CHAPITRE I

FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES FORMES EXTÉRIEURES

§ 1. Préliminaires

1. Corps de base. Dans les considérations qui suivent nous prendrons comme *corps de base,* sauf avis contraire, le corps des nombres réels; cela veut dire que les variables et les coefficients des formes que nous nous allons envisager prennent des valeurs réelles. Mais il faut remarquer que presque tous les raisonnements qui suivent restent valables si l'on remplace le corps des nombres réels par celui des nombres complexes.

2. Espace affine. Nous désignerons constamment par A_n l'espace affine à n dimensions, rapporté à un repère R_n formé d'un point O comme origine et de n vecteurs indépendants $X_\varkappa$ [1]). Soient $x^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire M de A_n par rapport à R_n. Si l'on passe du repère $R_n(0, X_\varkappa)$ à un autre $\bar{R}_n(0, \bar{X}_\varkappa)$ à l'aide d'une substitution linéaire

$$\bar{X}_\varkappa = P^\varrho_\varkappa X_\varrho \tag{1}$$

de déterminant $\varDelta = |P^\varkappa_\varrho|$ différent de zéro, les coordonnées du point M seront transformées d'après les formules

$$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \bar{x}^\varrho; \tag{2}$$

la transformation inverse se fera par les égalités

$$\bar{x}^\varkappa = Q^\varkappa_\varrho x^\varrho, \tag{3}$$

dont les coefficients satisfont aux relations

$$P^\varkappa_\varrho Q^\varrho_\lambda = P^\varrho_\lambda Q^\varkappa_\varrho = \delta^\varkappa_\lambda, \tag{4}$$

$\delta^\varkappa_\lambda$ désignant les symboles de Kronecker

$$\delta^\varkappa_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \varkappa = \lambda, \\ 0 & \text{pour} \quad \varkappa \neq \lambda. \end{cases}$$

[1]) Dans tout le livre les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Nous adoptons, dans les formules ci-dessus et dans tout ce qui suit, la convention d'après laquelle nous supprimons le signe de sommation devant un terme ayant l'indice de sommation deux fois répété, une fois en bas et une fois en haut.

La théorie des formes extérieures pouvant être rattachée, d'une manière très commode, au Calcul tensoriel, nous emploierons dans la suite toutes les notions et tous symboles de celui-ci[2]). En particulier, les composantes d'un vecteur de l'espace A_n seront désignées par les minuscules de l'alphabet latin, affectées en haut d'indices grecs. En appliquant aux vecteurs de l'espace A_n diverses opérations du Calcul tensoriel (multiplication par un nombre, addition, multiplication générale), l'on en déduit les tenseurs d'ordres plus élevés, dont les composantes seront aussi désignées par les minuscules latines, affectées d'indices en haut; nous écrirons par exemple $a^{\varkappa\lambda}$, $b^{\varkappa\lambda\mu}$, les tenseurs mêmes étant désignés respectivement par $\{a^{\varkappa\lambda}\}$, $\{b^{\varkappa\lambda\mu}\}$.

Admettons maintenant qua'à côté de A_n soit donné un second espace affine B_n rapporté à un repère S_n composé d'un point arbitraire comme origine et de n vecteurs indépendants $Y^\varkappa$. Supposons de plus que les espaces A_n et B_n soient associés l'un à l'autre de manière que, si l'on fait sur le repère R_n la substitution (1), le repère S_n soit assujetti à la transformation

$$\bar{Y}^\varkappa = Q^\varkappa_\varrho Y^\varrho. \tag{5}$$

Par conséquent, les coordonnées $y_\varkappa$ d'un point arbitraire de l'espace B_n se changeront d'après les formules

$$y_\varkappa = Q^\varrho_\varkappa \bar{y}_\varrho. \tag{6}$$

Les coefficients $P^\varkappa_\varrho$ et $Q^\varrho_\varkappa$ étant liés par les relations (4), il en résulte que la somme $x^\varkappa y_\varkappa$ est invariante vis-à-vis du changement de coordonnées, défini par les égalités (2) et (6). Les composantes des tenseurs de B_n seront désignées par les lettres latines affectées d'indices grecs en bas.

Nous dirons que les espaces A_n et B_n ainsi associés sont *dualistiques*, et nous appellerons les tenseurs de l'un des espaces, p. ex. de A_n, *contrevariants*, ceux de l'autre — *covariants*. A l'aide des vecteurs de A_n et B_n on peut former des tenseurs mixtes, par exemple le tenseur $\{a_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}\}$, qui seront considérés comme appartenant à l'ensemble des deux espaces; ces grandeurs sont covariantes dans les indices inférieurs et contrevariantes dans les supérieurs.

Si, dans l'un des espaces dualistiques A_n et B_n, par exemple dans B_n, est donné un tenseur symétrique $\{g_{\varkappa\lambda}\}$ tel que la forme $g_{\varkappa\lambda}x^\varkappa x^\lambda$ soit définie positive, ces deux espaces peuvent être regardés comme confon-

[2]) V. p. ex. J. A. Schouten [17] ou É. Cartan [6].

dus en un même espace euclidien. En effet, à l'aide des tenseurs $\{g_{\varkappa\lambda}\}$ et $\{g^{\varkappa\lambda}\}$, ce dernier se déduisant du précédent d'une façon bien connue, l'on peut faire correspondre à tout tenseur de l'un des espaces A_n et B_n un tenseur, bien déterminé, de l'autre. Par exemple, au vecteur $\{a^\varkappa\}$ de A_n, on peut associer dans B_n le vecteur de composantes $a_\varkappa = g_{\varkappa\varrho}a^\varrho$. Nous dirons dorénavant que les quantités $a_\varkappa$ et $a^\varkappa$ sont respectivement les *composantes covariantes et contrevariantes* d'un même vecteur de l'espace euclidien.

Dans les raisonnements ultérieurs, nous ferons fréquemment usage de l'opération dite *alternation des indices*. Etant donné, par exemple, un tenseur covariant $\{a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}\}$ à p indices, nous désignerons par $a_{[\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p]}$ la somme, divisée par $p!$, de tous les termes qu'on obtient de $a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}$ en permutant ses indices, et qu'on affectera du signe $+$ ou $-$ suivant que la permutation est paire ou impaire. Les quantités $a_{[\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p]}$ sont, comme on le sait, les composantes d'un p-vecteur covariant. Si le tenseur $\{a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}\}$ est *antisymétrique*, c'est-à-dire si la valeur de sa composante reste la même quand on effectue sur ses indices une permutation paire, et change de signe dans le cas d'une permutation impaire, on a évidemment $a_{[\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p]} = a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}$. On définit de la même manière l'alternation des indices d'un tenseur contrevariant.

En se servant de l'alternation des indices, l'on peut représenter les déterminants d'une manière très commode pour les recherches ultérieures. Considérons, par exemple, m vecteurs contrevariants $\{x_i^\varkappa\}$ $(i=1,2,\dots,m)$. Grâce à la convention adoptée plus haut, les déterminants formés par m colonnes de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^1 & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{Vmatrix}$$

seront représentés indifféremment par l'une des deux expressions

$$m!\,x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_m^{\varkappa_m]}, \qquad m!\,x^{\varkappa_1}_{[1}x^{\varkappa_2}_2\dots x^{\varkappa_m}_{m]}.$$

§ 2. Eléments plans. Formes alternées

3. Eléments plans. Nous appellerons *élément plan* à m dimensions de l'espace affine A_n l'ensemble d'un point M de A_n et d'un m-plan passant par M qui sera dit son *point d'appui*. Aux deux premiers chapitres, nous n'allons envisager que les éléments plans dont le point d'appui est l'origine des coordonnées; il n'y aura alors aucune confusion à craindre si, en parlant d'un élément plan, nous n'indiquerons pas son point d'appui. Nous désignerons un élément plan à m dimensions par le symbole E_m, affecté, au besoin, d'un indice placé en haut pour le distinguer des symboles des autres éléments plans. Pour la commodité de langage nous dirons qu'un point de l'espace A_n est un *élément plan de dimension zéro*; un élément de dimension zéro sera désigné par E_0.

Un élément plan E_m peut être défini par m vecteurs $\{x_i^\varkappa\}$ $(i=1,2,\dots,m)$ linéairement indépendants, issus de l'origine des coordonnées et situés dans le m-plan de l'élément, ou par ses coordonnées plückeriennes qui sont proportionnelles aux expressions $x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_m^{\varkappa_m]}$. Pour abréger, nous désignerons les coordonnées plückeriennes de E_m par $x^{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}$; nous aurons donc

$$x^{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}=\varrho\, x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_m^{\varkappa_m]},$$

ϱ étant un nombre arbitraire différent de zéro. D'après leur définition les coordonnées plückeriennes sont des composantes d'un m-vecteur contrevariant simple de l'espace A_n; en introduisant dans celui-ci des nouvelles coordonnées à l'aide de la transformation (2), elles se changeront d'après les formules

$$x^{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}=P^{\varkappa_1}_{\varrho_1}P^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\dots P^{\varkappa_m}_{\varrho_m}\bar{x}^{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_m}.$$

Nous donnerons au n° 29 les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quantités antisymétriques $x^{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}$ soient les coordonnées plückeriennes d'un élément plan.

Si le système de m vecteurs $\{x_i^\varkappa\}$, qui déterminent un élément E_m, sera remplacé par un autre $\{y_i^\varkappa\}$ au moyen de la substitution

$$y_i^\varkappa=l_i^1x_1^\varkappa+l_i^2x_2^\varkappa+\dots+l_i^mx_m^\varkappa \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

de déterminant δ différent de zéro, les coordonnées plückeriennes de E_m se changeront d'après les formules

$$y_1^{[\varkappa_1}y_2^{\varkappa_2}\dots y_m^{\varkappa_m]}=\delta x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_m^{\varkappa_m]}.$$

Un élément plan E_p peut être aussi défini par $n-p$ équations

$$\omega^h=0 \qquad (h=1,2,\dots,n-p),$$

où $\omega^h=a^h_\varrho x^\varrho$; celles-ci pouvant être résolues par rapport à $n-p$ inconnues, il en résulte que l'élément E_p, le plus général, dépend de $p(n-p)$ paramètres arbitraires.

On peut enfin déterminer un élément plan à p dimensions en exprimant les coordonnées d'un de ses point comme fonctions linéaires et homogènes de p paramètres

$$x^\varkappa=h_1^\varkappa t^1+h_2^\varkappa t^2+\dots+h_p^\varkappa t^p$$

de manière que le rang de la matrice des coefficients $h_i^\varkappa$ $(i=1,2,\dots,m)$ soit égal à p.

Nous dirons qu'un *élément plan E_q est contenu dans un élément E_p* $(p>q)$, si ces deux éléments ont le même point d'appui et si le q-plan de E_q est contenu dans le p-plan de E_p.

Soit E_m un élément plan de l'espace A_n; si $m>1$, il contient une infinité d'éléments dont la dimension est plus petite que m. Si E_m est défini au moyen de $n-m$ équations linéaires

$$(1) \qquad \omega^h=0 \qquad (h=1,2,\dots,n-m),$$

où $\omega^h=a^h_\varrho x^\varrho$, on obtient un élément à $h<m$ dimensions, contenu dans E_m, en ajoutant à (1) $m-h$ nouvelles équations linéaires indépendantes entre elles et des équations (1).

Si l'on veut obtenir un élément plan à $k>m$ dimensions contenant E_m, il suffit de former un système de $m-k$ relations linéaires indépendantes entre les formes $\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{n-m}$. Il est facile de montrer que l'on obtient ainsi tous les éléments contenant E_m.

En effet, imaginons un éléments E_k, contenant E_m, défini par $n-k$ équations linéaires et supposons qu'on ait choisi m formes linéaires $\omega^{n-m+1},\omega^{n-m+2},\dots,\omega^n$ donnant avec $\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{n-m}$ un système de n formes indépendantes. L'élément E_k peut donc être représenté par un système de $n-k$ relations linéaires entre les formes $\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^n$. Comme ces équations doivent être identiquement satisfaites, si l'on suppose que les coordonnées $x^\varkappa$ vérifient les équations (1), il en résulte que les relations, qui définissent E_k, ne peuvent contenir que les formes $\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{n-m}$ seules.

Si E_h et E_k sont deux éléments plans, le plus petit élément qui les contient est à $h+k-r$ dimensions, r désignant le nombre de dimensions du plus grand élément commun à E_h et E_k. Cela devient évident, si l'on suppose chacun de ces éléments défini par des vecteurs issus de l'origine des coordonnées.

Remarquons, en terminant, qu'un élément plan E_p peut être défini par p éléments linéaires indépendants $E_1^{(1)},E_1^{(2)},\dots E_1^{(p)}$, qu'il contient. L'élément linéaire le plus général, contenu dans E_p, est alors de la forme

$$E_1=\lambda_1E_1^{(1)}+\lambda_2E_1^{(2)}+\dots+\lambda_pE_1^{(p)},$$

les coefficients λ étant arbitraires. Pour obtenir un élément à $q+1$ dimensions contenant E_p, il suffit de lui adjoindre un élément linéaire $E_1^{(p+1)}$ indépendant des éléments $E_1^{(1)},E_1^{(2)},\dots,E_1^{(p)}$.

4. Formes alternées. Soit donnée une forme algébrique

$$(2) \qquad F=a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_p^{\varkappa_p}$$

à p séries de variables $x_i^\varkappa$ $(i=1,2,\dots,p)$. F est dite *forme alternée*, si elle change de signe avec l'échange de deux séries quelconques de variables.

Pour que la forme (2) jouisse de la propriété demandée, il faut et il suffit que ses coefficients soient antisymétriques en tous leurs indices.

En employant l'opération d'alternation des indices (cf. nº 2), on peut donc écrire

$$F = a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_p^{\varkappa_p]}. \tag{3}$$

Si, sur toutes les séries de variables qui figurent dans la forme (3), l'on fait la substitution (2), (p. 1), en écrivant $x_i^\varkappa = P_\varrho^\varkappa \bar{x}_i^\varrho$, cette forme changera en l'expression

$$\frac{1}{p!}\, \bar{a}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} \bar{x}_1^{[\varrho_1} \bar{x}_2^{\varrho_2} \ldots \bar{x}_p^{\varrho_p]},$$

où l'on a posé

$$\bar{a}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} = P_{\varrho_1}^{\varkappa_1} P_{\varrho_2}^{\varkappa_2} \ldots P_{\varrho_p}^{\varkappa_p} a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}.$$

On voit ainsi que les coefficients de la forme alternée, où l'un au moins des coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ est différent de zéro, peuvent être regardés comme les composantes d'un p-vecteur covariant.

5. Faisceaux d'éléments plans. Si l'on annule la forme (3) et que l'on considère les variables $x_i^\varkappa$ comme les composantes d'un vecteur de l'espace affine A_n, on obtient une relation entre les coordonnées plückeriennes $x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_p^{\varkappa_p]}$ d'un élément E_p. Nous dirons que l'équation

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_p^{\varkappa_p]} = 0,$$

ainsi obtenue, définit un *faisceau linéaire d'éléments plans à p dimensions.* L'équation d'un faisceau linéaire peut aussi s'écrire comme suit

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} = 0;$$

en particulier, l'équation linéaire

$$a_\varrho x^\varrho = 0$$

définit un faisceau d'éléments linéaires $e\{x^\varkappa\}$.

THÉORÈME 1. *Pour que tous les éléments linéaires d'un élément $E_p\{x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$ appartiennent au faisceau $a_\varrho x^\varrho = 0$, il faut et il suffit que les coordonnées $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ vérifient les équations*

$$a_\varrho x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-1}\varrho} = 0 \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p-1} = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Nous montrerons d'abord que la condition (4) est nécessaire. Pour abréger, nous prendrons $p=3$, le raisonnement étant général. Ainsi, imaginons trois éléments linéaires indépendants $e_i\{x_i^\varkappa\}$ $(i=1,2,3)$ contenus dans $E_3\{x^{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}\}$; on aura, par hypothèse,

$$a_\varrho x_1^\varrho = 0, \qquad a_\varrho x_2^\varrho = 0, \qquad a_\varrho x_3^\varrho = 0.$$

En multipliant ces équations respectivement par $x_2^{[\varkappa} x_3^{\lambda]}, x_3^{[\varkappa} x_1^{\lambda]}, x_1^{[\varkappa} x_2^{\lambda]}$, et en faisant la somme des relations ainsi obtenues, on trouve

$$a_\varrho (x_2^{[\varkappa} x_3^{\lambda]} x_1^\varrho + x_3^{[\varkappa} x_1^{\lambda]} x_2^\varrho + x_1^{[\varkappa} x_2^{\lambda]} x_3^\varrho) = 0,$$

ou

$$a_\varrho x_1^{[\varkappa} x_2^\lambda x_3^{\varrho]} = 0.$$

Ceci montre que les coordonnées plückeriennes $x^{\varkappa_1\varkappa_2\varrho}$ de E_3 vérifient les équations

$$a_\varrho x^{\varkappa\lambda\varrho} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Supposons maintenant que les conditions (5) soient vérifiées par les coordonnées d'un éléments E_3 et choisissons dans celui-ci trois éléments linéaires indépendants $e_i\{x_i^\varkappa\}$. On aura donc

$$a_\varrho x_1^{[\varkappa} x_2^\lambda x_3^{\varrho]} = 0, \qquad a_\varrho x_1^{[\lambda} x_2^\mu x_3^{\varrho]} = 0, \qquad a_\varrho x_1^{[\mu} x_2^\varkappa x_3^{\varrho]} = 0,$$

où $\varkappa, \lambda, \mu$ sont trois nombres arbitraires de la suite $1, 2, \ldots, n$. D'après la définition de l'alternation des indices, ces équations peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$x_2^{[\varkappa} x_3^{\lambda]} a_\varrho x_1^\varrho + x_3^{[\varkappa} x_1^{\lambda]} a_\varrho x_2^\varrho + x_1^{[\varkappa} x_2^{\lambda]} a_\varrho x_3^\varrho = 0,$$
$$x_2^{[\lambda} x_3^{\mu]} a_\varrho x_1^\varrho + x_3^{[\lambda} x_1^{\mu]} a_\varrho x_2^\varrho + x_1^{[\lambda} x_2^{\mu]} a_\varrho x_3^\varrho = 0,$$
$$x_2^{[\mu} x_3^{\varkappa]} a_\varrho x_1^\varrho + x_3^{[\mu} x_1^{\varkappa]} a_\varrho x_2^\varrho + x_1^{[\mu} x_2^{\varkappa]} a_\varrho x_3^\varrho = 0.$$

Remarquons que le déterminant formé des coefficients des sommes $a_\varrho x_i^\varrho$ est égal au carré du déterminant $3!\, x_1^{[\varkappa} x_2^\lambda x_3^{\mu]}$. Les éléments e_i étant indépendants, l'un au moins des déterminants $3!\, x_1^{[\varkappa} x_2^\lambda x_3^{\mu]}$ $(\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ est différent de zéro et, par conséquent, les trois sommes $a_\varrho x_i^\varrho$ sont nulles, ce qui démontre la suffisance des conditions (5).

THÉORÈME 2. *Pour que tous les éléments plans à q dimensions de l'élément*

$$E_p\{x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$$

appartiennent au faisceau

$$a_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_q} x^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_q} = 0,$$

il faut et il suffit que les coordonnées $x^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ satisfassent aux conditions

$$a_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_q} x^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_q\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{p-q}} = 0 \qquad (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{p-q} = 1, \ldots, n).$$

Nous allons démontrer ce théorème pour $p=4$ et $q=2$, la démonstration pour p et q quelconques étant semblable. Imaginons pour cela un élément E_4, déterminé par quatre vecteurs indépendants $\{x_i^\varkappa\}$ $(i=1,2,3,4)$, issus de l'origine des coordonnées, et supposons que tous ses éléments plans à deux dimensions appartiennent au faisceau $a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa\lambda} = 0$.

On aura donc

(6) $$a_{\varrho\sigma}x_h^{[\varrho}x_i^{\sigma]}=0 \qquad (h,i=1,2,3,4;\ h\neq i).$$

Multiplions l'équation (6) par l'expression $x_j^{[\varkappa}x_k^{\lambda]}$, où j et k sont deux nombres différents de h et i, et tels que la suite h,i,j,k soit une permutation paire des nombres $1,2,3,4$. Si l'on fait la somme des relations ainsi obtenus pour toutes les combinaisons des indices h et i, on trouve, d'après le théorème de Laplace,

(7) $$a_{\varrho\sigma}x_1^{[\varrho}x_2^{\sigma}x_3^{\varkappa}x_3^{\lambda]}=0,$$

ce qui veut dire que les coordonnées plückeriennes $x^{\varrho\sigma\varkappa\lambda}$ de E_3 vérifient les équations

(8) $$a_{\varrho\sigma}x^{\varrho\sigma\varkappa\lambda}=0 \qquad (\varkappa,\lambda=1,2,\dots,n).$$

Nous allons maintenant démontrer que les conditions (8) suffisent pour que tous les éléments plans à deux dimensions de E_4 appartiennent au faisceau

$$a_{\varkappa\lambda}x^{\varkappa\lambda}=0.$$

En employant les mêmes notations que ci-dessus, on doit donc supposer que la relation (7) soit satisfaite. Si l'on développe le premier membre de celle-ci et que l'on se sert du théorème de Laplace, elle prendra la forme

(9) $$\sum_{(jk)}x_j^{[\varkappa}x_k^{\lambda]}a_{\varrho\sigma}x_h^{[\varrho}x_i^{\sigma]}=0,$$

le symbole $\sum_{(jk)}$ désignant la sommation étendue à toutes les combinaisons deux à deux des nombres $1,2,3,4$, et h, i étant deux nombres tels que la suite j,k,h,i soit une permutation paire de $1,2,3,4$. Si toutes les sommes $a_{\varrho\sigma}x_h^{[\varrho}x_i^{\sigma]}$ qui figurent dans les équations (9) n'étaient pas nulles, il en résulterait que le déterminant formé des coefficients $x_j^{[\varkappa}x_k^{\lambda]}$ de ces sommes devrait être égal à zéro. Ce déterminant étant égal au cube du déterminant $x_1^{[\varkappa}x_2^{\lambda}x_3^{\mu}x_4^{\nu]}$, celui-ci serait aussi nul pour toutes les valeurs des indices $\varkappa,\lambda,\mu,\nu$, ce qui est contraire à notre hypothèse, les vecteurs $\{x_i^{\varkappa}\}$ étant indépendants.

Remarque. Si l'on considère les variables $x^{\varkappa}$ comme les coordonnées ponctuelles d'un espace projectif à $n-1$ dimensions, les déterminants $p!x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_p^{\varkappa_p]}$ représentent les coordonnées plückeriennes d'un $(p-1)$-plan passant par les p points $(x_i^{\varkappa})$, et l'équation

$$a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_p^{\varkappa_p]}=0$$

représente un complexe linéaire de $(p-1)$-plans[3]).

---

[3]) Cf. R. Weitzenböck [24], p. 73 et 83.

§ 3. Formes extérieures

6. Monôme extérieur. Considérons une forme multilinéaire alternée

(1) $$a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\dots x_m^{\varkappa_m}$$

à m séries de variables $x_i^{\varkappa}$ $(i=1,2,\dots,m)$, où les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m}$ sont antisymétriques par rapport à tous leurs indices. On peut, à la forme (1), en associer une autre, de classe différente, dite *classe des formes extérieures* ou *symboliques*. Pour définir cette classe, imaginons n symboles $x^{\varkappa}$ auxquels nous donnerons le nom de *variables* ou d'*indéterminées*, et formons l'expression

(2) $$a[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_m}],$$

où a est un nombre réel; nous appellerons cette expression *monôme extérieur* ou *grassmannien* de degré m, les variables $x^{\varkappa_1},x^{\varkappa_2},\dots,x^{\varkappa_m}$ ses *facteurs*, et le nombre a son *coefficient*. Il convient aussi de considérer les nombres réels comme monômes extérieurs de degré zéro. Pour abréger, adoptons encore les conventions suivantes:

$$1[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_m}]=[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_m}], \quad -1[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_m}]=-[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_m}],$$
$$a[x^{\varkappa}]=ax^{\varkappa}.$$

Deux monômes seront dits *semblables*, s'ils ne diffèrent que par leurs coefficients.

Nous assujettisons les monômes extérieurs aux règles suivantes:

1° Tous les monômes que l'on déduit du monôme (2), en effectuant sur les variables une permutation paire, sont égaux; si cette permutation est impaire, le monôme obtenu est égal à $-a[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2},\dots,x^{\varkappa_m}]$; il en résulte qu'il change de signe, si l'on permute deux variables.

2° Tous les monônes de degré quelconque, dont les coefficients sont nuls, sont égaux; nous les appellons *monômes nuls* et les désignons par 0.

3° Si deux facteurs d'un monôme sont identiques, celui-ci est nul; il en résulte que tous les monômes de degré supérieur à n sont nuls et que tout monôme de degré n peut être réduit à la forme $a[x^1x^2\dots x^n]$.

Il résulte aussi des propriétés du monôme qu'on peut ranger ses facteurs dans un ordre arbitraire, par exemple, dans celui des indices croissants en changeant au besoin le signe de son coefficient.

D'après ces règles, on aura, par exemple,

$$a[x^1x^2x^3]=a[x^2x^3x^1]=a[x^3x^1x^2]=-a[x^1x^3x^2]=-a[x^2x^1x^3]=-a[x^3x^2x^1].$$

Imaginons maintenant une suite de m vecteurs contrevariants arbitraires de l'espace affine A_n

(3) $$\{x_1^{\varkappa}\},\quad \{x_2^{\varkappa}\},\quad \dots,\quad \{x_m^{\varkappa}\};$$

nous appellerons *valeur du monôme* (2) pour la suite (3) l'expression

$$m!\,a x_1^{[\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \dots x_m^{\varkappa_m]}.$$

Il est évident que deux monômes égaux ont la même valeur pour une suite quelconque, et que, réciproquement, si deux monômes de même degré ont la même valeur pour une suite quelconque de vecteurs, ils sont égaux.

7. Forme extérieure (définition). L'expression qui se déduit par des signes d'addition d'un certain nombre de monômes extérieures de même degré m s'appelle *forme extérieure* ou *symbolique* de degré m. Nous la désignons par une des grandes lettres $\Phi, \Psi, \Omega, \dots$ de l'alphabet grec, si $m>1$, en réservant la lettre ω affectée, au besoin, d'un indice, à celle de degré un, dite *forme linéaire*. Les monômes extérieurs, définis plus haut, sont à considérer comme cas particulier des formes extérieures; il sera aussi commode de considérer tout nombre comme forme extérieure de degré zéro. Comme exemples de formes extérieures, donnons

$$\omega = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

$$\Phi = A[x^1 x^2] + B[x^2 x^3] + C[x^3 x^1],$$

$$\Psi = A_1[x^2 x^3 \dots x^n] + A_2[x^1 x^3 \dots x^n] + \dots + A_n[x^1 x^2 \dots x^{n-1}].$$

Deux formes extérieures sont *égales*, si elles sont composées de monômes égaux, abstraction faite de leur ordre et des monômes nuls. Si, dans une forme extérieure, se trouvent plusieurs monômes semblables, on obtient une forme égale en remplaçant ces derniers par un seul monôme composé des mêmes facteurs et ayant pour coefficient la somme de tous les coefficients. On a, par exemple,

$$a[x^1 x^2 x^3] + b[x^1 x^3 x^2] + c[x^2 x^3 x^1] = (a-b+c)[x^1 x^2 x^3].$$

Si, en effectuant cette réduction des monômes, l'on obtient une forme dont tous les monômes sont nuls, elle sera dite *forme nulle* et sera désignée par 0.

8. Somme des formes extérieures. La *somme* de deux formes extérieures Φ et Ψ de même degré est la forme composée de tous les monômes des deux formes; nous la désignerons par $\Phi+\Psi$. Par exemple, la somme des formes $\Phi = a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$ et $\Psi = b_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$ est

$$\Phi + \Psi = (a_{\varkappa\lambda} + b_{\varkappa\lambda})[x^\varkappa x^\lambda].$$

La somme des formes extérieures est donc *commutative* et *associative*.

9. Produit extérieur. Nous appelons *produit de deux monômes extérieurs* $\Phi = a[x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \dots x^{\varkappa_h}]$ et $\Psi = b[x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \dots x^{\lambda_i}]$ le monôme

$$ab[x^{\varkappa_1} \dots x^{\varkappa_h} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_i}],$$

que nous désignons par $[\Phi\Psi]$. Ce produit est évidemment associatif, mais il peut dépendre de l'ordre de ses facteurs. En effet, on a

$$[\Psi\Phi] = ab[x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_i} x^{\varkappa_1} \dots x^{\varkappa_h}].$$

Faisons progresser successivement chacune des variables $x^{\varkappa_1}, x^{\varkappa_2}, \dots, x^{\varkappa_h}$ de i rangs vers la gauche, ce qui produit hi changements de signe; on aura donc

$$[\Psi\Phi] = (-1)^{hi} ab[x^{\varkappa_1} \dots x^{\varkappa_h} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_i}],$$

d'où

$$[\Psi\Phi] = (-1)^{hi}[\Phi\Psi]. \tag{4}$$

On voit ainsi que le produit de deux monômes ne dépend pas de leur ordre si l'un des facteurs est de degré pair, et qu'il change de signe, si les deux facteurs sont de degré impair. Cette règle s'étend à tout produit d'un nombre quelconque de monômes.

Il résulte de la définition du produit et des propriétés des monômes (nº 6) que le produit de monômes est nul si deux de ses facteurs contiennent la même variable ou si la somme des degrés des facteurs surpasse le nombre des variables. En particulier, le produit de deux monômes identiques (carré extérieur) est toujours nul.

Soient données maintenant deux formes extérieures Φ et Ψ; multiplions chaque monôme de Φ par chaque monôme de Ψ; la somme de tous les produits ainsi obtenus s'appelle *produit* (*extérieur*) des formes Φ et Ψ et sera désignée par $[\Phi\Psi]$. Dans le cas particulier de deux facteurs identiques, nous emploierons un symbole plus simple $[\Phi^2]$ et nous lui donnerons le nom de *carré extérieur*. On doit, bien entendu, respecter l'ordre des monômes que l'on multiplie. Si, par exemple,

$$\Phi = a_\varkappa x^\varkappa, \quad \Psi = b_{\lambda\mu}[x^\lambda x^\mu],$$

on a

$$[\Phi\Psi] = a_\varkappa b_{\lambda\mu}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu].$$

Le produit d'une forme Φ par un nombre (forme de degré zéro) s'obtient en multipliant les coefficients de tous les monômes de Φ par ce nombre; dans ce cas particulier, l'ordre des facteurs à multiplier est indifférent. Il résulte, de cette définition et des propriétés du produit des monômes données ci-dessus, que le produit des formes extérieures est *associatif* et *distributif* par rapport à l'addition. On aura donc, pour trois formes extérieures arbitraires Φ, X et Ψ,

$$[[\Phi X]\Psi] = [\Phi[X\Psi]];$$

nous représenterons ce deux produits par le symbole, plus simple,

$$[\Phi X \Psi].$$

Si les deux formes Φ, X sont de même degré, on aura

$$[(\Phi+X)\Psi]=[\Phi\Psi]+[X\Psi],$$
$$[\Psi(\Phi+X)]=[\Psi\Phi]+[\Psi X].$$

On a vu plus haut que, si dans un produit de deux monômes extérieurs respectivement de degré h et i l'on change l'ordre des facteurs, ce produit sera multiplié par $(-1)^{hi}$. Il s'ensuit que la relation (4) reste valable, si Φ et Ψ désignent respectivement deux formes extérieures de degré h et i. Il résulte de cette relation que le produit contenant deux facteurs identiques de degré impair est nul et que la produit de formes extérieures est idépendant de l'ordre des facteurs, si tous ceux-ci sont de degré pair.

La $q^{\text{ième}}$ puissance d'une forme extérieure de degré impair est identiquement nulle, car c'est un produit qui se compose de facteurs identiques de degré impair. La puissance d'une forme extérieure de degré pair n'est pas, en général, nulle. Considérons, par exemple, la forme quadratique extérieure à quatre variables

$$\Omega=a_{12}[x^1x^2]+a_{13}[x^1x^3]+a_{14}[x^1x^4]+a_{23}[x^2x^3]+a_{24}[x^2x^4]+a_{34}[x^3x^4].$$

Comme on a

$$[\Omega^2]=2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{12}+a_{14}a_{23})[x^1x^2x^3x^4],$$

on voit bien que le carré extérieur $[A^2]$ est en général différent de zéro.

Dans les opérations sur les formes extérieures, il suffit donc de considérer les puissances des formes de degré pair. Soit Φ une telle forme écrite de la façon suivante:

$$\Phi=M_1+M_2+\ldots+M_h,$$

où les symboles M_i $(i=1,2,\ldots,h)$ désignent les monômes dont elle est composée. On voit que le carré de Φ est

$$[\Phi^2]=2\big([M_1M_2]+[M_1M_3]+\ldots+[M_1M_h]+[M_2M_3]+\ldots+[M_{h-1}M_h]\big)$$

car ceux de $M_1, M_2,\ldots, M_h$ sont tous nuls et le produit de deux monômes de degré pair est indépendant de leur ordre. D'une manière générale, on a

$$[\Phi^q]=q!\sum_{(i_1 i_2\ldots i_q)}[M_{i_1}M_{i_2}\ldots M_{i_q}], \tag{5}$$

où $\sum\limits_{(i_1 i_2\ldots i_q)}$ désigne la somme étendue à toutes les combinaisons des indices $1,2,\ldots,h$ pris q à q.

10. Forme simplifiée d'une expression extérieure. Dans tout ce qui suit nous représenterons les expressions extérieures sous une forme que nous appellerons *forme simplifiée*.

Considérons, par exemple, l'expression extérieure du troisième degré

$$\Omega=a_{\varkappa\lambda\mu}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu].$$

Changeons dans cette expression, d'une façon arbitraire, le rôle des indices $\varkappa,\lambda,\mu$; écrivons, par exemple,

$$\Omega=a_{\lambda\varkappa\mu}[x^\lambda x^\varkappa x^\mu].$$

D'après les règles données plus haut ceci peut encore s'écrire comme suit

$$\Omega=-a_{\lambda\varkappa\mu}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu].$$

La forme Ω peut donc être représentée de six façons différentes que l'on obtient en permutant les indices du coefficient $a_{\varkappa\lambda\mu}$, et en l'affectant du signe $-$ si la permutation est impaire.

En faisant la somme des expressions ainsi obtenus et en la divisant par $3!$, on trouve la formule

$$\Omega=a_{[\varkappa\lambda\mu]}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu],$$

où l'on a employé l'alternation des indices (nº 2).

Ce procédé pouvant être appliqué à une forme de degré quelconque, l'on voit ainsi que toute forme extérieure peut être écrite de manière que les coefficients de ses monômes soient antisymétriques en leurs indices. Une forme Ω de degré m peut donc être représentée comme suit:

$$\Omega=\frac{1}{m!}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_m}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_m}], \tag{6}$$

les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_m}$ étant antisymétriques en tous leurs indices; la somme du second membre, contenant $m!$ monômes égaux, pour tout choix de m indices pris parmi les nombres $1,2,\ldots,n$, a été divisée par $m!$ afin qu'elle se réduise à la forme la plus simple.

Remarquons que le nombre des coefficients de la forme (6) est égal à $\binom{n}{m}$. Dans la suite, en écrivant une forme extérieure, on admettra toujours qu'elle satisfasse à la convention adoptée ici et que le nombre des variables soit égal à n.

La comparaison des expressions (1) et (6) permet de justifier notre assertion, donnée au commencement du nº 6, qu'à la forme multilinéaire (1) peut être associée une forme extérieure bien déterminée, et réciproquement. Nous reviendrons au nº 12 à cette correspondance entre les forme multilinéaires et les formes extérieures, en montrant qu'elle est intrinsèque.

A côté des formes extérieures que nous avons définies ci-dessus, on peut aussi considérer des *formes mixtes*. Donnons comme exemple l'expression

$$\frac{1}{2\cdot 3!}A_{\varkappa\lambda\mu,\nu\pi}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu]\cdot[x^\nu x^\pi],$$

où les coefficients $A_{\varkappa\lambda\mu,\nu\pi}$ sont antisymétriques en les indices $\varkappa,\lambda,\mu$ et en ν,π et où le point indique la multiplication algébrique ordinaire; cela veut dire que ces produits sont commutatifs et associatifs. Ces formes interviennent dans plusieurs recherches géométriques[4]).

11. Valeur d'une forme extérieure. Considérons une forme extérieure de degré p

$$\Omega=\frac{1}{p!}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_p}], \tag{6'}$$

et une suite de p vecteurs arbitraires

$$V_1, V_2, \ldots, V_p, \tag{7}$$

en posant $V_h=\{x_h^\varkappa\}$ $(h=1,2,\ldots,p)$. Nous appellerons *valeur de la forme* Ω pour la suite (7) l'expression

$$\Omega[V_1,V_2,\ldots,V_p]=a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}x_1^{[\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\ldots x_p^{\varkappa_p]}. \tag{8}$$

Il est évident que *deux formes égales ont la même valeur pour une suite arbitraire de vecteurs.* Pour démontrer la réciproque, nous nous bornerons au cas $p=2$, le raisonnement étant d'ailleurs général. Considérons deux formes extérieures

$$\Phi=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda],\qquad \Psi=\frac{1}{2}b_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda],$$

et admettons qu'elles aient les mêmes valeurs pour une suite de deux vecteurs arbitraires, $V_1=\{x_1^\varkappa\}$, $V_2=\{x_2^\varkappa\}$. Choisissons ces derniers de manière qu'il soit

$$x_1^\varkappa=\begin{cases}1 & \text{pour } \varkappa=1,\\ 0 & \text{pour } \varkappa\neq 1,\end{cases}\qquad x_2^\varkappa=\begin{cases}1 & \text{pour } \varkappa=2,\\ 0 & \text{pour } \varkappa\neq 2.\end{cases}$$

On a alors

$$\Phi[V_1,V_2]=a_{12},\qquad \Psi[V_1,V_2]=b_{12},$$

d'où il suit $a_{12}=b_{12}$. En choisissant convenablement les deux vecteurs, on peut, de la même manière, démontrer que tous les autres coefficients de mêmes indices de deux formes sont aussi égaux, c. q. f. d.

[4]) V. p. ex. É. Cartan [4], p. 44.

Il résulte, en particulier, de cette proposition, qu'une forme extérieure est nulle, si sa valeur l'est pour une suite arbitraire de vecteurs. Il est facile de vérifier qu'en faisant sur les vecteurs de la suite (7) une substitution linéaire

$$V_h=a_{h1}\overline{V}+a_{1h2}\overline{V}_2+\ldots+a_{hp}\overline{V}_p \qquad (h=1,2,\ldots,p)$$

de déterminant δ différent de zéro, on aura

$$\Omega[V_1,V_2,\ldots,V_p]=\delta\Omega[\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,\overline{V}_p].$$

Il en résulte, en particulier, que la valeur de la forme Ω reste inaltérée, si l'on fait sur les vecteurs (7) une permutation paire, et qu'elle change de signe, si la permutation est impaire. Il s'ensuit aussi de la formule, que la valeur de la forme Ω est nulle, si les vecteurs de la suite (7) ne sont pas indépendants.

Il est évident que la valeur de la somme de deux formes extérieures de même degré est égale à la somme des valeurs des deux membres de cette somme.

Nous allons montrer que le produit de formes extérieures jouit d'une propriété analogue. Considérons, pour abréger, les formes

$$\Phi=\frac{1}{3!}a_{\varkappa\lambda\mu}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu],\qquad \Psi=\frac{1}{2}b_{\nu\pi}[x^\nu x^\pi],$$

et la suite de cinq vecteurs arbitraires

$$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, \tag{9}$$

où $V_h=\{x_h^\varkappa\}$ $(h=1,2,3,4,5)$. Le produit de Φ et Ψ est égal à la forme

$$\Omega=\frac{1}{2\cdot 3!}a_{\varkappa\lambda\mu}b_{\nu\pi}[x^\varkappa x^\lambda x^\mu x^\nu x^\pi],$$

et sa valeur, pour la suite (9), est égale, d'après la formule (8), à l'expression

$$\Omega[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5]=\frac{1}{2\cdot 3!}a_{\varkappa\lambda\mu}b_{\nu\pi}x_1^{[\varkappa}x_2^\lambda x_3^\mu x_4^\nu x_5^{\pi]},$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$\Omega[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5]=\frac{1}{2\cdot 3!}a_{\varkappa\lambda\mu}b_{\nu\pi}x_{[1}^\varkappa x_2^\lambda x_3^\mu x_4^\nu x_{5]}^\pi. \tag{10}$$

Or, nous savons que l'expression $x_{[1}^\varkappa x_2^\lambda x_3^\mu x_4^\nu x_{5]}^\pi$ est égale au déterminant du cinquième degré

$$\begin{vmatrix} x_1^\varkappa & x_1^\lambda & x_1^\mu & x_1^\nu & x_1^\pi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^\varkappa & x_5^\lambda & x_5^\mu & x_5^\nu & x_5^\pi \end{vmatrix}$$

divisé par le nombre 5! (n⁰ 2). D'après le théorème de Laplace, ce déterminant est égal à la somme

$$2\cdot 3!\sum_{(h,i,j)} x^{\varkappa}_{[h} x^{\lambda}_{i} x^{\mu}_{j]} x^{\nu}_{[k} x^{\pi}_{l]},$$

où $\sum_{(h,i,j)}$ indique la sommation étendue à toutes les combinaisons trois à trois des nombres $1,2,3,4,5$, et où, pour chaque choix des indices h,i,j, on doit prendre les indices k,l de manière que la permutation h,i,j,k,l soit paire. En faisant usage de cette remarque, l'on peut représenter la formule (10) sous la forme

$$\Omega[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5]=\sum_{(h,i,j)} a_{\varkappa\lambda\mu} b_{\nu\pi} x^{\varkappa}_{[h} x^{\lambda}_{i} x^{\mu}_{j]} x^{\nu}_{[k} x^{\pi}_{l]}.$$

D'autre part, on a, d'après l'égalité (8),

$$\Phi[V_h,V_i,V_j]=a_{\varkappa\lambda\mu} x^{\varkappa}_{[h} x^{\lambda}_{i} x^{\mu}_{j]}, \qquad \Psi[V_k,V_l]=b_{\nu\pi} x^{\nu}_{[k} x^{\pi}_{l]}.$$

En rapprochant ces formules, l'on trouve

$$\Omega[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5]=\sum_{(h,i,j)} \Phi[V_h,V_i,V_j]\cdot\Psi[V_k,V_l],$$

le symbole de sommation et les indices k,l ayant la même signification que plus haut; cette formule établit le lien entre la valeur du produit de deux formes extérieures et les valeurs de ses facteurs.

Remarquons enfin que la valeur d'une forme extérieure est invariante par la transformation (2) du n⁰ 1.

12. Changement de variables. Pour construire les formes extérieures, nous avons introduit n indéterminées ou variables $x^{\varkappa}$; nous les assujettissons maintenant à une substitution linéaire de la même forme que celle qui nous a servi à obtenir le changement des coordonnées d'un point de l'espace affine A_n (n⁰ 1). Nous écrirons donc

$$x^{\varkappa}=P^{\varkappa}_{\varrho}\bar{x}^{\varrho}, \qquad \bar{x}^{\varkappa}=Q^{\varkappa}_{\varrho}x^{\varrho}, \tag{11}$$

le déterminant $\Delta=|P^{\varkappa}_{\varrho}|$ étant différent de zéro et les coefficients $P^{\varkappa}_{\varrho}$ et $Q^{\varkappa}_{\varrho}$ étant liés par les relations (4) du n⁰ 1. Pour montrer par quelle forme l'on doit remplacer une forme extérieure donnée, si l'on introduit les variables $\bar{x}^{\varkappa}$, considérons d'abord le monôme $[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_p}]$. Si l'on y substitue, à la variable $x^{\varkappa_i}$ $(i=1,2,\dots,p)$, la forme linéaire $P^{\varkappa_i}_{\varrho_i}\bar{x}^{\varrho_i}$, on obtient un produit extérieur de p formes linéaires

$$[P^{\varkappa_1}_{\varrho_1}\bar{x}^{\varrho_1} P^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\bar{x}^{\varrho_2}\dots P^{\varkappa_p}_{\varrho_p}\bar{x}^{\varrho_p}]$$

qui, développé d'après les règles de multiplication extérieure, devient

$$P^{\varkappa_1}_{\varrho_1}P^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\dots P^{\varkappa_p}_{\varrho_p}[\bar{x}^{\varrho_1}\bar{x}^{\varrho_2}\dots\bar{x}^{\varrho_p}]. \tag{12}$$

On trouve, par exemple,

$$[x^1x^2\dots x^n]=\Delta[\bar{x}^1\bar{x}^2\dots\bar{x}^n].$$

De même, pour effectuer le changement des variables $x^{\varkappa}$ en les variables $\bar{x}^{\varkappa}$ dans une forme extérieure arbitraire Ω de degré p, il faut, dans chacun des monômes de celle-ci, remplacer le produit symbolique $[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_p}]$ par l'expression (12). On obtient ainsi une nouvelle forme extérieure que nous désignons par $\bar{\Omega}$. Par exemple, la forme extérieure du troisième degré

$$\Omega=\frac{1}{3!}a_{\varkappa\lambda\mu}[x^{\varkappa}x^{\lambda}x^{\mu}]$$

se transformera en la suivante:

$$\bar{\Omega}=\frac{1}{3!}\bar{a}_{\varrho\sigma\tau}[\bar{x}^{\varrho}\bar{x}^{\sigma}\bar{x}^{\tau}],$$

où l'on a posé

$$\bar{a}_{\varrho\sigma\tau}=P^{\varkappa}_{\varrho}P^{\lambda}_{\sigma}P^{\mu}_{\tau}a_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Nous voyons, d'après cet exemple, que les coefficients d'une forme se transforment comme les composantes d'un tenseur covariant.

Il est essentiel de démontrer que *les définitions de l'égalité des formes extérieures, de leur somme et de leur produit, sont indépendantes du choix des variables.* Cette proposition étant, pour les définitions de l'égalité et de la somme, une conséquence immédiate des formules du changement de variables, nous nous bornerons à la démontrer pour le produit.

Pour simplifier le calcul, considérons deux formes extérieures Φ et Ψ respectivement de degré trois et deux

$$\Phi=\frac{1}{3!}a_{\varkappa\lambda\mu}[x^{\varkappa}x^{\lambda}x^{\mu}], \qquad \Psi=\frac{1}{2}b_{\nu\pi}[x^{\nu}x^{\pi}],$$

et leur produit extérieur

$$[\Phi\Psi]=\frac{1}{2\cdot 3!}a_{\varkappa\lambda\mu}b_{\nu\pi}[x^{\varkappa}x^{\lambda}x^{\mu}x^{\nu}x^{\pi}].$$

En introduisant les nouvelles variables $\bar{x}^{\varkappa}$ au moyen de la substitution (11), ces formes deviennent respectivement

$$\bar{\Phi}=\frac{1}{3!}P^{\varkappa}_{\alpha}P^{\lambda}_{\beta}P^{\mu}_{\gamma}a_{\varkappa\lambda\mu}[\bar{x}^{\alpha}\bar{x}^{\beta}\bar{x}^{\gamma}], \qquad \bar{\Psi}=\frac{1}{2}P^{\nu}_{\delta}P^{\pi}_{\varepsilon}b_{\nu\pi}[\bar{x}^{\delta}\bar{x}^{\varepsilon}],$$

$$\overline{[\Phi\Psi]}=\frac{1}{2\cdot 3!}P^{\varkappa}_{\alpha}P^{\lambda}_{\beta}P^{\mu}_{\gamma}P^{\nu}_{\delta}P^{\pi}_{\varepsilon}a_{\varkappa\lambda\mu}b_{\nu\pi}[\bar{x}^{\alpha}\bar{x}^{\beta}\bar{x}^{\gamma}\bar{x}^{\delta}\bar{x}^{\varepsilon}].$$

On a donc bien

$$[\overline{\Phi\Psi}] = [\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}],$$

conformément à la proposition.

Nous avons dit plus haut (voir la fin du n° 10) que la forme multilinéaire ordinaire (1) est associée à la forme extérieure (6). Nous pouvons faire voir maintenant que cette correspondance est intrinsèque en ce sens qu'elle subsiste si l'on effectue en même temps la substitution (11) sur les variables $x^\varkappa$ et sur les m séries des variables $x_i^\varkappa$ $(i=1,2,\dots,m)$. En effet, en remplaçant $\overline{x}_i^\varkappa$ par les variables $x_i^\varkappa$, la forme multilinéaire (1) et la forme extérieure (6) deviennent respectivement

$$\overline{a}_{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_m}\overline{x}_1^{\varrho_1}\dots\overline{x}_m^{\varrho_m}, \qquad \frac{1}{m!}\overline{a}_{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_m}[\overline{x}_1^{\varrho_1}\overline{x}_2^{\varrho_2}\dots\overline{x}_m^{\varrho_m}],$$

où l'on a posé

$$\overline{a}_{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_m} = P_{\varrho_1}^{\varkappa_1}P_{\varrho_2}^{\varkappa_2}\dots P_{\varrho_m}^{\varkappa_m}a_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m};$$

on voit donc bien qu'elles sont aussi associées l'une à l'autre.

Reprenons finalement la notion de valeur d'une forme extérieure pour une suite de vecteurs. Si l'on introduit, dans la forme extérieure Ω, donnée par la formule (6′) du n° 11, les nouvelles variables $\overline{x}^\varkappa$, par la substitution (11), en la transformant ainsi en une forme $\overline{\Omega}$, et que l'on assujettit les composantes des vecteurs V_h à la même substitution en posant

$$V_h^\varkappa = P_\varrho^\varkappa \overline{V}_h^\varrho,$$

on obtient, de la même manière que plus haut, l'égalité

$$\overline{\Omega}[\overline{V}_1, \overline{V}_2, \dots, \overline{V}_p] = \Omega[V_1, V_2, \dots, V_p];$$

ceci montre que la valeur d'une forme extérieure pour une suite de vecteurs est aussi invariante pour un changement de variables.

Le changement de variables peut être appliqué à la réduction d'une expression extérieure à une *forme canonique*. Dans le cas d'une forme de degré 1, ou de degré n, les expressions canoniques sont évidemment les suivantes (cf. n° 6):

$$x^1 \quad \text{et} \quad [x^1x^2\dots x^n].$$

Nous reviendrons dans les numéros suivants au problème de réduction à la forme canonique des expressions de degrés différents de 1 et de n.

Remarque. Il est souvent nécessaire de remplacer dans une forme extérieure les variables primitives par de nouvelles au nombre plus petit que n, en posant par exemple

$$\overline{x}^\varkappa = p_1^\varkappa y^1 + p_2^\varkappa y^2 + \dots + p_m^\varkappa y^m \qquad (m<n). \tag{13}$$

Si le nombre de nouvelles variables est plus petit que le degré de la forme, celle-ci se transforme en une forme nulle. Il est clair que les définitions de la somme et du produit de formes extérieures sont aussi invariantes pour la substitution (13).

13. Dérivées d'une forme extérieure. Soit Ω une forme extérieure arbitraire. On calcule sa dérivée par rapport à la variable $x^\varkappa$ de la façon suivante: on amène, dans chaque monôme, cette variable à la première place, et on la supprime ensuite. Si la forme Ω ne contient pas de variable $x^\varkappa$, sa dérivée par rapport à celle-ci est, par définition, nulle. On désigne les dérivées de la forme Ω par les symboles ordinaires:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa}, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial\Omega}{\partial x^\lambda},$$

en respectant l'ordre des dérivations successives, les dérivées

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\lambda\partial x^\varkappa},$$

par exemple, n'étant pas en général égales.

Pour la forme $\Omega = \frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$, on a

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa} = a_{\varkappa\lambda}x^\lambda, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\lambda\partial x^\varkappa} = a_{\varkappa\lambda}.$$

Les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ étant antisymétriques, il en résulte

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\lambda\partial x^\varkappa} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda} = 0.$$

Cette relation est d'ailleurs valable pour une forme extérieure de degré arbitraire, comme il est facile de s'en convaincre en se reportant à la définition de la dérivée.

Si l'on multiplie extérieurement la variable $x^\varkappa$ par la forme linéaire $\frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa}$, et qu'on somme ensuite par rapport à l'indice $\varkappa$, on trouve

$$\left[x^\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa}\right] = a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$$

ou

$$\left[x^\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa}\right] = 2\Omega. \tag{14}$$

Cette relation peut être facilement généralisée: si Φ est une forme extérieure de degré p, on a

$$\left[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_r}\frac{\partial^r\Phi}{\partial x^{\varkappa_r}\partial x^{\varkappa_{r-1}}\ldots\partial x^{\varkappa_1}}\right]=p(p-1)\ldots(p-r+1)\Phi,$$

$$\left[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_p}\frac{\partial^p\Phi}{\partial x^{\varkappa_p}\partial x^{\varkappa_{p-1}}\ldots\partial x^{\varkappa_1}}\right]=p\,!\,\Phi.$$

Si l'on fait sur les variables $x^\varkappa$ d'une forme extérieure Φ la substitution (11), l'égalité $\overline{\Phi}=\Phi$ nous conduit aux relations

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{x}^\varkappa}=P^\varrho_\varkappa\frac{\partial\Phi}{\partial x^\varrho}. \tag{15}$$

Ce calcul se fait donc comme pour les formes algébriques ordinaires.

Remarquons enfin que la relation (14) est analogue à celle entre une forme algébrique ordinaire du second degré et ses dérivées premières; en effet, si $F=a_{\varkappa\lambda}x^\varkappa x^\lambda$ $(a_{\varkappa\lambda}=a_{\lambda\varkappa})$, on a $x^\varkappa\dfrac{\partial F}{\partial x^\varkappa}=2F$.

14. Rang d'une forme extérieure. On dit qu'une forme extérieure est de *rang* r, si r est le nombre minimum de variables par lesquelles on peut exprimer cette forme, en se servant d'une substitution (11) convenablement choisie. D'après cette définition, les rangs des formes de degré un et de degré n sont égaux aux degrés de ces formes si elles ne sont pas nulles (nº 12).

Pour déterminer le rang d'une forme Ω de degré arbitraire p, nous définirons auparavant la notion de son *système associé*. On appelle ainsi le système d'équations linéaires qu'on obtient en annulant toutes les dérivées de degré $p-1$ de la forme Ω

$$\frac{\partial^{p-1}\Omega}{\partial x^{\varkappa_1}\partial x^{\varkappa_2}\ldots\partial x^{\varkappa_{p-1}}}=0\qquad(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{p-1}=1,2,\ldots,n). \tag{16}$$

THÉORÈME 1. *Le système associé d'une forme extérieure est covariant relativement à tout changement de variables par une substitution linéaire, autrement dit, la formation du système associé d'une forme extérieure et le changement de variables sont deux opérations échangeables.*

En effet, si l'on fait sur les variables $x^\varkappa$ d'une forme Ω la substitution (11), et qu'on tient compte des formules (15) du numéro précédent, on trouve

$$\frac{\partial^{p-1}\overline{\Omega}}{\partial\bar{x}^{\varkappa_1}\partial\bar{x}^{\varkappa_2}\ldots\partial\bar{x}^{\varkappa_{p-1}}}=P^{\varrho_1}_{\varkappa_1}P^{\varrho_2}_{\varkappa_2}\ldots P^{\varrho_{p-1}}_{\varkappa_{p-1}}\frac{\partial^{p-1}\Omega}{\partial x^{\varrho_1}\partial x^{\varrho_2}\ldots\partial x^{\varrho_{p-1}}},$$

$$\frac{\partial^{p-1}\Omega}{\partial x^{\varrho_1}\partial x^{\varrho_2}\ldots\partial x^{\varrho_{p-1}}}=Q^{\varkappa_1}_{\varrho_1}Q^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\ldots Q^{\varkappa_{p-1}}_{\varrho_{p-1}}\frac{\partial^{p-1}\overline{\Omega}}{\partial\bar{x}^{\varkappa_1}\partial\bar{x}^{\varkappa_2}\ldots\partial\bar{x}^{\varkappa_{p-1}}}.$$

Ces relations montrent que les systèmes associés des formes Ω et $\overline{\Omega}$ sont équivalents.

THÉORÈME 2. *Le rang d'une forme extérieure est égal à celui de son système associé.*

Pour démontrer ce théorème, désignons par r le rang de la forme Ω, et par s celui de son système associé. En introduisant des nouvelles variables $\bar{x}^\varkappa$ par une substitution linéaire, on peut donc réduire ce dernier système à la forme

$$\bar{x}^1=0,\quad\bar{x}^2=0,\quad\ldots,\quad\bar{x}^s=0. \tag{17}$$

Nous allons montrer que le rang de la forme Ω ne peut pas surpasser s. En effet, supposons qu'on ait introduit dans cette forme les mêmes variables que dans son système associé, et que l'un des monômes contienne la variable $\bar{x}^\alpha$ $(\alpha>s)$. Soit

$$a\,[\bar{x}^{\varkappa_1}\bar{x}^{\varkappa_2}\ldots\bar{x}^{\varkappa_{p-1}}\bar{x}^\alpha]\qquad(a\neq0$$

ce monôme. L'équation

$$\frac{\partial^{p-1}\overline{\Omega}}{\partial\bar{x}^{\varkappa_1}\partial\bar{x}^{\varkappa_2}\ldots\partial\bar{x}^{\varkappa_{p-1}}}=0$$

comprendra donc le terme $a\bar{x}^\alpha$, et, par suite, elle ne peut être une conséquence du système (17), contrairement à l'hypothèse faite sur celui-ci.

D'autre part, il résulte, de la définition du rang de la forme extérieure, qu'on peut choisir les variables $x^\varkappa$ de manière que la forme Ω ne contienne que les variables $x^1,x^2,\ldots,x^r$. Son système associé ne peut donc contenir d'autres variables et, par conséquent, il doit être $s\leqslant r$. Le rapprochement de ces deux résultats montre qu'il est nécessairement $r=s$, c. q. f. d.

Si le rang d'une forme extérieure est égal à son degré p, celle-ci peut être réduite à la forme canonique $[x^1x^2\ldots x^p]$.

Une forme extérieure est dite *régulière*, si son rang est égal au nombre de variables; nous l'appellerons forme *singulière*, si son rang est plus petit que ce nombre.

Les notions de rang et de système associé se généralisent facilement pour un système de formes extérieures.

Supposons qu'il soit donné un ensemble (E) de formes extérieures de degrés arbitraires à variables $x^\varkappa$. Nous dirons que le nombre r est son *rang*, si le plus petit nombre des variables par lesquelles on peut exprimer les formes de l'ensemble est égal à r. Nous appellerons *système associé de l'ensemble* (E) le système formé des systèmes associés de tous les éléments de l'ensemble. Par le même raisonnement que tout à l'heure on peut démontrer le

THÉORÈME 2'. *Le rang d'un ensemble de formes extérieures est égal à celui de son système associé.*

15. Formes linéaires. Nous dirons que r formes linéaires $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ sont *indépendantes* lorsqu'il n'existe aucun système de nombres $l_1, l_2, \dots, l_r$, non tous nuls, tel qu'il soit identiquement

$$l_1\omega^1 + l_2\omega^2 + \dots + l_r\omega^r = 0. \tag{18}$$

THÉORÈME 3. *Pour que les formes linéaires $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ ne soient pas indépendantes, il faut et il suffit que leur produit extérieur $[\omega^1\omega^2\dots\omega^r]$ soit nul.*

Supposons, en effet, que les formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ soient liées par la relation (18), le coefficient l_r, par exemple, n'étant pas nul. On en déduit la formule

$$\omega^r = k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \dots + k_{r-1}\omega^{r-1}.$$

On aura, par conséquent,

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^r] = [\omega^1\omega^2\dots\omega^{r-1}(k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \dots + k_{r-1}\omega^{r-1})].$$

Si l'on développe le second membre, on obtient une somme dont chaque monôme contient deux facteurs linéaires égaux. Le produit extérieur $[\omega^1\omega^2\dots\omega^r]$ est donc nul (n° 9), ce qui montre que la condition est nécessaire.

Pour démontrer sa suffisance, posons

$$\omega^h = a^h_\varrho x^\varrho \qquad (h = 1, 2, \dots, r).$$

En portant ces expressions dans le produit $[\omega^1\omega^2\dots\omega^r]$, on trouve

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^r] = a^1_{\varkappa_1} a^2_{\varkappa_2} \dots a^r_{\varkappa_r} [x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_r}],$$

ou

$$[\omega^1\omega^2\dots\omega^r] = a^{[1}_{\varkappa_1} a^2_{\varkappa_2} \dots a^{r]}_{\varkappa_r} [x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\dots x^{\varkappa_r}].$$

Le second membre étant par hypothèse nul, on en conclut que tous les déterminants de degré r de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \dots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \dots & a^n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_r & a^2_r & \dots & a^n_r \end{Vmatrix}$$

sont nuls et que, par suite, les formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ ne sont pas indépendantes.

Remarque. Si l'on se donne n formes linéaires indépendantes $\omega^\varkappa$ à n variables et une forme extérieure Ω de degré p à mêmes variables, celle-ci peut être exprimée par les formes $\omega^\varkappa$ comme suit

$$\Omega = \frac{1}{p!} A_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p} [\omega^{\varkappa_1}\omega^{\varkappa_2}\dots\omega^{\varkappa_p}],$$

les coefficients $A_{\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_p}$ étant antisymétriques.

THÉORÈME 4 (Cartan). *Soient donnés deux systèmes de formes linéaires à n variables*

$$\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r, \qquad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$$

vérifiant la relation

$$[\tau_1\omega^1] + [\tau_2\omega^2] + \dots + [\tau_r\omega^r] = 0; \tag{19}$$

si les formes ω^h sont indépendantes, les formes τ_h s'expriment par elles suivant les formules

$$\tau_h = a_{h1}\omega^1 + a_{h2}\omega^2 + \dots + a_{hr}\omega^r \qquad (h = 1, 2, \dots, r),$$

où $a_{hi} = a_{ih}$.

Pour démontrer ce théorème, introduisons $n-r$ formes linéaires $\omega^{r+1}, \omega^{r+2}, \dots, \omega^n$, telles que l'ensemble des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$ se compose de formes indépendantes. Les formes τ_h peuvent donc s'exprimer par les formes ω^ϱ

$$\tau_h = a_{h\varrho}\omega^\varrho \qquad (h = 1, 2, \dots, r). \tag{20}$$

En substituant ces expressions dans la relation (19), on trouve

$$\sum_{h=1}^{r} a_{h\varrho}[\omega^\varrho\omega^h] = 0,$$

ce qui peut s'écrire comme suit

$$\sum_{h,i=1}^{r} a_{hi}[\omega^i\omega^h] + \sum_{h=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} a_{hj}[\omega^j\omega^h] = 0,$$

ou encore

$$\sum_{(hi)} (a_{hi} - a_{ih})[\omega^i\omega^h] + \sum_{h=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} a_{hj}[\omega^j\omega^h] = 0,$$

le symbole $\sum_{(hi)}$ indiquant que la somme doit être étendue à toutes les combinaisons deux à deux des nombres $1, 2, \dots, r$. L'indice j dans la seconde somme de la dernière égalité étant plus grand que les indices h, i, il faut et il suffit, pour que la dernière relation soit vérifiée identiquement, qu'il soit $a_{hi} = a_{ih}$, $a_{hj} = 0$ $(h, i = 1, 2, \dots, r;\ j = r+1, \dots, n)$, ce qui démontre le théorème.

16. Divisibilité des formes extérieures. Nous dirons qu'une forme extérieure Ω_p de degré p est *divisible* par une autre Φ_q de degré q, ou encore que Φ_q est *diviseur* de Ω_p, s'il existe une troisième forme Φ_{p-q} de degré $p-q$ telle qu'il soit identiquement $\Omega_p=[\Phi_q\Psi_{p-q}]$. Ω_p et Φ_q étant données, pour reconnaître si Ω_p est divisible par Φ_q, il faut développer le second membre de l'équation

$$\Omega_p=[\Phi_q\Psi_{p-q}],$$

où Ψ_{p-q} est une forme inconnue et écrire que les coefficients des deux membres reduits à la forme simplifiée (n⁰ 10) sont égaux. On obtient ainsi un système de $\binom{n}{p}$ équations linéaires par rapport à $\binom{n}{p-q}$ coefficients de la forme inconnue Ψ_{p-q}. La discussion de ce système permet de résoudre le problème posé.

EXEMPLE. Considérons deux formes à quatre variables

$$\Omega=A_1[x^2x^3x^4]-A_2[x^3x^4x^1]+A_3[x^4x^1x^2]-A_4[x^1x^2x^3],$$

$$\Phi=a_{12}[x^1x^2]+a_{13}[x^1x^3]+a_{14}[x^1x^4]+a_{23}[x^2x^3]+a_{24}[x^2x^4]+a_{34}[x^3x^4].$$

Pour reconnaître si Ω est divisible par Φ, on cherchera une forme linéaire

$$\omega=a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

telle qu'il soit $\Omega=[\Phi\omega]$. En y remplaçant Ω,Φ et ω par leurs expressions et en écrivant que les coefficients correspondants de deux membres sont égaux, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}
a_{34}a_2-a_{24}a_3+a_{23}a_4&=A_1,\\
-a_{34}a_1\qquad\qquad +a_{14}a_3-a_{13}a_4&=A_2,\\
a_{24}a_1-a_{14}a_2\qquad\qquad +a_{12}a_4&=A_3,\\
-a_{23}a_1+a_{13}a_2-a_{12}a_3\qquad\qquad&=A_4.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{23}\\ -a_{34} & 0 & a_{14} & -a_{13}\\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12}\\ -a_{23} & a_{13} & -a_{12} & 0\end{vmatrix}$$

étant symétrique gauche, il est égal au carré de l'expression $P=a_{12}a_{34}+a_{13}a_{12}+a_{14}a_{23}$. Donc, si $P\neq 0$, ce qui veut dire que le rang de la forme Φ est égal à quatre, la forme Ω est divisible par Φ et la forme ω est bien déterminée. Si $P=0$, les coefficients a n'étant pas tous nuls, Ω est divisible par Φ si le rang de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{23} & A_1\\ -a_{34} & 0 & a_{14} & -a_{13} & A_2\\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12} & A_3\\ -a_{23} & a_{13} & -a_{12} & 0 & A_4\end{matrix}\right\|$$

est égal à deux; dans ce cas, la forme linéaire n'est pas complètement déterminée.

Nous obtenons des résultats les plus complets et les plus importants en traitant le problème de divisibilité d'une forme extérieure par une forme linéaire.

THÉORÈME 4. *Pour qu'une forme extérieure Ω soit divisible par une forme linéaire ω, il faut et il suffit qu'il soit $[\Omega\omega]=0$.*

La condition est nécessaire. Admettons, en effet, que la forme Ω soit divisible par ω; on peut donc trouver une forme Φ telle que l'on ait $\Omega=[\Phi\omega]$. Il en résulte $[\Omega\omega]=[\Phi\omega\omega]$. Le produit du second membre contenant deux facteurs identiques de degré impair est nécessairement nul (n⁰ 9), il en est donc de même du produit $[\Omega\omega]$, c. q. f. d.

Pour démontrer que la condition est suffisante, supposons, ce qui est toujours permis, $\partial\omega/\partial x^1\neq 0$, et effectuons sur les variables $x^\varkappa$ la substitution donnée par les formules

$$\bar{x}^1=\omega,\quad \bar{x}^2=x^2,\quad \ldots,\quad \bar{x}^n=x^n.$$

La forme Ω se transformera alors en une forme $\bar{\Omega}$ que l'on peut écrire

$$\bar{\Omega}=[\bar{\Phi}_1\bar{x}^1]+\bar{\Phi}_2, \tag{21}$$

où $\bar{\Phi}_2$ est une forme qui ne dépend que des variables $\bar{x}^2,\bar{x}^3,\ldots,\bar{x}^n$; l'équation $[\Omega\omega]=0$, qui est par hypothèse vérifiée, se transformera par la même substitution en la suivante

$$[\bar{\Omega}\bar{x}^1]=0.$$

En rapprochant les deux dernières égalités, on en déduit

$$[\bar{\Phi}_2\bar{x}^1]=0.$$

La forme $\bar{\Phi}_2$ ne dépendant pas de la variable $\bar{x}^1$, on en conclut que cette forme est identiquement nulle. L'équation (21) devient donc $\bar{\Omega}=[\bar{\Phi}_1\bar{x}^1]$ ou, si l'on revient aux variables $x^\varkappa$, $\Omega=[\Phi\omega]$, ce qui montre que la condition est aussi suffisante.

COROLLAIRE. *Pour qu'une forme extérieure soit divisible par le facteur x^a, il faut et il suffit que chacun de ses monômes contienne cette variable.*

THÉORÈME 6. *Si une forme extérieure Ω de degré p est divisible par chacune des r formes linéaires indépendantes $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^r$, elle est divisible par leur produit extérieur $[\omega^1\omega^2\ldots\omega^r]$.*

Admettons, en changeant au besoin de notations, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\omega^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\omega^1}{\partial x^r} \\ \frac{\partial\omega^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\omega^2}{\partial x^r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\omega^r}{\partial x^1} & \frac{\partial\omega^r}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\omega^r}{\partial x^r} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, et effectuons dans la forme Ω le changement de variables défini par les formules

$$(22)\qquad \bar{x}^1=\omega^1,\quad \bar{x}^2=\omega^2,\quad \ldots,\quad \bar{x}^r=\omega^r,\quad \bar{x}^{r+1}=x^{r+1},\quad \ldots,\quad \bar{x}^n=x^n.$$

La forme Ω se transformera alors en une forme $\bar{\Omega}$, qui sera divisible par chacun des facteurs $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^r$. On en conclut d'après le corollaire précédent, que chacun de monômes de cette forme contiendra toutes les variables $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^r$. On peut donc écrire

$$\bar{\Omega}=[\bar{\Phi}\bar{x}^1\bar{x}^2\ldots\bar{x}^r],$$

où $\bar{\Phi}$ est une forme extérieure de degré $p-r$. Si l'on revient aux variables $x^\varkappa$, on aura

$$\Omega=[\Phi\omega^1\omega^2\ldots\omega^r],$$

ce qui établit le théorème.

Remarque. Il résulte, du théorème que nous avons démontré, que le nombre de diviseurs linéaires indépendants d'une forme extérieure ne peut pas surpasser son degré.

Corollaire. *Toute forme extérieure peut être représentée par un produit $[\omega^1\omega^2\ldots\omega^h\Phi]$ de formes linéaires indépendantes et d'une forme Φ n'ayant pas de diviseurs linéaires.*

Théorème 7. *Pour qu'une forme extérieure Ω de degré r puisse être représentée par un produit de r facteurs linéaires, il faut et il suffit que son rang soit égal à son degré.*

Supposons, en effet, que l'on ait $\Omega=[\omega^1\omega^2\ldots\omega^r]$. Si l'on se sert de la substitution (22), on obtient $\bar{\Omega}=[\bar{x}^1\bar{x}^2\ldots\bar{x}^r]$; la forme Ω est donc bien de rang r. Inversement, admettons que la forme Ω soit de rang r; on peut donc l'écrire, en changeant au besoin les variables, sous la forme du produit de r variables $\Omega=[x^1x^2\ldots x^r]$ (nº 14, Corollaire).

Une forme extérieure égale à un produit de facteurs linéaires est dite *forme simple.*

Pour trouver les diviseurs linéaires d'une forme extérieure Ω, il faut, d'après le Théorème 4, annuler tous les coefficients du produit $[\Omega\omega]$, où ω est une forme linéaire $\omega=a_\varrho x^\varrho$. On obtient ainsi un système d'équations linéaires et homogènes à inconnues a_ϱ. Si ce système admet r solutions linéairement distinctes, la forme Ω admet, d'après le Théorème 5, r diviseurs linéaires indépendants.

17. Applications. Nous allons appliquer les théorèmes démontrés au numéro précédent à quelques cas particuliers.

1º Considérons d'abord une forme extérieure quadratique non nulle à n variables $\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$. Pour qu'elle soit égale au produit de deux facteurs linéaires, il faut et il suffit, d'après le Théorème 6, que son rang et, par suite, celui de son système associé

$$(23)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}=0 \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n),$$

soit égal à deux (nº 14). La forme Ω étant par hypothèse non nulle, l'un au moins de ses coefficients est différent de zéro; supposons que ce soit $a_{\varkappa\lambda}$. Les deux équations

$$(24)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x^\varkappa}=a_{\varkappa\varrho}x^\varrho=0,\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x^\lambda}=a_{\lambda\varrho}x^\varrho=0,$$

faisant partie du système (23), sont donc indépendantes, la première contenant la variable x^λ qui ne figure pas dans l'autre et la deuxième contenant la variable $x^\varkappa$ qui ne figure pas dans la première; par conséquent, toutes les autres équations de ce système doivent être des conséquences des équations (24) pour que le rang du système soit égal à deux. Si l'on résout les équations (24) par rapport aux variables $x^\varkappa$ et x^λ, on trouve

$$x^\varkappa=-\frac{1}{a_{\lambda\varkappa}}\sum_{\nu\neq\varkappa,\lambda}a_{\lambda\nu}x^\nu,\qquad x^\lambda=-\frac{1}{a_{\varkappa\lambda}}\sum_{\nu\neq\varkappa,\lambda}a_{\varkappa\nu}x^\nu.$$

En portant ces expressions dans l'une quelconque des équations (23)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu}=a_{\mu1}x^1+\ldots+a_{\mu\varkappa}x^\varkappa+\ldots+a_{\mu\lambda}x^\lambda+\ldots+a_{\mu n}x^n=0,$$

on obtient

$$(a_{\varkappa\lambda}a_{\mu\nu}+a_{\lambda\mu}a_{\varkappa\nu}+a_{\mu\varkappa}a_{\lambda\nu})x^\nu=0.$$

Cette équation devant être une identité, on a les conditions

$$(25)\qquad a_{\varkappa\lambda}a_{\mu\nu}+a_{\lambda\mu}a_{\varkappa\nu}+a_{\mu\varkappa}a_{\lambda\nu}=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n).$$

Pour les obtenir, on a supposé $a_{\varkappa\lambda}\neq 0$. Mais, comme les relations (25) restent vraies, si l'on permute arbitrairement les indices $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, on peut les obtenir en remplaçant les indices $\varkappa, \lambda$ par une autre paire μ, ν telle qu'il soit $a_{\mu\nu}\neq 0$. Les relations (24) doivent donc être vérifiées pour toutes les valeurs des indices. Elles expriment les conditions nécessaires pour que la forme extérieure Ω soit égale à un produit de deux facteurs linéaires. Elles sont encore suffisantes. En effet, supposons les satisfaites et le coefficient $a_{\varkappa\lambda}$ différent de zéro; le raisonnement fait plus haut nous a montré que ces relations suffisent pour que le rang du système (23) soit égal à deux. Nous avons ainsi démontré le suivant:

THÉORÈME 8. *Pour que la forme quadratique extérieure* $\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^{\varkappa}x^{\lambda}]$ *soit égale au produit de deux facteurs linéaires, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient les relations* (25) *pour toutes les valeurs des indices.*

Remarque 1. Si le nombre de variables est égal à trois, les relations (25) sont identiquement satisfaites; toute forme quadratique extérieure à trois variables est donc égale au produit de deux facteurs linéaires. Si le nombre de variables est égal à quatre, les relations (25) se réduisent à une seule

$$a_{12}a_{34}+a_{43}a_{12}+a_{14}a_{23}=0.$$

Remarque 2. Si les relations (25) sont satisfaites, il existe deux formes linéaires $p_{\varkappa}x^{\varkappa}$ et $q_{\lambda}x^{\lambda}$ telle qu'il soit $\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^{\varkappa}x^{\lambda}]=[p_{\varkappa}x^{\varkappa}\cdot q_{\lambda}x^{\lambda}]$, d'où il résulte qu'il doit être $a_{\varkappa\lambda}=p_{\varkappa}q_{\varkappa}-p_{\lambda}q_{\lambda}$. Le tenseur covariant antisymétrique $\{a_{\varkappa\lambda}\}$ dont les composantes peuvent s'exprimer de cette façon par celles de deux vecteurs $\{p_{\varkappa}\}$ et $\{q_{\varkappa}\}$ s'appelle, comme on sait, *bivecteur simple*. Le dernier théorème peut donc être énoncé de la façon suivante:

THÉORÈME 8'. *Pour que le tenseur covariant antisymétrique* $\{a_{\varkappa\lambda}\}$ *soit un bivecteur simple, il faut et il suffit que ses composantes* $a_{\lambda\varkappa}$ *vérifient les relations* (25).

2° Soit Ω une forme extérieure de degré $n-1$ à n variables x^{α}. Pour trouver ses diviseurs linéaires il faut développer le produit $[\Omega\omega]$, où $\omega=a_{\varrho}x^{\varrho}$. On trouve $[\Omega\omega]=A[x^1x^2\ldots x^n]$, A étant une expression linéaire par rapport aux coefficients a_{ϱ}. En l'égalant à zéro on obtient une équation linéaire et homogène à n inconnues. Il existe donc $n-1$ diviseurs linéaires indépendants de la forme Ω et, par suite, celle-ci peut être représentée de la façon suivante: $\Omega=[\omega^1\omega^2\ldots\omega^{n-1}]$, où $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}$ sont des formes indépendantes. Ce résultat permet d'énoncer le

THÉORÈME 9. *Toute forme extérieure de degré* $n-1$ *à* n *variables est réductible à la forme canonique* $[x^1x^2\ldots x^{n-1}]$.

§ 4. Formes quadratiques extérieures

18. Rang d'une forme quadratique extérieure. Nous allons appliquer les notions et les théorèmes trouvés dans les numéraux précédents aux formes quadratiques extérieures qui jouent le rôle le plus important dans plusieurs théories. Nous démontrerons en premier lieu le suivant

THÉORÈME 1. *Le rang d'une forme quadratique extérieure est un nombre pair.*

La démonstration est très simple. Soit, en effet, $\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^{\varkappa}x^{\lambda}]$ une forme quadratique extérieure à n variables. Son système associé se compose des équations $a_{\varkappa\lambda}x^{\lambda}=0$ (nº 14); le tableau des coefficients de ce système

$$\left\|\begin{matrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|$$

étant symétrique gauche, son rang, et par suite, celui de la forme Ω est un nombre pair.

Dans la suite, en parlant d'une forme quadratique extérieure, nous admettrons toujours, sauf avis contraire, qu'elle soit régulière (nº 14). En d'autres termes, nous supposerons que le nombre de variables, au moyen desquelles la forme est exprimée, soit égal à son rang; ce nombre étant pair d'après le théorème précédent, nous poserons $n=2r$. La convention adoptée ici entraîne l'inégalité $|a_{\varkappa\lambda}|\neq 0$.

19. Vecteurs en involution. Considérons deux vecteurs arbitraires $V_1=\{v_1^{\varkappa}\}$ et $V_2=\{v_2^{\varkappa}\}$ de l'espace affine A_n. La valeur de la forme $\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^{\varkappa}x^{\lambda}]$, pour la suite V_1, V_2, est donnée par la formule

$$\Omega[V_1, V_2]=a_{\varkappa\lambda}v_1^{\varkappa}v_2^{\lambda}$$

(voir nº 11). On voit immédiatement que cette quantité jouit des propriétés suivantes:

$$\Omega[V_1,V_2]+\Omega[V_2,V_1]=0, \qquad \Omega[aV_1,V_2]=a\Omega[V_1,V_2],$$
$$\Omega[V_1,(V_2+V_3)]=\Omega[V_1,V_2]+\Omega[V_1,V_3],$$

où a est un nombre arbitraire, V_1, V_2, V_3 étant trois vecteurs quelconques. Si l'on a $\Omega[V_1, V_2]=0$, on dit que les vecteurs V_1 et V_2 sont *en involution* relativement à la forme Ω. Cette relation est invariante pour le changement de coordonnées (p. 18).

Soit E_m un élément plan de l'espace A_n déterminé par m vecteurs indépendants issus de l'origine O du repère R_n auquel est rapporté l'espace A_n. Si un vecteur est en involution avec tous les vecteurs de l'élément E_m, nous dirons qu'il est en involution avec cet élément.

Nous appellons *élément polaire* de l'élément plan E_m, et le désignons par $(E_m)^*$, un élément plan, ayant l'origine des coordonnées O pour point d'appui, s'il jouit des deux propriétés suivantes:

1° Chaque vecteur de l'élément $(E_m)^*$ est en involution avec E_m.

2° Si un vecteur issu de l'origine O est en involution avec E_m, il appartient à $(E_m)^*$.

THÉORÈME 2. *L'élément polaire de l'élément plan E_m est à $n-m$ dimensions.*

Pour démontrer ce théorème, on peut supposer que les vecteurs V_i $(i=1,2,\dots,m)$, qui déterminent l'élément E_m, soient identiques avec les vecteurs X_i du repère R_n (n° 2); on aura donc $V_i=\{\delta_i^\alpha\}$. Par définition, l'élément polaire de E_m est déterminé par tous les vecteurs qui vérifient les équations

$$\Omega[V_i,X]=0 \qquad (i=1,2,\dots,m),$$

où $X=\{x^\varkappa\}$ est le vecteur inconnu. Si l'on développe ces équations, et que l'on y porte les valeurs des composantes du vecteur V_i, on obtient le système d'équations suivant

$$a_{i\sigma}x^\sigma=0 \qquad (i=1,2,\dots,m).$$

Mais le déterminant $|a_{\varkappa\lambda}|$ étant par hypothèse différent de zéro (voir la fin du n° 18), le rang du tableau des coefficients de ce système est égal à m, et, par suite, il admet $n-m$ solutions linéairement indépendantes.

20. Forme canonique. Nous allons démontrer un théorème important.

THÉORÈME 3. *Toute forme quadratique extérieure de rang $n=2r$ est réductible à la forme canonique*

$$\Omega=\sum_{i=1}^{r}[x^i x^{r+i}]. \tag{1}$$

Ce théorème étant évidemment vrai pour $r=1$, il nous suffit de montrer que, s'il est admis pour $r=s-1$, il est aussi vrai pour $r=s$. Considérons une forme régulière $\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$ à $n=2s$ variables, et choisissons dans l'espace affine A_{2s} deux vecteurs V_1, V_2 tels qu'il soit $\Omega[V_1,V_2]=1$; cela est évidemment possible d'une infinité de manières. Choisissons maintenant le repère R_{2s} de l'espace affine A_{2s} de manière qu'on ait: $X_s=V_1$, $X_{2s}=V_2$ (voir n° 2). L'élément polaire de l'élément plan E_2, déterminé par les vecteurs V_1 et V_2, est à $2s-2$ dimensions (Théorème 2). Les deux éléments plans E_2 et $(E_2)^*$ n'ont aucun vecteur non nul commun. En effet, si V était un vecteur non nul commun à ces deux éléments plans, il devrait être $V=\alpha^1V_1+\alpha^2V_2$, et $\Omega[V_1,V]=\Omega[V_2,V]=0$; en portant l'expression de V dans les deux dernières relations, on aurait $\alpha^2\Omega[V_1,V_2]=\alpha^1\Omega[V_2,V_1]=0$, d'où $\alpha^1=\alpha^2=0$, contrairement à l'hypothèse que le vecteur V est non nul. On en conclut que l'élément polaire $(E_2)^*$ est déterminé par $2s-2$ vecteurs indépendants entre eux et des vecteurs V_1 et V_2. On peut donc admettre qu'il est déterminé par les $2s-2$ vecteurs X_α $(\alpha\neq s,2s)$ du repère R_n. Les vecteurs de R_n doivent donc vérifier les relations

$$\Omega[X_s,X_\alpha]=0,\qquad \Omega[X_{2s},X_\alpha]=0 \qquad (\alpha\neq s,2s).$$

Si l'on développe ces relations et si l'on tient compte de l'égalité $\Omega[X_s,X_{2s}]=1$, on trouve les conditions

$$a_{s2s}=1,\qquad a_{\alpha s}=0,\qquad a_{\alpha 2s}=0 \qquad (\alpha\neq s,2s).$$

La forme Ω peut donc être écrite de la manière

$$\Omega=\frac{1}{2}a_{\varrho'\sigma'}[x^{\varrho'}x^{\sigma'}]+[x^s x^{2s}],$$

où les indices ϱ',σ' parcourent les valeurs $1,2,\dots,2s-2$. Le rang de la forme $\frac{1}{2}a_{\varrho'\sigma'}[x^{\varrho'},x^{\sigma'}]$, qui dépend de $2s-2$ variables, doit être égal à $2s-2$, car, autrement, celui de la forme Ω serait, contrairement à l'hypothèse, plus petit que $2s$. On peut donc choisir les variables $x^{\varrho'}$ $(\varrho'=1,2,\dots,2s-2)$ de manière qu'il soit

$$\frac{1}{2}a_{\varrho'\sigma'}[x^{\varrho'}x^{\sigma'}]=\sum_{i=1}^{s-1}[x^i x^{s+i}];$$

en portant cette expression dans la dernière formule on obtient

$$\Omega=\sum_{j=1}^{s}[x^j x^{s+j}],$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. La formule canonique d'une forme quadratique extérieure de rang $2r$ peut aussi s'écrire de la façon suivante:

$$\Omega=\frac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda] \qquad (\varkappa,\lambda=1,2,\dots,2r), \tag{2}$$

où les coefficients $I_{\varkappa\lambda}$ sont assujettis aux relations

$$(3)\qquad I_{\varkappa\lambda}+I_{\lambda\varkappa}=0,\qquad I_{\varkappa\lambda}=\begin{cases}1 & \text{pour } \lambda-\varkappa=r,\\ 0 & \text{pour } |\lambda-\varkappa|\neq r.\end{cases}$$

Ce mode d'écrire la forme canonique est plus commode dans plusieurs raisonnements.

Il résulte du Théorème 3 que le seul invariant d'une forme quadratique extérieure est son rang — un nombre naturel pair (invariant arithmétique) — deux formes quadratiques extérieures de même rang pouvant être transformées l'une dans l'autre par une substitution linéaire portant sur les variables.

On peut remarquer qu'il existe une analogie entre les formes quadratiques extérieures et les formes quadratiques ordinaires. Notons, en premier lieu, que le nombre minimum des variables, par lesquelles on peut exprimer une forme quadratique, est, pour les deux classes de formes, égal au rang du tableau de ses coefficients; de plus, chaque forme quadratique, extérieure ou ordinaire, peut être ramenée à une forme canonique. Néanmois, il faut remarquer qu'il y a aussi une différence entre les deux classe de formes: toutes les formes quadratiques extérieures de même rang sont réductibles à une même forme canonique, tandis que deux formes quadratiques ordinaires à un même nombre minimum de variables ne peuvent être, en général, réduits à une même forme canonique, si l'on reste dans le domaine réel. Ceci résulte du fait qu'une forme quadratique extérieure a un seul invariant arithmétique, tandis que la forme ordinaire en a deux d'après le théorème de Sylvester.

21. Puissances d'une forme quadratique extérieure. Supposons qu'une forme quadratique extérieure Ω de rang $n=2r$ soit réduite à la forme canonique (1), et posons $\Pi_i=[x^ix^{r+i}]$ $(i=1,2,\dots,r)$. Comme on a

$$[\Pi_i^2]=0,\qquad [\Pi_i\Pi_j]=[\Pi_j\Pi_i],$$

on obtient

$$[\Omega^2]=\sum_{i,j=1}^{r}[\Pi_i\Pi_j].$$

On voit, de même, que

$$[\Omega^3]=\sum_{h,i,j=1}^{r}[\Pi_h\Pi_i\Pi_j],$$

et, d'une manière générale,

$$[\Omega^s]=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_s=1}^{r}[\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\dots\Pi_{i_s}],$$

car le produit des monômes pairs Π_i est indépendant de leur ordre. La dernière formule peut encore être écrite de la façon suivante:

$$(4)\qquad [\Omega^s]=s!\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_s)}[\Pi_{i_1}\Pi_{i_2}\dots\Pi_{i_s}],$$

le symbole $\sum\limits_{(i_1,i_2,\dots,i_s)}$ désignant la somme étendue à toutes les combinaisons s à s des nombres $1,2,\dots,r$.

La formule (4) donne, en particulier,

$$[\Omega^r]=r![\Pi_1\Pi_2\dots\Pi_r],\qquad [\Omega^{r+1}]=0.$$

Nous pouvons donc énoncer le suivant

Théorème 4. *Le rang d'une forme quadratique extérieure est égal au double de l'exposant de la plus grande de ses puissances qui ne s'annulent pas.*

Ce théorème fournit un critère qui permet de reconnaître le rang d'une forme quadratique extérieure; ce critère est pratiquement plus commode que le critère général qui découle du Théorème 2 (nº 14).

Exemple. Considérons la forme quadratique à quatre variables

$$\Omega=a_{12}[x^1x^2]+a_{13}[x^1x^3]+a_{14}[x^1x^4]+a_{23}[x^2x^3]+a_{24}[x^2x^4]+a_{34}[x^3x^4].$$

On a

$$[\Omega^2]=2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})[x^1x^2x^3x^4],\qquad [\Omega^3]=0.$$

On voit donc que la forme Ω est de rang quatre, si l'expression $a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}s_{23}$ est différente de zéro et de rang deux si cette expression est égale à zéro, les coefficients de la forme n'étant pas tous nuls.

22. Agrégats de Pfaff. Soit donnée la forme quadratique extérieure à n variables et de rang arbitraire

$$(5)\qquad \Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda].$$

On a

$$[\Omega^h]=\frac{1}{2^h}a_{\varrho_1\varrho_2}a_{\varrho_3\varrho_4}\dots a_{\varrho_{2h-1}\varrho_{2h}}[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2h}}],$$

ou

$$[\Omega^h]=\frac{1}{2^h}a_{[\varrho_1\varrho_2}\dots a_{\varrho_{2h-1}\varrho_{2h}]}[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2h}}].$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$(6)\qquad (\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_{2h})=\frac{(2h)!}{2^hh!}a_{[\varrho_1\varrho_2}\dots a_{\varrho_{2h-1}\varrho_{2h}]}.$$

Cette expression s'appelle *agrégat de Pfaff* [5]) d'ordre $2h$ de la matrice symétrique gauche

$$(7)\qquad \left\|\begin{matrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{matrix}\right\|;$$

nous dirons aussi qu'elle est agrégat de Pfaff de la forme Ω. Comme le montre la formule (6), le carré de l'agrégat $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2h})$ est égal, au facteur numérique près, au déterminant composé des éléments de la matrice (7) qui se trouvent dans les lignes et dans les colonnes aux numéros $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2h}$ (mineur principal d'ordre $2h$ de la matrice). En particulier, si le nombre des variables est pair: $n=2r$, le carré de l'agrégat $(1, 2, \dots, 2r)$ d'ordre $2r$ est égal, au facteur numérique près, au déterminant de la matrice (7). L'agrégat de Pfaff est une quantité antisymétrique en tous les indices, donc il s'annule, si deux indices sont égaux.

Si l'on tient compte de la formule (6), la $h^{\text{ième}}$ puissance de la forme Ω s'écrit

$$[\Omega^h] = \frac{h!}{(2h)!}(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2h})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2h}}],$$

ou

$$(8)\qquad [\Omega^h] = h! \sum_{(\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{2h})} (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2h})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2h}}],$$

le symbole $\sum\limits_{(\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{2h})}$ désignant la somme étendue à toutes les combinaisons $2h$ à $2h$ des éléments de la suite $1, 2, \dots, n$. Si l'on suppose la forme Ω de rang $2r$ et le nombre de variables $n=2r$, on aura

$$[\Omega^r] = \frac{r!}{(2r)!}(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2r})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2r}}].$$

Si l'on fait un changement de variables par la substitution (1) du n° 1, la forme Ω se transformera en une forme $\overline{\Omega}$, et on aura

$$[\overline{\Omega}^r] = [\Omega^r]$$

ou

$$\overline{(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2r})}[\bar{x}^{\varrho_1}\bar{x}^{\varrho_2}\dots\bar{x}^{\varrho_{2r}}] = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2r})[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2r}}],$$

$\overline{(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2r})}$ désignant l'agrégat de Pfaff d'ordre $2r$ de la forme $\overline{\Omega}$. D'autre part, on a

$$[\bar{x}^{\varrho_1}\bar{x}^{\varrho_2}\dots\bar{x}^{\varrho_{2r}}] = \Delta^{-1}[x^{\varrho_1}x^{\varrho_2}\dots x^{\varrho_{2r}}],$$

[5]) E. v. Weber [23], p. 21.

où Δ est le déterminant de la substitution. En rapprochant les deux dernières égalités, on trouve

$$\overline{(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{1r})} = \Delta(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2r}).$$

THÉORÈME 5. *Si une forme quadratique extérieure est à $n=2r$ variables, son agrégat de Pfaff d'ordre $n=2r$ est une densité n-vectorielle covariante de poids $+1$; nous la désignerons par $P_{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{2r}}$.*

Application. La théorie des formes quadratiques extérieures permet de démontrer, d'une manière très simple, quelques propriétés des matrices quadratiques symétriques gauches.

On a déjà remarqué que les carrés des agrégats de Pfaff d'ordre $2h$ de la forme Ω sont égaux aux mineurs principaux de la matrice (5). Si la forme Ω est de rang $2h$, on a, d'après le Théorème 4, $[\Omega^h] \neq 0$ et $[\Omega^{h+1}] = 0$, d'où l'on conclut, en tenant compte de la formule (6), que tous les mineurs principaux d'ordre $2h+2$ de la matrice (5) sont nuls.

D'autre part, on sait (n° 14, Remarque) que le rang de la forme Ω est égal à celui de la matrice (5); si donc la forme Ω est de rang $2h$, tous ses mineurs, d'ordres plus grands que $2h$ et, en particulier, ceux d'ordres $2h+1$ et $2h+2$, sont nuls. En comparant ces deux résultats, on obtient les deux théorèmes suivants dus à Frobenius [6]):

THÉORÈME 6. *Si tous les mineurs principaux d'ordre $2h+2$ d'une matrice symétrique gauche sont nuls, il en est de même de tous ses mineurs d'ordres $2h+1$ et $2h+2$.*

THÉORÈME 7. *Si une matrice symétrique gauche est de rang $2h$, l'un au moins de ses mineurs principaux d'ordre $2h$ est différent de zéro.*

23. Divisibilité par les formes quadratiques extérieures. Le problème de divisibilité d'une forme extérieure par une forme quadratique ne présente de simplicité telle que celui de divisibilité par les formes linéaires. Nous nous bornerons ici à quelques indications en démontrant d'abord le suivant

THÉORÈME 8. *Si le produit d'une forme quadratique régulière Ω à $n=2r$ variables $x^\varkappa$ par une autre forme quadratique extérieure Φ à mêmes variables est nul, et si $2r>4$, la forme Φ est identiquement nulle.*

La forme Ω étant régulière, son rang est égal au nombre de variables; on peut donc choisir ces variables de manière qu'il soit (n° 20)

$$\Omega = \frac{1}{2} I_{\mu\nu}[x^\mu x^\nu].$$

Posons encore

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda];$$

[6]) G. Frobenius [9], p. 242-245.

on a, par hypothèse,

$$a_{\varkappa\lambda} I_{\mu\nu} [x^\varkappa x^\lambda x^\mu x^\nu] = 0,$$

ou (cf. nº 10)

$$a_{[\varkappa\lambda} I_{\mu\nu]} [x^\varkappa x^\lambda x^\mu x^\nu] = 0,$$

ce qui entraîne les relations

$$a_{\varkappa\lambda} I_{\mu\nu} + a_{\varkappa\mu} I_{\nu\lambda} + a_{\varkappa\nu} I_{\lambda\mu} + a_{\lambda\mu} I_{\varkappa\nu} + a_{\lambda\nu} I_{\mu\varkappa} + a_{\mu\nu} I_{\varkappa\lambda} = 0 \tag{9}$$

qui doivent être vérifiées pour toutes les valeurs des indices.

Rappelons que les coefficients $I_{\mu\nu}$ sont antisymétriques, et déterminés par les formules

$$I_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \nu - \mu = r, \\ 0 & \text{pour} \quad |\nu - \mu| \neq r \end{cases}$$

(nº 20); posons dans la relation (9)

$$\varkappa = h, \quad \lambda = i, \quad \mu = j, \quad \nu = r + j\,^{7});$$

on trouve ainsi $a_{hi} = 0$. En posant de même

$$\varkappa = h, \quad \lambda = r + i, \quad \mu = j, \quad \nu = r + j,$$

on obtient $a_{h,r+i} = 0$ si $h \neq i$; si $h = i$, on déduit, de la relation (9), l'égalité

$$a_{h,r+h} a_{j,r+j} = 0.$$

Les valeurs des indices h, j pouvant être prises arbitrairement parmi les nombres $1, 2, \ldots, r$, on obtient $a_{h,r+h} = 0$. Si l'on pose enfin

$$\varkappa = r + h, \quad \lambda = r + i, \quad \mu = j, \quad \nu = r + j,$$

on déduit, de la relation (9), $a_{r+h,r+i} = 0$. On voit ainsi que tous les coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ sont nuls, c. q. f. d.

Remarque. Le raisonnement précédent reste valable, si l'on peut choisir pour h, i, j trois valeurs différentes parmi les nombres $1, 2, \ldots, r$, autrement dit, si $r \geqslant 3$. Si $2r = 4$, le théorème tombe en défaut; dans ce cas il existe des formes Φ non nulles satisfaisant à la relation $[\Omega\Phi] = 0$. Si l'on pose par exemple $\Omega = [x^1 x^3] + [x^2 x^4]$ et $\Phi = [x^1 x^3] - [x^2 x^4]$, on aura évidemment $[\Omega\Phi] = 0$.

Supposons, par exemple, $2r = 6$. Dans ce cas, l'équation $[\Omega\Phi] = 0$ équivaut à un système de $\binom{6}{4}$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $\binom{6}{2}$ coefficients $a_{\varkappa\lambda}$ de la forme Φ. Comme on a $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$,

[7]) Nous convenons ici que les indices latins parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, r$.

on voit que le nombre des équations du système et le nombre des inconnues sont ici égaux; il résulte du théorème démontré que le déterminant de ce système est différent de zéro. Imaginons maintenant une forme arbitraire Ψ du quatrième degré à six variables $x^\varkappa$. L'équation

$$[\Omega\Phi] = \Psi,$$

où Φ est une forme inconnue, étant équivalente au système de $\binom{6}{4}$ équations à $\binom{6}{2}$ inconnues $a_{\varkappa\lambda}$ de déterminant différent de zéro, on en conclut qu'elle a une solution bien déterminée Φ. On voit ainsi que toute forme extérieure du quatrième degré à six variables est divisible par une forme quadratique régulière à mêmes variables.

Ces résultats peuvent être généralisés; on peut démontrer d'une manière analogue la proposition suivante:

Théorème 9. *Si le produit d'une forme quadratique régulière à $2r$ variables par une forme extérieure Φ de degré p et à mêmes variables est nul, et, si $r \geqslant p+1$, la forme Φ est identiquement nulle.*

On en conclut que toute forme extérieure de degré $p+2$ à $2p+2$ variables est divisible par une forme quadratique régulière à mêmes variables, et que le résultat de la division est bien déterminé.

Pour les démonstrations nous renvoyons le lecteur à une Note intéressante de Th.-H. Lepage[8]); on y trouvera aussi d'autres théorèmes concernant la divisibilité par une forme quadratique et par ses puissances.

§ 5. Formes-densités. Formes adjointes

24. Formes-densités. A côté des formes extérieures que nous avons considérées jusqu'ici, il y a lieu de faire intervenir des formes auxquelles nous donnerons le nom de *formes-densités*. Une forme-densité de *degré* p et de *poids* r s'écrit

$$\Lambda^{(r)} = \frac{1}{p!} \overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} [x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \ldots x^{\varkappa_p}], \tag{1}$$

où les coefficients $\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ sont antisymétriques. Si l'on effectue sur les variables $x^\varkappa$ la substitution

$$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \bar{x}^\varrho, \tag{2}$$

le déterminant Δ différent de zéro, la forme transformée sera, par définition,

$$\bar{\Lambda}^{(r)} = \frac{1}{p!} \Delta^{-r} \overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p} [P^{\varkappa_1}_{\varrho_1} \bar{x}^{\varrho_1} P^{\varkappa_2}_{\varrho_2} \bar{x}^{\varrho_2} \ldots P^{\varkappa_p}_{\varrho_p} \bar{x}^{\varrho_p}], \tag{3}$$

[8]) Th.-H. Lepage [12], voir aussi G. Papy [15].

où l'on doit appliquer au produit entre crochets les règles du produit extérieur; la relation entre les formes $\Lambda^{(r)}$ et $\overline{\Lambda}^{(r)}$ s'exprime, bien entendu, par l'égalité $\Lambda^{(r)}=\overline{\Lambda}^{(r)}$. D'après cette définition, les formes-densités de poids 0 sont identiques avec les formes extérieures considérées aux numéros précédents.

Nous n'utiliserons dans la suite que les densités dont le poids est un nombre entier.

En développant le produit indiqué dans la dernière formule, on obtient

$$\overline{\Lambda}^{(r)}=\frac{1}{p!}\overset{(r)}{\overline{\mathfrak{a}}}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}[\overline{x}^{\varrho_1}\overline{x}^{\varrho_2}\ldots\overline{x}^{\varrho_p}],$$

où l'on a posé

$$\overset{(r)}{\overline{\mathfrak{a}}}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}=\Delta^r P^{\varkappa_1}_{\varrho_1}P^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\ldots P^{\varkappa_p}_{\varrho_p}\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}.$$

On voit ainsi que les coefficients de la forme (1) se transforment comme les composantes d'un p-vecteur-densité de poids r[9]).

Nous désignerons les formes-densités par les grandes lettres de l'alphabet grec, affectées en haut d'indices entre parenthèses indiquant leurs poids, et, au besoin, d'indices en bas, indiquant leurs degrés. Les formes-densités linéaires de poids r seront désignées par $\varphi^{(r)}$.

Les définitions de la somme et du produit des formes-densités sont les mêmes que pour les formes extérieures; néanmoins, il faut remarquer que la notion de somme n'a de sens intrinsèque, indépendant du choix des variables, que si tous les termes de la somme sont de même degré et de même poids. Remarquons aussi que le produit des formes-densités est une forme dont le poids est égal à la somme des poids de tous les facteurs.

Il est enfin facile de voir que les notions de rang, de valeur d'une forme extérieure, et toutes les autres notions qui s'y rattachent peuvent être étendues aux formes-densités; on peut encore ajouter que les théorèmes démontrés aux pages précédentes restent valables, avec de convenables changements, si on les applique aux formes-densités.

Considérons, par exemple, une forme-densité de poids r et de degré n; elle peut s'écrire

$$\Lambda^{(r)}=a[x^1x^2\ldots x^n].$$

Si l'on fait le changement de variables (2), elle devient

$$\overline{\Lambda}^{(r)}=\Delta^{-r}aP^1_{\varrho_1}P^2_{\varrho_2}\ldots P^n_{\varrho_n}[\overline{x}^{\varrho_1}\overline{x}^{\varrho_2}\ldots\overline{x}^{\varrho_n}],$$

ou

$$\overline{\Lambda}^{(r)}=n!\,\Delta^{-r}aP^1_{[1}P^2_2\ldots P^n_{n]}[\overline{x}^1\overline{x}^2\ldots\overline{x}^n].$$

---

9) Cf. J. A. Schouten and W. v. d. Kulk [20], p. 19.

L'expression $n!P^1_{[1}P^2_2\ldots P^n_{n]}$ étant égale au déterminant Δ (cf. n° 2), la dernière formule se simplifie, et l'on obtient

$$\overline{\Lambda}^{(r)}=\Delta^{-r+1}a[\overline{x}^1\overline{x}^2\ldots\overline{x}^n].$$

On peut donc choisir la substitution (2) de manière qu'il soit

$$\overline{\Lambda}^{(r)}=\pm[\overline{x}^1\overline{x}^2\ldots\overline{x}^n].$$

Envisageons maintenant une forme-densité linéaire $\varphi^{(r)}=\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_\varkappa x^\varkappa$; supposons, par exemple, $\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_1\neq0$, et faisons sur les variables $x^\varkappa$ la substitution

$$\overline{x}^1=k\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_\varrho x^\varrho,\quad \overline{x}^2=x^2,\quad \ldots,\quad \overline{x}^n=x^n.$$

La forme $\varphi^{(r)}$ deviendra

$$\overline{\varphi}^{(r)}=\Delta^{-r}\frac{1}{k}\overline{x}^1,$$

ou, le déterminant Δ de la substitution inverse étant égal à $\dfrac{1}{k\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_1}$,

$$\overline{\varphi}^{(r)}=\frac{1}{k^{r+1}(\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_1)^r}\cdot\overline{x}^1.$$

Si l'on détermine k de manière qu'il soit $k^{r+1}(\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_1)^r=\pm1$, on aura

$$\overline{\varphi}^{(r)}=\pm\overline{x}^1.$$

Considérons finalement la forme-densité quadratique de poids r

$$M^{(r)}=\frac{1}{2}\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda].$$

On sait (Théorème 3 du n° 20) qu'il existe un changement de variables tel que

$$\frac{1}{2}\overset{(r)}{\mathfrak{a}}_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]=\sum_{i=1}^{s}[\overline{x}^i\overline{x}^{s+i}].$$

Il en résulte que ce même changement transforme la forme $M^{(r)}$, envisagée comme une forme-densité, en la suivante:

$$\overline{M}^{(r)}=\Delta^{-r}\sum_{i=1}^{s}[\overline{x}^i\overline{x}^{s+i}].$$

Si l'on y applique une nouvelle transformation

$$\overline{x}^i=k\cdot\overline{\overline{x}}^i,\qquad \overline{x}^{s+i}=\overline{\overline{x}}^{s+i}\qquad (i=1,2,\ldots,s),$$

le déterminant de celle-ci étant égal à k^s, on trouve

$$\overline{\overline{M}}^{(r)} = k^{(r+1)s} \Delta^{-r} \sum_{i=1}^{s} [\overline{\overline{x}}^i \overline{\overline{x}}^{s+i}].$$

En donnant à k une valeur convenable, on obtient finalement

$$\overline{\overline{M}}^{(r)} = \pm \sum_{i=1}^{s} [\overline{\overline{x}}^i \overline{\overline{x}}^{s+i}].$$

En résumant nous pouvons énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *Les formes-densités à n variables, de degré* 1, 2 *et* n, *sont réductibles respectivement aux formes canoniques suivantes*:

$$\varepsilon x^1, \qquad \varepsilon \sum_{i=1}^{s} [x^i x^{s+i}], \qquad \varepsilon [x^1 x^2 \ldots x^n] \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si l'on prend le corps des nombres complexes comme corps de base, on peut ici poser $\varepsilon = +1$.

25. Systèmes dualistiques de variables. Au nº 6, nous avons introduit un système de variables ou d'indéterminées x^α à l'aide desquelles nous avons construit les formes extérieures et les formes-densités. Imaginons maintenant, à côté du système de variables x^α, un second système de n indéterminées que nous désignerons par y_α. Avec ces variables, nous pouvons aussi construire des formes extérieures que nous écrirons

$$\frac{1}{p!} b^{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} [y_{\varkappa_1} y_{\varkappa_2} \ldots y_{\varkappa_p}], \tag{4}$$

où les coefficients $b^{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p}$ sont antisymétriques en tous leurs indices.

Sur la transformation des variables de deux systèmes, nous faisons la convention suivante: si l'on assujettit les variables x^α à la substitution

$$x^\varkappa = P^\varkappa_\varrho \overline{x}^\varrho, \qquad \Delta = |P^\varkappa_\varrho| \neq 0, \tag{5}$$

et que l'on désigne par $Q^\varkappa_\varrho$ les coefficients de la substitution inverse $\overline{x}^\varkappa = Q^\varkappa_\varrho x^\varrho$, les variables $y_\varkappa$ doivent être transformées simultanément par les formules

$$y_\varkappa = Q^\varrho_\varkappa \overline{y}_\varrho. \tag{6}$$

Cette convention peut aussi s'exprimer: la forme bilinéaire $x^\varkappa y_\varkappa$ doit être invariante pour les deux transformations:

$$x^\varkappa y_\varkappa = \overline{x}^\varkappa \overline{y}_\varkappa.$$

Nous appellerons *systèmes dualistiques* les deux systèmes d'indéterminées liés l'un à l'autre comme plus haut; nous dirons aussi que les deux systèmes de formes, contruites respectivement avec les variables $x^\varkappa$ et $y_\varkappa$, sont *dualistiques*.

On voit qu'il y a analogie entre les systèmes de variables dualistiques et les espaces affines dualistiques dont nous avons parlés au nº 2, bien que les variables dont nous nous servons dans la théorie des formes extérieures ne peuvent être interprétées comme les coordonnées d'un point de l'espace affine. On peut aussi ajouter que si, en calculant les valeurs des formes en x^α (nº 11), l'on se sert des vecteurs d'un espace affine A_n, on doit choisir les vecteurs de l'espace dualistique de A_n pour calculer les valeurs des formes en y_α.

En introduisant, dans la formule (4), les variables $\overline{y}_\varkappa$ par la substitution (6), elle devient

$$\frac{1}{p!} \overline{b}^{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_p} [\overline{y}_{\varrho_1} \overline{y}_{\varrho_2} \ldots \overline{y}_{\varrho_p}],$$

où l'on a posé

$$\overline{b}^{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_p} = Q^{\varrho_1}_{\varkappa_1} Q^{\varrho_2}_{\varkappa_2} \ldots Q^{\varrho_p}_{\varkappa_p} b^{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p}.$$

Donc, si l'on convient de considérer les coefficients d'une forme extérieure en x^α comme composantes des p-vecteurs covariants, on doit traiter les coefficients d'une forme en y_α comme composantes d'un p-vecteur contrevariant.

Avec les variables $y_\varkappa$ on peut aussi construire des formes-densités. Remarquons enfin qu'on peut encore imaginer des formes mixtes données simultanément avec les indéterminées x^α et y_α. Donnons, comme exemple, la forme

$$\frac{1}{2 \cdot 3!} c_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\varrho\sigma} [x^\varkappa x^\lambda x^\mu] \cdot [y_\varrho y_\sigma],$$

où les coefficients sont antisymétriques en les indices de bas et de haut, et où le point entre crochets indique la multiplication ordinaire.

26. Les grandeurs E_p, $\overset{+1}{\mathfrak{E}}$, $\overset{-1}{\mathfrak{E}}$ et $\tilde{E}$. Nous rappelons au présent numéro les définitions et les propriétés de quelques grandeurs qui joueront un rôle important dans les recherches qui suivent.

a) Nous désignerons par E_p le tenseur mixte p fois covariant et p fois contrevariant de composantes $E^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p}$ antisymétriques en les indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Nous supposons que, par rapport aux deux repères conjugués, d'ailleurs quelconques, d'un espace affine A_n et de son dualistique B_n, les composantes $E^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p}$ soient égales à $+1\,(-1)$ si les deux permutations $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont composées de mêmes éléments et sont de même (de différente) parité. Dans tous les autres cas, nous poserons $E^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} = 0$. Ces conventions peuvent être exprimées par les égalités

$$E^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} = p!\, \delta^{[\lambda_1}_{\varkappa_1} \delta^{\lambda_2}_{\varkappa_2} \ldots \delta^{\lambda_p]}_{\varkappa_p}. \tag{7}$$

Il est facile de voir que les valeurs des composantes du tenseur $\boldsymbol{E}_p$ restent inaltérées, si l'on introduit dans les espaces affines, qui servent de base, des nouvelles coordonnées à l'aide de la substitution (5). On aura, en effet

$$\bar{E}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}=Q^{\lambda_1}_{\varrho_1}Q^{\lambda_2}_{\varrho_2}\ldots Q^{\lambda_p}_{\varrho_p}P^{\sigma_1}_{\varkappa_1}P^{\sigma_2}_{\varkappa_2}\ldots P^{\sigma_p}_{\varkappa_p}E^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p},$$

ou, en ayant égard aux valeurs des composantes $E^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}$,

$$\bar{E}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}=p\,!\,Q^{\lambda_1}_{\varrho_1}Q^{\lambda_2}_{\varrho_2}\ldots Q^{\lambda_p}_{\varrho_p}P^{[\varrho_1}_{\varkappa_1}P^{\varrho_2}_{\varkappa_2}\ldots P^{\varrho_p]}_{\varkappa_p}.$$

Mais, comme on a $Q^{\lambda}_{\varrho}P^{\varrho}_{\varkappa}=\delta^{\lambda}_{\varkappa}$, cette dernière égalité devient

$$\bar{E}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}=p\,!\,\delta^{[\lambda_1}_{\varkappa_1}\delta^{\lambda_2}_{\varkappa_2}\ldots\delta^{\lambda_p]}_{\varkappa_p},$$

conformément à ce que nous avons dit.

b) Nous désignerons par $\overset{-1}{\mathfrak{E}}=\{\overset{-1}{\mathfrak{E}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\}$, $\overset{+1}{\mathfrak{E}}=\{\overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\}$ deux densités n-vectorielles de poids -1 et $+1$ respectivement, dont la première est covariante et la seconde contrevariante; les valeurs numériques des composantes de $\overset{-1}{\mathfrak{E}}$ et de $\overset{+1}{\mathfrak{E}}$, par rapport à une paire quelconque des repères conjugués des espaces affines dualistiques, sont définies par les formules

$$\overset{-1}{\mathfrak{E}}_{12\ldots n}=1,\qquad \overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{12\ldots n}=1.$$

On peut montrer facilement que les valeurs des composantes restent les mêmes si l'on assujettit les repères à une substitution linéaire, et que l'on a

$$\begin{aligned}&\overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n}\overset{-1}{\mathfrak{E}}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n}=n\,!,\\ (8)\qquad &\overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p\varrho_1\ldots\varrho_{n-p}}\overset{-1}{\mathfrak{E}}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p\varrho_1\ldots\varrho_{n-p}}=p\,!\,E^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}.\end{aligned}$$

c) Supposons que la métrique d'un espace euclidien soit donnée par une forme définie positive $g_{\varkappa\lambda}x^{\varkappa}x^{\lambda}$ (cf. nº 2). Au moyen du tenseur symétrique $g_{\varkappa\lambda}$ on construit une nouvelle grandeur que nous désignerons par

$$\tilde{E}=\{\tilde{E}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\}.$$

Les composantes de cette grandeur sont, par hypothèse, antisymétriques et leurs valeurs numériques sont déterminées par l'égalité

$$\tilde{E}_{12\ldots n}=\sqrt{g}.$$

La loi de transformation des composantes, pour la substitution (5), est donnée par la formule

$$(9)\qquad \bar{\tilde{E}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}=\operatorname{sign}\Delta\cdot P^{\varrho_1}_{\varkappa_1}P^{\varrho_2}_{\varkappa_2}\ldots P^{\varrho_n}_{\varkappa_n}\tilde{E}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n}.$$

On appelle cette grandeur *tenseur de Levi-Civita*[10]) qui l'introduisit le premier, mais il est plus juste, comme l'ont montré Schouten et van Dantzig[11]), de la distinguer par un autre nom; en suivant ces auteurs nous lui donnerons le nom de *W-n-vecteur covariant.*

En montant les indices de bas en haut, on déduit aisément les composantes contrevariantes de $\tilde{E}$

$$\tilde{E}^{12\ldots n}=\frac{1}{\sqrt{g}}.$$

D'une manière générale nous dirons qu'une quantité est un *contrevariant W-p-vecteur*, si ses composantes $\tilde{a}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ se transforment d'après les formules

$$\bar{\tilde{a}}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}=\operatorname{sign}\Delta P^{\varkappa_1}_{\varrho_1}P^{\varkappa_2}_{\varrho_2}\ldots P^{\varkappa_p}_{\varrho_p}\tilde{a}^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p};$$

une quantité défini par un seul nombre $\tilde{a}$ s'appelle *W-scalaire*, si elle se transforme d'après la loi

$$\bar{\tilde{a}}=\operatorname{sign}\Delta\,\tilde{a}.$$

Avec les composantes du W-n-vecteur on peut construire les deux formes

$$\frac{1}{n!}\tilde{E}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_n}],\qquad \frac{1}{n!}\tilde{E}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}[y_{\varkappa_1}y_{\varkappa_2}\ldots y_{\varkappa_n}],$$

pour lesquelles les lois de transformation découlent de la formule (9). La valeur de la première de ces formes pour une suite de n vecteurs contrevariants $\{x^{\varkappa}_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ linéairement indépendants et issus d'un même point, est égale à l'expression $n!\,\tilde{E}_{12\ldots n}x^{[1}_1x^2_2\ldots x^{n]}_n$, ou $n!\sqrt{g}\,x^{[1}_1x^2_2\ldots x^{n]}_n$; elle représente, comme on sait, le volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

27. Formes adjointes. Etant donnée une forme extérieure ou une forme-densité quelconque, on peut lui associer d'une manière intrinsèque une autre forme en variables dualistiques (cf. nº 25) à l'aide d'une des grandeurs considérées dans le numéro précédent; nous l'appellerons *forme adjointe* à la forme donnée.

Nous allons envisager dans le présent numéro les divers modes de définir une forme adjointe.

a) Considérons, par exemple, une forme extérieure de degré p en variables $x^{\varkappa}$

$$\Omega=\frac{1}{p!}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_p}].$$

---

[10]) T. Levi-Civita [13], p. 180.

[11]) J. A. Schouten and D. v. Dantzig [19].

En employant la multiplication contractée, on déduit du p-vecteur covariant $\{a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}\}$ et de la densité n-vectorielle $\{\overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\}$ la densité $(n-p)$-vectorielle contrevariante de poids $+1$ et de degré $n-p$

$$\overset{(+1)}{\mathfrak{a}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}=\frac{1}{p!}\overset{+1}{\mathfrak{E}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}a_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}.$$

Pour abréger adoptons dans la suite la convention suivante: si $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{n-p}$ est une suite d'indices distincts choisis parmi les nombres $1,2,\ldots,n$, nous désignerons par $\bar{\varkappa}_1,\bar{\varkappa}_2,\ldots,\bar{\varkappa}_p$ une suite quelconque d'indices (*suite complémentaire*), telle que la suite $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{n-p},\bar{\varkappa}_1,\bar{\varkappa}_2,\ldots\bar{\varkappa}_p$, soit une permutation paire des éléments $1,2,\ldots,n$. Avec ces notations, la dernière égalité devient

$$\overset{(+1)}{\mathfrak{a}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}=a_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2\ldots\bar{\varkappa}_p}. \tag{10}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler la définition de la grandeur $\{\overset{+1}{\mathfrak{E}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\}$ et de tenir compte de l'hypothèse que les coefficients $a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}$ soient antisymétriques.

La densité $(n-p)$-vectorielle $\{\mathfrak{a}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}\}$ permet de former en variables dualistiques $y_\varkappa$ une forme-densité de poids $+1$ et de degré $n-p$, adjointe à la forme Ω. Nous la désignerons par $(\Omega)^e$; on aura donc

$$(\Omega)^e=\frac{1}{(n-p)!}\overset{(+1)}{\mathfrak{a}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}[y_{\varkappa_1}y_{\varkappa_2}\ldots y_{\varkappa_{n-p}}].$$

Si l'on tient compte de la relation (10), on peut encore écrire

$$(\Omega)^e=\sum_{(\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p})}a_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2\ldots\bar{\varkappa}_p}[y_{\varkappa_1}y_{\varkappa_2}\ldots y_{\varkappa_{n-p}}], \tag{11}$$

le symbole $\sum\limits_{(\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p})}$ désignant la sommation étendue à toutes les combinaisons $n-p$ à $n-p$ des nombres $1,2,\ldots,n$.

D'une manière générale, on peut, à une forme-densité de poids r et de degré p, en adjoindre une autre de poids $r+1$ et de degré $n-p$. Si, par exemple,

$$\Lambda^{(r)}=\frac{1}{p!}\mathfrak{l}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}[x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}\ldots x^{\lambda_p}],$$

on aura

$$(\Lambda^{(r)})^e\sum_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-p}}\overset{(r)}{\mathfrak{l}}_{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_p}[y_{\lambda_1}y_{\lambda_2}\ldots y_{\lambda_{n-p}}].$$

Il est facile de vérifier, à l'aide des formes (7) et (8) du numéro précédent, que la forme $[(\Lambda^{(r)})^e]^e$, adjointe à la forme $(\Lambda^{(r)})^e$, est égale, au signe près, à la forme $\Lambda^{(r)}$

$$[(\Lambda^{(r)})^e]^e=(-1)^{p(n-p)}\Lambda^{(r)}.$$

D'une façon analogue, à une forme-densité de poids r et de degré p, écrite avec les variables y_α, on peut adjoindre à l'aide du n-vecteur $\{\overset{-1}{\mathfrak{E}}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}\}$ une forme-densité de poids $r-1$ et de degré $n-p$.

Exemples. 1° Considérons d'abord la forme linéaire $\omega=a_\varrho x^\varrho$. D'après la formule (10), les coefficients de son adjointe $(\omega)^e$ sont les suivants:

$$\overset{(+1)}{\mathfrak{a}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}}=a_{\bar{\varkappa}};$$

on aura donc

$$(\omega)^e=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i[y_1\ldots y_{i-1}y_{i+1}\ldots y_n].$$

2° Les coefficients de la forme adjointe de

$$\Omega=\frac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}[x^\varkappa x^\lambda]$$

sont données par la formule

$$\overset{(+1)}{\mathfrak{a}}{}^{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-2}}=a_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2},$$

par suite, on trouve

$$(\Omega)^e=\sum_{(\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-2})}a_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2}[y_{\varkappa_1}y_{\varkappa_2}\ldots y_{\varkappa_{n-2}}].$$

Si, en particulier, Ω est réduite à sa forme canonique (n° 20)

$$\Omega=\sum_{i=1}^{r}\Pi_i,$$

où $\Pi_i=[x^ix^{r+i}]$, sa forme-adjointe deviendra

$$(\Omega)^e=(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{i=1}^{r}[\Pi_1\ldots\Pi_{i-1}\Pi_{i+1}\ldots\Pi_r].$$

3° Considérons maintenant une forme extérieure Ω en les variables $x^\varkappa$ de degré $n-2$; sa forme adjointe $(\Omega)^e$ est une forme-densité, en les variables y_α, de poids $+1$ et du deuxième degré. Or, nous avons vu, dans le numéro 24, qu'une telle forme est réductible, par un changement de variables, à

$$(\Omega)^e=\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\Upsilon_i,$$

où $\Upsilon_i=[y_iy_{r+i}]$ et $\varepsilon=\pm1$. Par suite, la forme $(\Omega^e)^e$, adjointe de $(\Omega)^e$, s'écrit comme suit (cf. Exemple 2°)

$$(\Omega^e)^e=\varepsilon(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{i=1}^{r}[\Pi_1\ldots\Pi_{i-1}\Pi_{i+1}\ldots\Pi_r].$$

D'autre part, on a vu ci-dessus (p. 44) que la forme $(\Omega^e)^e$ est égale, au signe près, à la forme Ω. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 2. *Une forme extérieure de degré $n-2$ est réductible, au signe près, à l'expression*

$$\sum_{i=1}^{r}[\Pi_1\ldots\Pi_{i-1}\Pi_{i+1}\ldots\Pi_r]$$

où

$$\Pi_i=[x^i x^{r+i}].$$

4° Si Ω est une forme extérieure de degré n

$$\Omega=a_{12\ldots n}[x^1x^2\ldots x^n],$$

sa forme adjointe est une forme de degré 0, égale au nombre $a_{12\ldots n}$. Inversement, l'adjointe d'une forme de degré 0, $\Phi=a$, est la forme $(\Phi)^e=a[x^1x^2\ldots x^n]$.

b) Admettons maintenant que, dans l'espace euclidien E_n, la métrique soit donnée par une forme définie positive $g_{\varkappa\lambda}x^\varkappa x^\lambda$.

Si l'on se donne la forme extérieure

$$\Omega=\frac{1}{p!}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_p}], \tag{12}$$

ses coefficients sont, comme on sait, composantes covariantes d'un p-vecteur. On obtient les composantes contrevariantes du même p-vecteur en montant les indices au moyen du tenseur fondamental $\{g_{\varkappa\lambda}\}$ d'après la formule

$$a^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}=g^{\varrho_1\varkappa_1}g^{\varrho_2\varkappa_2}\ldots g^{\varrho_p\varkappa_p}a_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_p}.$$

En appliquant la multiplication contractée au W-n-vecteur $\tilde{E}$ défini au n° 26 et au p-vecteur $\{a^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}\}$, on obtient les quantités

$$\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}=\frac{1}{p!}\tilde{E}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p}a^{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_p} \tag{13}$$

qui, d'après la façon dont elles ont été obtenus, sont les composantes d'un W-$(n-p)$-vecteur[12]). Si l'on fait sur les variables x^α la substitution

$$x^\varkappa=P^\varkappa_\varrho x^\varrho$$

de déterminant Δ différent de zéro, les composantes $\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}$ se changeront d'après les formules

$$\bar{\tilde{a}}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}=\frac{\Delta}{|\Delta|}P^{\varrho_1}_{\varkappa_1}P^{\varrho_2}_{\varkappa_2}\ldots P^{\varrho_{n-p}}_{\varkappa_{n-p}}a_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-p}}.$$

[12]) J. A. Schouten and D. v. Dantzig [19].

En se reportant à la définition de la grandeur $\tilde{E}$ (n° 26), on reconnait facilement que la formule (13) peut être remplacée par l'égalité plus simple

$$\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}=\sqrt{g}\,a^{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2\ldots\bar{\varkappa}_p}, \tag{14}$$

où $\bar{\varkappa}_1,\bar{\varkappa}_2,\ldots,\bar{\varkappa}_p$ est une suite complémentaire, d'ailleurs quelconque, de la suite $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{n-p}$ (voir p. 44).

Avec les composantes $\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}$, on peut former une nouvelle adjointe de la forme Ω; en la désignant par $\tilde{\Omega}$, on aura[13])

$$\tilde{\Omega}=\frac{1}{(n-p)!}\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p}}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_{n-p}}], \tag{15}$$

ou, en faisant usage de la formule (14),

$$\tilde{\Omega}=\sqrt{g}\sum_{(\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-p})}a^{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2\ldots\bar{\varkappa}_p}[x^{\varkappa_1}x^{\varkappa_2}\ldots x^{\varkappa_{n-p}}]. \tag{15'}$$

La loi de transformation de $\tilde{\Omega}$, un peu différente de celle de la forme Ω, découle immédiatement de la formule (13); nous donnerons à $\tilde{\Omega}$ le nom de *W-forme*.

Il est évident que la relation entre les formes Ω et $\tilde{\Omega}$ est *intrinsèque* en ce sens qu'elle est invariante vis-à-vis d'une transformation de variables.

EXEMPLES. 1° Considérons la forme linéaire $\omega=a_\varrho x^\varrho$; les coefficients de sa forme adjointe $\tilde{\omega}$, calculés d'après la formule (13), ont la forme

$$\tilde{a}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}}=\tilde{E}_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}\varrho}a^\varrho,$$

où $a^\varrho=g^{\varrho\varkappa}a_\varkappa$. On aura donc

$$\tilde{a}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n}=\tilde{E}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n\varrho}a^\varrho$$

ou

$$\tilde{a}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n}=(-1)^{n-i}\tilde{E}_{12\ldots n}a^i.$$

Si l'on y tient compte de la définition de la grandeur $\tilde{E}$, on peut aussi écrire

$$\tilde{a}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n}=\tilde{E}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n\varrho}a^\varrho,$$

ou enfin

$$\tilde{a}_{1\ldots\, i-1\, i+1\,\ldots\, n}=(-1)^{n-i}\sqrt{g}\,a^i.$$

[13]) P. Bidal et G. de Rham [1]. Dans ce Mémoire l'adjointe de Ω est désignée par le symbole Ω^*.

On obtient donc, d'après la formule (15),

$$\tilde{\omega} = \sqrt{g}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}a^i[x^1\ldots x^{i-1}x^{i+1}\ldots x^n].$$

2° Si Ω est une forme de degré zéro égale au nombre a, son adjointe $\tilde{\Omega}$ est de degré n, et on a

$$\tilde{\Omega} = a\sqrt{g}[x^1x^2\ldots x^n].$$

Si $a=1$, la valeur de $\tilde{\Omega}$, pour une suite de vecteurs

(16) $$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

issus d'un même point, est le volume du parallélépipède orienté, construit sur les vecteurs (16).

Si Ω est une forme de degré n, égale à l'expression $a_{12\ldots n}[x^1x^2\ldots x^n]$, son adjointe est le W-scalaire égal à $a^{12\ldots}\sqrt{g}$.

Nous établirons quelques propriétés de l'adjointe d'une forme extérieure.

Remarquons en premier lieu que l'adjointe de la somme $\Phi+\Psi$, où Φ et Ψ sont deux formes extérieures de même degré, est égale à la somme $\tilde{\Phi}+\tilde{\Psi}$; c'est une conséquence immédiate de la définition de l'adjointe.

Nous allons maintenant montrer que l'adjointe de la forme $\tilde{\Omega}$ est égale, au signe près, à Ω; plus précisément on peut énoncer le suivant

THÉORÈME 3. *Si Ω est une forme extérieure de degré p, on a*

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = (-1)^{p(n-p)}\Omega.$$

En effet, considérons la forme (12) et son adjointe (15). D'après la formule (14) les coefficients de la forme $\tilde{\tilde{\Omega}}$, adjointe de $\tilde{\Omega}$, sont déterminés par les égalités

(17) $$\tilde{\tilde{a}}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p} = \sqrt{g}\,\tilde{a}^{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_{n-p}}.$$

Si l'on choisit les coordonnées dans l'espace E_n de manière que $g_{\varkappa\lambda}x^\varkappa x^\lambda$ soit mise sous sa forme canonique

$$g_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \varkappa=\lambda, \\ 0 & \text{pour } \varkappa\neq\lambda, \end{cases}$$

on aura $g=1$ et les composantes contrevariantes du $(n-p)$-vecteur $\{\tilde{a}^{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_{n-p}}\}$ deviendront égales à ses composantes covariantes; par conséquent, l'égalité (17) pourra être remplacée par la suivante:

(18) $$\tilde{\tilde{a}}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p} = \tilde{a}_{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_{n-p}}.$$

D'autre part, pour le même système de coordonnées, la relation (14) prendra la forme

(19) $$\tilde{a}_{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_{n-p}} = (-1)^{p(n-p)}a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p},$$

car, la suite $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_{n-p}$ étant une permutation paire des nombres $1,2,\ldots,n$, les indices $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_{n-p},\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ représenteront une permutation paire ou impaire selon la parité du nombre $p(n-p)$. En rapprochant les deux égalités (18) et (19), on trouve

$$\tilde{\tilde{a}}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p} = (-1)^{p(n-p)}a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p},$$

et, par suite,

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = (-1)^{p(n-p)}\Omega;$$

la relation entre les formes Ω et $\tilde{\tilde{\Omega}}$ étant intrinsèque, la dernière égalité est vraie dans un système quelconque de coordonnées de l'espace E_n.

THÉORÈME 4. *Si Φ et Ψ sont deux formes extérieures de degré p*

$$\Phi = \sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p)} a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}[x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}\ldots x^{\lambda_p}]$$

$$\Psi = \sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p)} b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}[x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}\ldots x^{\lambda_p}],$$

on a

$$[\Phi\tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)}C\Lambda,$$

C désignant le produit contracté

$$\sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p)} a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}b^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}$$

et Λ étant la W-forme

$$\Lambda = \sqrt{g}[x^1x^2\ldots x^n].$$

En effet, d'après la formule (15′), on a

$$\tilde{\Psi} = \sqrt{g}\sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-p})} b^{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\ldots\bar{\lambda}_p}[x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}\ldots x^{\lambda_{n-p}}],$$

ce qui peut être aussi écrit

$$\tilde{\Psi} = (-1)^{p(n-p)}\sqrt{g}\sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p)} b^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}[x^{\bar{\lambda}_1}x^{\bar{\lambda}_2}\ldots x^{\bar{\lambda}_{n-p}}].$$

On aura donc

$$[\Phi\tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)}\sqrt{g}\sum_{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p)} a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}b^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}[x^{\lambda_1}\ldots x^{\lambda_p}x^{\bar{\lambda}_1}\ldots x^{\bar{\lambda}_{n-p}}].$$

Mais la suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_{n-p}$ étant paire d'après la définition d'une suite complémentaire (p. 44), on a

$$[x^{\lambda_1} \ldots x^{\lambda_p} x^{\bar{\lambda}_1} \ldots x^{\bar{\lambda}_{n-p}}] = [x^1 x^2 \ldots x^n].$$

La dernière égalité prendra donc la forme

$$[\Phi \tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)} \sqrt{g}\, C\, [x^1 x^2 \ldots x^n];$$

c'est ce que nous voulions montrer.

Corollaire. *Le second membre de la dernière égalité étant indépendant de l'ordre des formes Φ et Ψ, on en déduit $[\Phi\tilde{\Psi}] = [\Psi\tilde{\Phi}]$; d'autre part, on a $[\Psi\tilde{\Phi}] = (-1)^{p(n-p)}[\tilde{\Phi}\Psi]$, car les formes Ψ et $\tilde{\Phi}$ sont respectivement de degrés p et $n-p$. Il en résulte l'égalité*

$$[\Phi\tilde{\Psi}] = (-1)^{p(n-p)}[\tilde{\Phi}\Psi].$$

Remarque. Pour distinguer les adjointes d'une forme extérieure, formées au moyen des grandeurs $\overset{+1}{\mathfrak{E}}$, $\overset{-1}{\mathfrak{E}}$ et de la grandeur $\tilde{\mathfrak{E}}$, nous les appellerons respectivement *adjointes-e et adjointes-ε.*

CHAPITRE II

ÉQUATIONS EXTÉRIEURES

28. Définition. Soit Ω une forme extérieure de degré p; en l'annulant, on obtient l'équation extérieure

(1) $$\Omega = 0,$$

dont les *solutions* sont, par définition, tous les éléments plans E_q qui vérifient la condition: si l'on choisit une suite quelconque

(2) $$V_1, V_2, \ldots, V_p$$

de p vecteurs issus de l'origine des coordonnées de l'espace affine A_n, et situés dans E_q, la valeur de Ω, pour cette suite, est nulle (cf. nº 11). Pour indiquer qu'un élément plan E_q est solution de l'équation extérieure $\Omega = 0$, on écrit $\Omega(E_q) = 0$.

La définition de la solution d'une équation extérieure s'étend d'une manière évidente aux systèmes d'équations extérieures.

Si $q < p$, les vecteurs de la suite (2) ne sont pas linéairement indépendants, et, par suite, la valeur de Ω est nulle quel que soit l'élément E_q. D'où le

Théorème 1. *Tout élément plan de dimension plus petite que p est une solution d'une équation extérieure de degré p.*

Il en résulte que, si l'on cherche les solutions à p dimensions d'un système d'équations extérieures, on peut négliger toutes les équations de celui-ci dont le degré est supérieur à p.

Il résulte aussi immédiatement de la définition donnée ci-dessus, que tout élément plan, contenu dans un autre élément vérifiant l'équation (1), est aussi solution de celle-ci.

29. Critères pour les solutions. Nous établirons dans ce numéro divers critères qui permetront de reconnaître, si un élément plan est solution d'une équation extérieure, ou d'un système d'équations extérieures. Le caractère de ces critères dépend, bien entendu, du mode au moyen duquel l'élément plan est déterminé.

A. Soit E_q une solution de l'équation

(3) $$\Omega = \frac{1}{p!}\, a_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} [x^{\varkappa_1} x^{\varkappa_2} \ldots x^{\varkappa_p}] = 0,$$