+1$, où $s_0$ et $s$ désignent respectivement les nombres des équations linéaires et des équations du second degré, contenues dans le système. Remarquons aussi que, $s_0$ étant le nombre des équations linéaires du système (21), la dimension de $E_g$ ne peut pas dépasser la différence $n-s_0$; en résumant, on a donc

$$\frac{n-s_0}{s+1}\leqslant g\leqslant n-s_0. \tag{36}$$

Considérons une solution non singulière quelconque $E_p$; nous pouvons supposer qu'elle soit définie par $p$ éléments linéaires distincts $e_1, e_2,\ldots,e_p$ déterminés successivement au moyen de la méthode développée ci-dessus. L'élément $e_i$ $(i=1,2,\ldots,p)$ doit donc vérifier un système d'équations linéaires au nombre $s_0+s_1+\ldots+s_{i-1}$. Le nombre total de ces équations est donc égal à

$$ps_0+(p-1)s_1+\ldots+2s_{p-2}+s_{p-1}.$$

D'autre part, on sait que le nombre de paramètres arbitraires dont dépend un élément plan à $p$ dimensions, est égal à $p(n-p)$ (cf. nº 3). Il s'ensuit que les solutions non singulières à $p$ dimensions du système (21) dépendent de

$$Q=p(n-p)-ps_0-(p-1)s_1-\ldots-2s_{p-2}-s_{p-1} \tag{37}$$

paramètres arbitraires.

**33. Eléments caractéristiques et classe d'un système.** On dira qu'un élément linéaire est *élément caractéristique* d'un système d'équations de forme (21), s'il est solution du système et s'il est en involution avec tous les éléments linéaires qui vérifient le système. Si deux éléments linéaires $e'$ et $e''$ sont caractéristiques, tous les éléments linéaires de l'élément plan à deux dimensions, déterminé par $e'$ et $e''$, sont aussi des éléments caractéristiques. Cela résulte du fait que les équations qui expriment les conditions pour qu'un élément $e$ soit en involution avec $e'$, sont linéaires par rapport à $e$ et qu'elles sont satisfaites identiquement si l'on pose $e=e'$ (p. 60). Par conséquent, l'ensemble des éléments caractéristiques d'un système définit un élément plan auquel on donne le nom d'*élément plan caractéristique*. Il est clair que l'élément plan caractéristique est une solution du système, car tous ses éléments linéaires vérifient le système et sont en involution deux à deux. Nous désignerons par $n-c$ la dimension de l'élément plan caractéristique d'un système d'équations extérieures.



THÉORÈME 9. *Si un système d'équations de forme* (21) *et de genre $g$ admet un élément caractéristique $E_{n-c}$, toute solution non singulière $E_g$ passe par $E_{n-c}$.*

En effet, s'il était autrement, il y aurait au moins un élément linéaire caractéristique qui ne serait pas contenu dans $E_g$; cet élément étant, par hypothèse, en involution avec tous les éléments linéaires de $E_g$, l'élément $E_{g+1}$, déterminé par $E_g$ et $e$, serait une solution non singulière du système ce qui est contraire à l'hypothèse, $E_g$ étant une solution non singulière d'un système de genre $g$.

Si les équations quadratiques du système sont des conséquences de ses équations linéaires, tous les éléments linéaires qui vérifient le système sont des éléments caractéristiques, par conséquent, le système admet une solution à $n-s_0$ dimensions, $s_0$ étant le nombre des équations linéaires. Inversement, si tous les éléments linéaires qui vérifient les équations du système sont des éléments caractéristiques, celui-ci admet une solution à dimension $n-s_0$, déterminée seulement par les équations linéaires, et, par suite, les équations quadratiques du système sont des conséquences de ses équations linéaires.

En résumant, on peut énoncer le suivant

THÉORÈME 10. *Si tous les éléments linéaires qui vérifient le système*

$$\omega^i=0,\qquad \Omega^j=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s),$$

*sont des éléments caractéristiques, on a*

$$\Omega^j\equiv 0\pmod{\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{s_0}},$$

*et inversement.*

THÉORÈME 11. *Si la dimension de l'élément plan caractéristique d'un système formé des équations extérieures linéaires et quadratiques*

$$\omega^i=0,\qquad \Omega^j=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s)$$

*est égale au genre $g$ du système, on a*

$$\Omega^j\equiv 0\pmod{\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{s_0}};$$

*autrement dit, tous les caractères $s_1,s_2,\ldots,s_g$ sont nuls.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir que tous les éléments linéaires vérifiant le système sont des éléments caractéristiques (Théorème 10). En effet, si le système admettait un élément linéaire non caractéristique $e$, l'élément plan déterminé par $e$ et par l'élément plan caractéristique $E_g$ serait une solution du système à $g+1$ dimensions passant par $E_g$, ce qui est contraire à l'hypothèse puisque $E_g$ étant l'unique solution d'ordre $g$ est un élément non singulier.

Revenons maintenant au système (21); si l'on choisit $n-s_0$ formes $\omega^{s_0+1},\omega^{s_0+2},\ldots,\omega^n$, indépendantes linéairement entre elles et indépendantes des formes $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{s_0}$, on peut le représenter comme suit

(38) $$\omega^i=0,\qquad \Omega^j=\frac{1}{2}a^j_{\varrho'\sigma'}[\omega^{\varrho'}\omega^{\sigma'}]+b^j_{\varrho' h}[\omega^{\varrho'}\omega^h]+\frac{1}{2}c^j_{hi}[\omega^h\omega^i]=0$$

$$(h,i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n).$$

On peut donc remplacer ce système par le système équivalent (cf. nº 30)

(39) $$\omega^i=0,\qquad \frac{1}{2}a^j_{\varrho'\sigma'}[\omega^{\varrho'}\omega^{\sigma'}]=0$$

$$(i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n).$$

Supposons maintenant que l'élément linéaire $e$ soit solution du système donné; on aura donc

(40) $$\omega^i(e)=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0).$$

Pour que $e'$ soit un élément caractéristique du système, il faut et il suffit que les équations

$$\omega^i(e')=0,\qquad \Omega^j(e,e')=0\qquad (i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s)$$

soient des conséquences des relations (40). En se servant de la forme (39) des équations du système, on peut écrire les dernières égalités comme suit

(41) $$\omega^i(e')=0,\qquad a^j_{\varrho'\sigma'}\omega^{\varrho'}(e)\,\omega^{\sigma'}(e')=0$$

$$(i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n).$$

Ces relations devant être vérifiées quel que soit l'élément $e$, pourvu qu'il satisfasse aux équations (40), il en résulte qu'il doit être

(42) $$\omega^i(e')=0,\qquad a^j_{\varrho'\sigma'}\omega^{\sigma'}(e')=0$$

$$(i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n).$$

Donc, pour que $e'$ soit un élément caractéristique du système, il faut qu'il vérifie les relations (42); il est évident que ces relations expriment



aussi des conditions suffisantes. On a ainsi montré que les équations (42) définissent l'élément plan caractéristique du système (38). Elles peuvent être mises sous une forme plus condensée

(43) $$\omega^i=0,\qquad \frac{\partial\Omega^j}{\partial\omega^{\varrho'}}=0$$

$$(i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n).$$

Ce système s'appelle *système caractéristique* du système (38); d'après sa signification, il lui est lié d'une façon invariante relativement à tout changement de variables.

Pour faire voir l'importance du système caractéristique, nous introduirons la notion de *classe* d'un système d'équations extérieures en appelant ainsi le nombre minimum de variables qu'on puisse laisser figurer dans les équations du système. On peut ainsi démontrer le suivant

Théorème 12. *La classe d'un système d'équations de forme* (21) *est égale au rang de son système caractéristique.*

En effet, désignons par $c$ le rang du système (43). Cela signifie que les équations (43) se réduisent à $n-c$ indépendantes; on peut donc, par un changement de variables, les représenter sous la forme

(44) $$x^1=0,\qquad x^2=0,\qquad \ldots,\qquad x^c=0.$$

Les équations $\omega^i=0$ $(i=1,2,\ldots,s_0)$ faisant partie du système (43), on peut s'arranger de manière que ces équations puissent s'écrire comme suit

$$x^1=0,\qquad x^2=0,\qquad \ldots,\qquad x^{s_0}=0.$$

Dans les équations (39), on peut donc prendre

$$\omega^{\varrho'}=x^{\varrho'}\qquad (\varrho'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n);$$

elles auront alors la forme

$$x^i=0,\qquad \frac{1}{2}a^j_{\varrho'\sigma'}[x^{\varrho'}x^{\sigma'}]=0$$

$$(i=1,2,\ldots,s_0;\ j=1,2,\ldots,s;\ \varrho',\sigma'=s_0+1,s_0+2,\ldots,n),$$

et le système (43) deviendra

$$x^i=0,\qquad a^j_{\varrho'\sigma'}x^{\sigma'}=0.$$

Celui-ci devant être équivalent au système (44), il en résulte qu'il doit être $a^j_{\varrho'\sigma'}=0$, si $\varrho'>c$; comme on a d'autre part, $a^j_{\varrho'\sigma'}=-a^j_{\sigma'\varrho'}$, il s'ensuit que tous les coefficients $a^j_{\varrho'\sigma'}$, où l'un des indices $\varrho',\sigma'$ est supérieur à $c$, doivent s'annuler. On en conclut que le système (38) sera équivalent au système suivant:

$$x^1=0,\qquad x^2=0,\qquad \dots,\qquad x^{s_0}=0,\qquad \sum_{k,l=1}^{c} a^j_{kl}[x^k x^l]=0,$$

ce qui montre que les équations du système (38) peuvent être écrites au moyen de $c$ variables $x^1,x^2,\dots,x^c$. Pour compléter la démonstration, il faut encore montrer que le nombre de variables qu'on puisse laisser figurer dans les équations de ce système ne peut être inférieur à $c$. En effet, supposons que, par un changement de variables, on ait mis le système donné sous une forme, où figurent seulement les variables $x^1,x^2,\dots$ $\dots,x^{c'}(c'<c)$. Par conséquent, le système caractéristique contiendrait au plus $c'$ équations indépendantes, ce qui est impossible, le rang du système caractéristique devant être égal à $c$.

Exemple. Considérons le système de quatre équations extérieures

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{aligned} &\omega^1=x^4-a_1x^1-a_2x^2-a_3x^3=0,\\ &\omega^2=x^5-b_1x^1-b_2x^2-b_3x^3=0,\\ &\Omega_1=A_1[x^2x^3]+A_2[x^3x^1]+A_3[x^1x^2]=0,\\ &\Omega^2=B_1[x^2x^3]+B_2[x^3x^1]+B_3[x^1x^2]=0. \end{aligned}$$

Le système caractéristique de (S) est composé des équations

$$\omega^1=0,\qquad \omega^2=0,\qquad \frac{\partial\Omega_1}{\partial x^i}=0,\qquad \frac{\partial\Omega_2}{\partial x^i}=0\qquad (i=1,2,3);$$

si l'on développe les calculs, elles deviendront

$$\omega^1=0,\qquad \omega^2=0,$$
$$A_3x^2-A_2x^3=0,\qquad A_1x^3-A_3x^1=0,\qquad A_2x^1-A_1x^2=0,$$
$$B_3x^2-B_2x^3=0,\qquad B_1x^3-B_3x^1=0,\qquad B_2x^1-B_1x^2=0.$$

Pour qu'il y ait un élément caractéristique, il faut donc qu'il soit

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{B_2}{A_2}=\frac{B_3}{A_3}.$$

Supposons que cette condition soit satisfaite, et qu'il soit, par exemple, $A_3\neq 0$. Il existe alors un seul élément caractéristique déterminé par les équations

$$\omega^1=0,\qquad \omega^2=0,\qquad A_3x^2-A_2x^3=0,\qquad A_1x^3-A_3x^1=0,$$

et le système (S) est de quatrième classe. Si l'on introduit de nouvelles variables par la substitution

$$\bar{x}^1=\omega^1,\qquad \bar{x}^2=\omega^2,\qquad \bar{x}^3=A_3x^2-A_2x^3,\qquad \bar{x}^4=A_1x^3-A_3x^1,\qquad \bar{x}^5=x^3,$$



le système pourra être remplacé par le suivant

$$\bar{x}^1=0,\qquad \bar{x}^2=0,\qquad [\bar{x}^3\bar{x}^4]=0.$$

**34. Systèmes de première espèce.** Un système composé d'équations extérieures linéaires et quadratiques est dit *de première espèce* si l'un de ses caractères est nul. Les caractères d'un système de genre $g$

$$s_0,s_1,\dots,s_g$$

ne pouvant augmenter, si l'un d'eux est égal à zéro, tous les suivants sont nuls aussi. Dans le cas particulier, où l'on a $s_1=0$, les équations quadratiques du système sont des conséquences de ses équations linéaires (p. 63); nous excluons ce cas des considérations ultérieures.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il soit $s_p\neq 0$ $(0<p<g)$, $s_{p+1}=0$, et considérons une solution non singulière quelconque $E_p$. Le rang de son système polaire est égal à $s_0+s_1+\dots+s_p$ (cf. nº 32). D'autre part, les caractères $s_{p+1},s_{p+2},\dots,s_g$ étant par hypothèse tous nuls, d'après la formule de la seconde ligne de (32), on a

$$s_0+s_1+\dots+s_p=n-g.$$

On voit ainsi que le rang du système polaire de $E_p$ est égal à $n-g$ et que, par suite, l'élément polaire $H(E_p)$ est de dimension $g$. Rappelons que l'élément $H(E_p)$ contient toutes les solutions à dimension $g$ passant par $E_p$ (voir p. 65, Remarque); on en conclut que par $E_p$ passe une seule solution $E_g$ et qu'elle se confond avec $H(E_p)$. On a ainsi établi la propriété suivante d'un système de première espèce:

Théorème 13. *Si un système d'équations extérieures de genre $g$ est de première espèce, $s_{p+1}$ $(0<p<g)$ étant le premier caractère nul, par toute solution non singulière $E_p$ passe une seule solution de dimension $g$ et elle se confond avec l'élément polaire de $E_p$.*

Ce théorème admet une réciproque dont voici l'énoncé:

Théorème 14. *Si l'élément polaire d'une solution non singulière $E_p$ est une solution de dimension $g$, le système est de première espèce et de genre $g$.*

En effet, désignons, comme auparavant, par $g$ le genre du système et considérons une solution quelconque $E_q$ passant par $E_p$. L'élément polaire $H(E_p)$ devant contenir $E_q$, sa dimension $q$ est au moins égale à $g$; elle ne peut pas être inférieure à $g$, car autrement, l'élément $H(E_p)$ étant par hypothèse une solution du système, par $E_g$ passerait une solution non singulière de dimension plus grande que $g$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a alors $g=q$, et on voit que l'élément $E_g$ est unique et se confond avec $H(E_p)$. Comme on l'a vu au nº 32, la dimension de $H(E_p)$ est égale à $n-(s_0+s_1+\dots+s_p)$; l'élément $E_g$ se confondant avec $H(E_p)$, on a, par suite,

$$g=n-(s_0+s_1+\dots+s_p).$$

En rapprochant la formule

$$g = n - (s_0 + s_1 + \dots + s_g)$$

déduite de la relation (32), il vient

$$s_{p+1} = s_{p+2} = \dots = s_g = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque. Si $s_1 = 0$, les équations du second degré du système sont des conséquences de ses équations linéaires (voir p. 36), par suite, le système a une solution à $n - s_0$ dimensions, $s_0$ étant le nombre des équations linéaires.

THÉORÈME 15. *Si la classe d'un système d'équations extérieures est inférieure au nombre de variables qui y figurent, le système est de première espèce.*

Désignons par $c$ la classe d'un système. On a, par hypothèse, $c < n$, où $n$ est le nombre des variables figurant dans les équations du système; celui-ci admet donc un élément plan caractéristique à $n - c$ dimensions (nº 33); nous le désignerons par $E_{n-c}$. Rappelons que $E_{n-c}$ est une solution du système. Ceci posé, considérons maintenant une solution non singulière $E_g$ quelconque à $g$ dimensions. On sait que $E_g$ doit passer par $E_{n-c}$ (Théorème 9 du nº 33); par conséquent, l'élément $E_g$ peut être décomposé en deux éléments plans, n'ayant aucun élément linéaire en commun, dont l'un est identique avec $E_{n-c}$, la dimension de l'autre, que nous désignerons par $E_p$, est égale à $g - (n - c)$; $E_p$ étant contenu dans $E_g$ est aussi une solution non singulière du système. Nous allons montrer que son élément polaire $H(E_p)$ se confond avec $E_g$. En effet, l'élément $E_{n-c}$ étant caractéristique, tous ses éléments linéaires sont en involution avec $E_p$ (voir nº 33), par conséquent, ils appartiennent à l'élément $H(E_p)$; il en est de même des éléments linéaires de $E_p$ (p. 61). L'élément $H(E_p)$ contenant les deux parties $E_{n-c}$ et $E_p$ de $E_g$, contient aussi $E_g$. S'il contenait un élément linéaire $e$ n'appartenant pas à $E_g$, celui-ci serait en involution avec $E_{n-c}$ et avec $E_p$ et, par conséquent, l'élément à $g+1$ dimensions, déterminé par $E_g$ et $e$, serait une solution du système, ce qui est contraire à l'hypothèse, $g$ étant le genre du système et $E_g$ une solution non singulière à $g$ dimensions. L'élément polaire $H(E_p)$ se confondant avec $E_g$, est une solution du système; il suffit maintenant de se rappeler le Théorème 10 pour se convaincre de la validité du Théorème qui était à démontrer. Nous avons supposé dans ce raisonnement que l'élément $E_{n-c}$ ne se confond pas avec $E_g$; si ces deux éléments se confondaient, la dimension de l'élément plan caractéristique serait égale au genre $g$ et, par conséquent, tous les caractères du système à partir de $s_1$ seraient nuls d'après le Théorème 10.

---

CHAPITRE III

# GROUPE ET ESPACE SYMPLECTIQUE

## § 1. Généralités

**35. Définition de l'espace symplectique.** Soit $\Phi$ une forme extérieure quadratique

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [x^\varkappa x^\lambda] \tag{1}$$

dont les coefficients satisfont, comme d'habitude, aux relations $a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0$. On sait que le rang de $\Phi$ est un nombre pair que nous désignerons par $2r$. On peut donc supposer que le nombre $n$ de variables qui figurent dans $\Phi$ soit égal à $2r$:

$$n = 2r. \tag{2}$$

Ces hypothèses entraînent l'inégalité

$$a = |a_{\varkappa\lambda}| \neq 0. \tag{3}$$

Posons maintenant

$$a^{\varkappa\lambda} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{\varkappa\lambda}}, \tag{4}$$

où, dans le second membre, les quantités $a_{\varkappa\lambda}$ doivent être considérées comme indépendantes. Il est évident que les nouvelles grandeurs $a^{\varkappa\lambda}$ sont antisymétriques, et que l'on a

$$a_{\lambda\varrho} a^{\varkappa\varrho} = \delta^\varkappa_\lambda. \tag{5}$$

Si l'on fait sur les variables $x^\varkappa$ la substitution définie par les formules

$$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \bar{x}^\varrho, \tag{6}$$

de déterminant différent de zéro, les quantités $a_{\lambda\varrho}$ se changeront d'après les formules

$$a_{\lambda\varrho} = Q^\mu_\lambda Q^\nu_\varrho \bar{a}_{\mu\nu}, \tag{7}$$

$Q^\mu_\nu$ étant les coefficients de la substitution inverse à (6):

$$P^\varkappa_\varrho Q^\varrho_\lambda = P^\varrho_\lambda Q^\varkappa_\varrho = \delta^\varkappa_\lambda. \tag{8}$$