Ale nawet w przypadku, gdy po prawej stronie równania (10.1) pozostawimy funkcję e^t, metoda transformacji Laplace'a nie daje pełnego rozwiązania zagadnienia, gdyż w czasie rachunków trzeba założyć, że szukana funkcja nie wzrasta zbyt szybko, czyli dokładniej mówiąc, jest *transformowalna*. Wskutek tego nie wiemy, czy znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Podobnie w przypadku równań różniczkowych cząstkowych metoda transformacji Laplace'a nie daje odpowiedzi, czy znalezione rozwiązania są jedyne.

§ 12. Inne metody pokrewne

Istnieje wiele podręczników rachunku operatorów, w których wykład jest oparty na transformacji

$$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{12.1}$$

gdzie p jest zmienną zespoloną. Różni się ona tym od transformacji Laplace'a (9.2), że przed całką dochodzi jeszcze czynnik p. Użycie litery p w miejsce s nie ma oczywiście żadnego znaczenia matematycznego i jest tylko kwestią zwyczaju. Tablice dla transformacji (12.1) można otrzymać z tablic transformacji Laplace'a zastępując literę s przez p i dopisując przed każdym wzorem czynnik p.

W niektórych książkach punktem wyjścia bywa transformacja odwrotna do (12.1)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}\frac{F(p)}{p}\,dp;$$

całkowanie w tym wzorze należy wykonywać wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej, dobranej odpowiednio do każdej funkcji $F(p)$.

Prócz tego istnieją różne odmiany tych metod. Na przykład niektórzy autorowie wprowadzają obok zbioru funkcyj zmiennej rzeczywistej t i zbioru funkcyj analitycznych zmiennej zespolonej p jeszcze zbiór operatorów, który jest zdefiniowany przez izomorfizm z rozważanym zbiorem funkcyj analitycznych. Wszystkich tych metod nie będziemy już omawiali, odsyłając zainteresowanego czytelnika do literatury podanej na końcu książki.

CZĘŚĆ PIĄTA

WZORY I TABLICE

I. Funkcje specjalne

1. Funkcja gamma Eulera:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt \qquad (\lambda > 0) \qquad \text{(I, § 54)}$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda), \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt \qquad (\lambda>0,\ \mu>0)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$$

2. Funkcja błędu:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau \qquad \text{(I, § 55)}$$

$$\operatorname{cerf} t = 1 - \operatorname{erf} t$$

3. Funkcje Bessela:

$$J_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \qquad J_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!} \qquad \text{(II, § 51)}$$

$$J_0'(t) = -J_1(t)$$

$$J_0(i\lambda) = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \qquad J_1(i\lambda) = i\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!}$$

$$J_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad \text{(II, § 53)}$$

$$J_n(i\lambda) = i^n\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

II. Wzory z rachunku operatorów

1. $$\{a(t)\}+\{b(t)\}=\{a(t)+b(t)\} \qquad \text{(I, § 7)}$$

$$\{a(t)\}\cdot\{b(t)\}=\left\{\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$a\{f(t)\}=\{af(t)\} \qquad (a \text{ liczba}) \qquad \text{(I, § 19)}$$

2. $$s\{a(t)\}=\{a'(t)\}+a(0) \qquad \text{(I, § 21)}$$

$$\{a^{(n)}(t)\}=s^n\{a(t)\}-s^{n-1}a(0)-\ldots-sa^{(n-2)}(0)-a^{(n-1)}(0) \qquad \text{(I, § 22)}$$

3. $$T^{\alpha}\{a(t)\}=\{e^{\alpha t}a(t)\}, \qquad T^{\alpha}R(s)=R(s-\alpha) \qquad \text{(II, § 48)}$$

4. $$\frac{d}{ds}\{a(t)\}=\{-ta(t)\} \qquad \text{(II, § 62)}$$

5. $$e^{-\lambda s}\{f(t)\}=\begin{cases} 0 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda \\ f(t-\lambda) & \text{dla } 0\leqslant \lambda<t \end{cases} \qquad \text{(II, § 10)}$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases} f(t) & \text{w przedziale } 0\leqslant\lambda_1<t<\lambda_2 \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{cases} \qquad \text{(IV, § 5)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda=\{f(t)\}$$

6. $$\frac{1}{s}=\{1\} \qquad \text{(I, § 21)}$$

$$\frac{1}{s^n}=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad \text{(I, § 8)}$$

$$\frac{1}{s^{\lambda}}=\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} \qquad (\lambda>0) \qquad \text{(I, § 55)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$$

$$\frac{1}{s-\alpha}=\{e^{\alpha t}\} \qquad \text{(I, § 24)}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^{\lambda}}=\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\} \qquad \text{(I, § 55)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}\right\} \qquad \text{(I, § 55)}$$

$$\frac{1}{s\sqrt{s+\alpha}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{erf}\sqrt{\alpha t}\right\} \qquad (\alpha>0)$$

$$\frac{1}{s^2+\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right\} \qquad (\beta>0) \qquad \text{(I, § 25)}$$

$$\frac{s}{s^2+\beta^2}=\{\cos\beta t\}$$

6. (c. d.)

$$\frac{1}{s^2-\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{s}{s^2-\beta^2}=\{\operatorname{ch}\beta t\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\} \qquad (\alpha>0)$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\operatorname{sh}\beta t\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}=\{e^{\alpha t}\operatorname{ch}\beta t\}$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[\frac{1}{\beta}\sin\beta t-t\cos\beta t\right]\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^3}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{4\beta^4}\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{\beta^2t^2}{2}\right)\frac{1}{\beta}\sin\beta t-\frac{3}{2}t\cos\beta t\right]\right\}$$

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[(\alpha+\beta^2t)\frac{1}{\beta}\sin\beta t-\alpha t\cos\beta t\right]\right\} \qquad \text{(I, § 26)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+\lambda^2}}=\{J_0(\lambda t)\} \qquad \text{(II, § 51)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}=\{J_0(i\lambda t)\}$$

$$\frac{\sqrt{s^2+\lambda^2}-s}{\sqrt{s^2+\lambda^2}}=\{\lambda J_1(\lambda t)\}$$

$$\frac{\sqrt{s^2-\lambda^2}-s}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}=\{i\lambda J_1(i\lambda t)\}$$

$$\left(\sqrt{s^2+\lambda^2}-s\right)^n=\left\{\frac{n\lambda}{t}J_n(\lambda t)\right\} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad \text{(II, § 53)}$$

$$\frac{\left(\sqrt{s^2+\lambda^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+\lambda^2}}=\{\lambda^n J_n(\lambda t)\} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{1}{s}\exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right)=\{J_0(2\sqrt{\lambda t})\}$$

$$\frac{1}{s^2}\exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right)=\left\{\sqrt{\frac{t}{\lambda}}J_1(2\sqrt{\lambda t})\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{\lambda}{s}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\lambda t}\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\frac{\lambda}{s}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{ch}2\sqrt{\lambda t}\right\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s})=\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\} \qquad (\lambda>0)$$

6. (c. d.)

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\lambda\sqrt{s}) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\} \qquad (\lambda>0) \qquad \text{(II, § 53)}$$

$$\frac{1}{s}\exp(-\lambda\sqrt{s}) = \left\{\operatorname{cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right\} \qquad (\lambda>0)$$

$$\exp\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2}) = 1-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\,\alpha J_1(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\} \qquad \text{(II, § 54)}$$

$$\frac{\exp\lambda(s-\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} = \{J_0(\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

$$\exp\lambda(s-\sqrt{s^2-\alpha^2}) = 1-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\,i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2t\lambda})\right\}$$

$$\frac{\exp\lambda(s-\sqrt{s^2-\alpha^2})}{\sqrt{s^2-\alpha^2}} = \{J_0(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

$$\exp\lambda(s-\sqrt{s^2+2\lambda s}) = e^{-\alpha\lambda}-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\,e^{-\alpha(\lambda+t)}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\frac{\exp\lambda(s-\sqrt{s^2+2\alpha s})}{\sqrt{s^2+2\alpha s}} = \{e^{-\alpha(\ +t)}J_0(i\alpha\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}) = e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s}-\begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}\,e^{-\alpha t}i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}) & \text{dla } 0\leqslant\lambda<t \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s})}{\sqrt{s^2+2\alpha s}} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda \\ e^{-\alpha t}J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}) & \text{dla } 0\leqslant\lambda<t \end{Bmatrix}$$

$$\exp\lambda(s-\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}) = e^{\alpha\lambda}-\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+2\lambda t}}\,e^{\alpha(\lambda+t)}\beta J_1(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\right\}$$

$$\frac{\exp\lambda(s-\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2})}{\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}} = \{e^{\alpha(\lambda+t)}J_0(\beta\sqrt{t^2+2\lambda t})\}$$

$$\exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}) = e^{\alpha\lambda}e^{-\lambda s}-\begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}}\,e^{\alpha t}\cdot\beta J_1(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}) & \text{dla } 0\leqslant\lambda<t \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2})}{\sqrt{(s-\alpha)^2+\beta^2}} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda \\ e^{\alpha t}J_0(\beta\sqrt{t^2-\lambda^2}) & \text{dla } 0\leqslant\lambda<t \end{Bmatrix}$$

7.

$$\left.\begin{aligned} & e^{-\lambda\sqrt{s}}\leqslant 3\sqrt{\frac{6}{\pi e^3}\cdot\frac{1}{\lambda^2 s}} \\ & \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\lambda\sqrt{s}}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi e}\,\frac{1}{\lambda s}} \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda>0) \qquad \text{(II, § 36)}$$

8. (II, § 63)

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{(2\beta^2)^{n-1}}\left[A_n(\beta^2t^2)\frac{1}{\beta}\sin\beta t-B_n(\beta^2t^2)\cdot t\cos\beta t\right]\right\} \qquad (n=1,2,\dots)$$

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{2(n-1)(2\beta^2)^{n-2}}\left[A_{n-1}(\beta^2t^2)\cdot\frac{t}{\beta}\sin\beta t-B_{n-1}(\beta^2t^2)\cdot t^2\cos\beta t\right]\right\}$$
$$(n=2,3,\dots)$$

$$A_1(x)=1, \qquad A_2(x)=1$$

$$A_{n+1}(x)=\frac{2n-1}{n}A_n(x)-\frac{x}{n(n-1)}A_{n-1}(x) \qquad (n=2,3,\dots)$$

$$B_1(x)=0, \qquad B_2(x)=1$$

$$B_{n+1}(x)=\frac{2n-1}{n}B_n(x)-\frac{x}{n(n-1)}B_{n-1}(x) \qquad (n=2,3,\dots)$$

	$A_n(x)$	$B_n(x)$
$n=1$	1	0
$n=2$	1	1
$n=3$	$\frac{1}{2}(3-x)$	$\frac{3}{2}$
$n=4$	$\frac{5}{2}-x$	$\frac{1}{2}\left(5-\frac{x}{3}\right)$
$n=5$	$\frac{5}{8}\left(7-3x+\frac{1}{15}x^2\right)$	$\frac{5}{8}\left(7-\frac{2}{3}x\right)$
$n=6$	$\frac{7}{8}\left(9-4x+\frac{1}{7}x^2\right)$	$\frac{7}{8}\left(9-x+\frac{1}{105}x^2\right)$
$n=7$	$\frac{7}{16}\left(33-15x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{315}x^3\right)$	$\frac{7}{16}\left(33-4x+\frac{1}{15}x^2\right)$
$n=8$	$\frac{1}{8}\left(\frac{429}{2}-99x+5x^2-\frac{2}{45}x^3\right)$	$\frac{1}{8}\left(\frac{429}{2}-\frac{55}{2}x+\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{630}x^3\right)$
$n=9$	$\frac{1}{128}\left(6435-3003x+165x^2-2x^3+\frac{1}{315}x^4\right)$	$\frac{1}{128}\left(6435-858x+22x^2-\frac{4}{35}x^3\right)$
$n=10$	$\frac{1}{128}\left(12155-5720x+\frac{1001}{3}x^2-\frac{44}{9}x^3+\frac{1}{63}x^4\right)$	$\frac{1}{128}\left(12155-\frac{5005}{3}x+\frac{143}{3}x^2-\frac{22}{63}x^3+\frac{1}{2835}x^4\right)$

III. Zastosowania elektrotechniczne

1. Równanie obwodu elektrycznego:

$Z(I-\bar{I})=E,$ (I, § 27 i I, § 33)

$Z=Ls+R+\frac{1}{Cs},\quad Z\bar{I}=LI(0)-\frac{Cs}{Q(0)}$ (prosty układ) (I, § 26 i I, § 27)

$Z=Z_1+Z_2,\quad Z\bar{I}=Z_1\bar{I}_1+Z_2\bar{I}_2$ (połączenie szeregowe) (I, § 33)

$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2},\quad \bar{I}=\bar{I}_1+\bar{I}_2$ (połączenie równoległe)

2. Prąd trwały (stacjonarny):

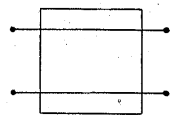
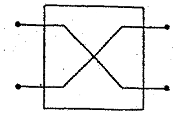
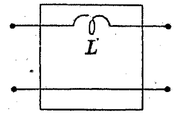
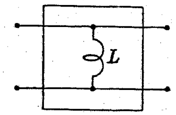
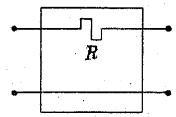
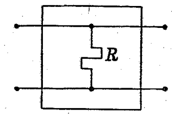
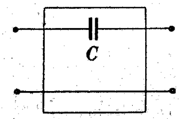
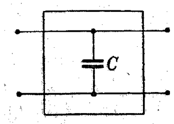
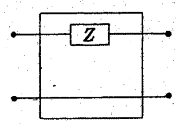
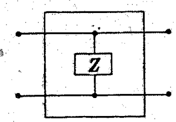
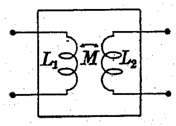
$E=\frac{E_1 s-E_2\omega}{s^2+\omega^2},\quad I_s=\frac{I_1 s-I_2\omega}{s^2+\omega^2}$ (I, § 34)

$I_1+iI_2=\frac{E_1+iE_2}{Z(\omega i)}.$

$Z_0=|Z(\omega i)|$ (zawada)

$\vartheta=\arg Z(\omega i)$ (przesunięcie fazy).

3. Tablica prostych czwórników i ich macierzy

	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1 & Ls\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{Ls} & 1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1 & R\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{R} & 1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{Cs}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ Cs & 1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1 & Z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{Z} & 1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}\frac{L_1}{M} & \frac{(L_1L_2-M^2)s}{M}\\ \frac{1}{Ms} & \frac{L_2}{M}\end{pmatrix}$		

IV. Tablice funkcyj

1. Funkcja gamma Eulera $\Gamma(\lambda)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	1,0000	0043	0086	0131	0176	0222	0269	0316	0365	0415
1	0465	0516	0568	0621	0675	0730	0786	0842	0900	0959
2	1018	1078	1140	1202	1266	1330	1395	1462	1529	1598
3	1667	1738	1809	1882	1956	2031	2107	2184	2262	2341
4	2422	2503	2586	2670	2756	2842	2930	3019	3109	3201
5	3293	3388	3483	3580	3678	3777	3878	3981	4084	4190
6	4296	4404	4514	4625	4738	4852	4968	5085	5204	5325
7	5447	5571	5696	5824	5953	6084	6216	6351	6487	6625
8	6765	6907	7051	7196	7344	7494	7646	7799	7955	8113
9	8274	8436	8600	8767	8936	9108	9281	9457	9636	9817

Wartości, których nie ma w tej tabelce, oblicza się na podstawie wzoru:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda).$$

2. Funkcja błędu erf λ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0113	0226	0338	0451	0564	0676	0789	0901	1013
1	1125	1236	1348	1459	1569	1680	1790	1900	2009	2118
2	2227	2335	2443	2550	2657	2763	2869	2974	3079	3183
3	3286	3389	3491	3593	3694	3794	3893	3992	4090	4187
4	4284	4380	4475	4569	4662	4755	4847	4937	5027	5117
5	5205	5292	5379	5465	5549	5633	5716	5798	5879	5959
6	6039	6117	6194	6270	6346	6420	6494	6566	6638	6708
7	6778	6847	6914	6981	7047	7112	7175	7238	7300	7361
8	7421	7480	7538	7595	7651	7707	7761	7814	7867	7918
9	7969	8019	8068	8116	8163	8209	8254	8299	8342	8385
1,0	8427	8468	8508	8548	8586	8624	8661	8698	8733	8768
1	8802	8835	8868	8900	8931	8961	8991	9020	9048	9076
2	9103	9130	9155	9181	9205	9229	9252	9275	9297	9319
3	9340	9361	9381	9400	9419	9438	9456	9473	9490	9507
4	9523	9539	9554	9569	9583	9597	9611	9624	9637	9649
5	9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755
6	9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832
7	9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886
8	9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925
9	9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951
2,	0,9 9532	9702	9814	9886	9931	9959	9976	9987	9993	9996
3,	0,99 9978	9988	9994	9997	9998	9999				

3. Funkcja Bessela $J_0(\lambda)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	+1	+0,998	990	978	960	938	912	881	846	808
1	+0,765	720	671	620	567	512	455	398	340	282
2	224	167	110	056	003	—048	—097	—142	—185	—224
3	—0,260	292	320	344	364	380	392	399	403	402
4	397	389	377	361	342	321	296	269	240	210
5	178	144	110	076	041	007	+027	+060	+092	+122
6	+0,151	177	202	224	243	260	274	285	293	298
7	300	299	295	288	279	266	252	235	215	194
8	172	148	122	096	069	042	015	—013	—039	—065
9	—0,090	114	137	158	177	194	209	222	232	240
10	246	249	250	248	243	237	228	216	203	188
11	171	153	133	112	090	068	045	021	+002	+025
12	+0,048	070	091	111	130	147	163	177	189	199
13	207	213	217	218	218	215	210	203	194	184
14	171	157	141	125	107	088	068	048	027	006
15	—0,014	035	054	074	092	109	125	140	153	165
16	175	183	189	194	196	196	195	191	186	179
17	170	159	147	134	119	103	086	069	051	032
18	013	+005	+024	+042	+060	+077	+093	+109	+123	+135
19	+0,147	156	165	171	176	179	180	179	177	173
20	167	160	150	140	128	115	101	086	070	054

4. Funkcja Bessela $J_1(\lambda)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	+0,000	050	100	148	196	242	287	329	369	406
1	440	471	498	522	542	558	570	578	582	581
2	577	568	556	540	520	497	471	442	410	375
3	339	301	261	221	179	137	095	054	013	—027
4	—0,066	103	139	172	203	231	257	279	298	315
5	328	337	343	346	345	341	334	324	311	295
6	277	256	233	208	182	154	125	095	065	035
7	005	+025	+054	+083	+110	+135	+159	+181	+201	+219
8	+0,235	248	258	266	271	273	273	270	264	256
9	245	232	217	200	182	161	140	117	093	068
10	043	018	—007	—031	—055	—079	—101	—122	—142	—160
11	—0,177	191	204	214	222	228	232	233	232	229
12	223	216	206	194	181	165	149	131	111	091
13	070	049	027	005	+017	+038	+059	+079	+098	+117
14	+0,133	149	163	175	185	193	200	204	207	207
15	205	201	196	188	178	167	154	140	125	108
16	090	072	053	034	014	—006	—025	—044	—063	—081
17	—0,098	114	128	141	153	163	172	179	184	187
18	188	187	184	181	174	167	157	146	134	120
19	106	090	074	056	039	021	003	+015	+	
20	+0,067	083	098	[illegible]	125	136	146	155	162	167

5. Funkcje $J_0(i\lambda)$ i $-iJ_1(i\lambda)$

λ	$J_0(i\lambda)$	$-iJ_1(i\lambda)$	λ	$J_0(i\lambda)$	$-iJ_1(i\lambda)$
0,0	1,000	0,000	5,0	27,24	24,34
1	003	050	1	29,79	26,68
2	010	101	2	32,58	29,25
3	023	152	3	35,65	32,08
4	040	204	4	39,01	35,18
5	064	258	5	42,69	38,59
6	092	314	6	46,74	42,33
7	126	372	7	51,17	46,44
8	167	433	8	56,04	50,95
9	213	497	9	61,38	55,90
1,0	266	565	6,0	67,23	61,34
1	326	637	1	73,66	67,32
2	394	715	2	80,72	73,89
3	469	797	3	88,46	81,10
4	553	886	4	96,98	89,03
5	647	982	5	106,29	97,73
6	750	1,085	6	116,54	107,30
7	864	196	7	127,79	117,82
8	990	317	8	140,14	129,38
9	2,128	448	9	153,70	142,08
2,0	280	591	7,0	168,6	156,0
1	446	745	1	185,0	171,4
2	629	914	2	202,9	188,3
3	830	2,098	3	222,7	206,8
4	3,049	298	4	244,3	227,2
5	290	517	5	268,2	249,6
6	553	755	6	294,3	274,2
7	842	3,016	7	323,1	301,3
8	4,157	301	8	354,7	331,1
9	503	613	9	389,4	363,9
3,0	881	953	8,0	427,6	399,9
1	5,294	4,326	1	469,5	439,5
2	747	734	2	515,6	483,0
3	6,243	5,181	3	566,3	531,0
4	785	670	4	621,9	583,7
5	7,378	6,206	5	683,2	641,6
6	8,028	793	6	750,5	705,4
7	739	7,436	7	824,4	775,5
8	9,517	8,140	8	905,8	852,7
9	10,369	913	9	995,2	937,5
4,0	11,30	9,76	9,0	1093,6	1030,9
1	12,32	10,69	1	1201,7	1133,6
2	13,44	11,71	2	1320,7	1246,7
3	14,67	12,82	3	1451,5	1371,0
4	16,01	14,05	4	1595,3	1507,9
5	17,48	15,39	5	1753	1658
6	19,09	16,86	6	1927	1824
7	20,86	18,48	7	2119	2006
8	22,79	20,25	8	2329	2207
9	24,91	22,20	9	2561	2428