CZĘŚĆ CZWARTA

PEWNE KLASY FUNKCJI ANALITYCZNYCH

ROZDZIAŁ XI

Funkcje całkowite

51. Rozkład funkcji całkowitej. Wiemy, że funkcja całkowita $f(z)$ daje się przedstawić za pomocą jednego szeregu potęgowego

(1) $$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$$

zbieżnego na całej płaszczyźnie. Jeżeli $f(z)$ jest wielomianem $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, gdzie $a_n\neq 0$, to ma on n zer $z_1,z_2,\ldots,z_n$, różnych lub nie, i daje się rozłożyć na iloczyn

(2) $$f(z)=a\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

gdzie a jest pewną stałą, przy czym czynnik $1-z/z_k$ należy zastąpić przez z, gdy $z_k=0$.

Funkcja całkowita przestępna może mieć nieskończenie wiele zer[1]). Wszystkie zera takiej funkcji (nie równej tożsamościowo zeru) można zawsze ułożyć w ciąg nieskończony

(3) $$z_1,z_2,z_3,\ldots,\qquad \text{gdzie}\quad z_n\to\infty.$$

Istotnie, w każdym pierścieniu $k-1\leqslant|z|<k$, gdzie $k=1,2,\ldots$, leży co najwyżej skończona ilość zer, bo w przeciwnym razie funkcja byłaby tożsamościowo równa zeru (str. 66). Numerując te zera kolejno w poszczególnych pierścieniach otrzymamy szukany ciąg (3).

Powstają pytania: 1° Czy każdą funkcję całkowitą, mającą nieskończenie wiele zer, można rozłożyć na czynniki, podobnie jak wielomian (2)? 2° Czy dla dowolnie danego ciągu (3) istnieje funkcja całkowita mająca

[1]) Np. $\sin z=0$ dla $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

zera w punktach (3) i tylko w tych punktach? Odpowiedź pozytywną na te dwa pytania dał Weierstrass za pomocą iloczynów nieskończonych. Przypomnę najpierw zasadnicze wiadomości o takich iloczynach.

52. Iloczyny nieskończone. Niech będzie dany dowolny ciąg liczb zespolonych $a_1,a_2,\ldots$ Iloczyn $u_n=a_1a_2\ldots a_n$ nazywamy *n-tym iloczynem cząstkowym* iloczynu nieskończonego

(4) $$a_1a_2a_3\ldots=\prod_1^\infty a_n.$$

Iloczyn (4) nazywamy *zbieżnym*, jeżeli prawie wszystkie czynniki a_n są różne od zera, np. $a_n\neq0$ dla $n>p$, i jeżeli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_n)=v$, różna od zera. Ciąg $\{u_n\}$ dąży wówczas do granicy $u=a_1a_2\ldots a_p\cdot v$ zwanej *wartością iloczynu* (4), co piszemy $\prod_1^\infty a_n=u$[1]). Jeżeli granica v nie istnieje albo równa się zeru, to iloczyn (4) nazywamy *rozbieżnym*.

Z określenia tego wynika, że iloczyn nieskończony zbieżny pozostaje zbieżny po skreśleniu dowolnego czynnika a_k i równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z czynników równa się zeru. Łatwo stwierdzić (jak w przypadku iloczynów rzeczywistych), że:

Iloczyn (4) *może być zbieżny tylko wówczas, gdy* $a_n\to1$.

Ze względu na to, przyjmując $a_n=1+c_n$, piszemy iloczyn (4) w postaci

(5) $$\prod_1^\infty(1+c_n).$$

Iloczyn ten może być zbieżny tylko wówczas, gdy $c_n\to0$.

Iloczyn (5) nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli iloczyn

(6) $$\prod_1^\infty(1+|c_n|)$$

jest zbieżny. Dowodzi się, że:

Iloczyn bezwzględnie zbieżny jest zbieżny i pozostaje zbieżny oraz nie zmienia swej wartości po dowolnej zmianie porządku czynników.

Iloczyn (5) *jest wtedy i tylko wtedy bezwzględnie zbieżny, gdy szereg* $\sum_1^\infty c_n$ *jest bezwzględnie zbieżny.*

[1]) Prostsze byłoby określenie następujące: "Iloczyn (4) jest zbieżny, gdy ciąg u_n jest zbieżny", lecz nie jest ono praktyczne, bo wówczas np. iloczyn $0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots$ byłby zbieżny, a po skreśleniu pierwszego czynnika otrzymalibyśmy iloczyn rozbieżny.

icm

Przykład 1. Iloczyn $\prod\limits_1^\infty \left(1-\dfrac{z}{n^2}\right)$ jest zbieżny — i to bezwzględnie — dla każdej wartości z, bo szereg $\sum\limits_1^\infty |z|/n^2$ jest zbieżny.

Przykład 2. Iloczyny $\prod\limits_1^\infty \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\prod\limits_1^\infty \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ nie są zbieżne, bo dla pierwszego $u_n=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+1}{n}=n+1\to\infty$, dla drugiego

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\to 0.$$

Niech $\{f_\nu(z)\}$ będzie ciągiem funkcji analitycznych w pewnym obszarze D. Oznaczmy przez $\varDelta$ dowolny obszar ograniczony i domknięty, zawarty wraz z brzegiem wewnątrz D, i oznaczmy

$$I(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}[1+f_\nu(z)]. \tag{7}$$

Wykażemy, że:

Jeżeli szereg $\sum\limits_1^\infty |f_\nu(z)|$ jest jednostajnie zbieżny w każdym $\varDelta\subset D$, to 1° *iloczyn* (7) *jest bezwzględnie zbieżny w obszarze D do pewnej funkcji analitycznej $I(z)$*[1], 2° *w każdym punkcie, w którym $I(z)\neq 0$, zachodzi wzór*[2]

$$\frac{I'(z)}{I(z)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f'_\nu(z)}{1+f_\nu(z)}, \tag{8}$$

przy czym szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny w każdym obszarze $\varDelta\subset D$ nie zawierającym zer funkcji $I(z)$.

Dowód. 1° Zbieżność bezwzględna iloczynu (7) w obszarze D wynika ze zbieżności szeregu $\Sigma|f_\nu(z)|$. Niech $u_n(z)=\prod\limits_1^n(1+f_\nu)$, $n=1,2,\ldots$ Ponieważ $u_\nu-u_{\nu-1}=u_{\nu-1}f_\nu(z)$, dla $\nu=2,3,\ldots$, więc

$$u_n(z)=u_1+\sum_2^n(u_\nu-u_{\nu-1})=u_1+\sum_2^n u_{\nu-1}f_\nu(z). \tag{9}$$

Suma $\sum\limits_1^\infty|f_\nu(z)|$ jest funkcją ciągłą w zbiorze $\varDelta$, a więc jest w nim ograniczona. Przyjmijmy $\sum\limits_1^\infty|f_\nu(z)|<M$ dla $z\in\varDelta$ i zauważmy, że

[1]) Funkcja $I(z)$ oczywiście równa się zeru tylko w takich punktach, w których przynajmniej jeden z czynników $1+f_\nu(z)$ równa się zeru.

[2]) Wzór ten orzeka, że pochodna logarytmiczna iloczynu (7) równa się sumie pochodnych logarytmicznych poszczególnych czynników tego iloczynu.

$$1+t\leqslant e^t \tag{10}$$

dla każdego rzeczywistego t[1]); a więc dla $z\in\varDelta$ i dla każdego n mamy

$$|u_n(z)|\leqslant(1+|f_1|)\ldots(1+|f_n|)\leqslant e^{|f_1|+\ldots+|f_n|}<e^M.$$

Szereg $\sum\limits_2^\infty u_{\nu-1}f_\nu(z)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze $\varDelta$, bo w zbiorze tym $|u_{\nu-1}f_\nu|<e^M|f_\nu|$, szereg $\sum\limits_2^\infty|f_\nu(z)|$ zaś jest jednostajnie zbieżny w $\varDelta$. Ciąg (9) jest więc jednostajnie zbieżny w $\varDelta$; zatem jego granica $I(z)$ jest funkcją analityczną wewnątrz $\varDelta$ (str. 73), a przez to wewnątrz D.

2° Niech będzie $I(z)\neq 0$ w pewnym $\varDelta\subset D$. Istnieje obszar domknięty $\varDelta'\subset D$, w którego wnętrzu leży $\varDelta$ i w którym $I(z)\neq 0$[2]). Na mocy poprzedniej części dowodu ciąg $\{u_n(z)\}$ dąży jednostajnie w $\varDelta'$ do $I(z)$, a więc ciąg pochodnych $u'_n(z)$ dąży jednostajnie w $\varDelta$ do pochodnej $I(z)$ (str. 73). Udowodnimy, że istnieje taka liczba $\eta>0$, że w zbiorze $\varDelta$ mamy

$$|I(z)|>\eta \quad\text{i}\quad |u_n(z)|>\eta \qquad (i=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Istotnie, ponieważ $\varDelta$ jest zbiorem domkniętym i w nim $I(z)\neq 0$, a przez to każdy czynnik $1+f_\nu(z)\neq 0$, więc istnieją takie liczby $\eta_0>0$ i $\eta_n>0$, że w zbiorze $\varDelta$ mamy $|I(z)|>2\eta_0$ i $|u_n(z)|>\eta_n$, $n=1,2,\ldots$ Z drugiej strony istnieje taki wskaźnik m, że w zbiorze $\varDelta$ mamy $|I(z)-u_n(z)|<\eta_0$ dla $n>m$, skąd $|u_n(z)|>\eta_0$ dla $n>m$; oznaczając więc przez η najmniejszą z liczb $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_m$, otrzymamy nierówności (11).

Wzór (8) wynika stąd, że w zbiorze $\varDelta$ mamy

$$\frac{u'_n(z)}{u_n(z)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f'_\nu(z)}{1+f_\nu(z)}$$

i że prawa strona tożsamości

$$\left|\frac{I'(z)}{I(z)}-\frac{u'_n(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{|(u_n-I)I'-(u'_n-I')I|}{|u_nI|}$$

dąży w tym zbiorze jednostajnie do zera, gdy $n\to\infty$, bo licznik dąży jednostajnie do zera, a mianownik jest stale większy od η^2.

53. Twierdzenie Weierstrassa o rozkładzie.

Niech będzie dany dowolny ciąg liczb

$$z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots,\qquad\text{gdzie}\quad z_n\to\infty, \tag{12}$$

[1]) Dla $t\geqslant 0$ mamy $e^t=1+t+\ldots\geqslant 1+t$. Dla $t<0$ różnica $e^t-(1+t)$ ma pochodną e^t-1 ujemną, a więc jest to funkcja malejąca i to dodatnia dla $t<0$, bo dla $t=0$ równa się zeru.

[2]) Bo obszar $\varDelta$ ma odległość $\delta>0$ od brzegu obszaru D powiększonego o zbiór zer funkcji $I(z)$, a więc wystarczy do $\varDelta$ dołączyć wszystkie koła o promieniu $\delta/2$, których środki leżą na brzegu $\varDelta$.

o wyrazach różnych lub nie. Zbudujemy funkcję całkowitą $I(z)$, mającą zera w punktach (12), której każdy punkt zerowy jest tylekrotny, ile razy odnośny punkt powtarza się w ciągu (12).

Załóżmy, że wszystkie liczby z_n są różne od zera i niech $\{\alpha_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb całkowitych $\geqslant 0$ tak dobranych, aby szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_n}\right|^{\alpha_n+1} \tag{13}$$

był jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leqslant R$. Takie ciągi $\{\alpha_n\}$ zawsze istnieją. Np., gdy przyjmiemy $\alpha_n = n-1$, to w kole $|z| \leqslant R$

$$\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\alpha_n+1} = \left|\frac{z}{z_n}\right|^{n} < \left(\frac{R}{2R}\right)^{n} = \frac{1}{2^n},$$

gdy tylko $|z_n| > 2R$, a więc dla prawie wszystkich n, bo $z_n \to \infty$. Szereg (13) jest więc w kole $|z| \leqslant R$ jednostajnie zbieżny[1]).

Utwórzmy iloczyn nieskończony

$$I(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\alpha_n}}, \tag{14}$$

gdzie k niech będzie dowolną liczbą całkowitą $\geqslant 0$, a czynnik

$$e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\alpha_n}}$$

niech równa się 1, gdy $\alpha_n = 0$. Wykażemy za Weierstrassem, że:

Iloczyn (14) *jest bezwzględnie zbieżny na całej płaszczyźnie i przedstawia funkcję całkowitą mającą zera jedynie w punktach* (12) *i k-krotne zero w punkcie* 0, *gdy* $k > 0$.

Dowód[2]). Czynniki iloczynu (14) są funkcjami całkowitymi postaci

$$E_\alpha(u) = (1-u)\, e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^\alpha}{\alpha}}, \quad \text{gdzie} \quad u = \frac{z}{z_n}. \tag{15}$$

---

[1]) Ciąg $\{\alpha_n\}$ może być czasem ograniczony. Np. gdy $z_n = n^2$, wówczas można przyjąć $\alpha_n = 0$ dla każdego n, bo szereg $\Sigma z/n^2$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leqslant R$.

[2]) Gdyby ciąg (12) redukował się do n wyrazów początkowych, wówczas iloczyn $z^k\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$ byłby funkcją całkowitą znikającą jedynie w punktach (12) i ewentualnie w punkcie 0, gdy $k > 0$. Nasuwa się pytanie, czy w przypadku ogólnym iloczyn nieskończony

$$z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

przedstawia funkcję całkowitą znikającą jedynie w punktach (12) i w punkcie 0. Odpowiedź jest twierdząca, jeżeli dany iloczyn jest zbieżny na całej płaszczyźnie,

Wykażemy najpierw, że

$$|E_\alpha(u) - 1| < 6|u|^{\alpha+1} \quad \text{dla} \quad |u| < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

W tym celu zauważmy, że dla $|u| < 1$ mamy

$$1 - u = e^{\operatorname{Log}(1-u)} = e^{-\frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots},$$

a zatem

$$E_\alpha(u) = e^{g(u)}, \quad \text{gdzie} \quad g(u) = -\sum_{\nu=\alpha+1}^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu}.$$

Stosując nierówność

$$|e^z - 1| \leqslant \sum_{1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leqslant |z| \sum_{0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|\, e^{|z|},$$

otrzymamy

$$|E_\alpha(u) - 1| = |e^{g(u)} - 1| \leqslant |g(u)|\, e^{|g(u)|},$$

z czego wynika nierówność (16), bo

$$|g(u)| \leqslant |u|^{\alpha+1} \sum_{0}^{\infty} |u|^\nu = \frac{|u|^{\alpha+1}}{1 - |u|},$$

gdzie ostatni wyraz dla $|u| < 1/2$ jest mniejszy od $2|u|^{\alpha+1}$, a zatem

$$|g(u)| < 2|u|^{\alpha+1} \quad \text{oraz} \quad e^{|g(u)|} < e^{2|u|^{\alpha+1}} \leqslant e < 3,$$

gdyż $2|u|^{\alpha+1} \leqslant 1$.

Iloczyn nieskończony we wzorze (14) ma postać $\prod_{1}^{\infty} E_{\alpha_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| E_{\alpha_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) - 1 \right|$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leqslant R$, bo w myśl (16) mamy w kole $|z| \leqslant R$

$$\left| E_{\alpha_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) - 1 \right| < 6 \left|\frac{z}{z_n}\right|^{\alpha_n+1}$$

---

co ma miejsce wtedy, gdy w szeregu (13) można przyjąć $\alpha_n = 0$ (np. gdy $z_n = n^2$). Na ogół jednak iloczyn poprzedni nie określa funkcji całkowitej, a pomysł Weierstrassa polega na pomnożeniu każdego czynnika $1 - z/z_n$ przez pewien czynnik wykładniczy, jak we wzorze (14), nie posiadający zer, przez co iloczyn staje się zbieżny na całej płaszczyźnie.

dla prawie wszystkich n, szereg zaś (13) jest na podstawie założenia jednostajnie zbieżny, a zatem, na mocy twierdzenia na str. 116, iloczyn (14) jest bezwzględnie zbieżny na całej płaszczyźnie i przedstawia funkcję całkowitą. Jedynymi zerami tej funkcji są zera jej czynników; twierdzenie jest więc wykazane.

Niech $f(z)$ będzie dowolną funkcją całkowitą. Rozróżnimy trzy przypadki:

1° Jeżeli funkcja $f(z)$ nie ma zer, jak np. e^z, to $\log f(z)=h(z)$ jest również funkcją całkowitą, a zatem $f(z)$ daje się przedstawić w postaci $f(z)=e^{h(z)}$, gdzie $h(z)$ jest pewną funkcją całkowitą. Na odwrót, każda funkcja postaci $e^{h(z)}$, gdzie $h(z)$ jest dowolną funkcją całkowitą, jest funkcją całkowitą nie mającą zer.

2° Jeżeli funkcja $f(z)$ ma skończoną ilość miejsc zerowych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ różnych od zera i nadto k-krotne zero w punkcie 0, to daje się ona przedstawić w postaci iloczynu

$$f(z)=e^{h(z)}z^k\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_\nu}\right), \tag{17}$$

gdzie $h(z)$ jest pewną funkcją całkowitą, bo iloraz $f(z):\left[z_k\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_\nu}\right)\right]$ jest funkcją całkowitą nie mającą zer, a więc funkcją postaci $e^{h(z)}$.

3° Jeżeli wreszcie funkcja $f(z)$ ma nieskończenie wiele zer, to dają się one ułożyć w ciąg postaci (12), w którym wyrazy powtarzają się tyle razy, ile wynosi krotność odnośnych zer. Dzieląc $f(z)$ przez iloczyn (14) otrzymamy funkcję całkowitą nie mającą zer i wobec tego $f(z)$ daje się przedstawić w postaci iloczynu nieskończonego

$$f(z)=e^{h(z)}z^k\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_\nu}\right)e^{\frac{z}{z_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{a_\nu}\cdot\frac{z}{z_\nu}\right)^{a_\nu}}. \tag{18}$$

54. Przykłady do twierdzenia Weierstrassa. Podamy rozkład na czynniki trzech funkcyj całkowitych mających nieskończenie wiele zer.

1. Funkcja $\sin\pi z$. Zera tej funkcji można ułożyć w ciąg $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ i każde z nich jest jednokrotne[1]). Szereg (13), gdzie $z_{2\nu-1}=\nu$, $z_{2\nu}=-\nu$, staje się jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$, gdy przyjmiemy $a_n=1$ dla każdego n, a zatem na mocy wzoru (18) istnieje taka funkcja całkowita $h(z)$, że

$$\sin\pi z=e^{h(z)}z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{\nu}\right)e^{z/\nu}\right]\left[\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-z/\nu}\right]=e^{h(z)}z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right). \tag{19}$$

[1]) Bo np. $\sin z=z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)$, a czynnik w nawiasie jest $\neq 0$ dla $z=0$.

Wyznaczenie funkcji $h(z)$ nie jest łatwe. Do tego celu nie wystarcza oczywiście znajomość zer funkcji $\sin\pi z$; muszą być wzięte pod uwagę inne własności tej funkcji, jak okresowość itp. Wykażemy najpierw, że pochodna $h''(z)$ jest stała. Stosując do iloczynu (19) wzór (8) otrzymamy

$$\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z=h'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right), \tag{20}$$

a różniczkując obie strony (20)[1]), będziemy mieli

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=h''(z)-\frac{1}{z^2}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-\nu)^2}+\frac{1}{(z+\nu)^2}\right], \tag{21}$$

skąd

$$h''(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-\nu)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}.$$

Ponieważ prawa strona nie ulega zmianie, gdy z zastąpimy przez $z+1$, więc $h''(z)$ jest funkcją całkowitą okresową o okresie 1, a zatem wszystkie swe wartości przyjmuje w obszarze $D\{0\leqslant \mathrm{R}z\leqslant 1\}$.

Niech $z=x+iy$. W obszarze $D_1\{0\leqslant x\leqslant 1,\ |y|\geqslant 1\}$ mamy

$$\left|\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-\nu)^2}\right|\leqslant\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-\nu)^2+y^2}\leqslant 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+y^2}$$

i na mocy związku $2i\sin\pi z=e^{\pi zi}-e^{-\pi zi}=(e^{-y}-e^{y})\cos\pi x+i(e^{-y}+e^{y})\sin\pi x$

$$\left|\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}\right|=\frac{4\pi^2}{e^{2\pi y}+e^{-2\pi y}-2\cos 2\pi x}<\frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2},$$

a więc funkcja $h''(z)$ jest ograniczona w D_1 i $h''(z)\to 0$, gdy $y\to\infty$. W pozostałej części $D-D_1$ obszaru D funkcja $h''(z)$ jest oczywiście także ograniczona, a zatem na mocy twierdzenia Liouville'a jest stała i równa 0, bo dąży do 0, gdy $y\to\infty$. Mamy więc $h'(z)=c$, gdzie c jest pewną stałą.

Przyjmijmy we wzorze (20) $h'(z)=c$ i zastąpmy z przez $-z$. Otrzymamy $c=-c$, a więc $c=0$. Zatem funkcja $h(z)$ jest stała. Dzieląc teraz obie strony (19) przez z i przechodząc do granicy dla $z\to 0$, otrzymamy $e^{h(z)}=\pi$, a zatem

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right). \tag{22}$$

[1]) Prawą stronę różniczkujemy wyraz po wyrazie, co wolno, bo szereg jest jednostajnie zbieżny poza punktami 0, ν i $-\nu$.

Podstawiając w tym wzorze $z=1/2$, otrzymamy

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\nu^2-1}{4\nu^2},$$

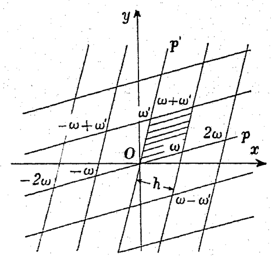
z czego po prostym przekształceniu wynika *wzór Wallisa*[1])

(23) $$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2\nu}{2\nu-1}\cdot\frac{2\nu}{2\nu+1}\cdot\ldots$$

2. Funkcja $\sigma(z)$ Weierstrassa. Jest to funkcja całkowita mająca zera jednokrotne w punktach

(24) $$n\omega+n'\omega', \qquad (n,n'=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

gdzie ω i ω' są dowolnie obranymi liczbami zespolonymi różnymi od zera o ilorazie ω'/ω nierzeczywistym[2]). Punkty (24) są wierzchołkami siatki równoległoboków o bokach równoległych do prostych $p=O\omega$ i $p'=O\omega'$ (rys. 48). Siatkę tę otrzymamy kreśląc przez punkty $n\omega$, gdzie $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, proste równoległe do prostej p', a przez punkty $n'\omega'$, gdzie $n'=0,\pm1,\pm2,\ldots$, proste równoległe do p.



Rys. 48.

Oznaczmy przez R_k obwód równoległoboku o środku 0, którego wierzchołkami są 4 punkty $\pm k\omega\pm k\omega'$. Na obwodzie R_1 leży 8 punktów (24), mianowicie ω, $\omega+\omega'$, ω', $-\omega+\omega'$, $-\omega$, $-\omega-\omega'$, $-\omega'$ i $\omega-\omega'$. Ogólnie, na R_k leży $8k$ punktów (24). Ułóżmy wszystkie punkty (24) w ciąg nieskończony

(25) $$w_0, w_1, w_2, \ldots,$$

przyjmując $w_0=0$ i grupując następnie punkty leżące na R_1, potem punkty leżące na R_2 itd. Wykażemy, że szereg

(26) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{w_\nu}\right|^3$$

jest zbieżny.

W tym celu oznaczmy przez $2h$ mniejszą z dwóch wysokości równoległoboku R_1 (rys. 48). Liczby w_ν leżące na R_1 spełniają nierówność $|w_\nu|\geqslant h$,

[1]) John Wallis (1616-1703).

[2]) Tzn. punkty 0, ω i ω' nie leżą na jednej prostej.

a liczby w_ν leżące na R_k spełniają nierówność $|w_\nu|\geqslant k\cdot h$. Ponieważ na R_k leży $8k$ punktów, więc część szeregu (26) pochodząca od punktów w_ν leżących na R_k jest niewiększa od

$$8k\frac{1}{(kh)^3}=\frac{8}{h^3}\cdot\frac{1}{k^2}.$$

Szereg (26) jest zbieżny, bo szereg $8h^{-3}\sum_1^{\infty}k^{-2}$ jest zbieżny.

Wobec tego szereg $\sum_1^{\infty}|z/w_\nu|^3$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$. Jeżeli więc we wzorze (14) przyjmiemy $z_\nu=w_\nu$ oraz $\alpha_\nu=2$, to otrzymamy funkcję całkowitą. Zatem funkcja określona iloczynem

(27) $$\sigma(z)=z\prod_{n,n'=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\omega+n'\omega'}\right)e^{\frac{z}{n\omega+n'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n\omega+n'\omega'}\right)^2},$$

gdzie n i n' przebiegają wszystkie wartości całkowite z wyjątkiem pary $n=0$, $n'=0$, jest całkowita i ma zera jednokrotne w punktach (24). Porządek czynników jest obojętny, bo iloczyn jest bezwzględnie zbieżny dla wszelkich z.

Ze wzoru (27) wnioskujemy, że $\sigma(-z)=-\sigma(z)$, bo pod znakiem iloczynu występuje obok mianownika $n\omega+n'\omega'$ również $-n\omega-n'\omega'$, a więc zastępując z przez $-z$ zmienimy jedynie porządek czynników o wskaźniku większym niż 1. Zatem $\sigma(z)$ *jest funkcją nieparzystą.*

3. *Iloczyn nieskończony*

(28) $$G(z)=z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-\frac{z}{\nu}}$$

przedstawia funkcję całkowitą mającą zera jednokrotne w punktach $0,-1,-2,\ldots$

Wynika to z twierdzenia Weierstrassa (str. 118), bo szereg (13), gdzie $z_n=-n$ oraz $\alpha_n=1$ dla każdego n, jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$.

55. Rząd funkcji całkowitej. Niech $f(z)$ będzie funkcją całkowitą różną od stałej, a $M(r)$ — największą wartością modułu $|f(z)|$ w kole $|z|\leqslant r$. W myśl twierdzenia Liouville'a $M(r)\to\infty$, gdy $r\to\infty$.

Szybkość wzrastania $M(r)$ charakteryzuje w pewnej mierze funkcję $f(z)$. Jeżeli istnieje taka liczba $\mu\geqslant0$, że dla dostatecznie dużych r

(29) $$M(r)\leqslant e^{r^\mu},$$

to mówimy, że $f(z)$ jest *funkcją rzędu skończonego.*

Kres dolny liczb $\mu \geqslant 0$ spełniających warunek (29) nazywamy *rzędem funkcji* $f(z)$. Liczba $\varrho \geqslant 0$ jest więc rzędem funkcji f, jeżeli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $R(\varepsilon)$, że nierówność (29), gdzie $\mu = \varrho + \varepsilon$, zachodzi dla $r > R(\varepsilon)$, natomiast dla $\mu = \varrho - \varepsilon$ warunek (29) nie jest spełniony dla dostatecznie dużych r.

Jeżeli warunek (29) nie jest spełniony dla dowolnie wielkiej wartości μ, to mówimy, że $f(z)$ jest *funkcją rzędu nieskończonego*.

PRZYKŁAD 1. Funkcja z^n jest rzędu 0, bo dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $r^n < e^{r^\varepsilon}$ dla ostatecznie wielkich r.

PRZYKŁAD 2. Funkcje e^z, $\sin z$ i $\cos z$ są rzędu 1, bo np. $|e^z| \leqslant e^r$, gdy $|z| \leqslant r$, oraz $|e^z| = e^r$, gdy $z = r$.

PRZYKŁAD 3. Funkcje e^{z^n} i $e^{P(z)}$, gdzie $P(z)$ jest wielomianem n-go stopnia, są rzędu n.

PRZYKŁAD 4. Funkcja e^{e^z} jest rzędu nieskończonego.

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć obszar zbieżności iloczynu

$$\text{a)}\ \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^n}{n}\right), \qquad \text{b)}\ \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^2}\right), \qquad \text{c)}\ \prod_1^\infty [1 - (n+1)^{-z}].$$

2. Wykazać, że a) $\prod\limits_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \dfrac{1}{1-z}$ dla $|z| < 1$, b) $\prod\limits_1^\infty \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$ (zastosować wzór 22).

3. Przedstawić w postaci iloczynu nieskończonego a) $e^z - 1$, b) $\cos z$, c) $\sin z - \sin a$.

4. Wykazać, że iloczyn $f(z) = \prod\limits_1^\infty \dfrac{z - a_n}{z - b_n}$, gdzie ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolne, byleby szereg $\sum\limits_1^\infty |a_n - b_n|$ był zbieżny, przedstawia funkcję analityczną w otoczeniu każdego punktu różnego od wyrazów ciągu $\{b_n\}$ i ich punktów skupienia; jeżeli punkty a_n leżą wewnątrz pewnego obszaru D, a punkty b_n leżą wszędzie gęsto na brzegu D i każdy izolowany punkt brzegowy powtarza się w ciągu $\{b_n\}$ nieskończenie wiele razy, to funkcja $f(z)$ jest nieprzedłużalna poprzez brzeg.

5. Wykazać, że iloczyn $\Phi(z) = z^k \prod\limits_{n=1}^\infty \dfrac{z - a_n}{z - 1/\bar{a}_n}$, gdzie ciąg $\{a_n\}$ jest dowolny, byleby szereg $\sum (1 - |a_n|^2)$ był zbieżny i $0 < |a_n| < 1$, przedstawia w kole $|z| < 1$ funkcję analityczną ograniczoną, mającą zera w punktach $0, a_1, a_2, \ldots$

6. Niech $c(z)$ będzie funkcją całkowitą mającą zera jednokrotne w punktach $z_1, z_2, \ldots$, gdzie $z_n \to \infty$, $z_n \neq 0$ i $z_j \neq z_k$ dla $j \neq k$, i niech $w_1, w_2, \ldots$ będzie dowolnym ciągiem liczb. Wykazać, że a) jeżeli szereg $\sum\limits_1^\infty |w_n/[z_n c'(z_n)]|$ jest zbieżny, to wzór [1])

$$g(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{w_n}{c'(z_n)} \cdot \frac{c(z)}{z - z_n}$$

przedstawia funkcję całkowitą mającą w punkcie z_k wartość w_k, $k = 1, 2, \ldots$, b) można zawsze tak dobrać ciąg liczb całkowitych nieujemnych $\{\lambda_n\}$, aby szereg

$$G(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{w_n}{c'(z_n)} \cdot \frac{c(z)}{z - z_n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}$$

był zbieżny na całej płaszczyźnie i przedstawiał funkcję całkowitą mającą w punktach z_k wartości w_k.

ROZWIĄZANIA.

1. a) $|z| < 1$, b) cała płaszczyzna, c) $\mathrm{R}z > 1$. — **2.** Bo $u_n = \prod\limits_{k=1}^n (1 + z^{2^k}) = s_{2^{n+1}-1}$, gdzie $s_k = 1 + z + \ldots + z^k$, a więc $\lim u_n = \lim s_n = 1/(1-z)$, b) wstawić w (22) $z = \cdot$ — **3.** a) $e^z - 1 = 2i\, e^{z/2} \sin(z/2i) = z e^{z/2} \prod\limits_{\nu=1}^\infty \left(1 + \dfrac{z^2}{4\pi^2\nu^2}\right)$, b) $\cos z = \prod\limits_{\nu=1}^\infty \left[1 - \dfrac{4z^2}{(2\nu-1)^2\pi^2}\right]$,

c) $\sin z - \sin a = 2 \sin \dfrac{z-a}{2} \cdot \cos \dfrac{z+a}{2} = (z-a) \prod\limits_{\nu=1}^\infty \left[1 - \dfrac{(z-a)^2}{(2\nu\pi)^2}\right]\left[1 - \dfrac{(z+a)^2}{(2\nu-1)^2\pi^2}\right]$. — **4.** Iloczyn jest jednostajnie zbieżny poza punktami b_n i ich punktami skupienia, bo szereg $\sum \left|\dfrac{a_n - b_n}{z - b_n}\right|$ jest jednostajnie zbieżny; funkcja $f(z)$ nie jest przedłużalna poprzez brzeg, bo w przeciwnym razie byłaby tożsamościowo równa zeru, gdyż każdy punkt brzegowy jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$, tj. ciągu zer danej funkcji. — **5.** Szereg $\sum (1 - |a_n|^2)$ jest zbieżny, a więc iloczyn $\prod \dfrac{z - a_n}{z - 1/\bar{a}_n} = \prod \left(1 + \dfrac{1 - |a_n|^2}{\bar{a}_n z - 1}\right)$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leqslant r < 1$; funkcja $\Phi(z)$ jest ograniczona w kole $|z| < 1$, bo moduły czynników iloczynu są mniejsze od 1. — **6.** Niech $|c(z)| \leqslant M$ w kole $|z| \leqslant R$ i niech liczba $N = N(R, \varepsilon)$ będzie tak duża, aby dla $n > N$ było $|z_n/(z - z_n)| < 2$ w kole $|z| \leqslant R$ oraz $\sum\limits_{\nu=n}^\infty |w_\nu/[z_\nu c'(z_\nu)]| < \varepsilon/2M$. Wówczas dla $n \geqslant N$ mamy

$$\left|\sum_{\nu=n}^\infty \frac{w_\nu}{c'(z_\nu)} \cdot \frac{c(z)}{z - z_\nu}\right| = |c(z)| \cdot \left|\sum_{\nu=n}^\infty \frac{w_\nu}{z_\nu c'(z_\nu)} \cdot \frac{z_\nu}{z - z_\nu}\right| \leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

w kole $|z| \leqslant R$, a więc szereg $g(z)$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leqslant R$ i wobec tego przedstawia funkcję całkowitą. W punkcie $z = z_k$ mamy $g(z_k) = w_k$, bo wyraz k-ty szeregu równa się w_k, gdyż $c(z)/(z - z_k) \to c'(z_k)$, gdy $z \to z_k$, wszystkie zaś inne wyrazy są równe zeru, ponieważ $c(z_k) = 0$.

---

[1]) Wzór ten redukuje się do wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, gdy

$$e(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

i sumowanie rozciąga się na n wyrazów początkowych.

icm

ROZDZIAŁ XII

Funkcje meromorficzne

56. Rozkład funkcji meromorficznej. Funkcję analityczną na całej płaszczyźnie otwartej poza pewnym zbiorem punktów odosobnionych, w których ma bieguny, nazywamy *funkcją meromorficzną*[1]).

Do najprostszych funkcji meromorficznych należą funkcje wymierne. Są one meromorficzne na płaszczyźnie domkniętej, bo punkt ∞ jest dla nich również punktem regularnym lub biegunem. Np. funkcja $z^k/(z^2-1)$ jest meromorficzna i ma trzy bieguny 1, -1 i ∞, gdy $k>2$, a gdy $k\leqslant 2$, wówczas ∞ jest punktem regularnym (str. 85). Wykażemy, że na odwrót:

Każda funkcja meromorficzna na płaszczyźnie domkniętej jest funkcją wymierną.

Dowód. Zbiór biegunów takiej funkcji musi być skończony, bo w przeciwnym razie miałby punkt skupienia, a punkt skupienia biegunów nie jest punktem regularnym ani biegunem (gdyż bieguny są odosobnione). Niech $b_1, b_2, \ldots, b_p$ będą biegunami danej funkcji $R(z)$, różnymi od ∞, i niech

$$(1)\qquad g_\nu(z)=\frac{c_{k_\nu}^{(\nu)}}{(z-b_\nu)^{k_\nu}}+\frac{c_{k_\nu-1}^{(\nu)}}{(z-b_\nu)^{k_\nu-1}}+\ldots+\frac{c_1^{(\nu)}}{z-b_\nu}$$

będzie częścią główną bieguna b_ν. Wówczas różnica $R(z)-\sum\limits_1^p g_\nu(z)$ nie ma punktów osobliwych na płaszczyźnie otwartej, a więc jest pewną funkcją całkowitą $w(z)$ i to wielomianem, bo w przeciwnym razie punkt ∞ byłby istotnie osobliwy. Mamy więc

$$(2)\qquad R(z)=w(z)+\sum_1^p g_\nu(z),$$

a zatem $R(z)$ jest funkcją wymierną.

[1]) Funkcje całkowite zaliczamy do meromorficznych. Funkcja meromorficzna jest zawsze jednoznaczna. Punkt ∞ może nie być ani punktem regularnym ani biegunem.

Poszczególne ułamki postaci $c_k/(z-b_\nu)^k$ w sumie (2) nazywamy *ułamkami prostymi*, wzór (2) podaje więc rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Funkcja meromorficzna może mieć nieskończenie wiele biegunów. Np. $\operatorname{ctg} z$ ma bieguny w punktach $k\pi$, gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ W każdym obszarze ograniczonym może istnieć co najwyżej skończona ilość biegunów, bo punkt skupienia biegunów nie jest ani punktem regularnym ani biegunem. Jeżeli więc funkcja meromorficzna ma nieskończenie wiele biegunów, to dają się one ułożyć w ciąg

$$(3)\qquad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \quad \text{gdzie } b_n\to\infty.$$

Powstają pytania: 1° Czy istnieje funkcja meromorficzna mająca w punktach z góry danego ciągu (3) bieguny o dowolnie naprzód danych częściach głównych postaci (1)? 2° Czy każdą funkcję meromorficzną można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych, podobnie jak funkcję wymierną? Odpowiedź pozytywną na te pytania dał Mittag-Leffler.

57. Twierdzenie Mittag-Lefflera. Załóżmy, że wyrazy ciągu (3) są różne między sobą i różne od zera i że $|b_1|\leqslant|b_2|\leqslant\ldots$ Przyporządkujmy każdemu wyrazowi b_ν funkcję $g_\nu(z)$ postaci (1). Funkcję $g_\nu(z)$ można w kole $|z|<|b_\nu|$ rozwinąć w szereg potęgowy

$$g_\nu(z)=a_0^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}z+\ldots+a_n^{(\nu)}z^n+\ldots$$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny w kole $|z|\leqslant|b_\nu|/2$, a więc istnieje taka liczba naturalna n_ν, że oznaczając przez $w_\nu(z)$ wielomian

$$(4)\qquad w_\nu(z)=a_0^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}z+\ldots+a_{n_\nu}^{(\nu)}z^{n_\nu},$$

otrzymamy nierówność

$$(5)\qquad |g_\nu(z)-w_\nu(z)|<\frac{1}{\nu^2}\quad \text{dla}\quad |z|\leqslant\frac{1}{2}|b_\nu|.$$

Niech $g_0(z)$ oznacza wyrażenie postaci (1), gdzie $b_0=0$. Wykażemy, że: *Szereg*

$$(6)\qquad G(z)=g_0(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}[g_\nu(z)-w_\nu(z)]$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$ po odrzuceniu skończonej ilości wyrazów początkowych i przedstawia funkcję meromorficzną mającą w punktach b_ν bieguny o częściach głównych (1).

Dowód. Ponieważ $b_\nu\to\infty$, więc istnieje taka liczba p, że koło $|z|\leqslant R$ mieści się w każdym kole $|z|\leqslant|b_\nu|/2$ dla $\nu>p$. Na mocy nierówności (5) i kryterium Weierstrassa (str. 25) szereg $\sum_{p+1}^{\infty}[g_\nu(z)-w_\nu(z)]$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w kole $|z|\leqslant R$, a więc przedstawia w nim funkcję analityczną. Zatem szereg (6) jest zbieżny w kole $|z|\leqslant R$ poza punktami $b_0, b_1, \dots, b_p$ i przedstawia w nim funkcję meromorficzną, mającą w punktach $b_0, b_1, \dots, b_p$ bieguny o częściach głównych (1). Gdy R jest dostatecznie wielkie, wówczas każdy punkt (3) leży w kole $|z|\leqslant R$, a więc twierdzenie jest udowodnione[1]).

Niech $F(z)$ będzie dowolną funkcją meromorficzną. Możliwe są trzy przypadki: Jeśli $F(z)$ nie ma żadnych biegunów na płaszczyźnie otwartej, to jest funkcją całkowitą. Jeżeli ma skończoną ilość biegunów $b_1, b_2, \dots, b_n$ o częściach głównych (1), to różnica $F(z)-\sum_1^n g_\nu(z)$ jest pewną funkcją całkowitą $f(z)$, a więc

$$F(z)=f(z)+\sum_1^n g_\nu(z).$$

Jeżeli wreszcie $F(z)$ ma nieskończenie wiele biegunów (3) różnych od zera i nadto biegun $b_0=0$ o częściach głównych (1), to różnica $F(z)-G(z)$ jest pewną funkcją całkowitą $f(z)$; zatem

$$F(z)=f(z)+g_0(z)+\sum_1^\infty[g_\nu(z)-w_\nu(z)]. \tag{7}$$

Jest to rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste podany przez Mittag-Lefflera.

Zauważmy, że funkcja meromorficzna $\operatorname{tg} z$ jest ilorazem dwóch funkcji całkowitych $\sin z/\cos z$. Podobnie każda funkcja wymierna jest ilorazem dwóch funkcji całkowitych wymiernych. Wykażemy, że ogólnie:

Każda funkcja meromorficzna jest ilorazem dwóch funkcji całkowitych i na odwrót, iloraz dwu funkcji całkowitych jest funkcją meromorficzną.

Istotnie, niech $F(z)$ będzie funkcją meromorficzną. Zbudujmy funkcję całkowitą $g(z)$ mającą zera w biegunach funkcji $F(z)$ i niech zero będzie k-krotne, gdy biegun jest k-krotny. Iloczyn $F(z)g(z)$ nie ma wówczas punktów osobliwych, bo gdy b jest biegunem k-krotnym funkcji $F(z)$, wówczas jest punktem regularnym iloczynu $F(z)(z-b)^k$. Równocześnie funkcja $g(z)=(z-b)^k\gamma(z)$, gdzie $\gamma(z)$ jest funkcją całkowitą, ma zero k-krotne, a zatem b jest punktem regularnym iloczynu $F\cdot g$. Iloczyn $F\cdot g$ jest więc pewną funkcją całkowitą $f(z)$, skąd $F=f/g$.

Na odwrót, jedynymi punktami osobliwymi ilorazu f/g dwóch funkcji całkowitych mogą być punkty zerowe funkcji g; te ostatnie są co najwyżej biegunami ilorazu, a więc f/g jest funkcją meromorficzną.

---

[1]) Gdyby szereg $\sum g_\nu(z)$ był jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$ po odrzuceniu skończonej ilości wyrazów, to można by w szeregu (6) odrzucić odjemniki $w_\nu(z)$.

58. Przykłady do twierdzenia Mittag-Lefflera. 1. Funkcja $\operatorname{ctg} z$. Jest to funkcja meromorficzna, mająca bieguny w punktach

$$b_0=0,\quad b_{2\nu-1}=\nu\pi,\quad b_{2\nu}=-\nu\pi \quad \text{dla} \quad \nu=1,2,\dots$$

Częścią główną bieguna b_ν jest $g_\nu(z)=1/(z-b_\nu)$[1]). We wzorze (7) dla $\operatorname{ctg} z$ można przyjąć $w_\nu(z)=-1/b_\nu$ dla $\nu>0$.

Istotnie, w kole $|z|\leqslant|b_\nu|/2$ mamy $|z-b_\nu|\geqslant|b_\nu|/2$, a więc

$$|g_\nu(z)-w_\nu(z)|=|z/b_\nu(z-b_\nu)|<2|z|/|b_\nu|^2. \tag{8}$$

Nierówność ta zachodzi w dowolnym kole $|z|\leqslant R$ dla prawie wszystkich ν, bo $b_\nu\to\infty$; zatem szereg $\sum_1^\infty|g_\nu(z)-w_\nu(z)|$ jest — po odrzuceniu skończonej ilości wyrazów — jednostajnie zbieżny w kole $|z|\leqslant R$, bo szereg $\sum_1^\infty 1/|b_\nu|^2$ jest zbieżny. Na mocy wzoru (7) mamy więc

$$\operatorname{ctg} z=f(z)+\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^\infty\left[\left(\frac{1}{z-\nu\pi}+\frac{1}{\nu\pi}\right)+\left(\frac{1}{z+\nu\pi}-\frac{1}{\nu\pi}\right)\right],$$

gdzie $f(z)$ jest pewną funkcją całkowitą. Wykazaliśmy, że we wzorze (20) na str. 121 $h'(z)=0$; zatem $f(z)=0$, a więc

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^\infty\left(\frac{1}{z-\nu\pi}+\frac{1}{z+\nu\pi}\right). \tag{9}$$

2. Funkcja $\wp(z)$ Weierstrassa. Zbudujemy funkcję meromorficzną mającą w punktach zerowych $w_0, w_1, w_2, \dots$ funkcji $\sigma(z)$ Weierstrassa (str. 122) bieguny dwukrotne o części głównej

$$g_\nu(z)=1/(z-w_\nu)^2 \tag{10}$$

w biegunie w_ν. Zakładamy, że $w_0=0$, a więc $|w_\nu|>0$ dla $\nu>0$. Niech $w_\nu(z)=1/w_\nu^2$ dla $\nu>0$. W kole $|z|\leqslant|w_\nu|/2$ mamy $|z-w_\nu|\geqslant|w_\nu|/2$, a więc

$$|g_\nu(z)-w_\nu(z)|=\left|\frac{1}{(z-w_\nu)^2}-\frac{1}{w_\nu^2}\right|=$$

$$=\left|\frac{2zw_\nu-z^2}{w_\nu^2(z-w_\nu)^2}\right|\leqslant\frac{4|z|(2|w_\nu|+|z|)}{|w_\nu|^4}\leqslant\frac{10|z|}{|w_\nu|^3}.$$

---

[1]) Częścią główną bieguna 0 jest $1/z$, bo w otoczeniu pierścieniowym tego punktu mamy

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}\cdot\frac{1-z^2/2!+z^4/4!-\dots}{1-z^2/3!+z^4/5!-\dots}=\frac{1}{z}(1+a_2z^2+a_4z^4+\dots).$$

Częścią główną bieguna b_ν jest $1/(z-b_\nu)$, bo $\operatorname{ctg}(z-b_\nu)=\operatorname{ctg} z$.

Nierówność ta zachodzi w dowolnym kole $|z|\leqslant R$ dla prawie wszystkich ν, bo $w_\nu\to\infty$; zatem szereg $\sum\limits_{1}^{\infty}|g_\nu(z)-w_\nu(z)|$ jest — po odrzuceniu skończonej ilości wyrazów — jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z|\leqslant R$, bo szereg (26) na str. 122 jest zbieżny. Na mocy paragrafu poprzedniego funkcja określona wzorem

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-w_\nu)^2}-\frac{1}{w_\nu^2}\right] \tag{11}$$

spełnia żądane warunki.

Funkcja ta, wprowadzona przez Weierstrassa, odgrywa ważną rolę w teorii funkcji eliptycznych.

3. **Funkcja $\zeta(z)$ Weierstrassa.** Jest to pochodna logarytmiczna funkcji całkowitej $\sigma(z)$ określonej wzorem (zob. wzór (27), str. 123)

$$\sigma(z)=z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{w_\nu}\right)e^{\frac{z}{w_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{w_\nu}\right)^2}, \tag{12}$$

gdzie $w_1, w_2, \ldots$ są liczbami różnymi od zera postaci

$$n\omega+n'\omega' \qquad (n,n'=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

ułożonymi dowolnie w ciąg. Stosując wzór (8) ze str. 116, otrzymamy

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-w_\nu}+\frac{1}{w_\nu}+\frac{z}{w_\nu^2}\right). \tag{13}$$

Jako iloraz dwóch funkcji całkowitych, $\zeta(z)$ jest funkcją meromorficzną (str. 128) i ma w tych samych punktach w_ν co $\wp(z)$ bieguny jednokrotne o części głównej $1/(z-w_\nu)$. Różniczkując obustronnie (13) otrzymamy na mocy wzoru (11)

$$\wp(z)=-\zeta'(z)=-\left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right]'. \tag{14}$$

4. **Funkcja $\Gamma(z)$ Eulera.** K. F. Gauss określił *funkcję gamma Eulera* [1]) jako granicę następującego ciągu funkcji meromorficznych

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \quad \text{gdzie} \quad n^z=e^{z\,\mathrm{Log}\,n}. \tag{15}$$

Wykażemy, że granica ta istnieje dla wszystkich $z\neq0,-1,-2,\ldots$

---

[1]) L. Euler (1707-1784).

W tym celu zauważmy, że n-ty wyraz ciągu można napisać w postaci $e^{z\,\mathrm{Log}\,n}:[z(1+z/1)(1+z/2)\ldots(1+z/n)]$, a więc jest on odwrotnością iloczynu

$$e^{\gamma_n z}z\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-z/\nu}, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\mathrm{Log}\,n. \tag{16}$$

Wiadomo z analizy, że ciąg $\{\gamma_n\}$ jest zbieżny do liczby

$$\gamma=0{,}577\,215\ldots$$

zwanej *stałą Eulera*[1]). Iloczyn (16) bez czynnika pierwszego jest n-tym iloczynem cząstkowym iloczynu nieskończonego (28) na str. 123, a więc iloczyn (16) jest zbieżny na całej płaszczyźnie i przedstawia funkcję całkowitą mającą zera jednokrotne w punktach $0, -1, -2, \ldots$ Zatem poza tymi punktami istnieje granica (15), a jej odwrotność wyraża się wzorem

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-z/\nu}. \tag{17}$$

Funkcja $\Gamma(z)$ jest więc odwrotnością funkcji całkowitej (17) i wobec tego jest funkcją meromorficzną o biegunach jednokrotnych w punktach $0, -1, -2, \ldots$

Z wzoru (15) wynika bezpośrednio, że $\Gamma(1)=1$. Wykażemy, że dla każdego z różnego od $0, -1, -2, \ldots$ zachodzą związki

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \tag{18}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{19}$$

Pierwszy wynika z tożsamości

$$\frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)}=z\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\cdot\frac{n}{z+n+1},$$

bo gdy $n\to\infty$, wówczas lewa strona dąży do $\Gamma(z+1)$, prawa zaś do $z\Gamma(z)$. Aby wykazać drugi, zauważmy, że na mocy (17) i wzoru (22), str. 121,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-z^2\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)=-z\frac{\sin\pi z}{\pi},$$

na mocy zaś (18) $\Gamma(-z+1)=-z\Gamma(-z)$, a więc wzór (19) jest prawdziwy.

Ze związku (18) otrzymamy

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{20}$$

---

[1]) Zob. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1949, str. 244.

Związek (19) dla $z=1/2$ daje $[\Gamma(1/2)]^2=\pi$, a więc

(21) $$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

Wykażemy jeszcze, że:

Część główna bieguna $z=-n$ funkcji $\Gamma(z)$ wynosi

(22) $$\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z+n}.$$

Istotnie, bieguny są jednokrotne, a więc w otoczeniu pierścieniowym punktu $-n$ szereg Laurenta funkcji $\Gamma(z)$ ma postać

$$\Gamma(z)=\frac{a_1}{z+n}+a_0+a_1(z+n)+a_2(z+n)^2+\dots$$

Wystarczy wykazać, że iloczyn $(z+n)\Gamma(z)$ dąży do $(-1)^n/n!$, gdy $z\to-n$. Otóż stosując n-krotnie związek (18), otrzymamy

$$\Gamma(z+n+1)=z(z+1)\dots(z+n)\Gamma(z),$$

skąd

$$(z+n)\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}.$$

Gdy $z\to-n$, wówczas prawa strona tej tożsamości dąży do

$$\frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\dots(-1)},$$

czyli do $(-1)^n/n!$, czego należało dowieść.

Obok funkcji elementarnych funkcja $\Gamma(z)$ jest jedną z najważniejszych w analizie. Jest ona uogólnieniem funkcji $n!$ na dowolne wartości zespolone zmiennej z. Szczególnie częste zastosowanie znajduje następujący *wzór Stirlinga*

(23) $$n!\cong e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi},$$

w którym znak $\cong$ zwany *równością asymptotyczną* oznacza, że stosunek obu stron dąży do 1, gdy $n\to\infty$. Wzór ten jest przypadkiem szczególnym równości asymptotycznej

(23′) $$\Gamma(z+1)\cong e^{-z}z^{z+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi},\qquad \text{gdzie}\quad z^{z+\frac{1}{2}}=e^{(z+\frac{1}{2})\operatorname{Log} z},$$

gdy $z\to\infty$ po dowolnych wartościach spełniających warunek

$$-\pi+\delta\leqslant\operatorname{Arg} z\leqslant\pi-\delta,$$

gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od π.

W półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z>0$ można funkcję $\Gamma(z)$ przedstawić za pomocą całki niewłaściwej (str. 75)[1])

[1]) Wzory (23′) i (24) podaję bez dowodu. Dowód wzoru (23) znajdzie czytelnik w książce cytowanej na str. 131.

(24) $$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

która nosi nazwę *całki Eulera II rodzaju*[1]).

5. **Funkcja $\zeta(z)$ Riemanna.** Jest to funkcja analityczna określona w półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z>1$ szeregiem (str. 72)

(25) $$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\qquad \text{gdzie}\quad n^z=e^{z\operatorname{Log} n}.$$

Funkcja ta odgrywa ważną rolę w teorii liczb, co ma swe źródło w następującej tożsamości odkrytej przez **Eulera**:

(26) $$\zeta(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-z}},$$

gdzie $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$ i ogólnie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą w ciągu liczb naturalnych.

Aby wykazać równość (26) zauważmy, że przy każdym $\delta>0$ mamy

$$\frac{1}{|p_n^z|}<\frac{1}{|n^z|}\leqslant\frac{1}{n^{1+\delta}}\quad \text{dla}\quad \mathrm{R}z\geqslant1+\delta\qquad (n=1,2,\dots),$$

a więc szereg $\sum p_n^{-z}$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny dla $\mathrm{R}z\geqslant1+\delta$, a przez to iloczyn $\prod_1^\infty(1-p_n^{-z})$ oraz obie strony (26) są funkcjami analitycznymi w półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z>1$. Wystarczy więc wykazać, że równość (26) zachodzi dla wartości rzeczywistych $z>1$ (zob. str. 66). Przyjmijmy dla $k=2,3,\dots$

$$f_k(z)=\prod_{n=1}^{k}\frac{1}{1-p_n^{-z}}=\prod_{n=1}^{k}(1+p_n^{-z}+p_n^{-2z}+\dots).$$

Wykonując ostatnie mnożenie wyraz po wyrazie, co wolno, bo szeregi w nawiasie są bezwzględnie zbieżne, spostrzegamy, że $f_k(z)$ jest sumą wyrazów postaci $(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k})^{-z}$, gdzie wykładniki α_ν przebiegają wszystkie liczby $0,1,2,\dots$ Poszczególne te wyrazy są między sobą różne i wśród nich znajduje się co najmniej k początkowych wyrazów szeregu (25),

[1]) Całka $B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$ nosi nazwę *całki Eulera I rodzaju*. Całka ta istnieje dla tych wartości zespolonych z i w, dla których $\mathrm{R}z>0$ i $\mathrm{R}w>0$, i dla stałego w przedstawia funkcję analityczną zmiennej z. Dowodzi się, że funkcja $B(z,w)$, zwana *funkcją beta Eulera*, spełnia związki

$$B(z,w)=B(w,z),\qquad B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

bo każda liczba naturalna $n \leqslant k$ daje się w jeden tylko sposób przedstawić w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$. Zatem dla rzeczywistych $x > 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^x} \leqslant f_k(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

skąd, przechodząc do granicy dla $k \to \infty$, otrzymamy równość (26) dla wartości rzeczywistych $z > 1$, a przez to na całej płaszczyźnie $\mathrm{R}z > 1$.

O funkcji $\zeta(z)$ Riemanna dowodzi się, że:

1° Jest ona przedłużalna analitycznie na całą płaszczyznę otwartą bez punktu $z=1$ i w punkcie $z=1$ ma biegun o części głównej $1/(z-1)$, a zatem $\zeta(z)$ jest funkcją meromorficzną, różnica zaś

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

jest funkcją całkowitą.

2° W półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z > 1$ funkcja $\zeta(z)$ jest różna od zera, w półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z < 0$ ma zera jednokrotne w punktach $-2, -4, -6, \ldots$, a w pasie $0 \leqslant \mathrm{R}z \leqslant 1$ ma jeszcze nieskończenie wiele zer. Istnieje przypuszczenie, zwane *hipotezą Riemanna*, że wszystkie zera zawarte w tym pasie leżą na prostej $\mathrm{R}z = 1/2$. Hipoteza ta nie została dotąd udowodniona, wykazano jedynie, że na prostej $\mathrm{R}z = 1/2$ leży nieskończenie wiele zer.

ĆWICZENIA.

1. Wyprowadzić wzór (9) na $\operatorname{ctg} z$ (str. 129) z wzoru (22) na $\sin z$ (str. 121).

2. Wykazać, że funkcje meromorficzne $z \operatorname{ctg} z$ i $\dfrac{2zi}{e^{2zi}-1}$ mają te same bieguny i w nich te same części główne, a więc różnią się o pewną funkcję całkowitą $h(z)$. Znaleźć $h(z)$.

3. Rozłożyć na ułamki proste a) $\operatorname{tg} z$, b) $\dfrac{z}{e^z-1}$, c) $\dfrac{1}{\sin z}$.

4. Wykazać, że dla $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ mamy $\left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2}$.

5. Czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami zespolonymi i $b \neq 0, -1, -2, \ldots$?

ROZWIĄZANIA.

1. Zastosować do iloczynu (22), str. 121, wzór na pochodną logarytmiczną (str. 116). — **2.** W myśl wzorów Eulera (str. 30) $z \operatorname{ctg} z = \dfrac{2zi}{e^{2zi}-1} + iz$, a więc $h(z) = iz$. —

3. a) Stosując przykład 3 b), str. 124, otrzymamy

$$\operatorname{tg} z = -(\log \cos z)' = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - a_\nu^2}, \quad \text{gdzie} \quad a_\nu = (2\nu-1)\frac{\pi}{2},$$

b) stosując tożsamość $\dfrac{z}{e^z-1} = \dfrac{z}{2i} \operatorname{ctg}\left(\dfrac{z}{2i}\right) - \dfrac{z}{2}$ i wzór (9), str. 129, otrzymamy

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2+4\pi^2\nu^2}, \quad \text{c)} \quad \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2z}{z^2-\pi^2\nu^2}.$$

4. Wynika to z wzoru (21), str. 121, bo w nim $h''(z) = 0$. — **5.** Jeżeli $\mathrm{R}a < \mathrm{R}b$, to granica istnieje i równa się zeru (zastosować wzór (15)).

ROZDZIAŁ XIII

Funkcje eliptyczne

59. Funkcje okresowe. Funkcję $f(z)$ określoną w pewnym obszarze D nazywamy *okresową*, jeśli istnieje taka liczba $\omega\neq 0$, że wraz z punktem z również punkty $z+\omega$ i $z-\omega$ należą do D oraz

$$f(z+\omega)=f(z) \quad \text{dla} \quad z\in D. \tag{1}$$

Liczbę ω nazywamy wówczas *okresem* funkcji $f(z)$.

Zastępując w (1) z przez $z+\omega$ lub przez $z-\omega$, spostrzegamy, że obok ω również liczby 2ω, $-\omega$ i ogólnie $n\omega$, gdzie $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$, są okresami. Podobnie, jeżeli liczby ω i ω' są okresami, to wszystkie liczby postaci $n\omega+n'\omega'$, gdzie $n,n'=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, są też okresami. Liczbę 0 zaliczamy do okresów funkcji okresowej. Funkcja stała jest oczywiście okresowa; jej okresami są wszystkie liczby. Wykażemy, że:

Zbiór okresów funkcji analitycznej jednoznacznej różnej od stałej nie może mieć punktu skupienia różnego od ∞.

Istotnie, w przeciwnym razie istniałby ciąg zbieżny okresów $\{w_n\}$ o wyrazach różnych. Wówczas ciąg $\{z+w_n-w_{n-1}\}$ dla dowolnego z byłby zbieżny do z. W punktach tego ciągu funkcja miałaby równe wartości, a więc byłaby stała, wbrew założeniu.

PRZYKŁAD 1. Funkcje e^z i $\sin 2\pi z$ są okresowe i mają odpowiednie okresy $2\pi i$ i 1.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\operatorname{tg}(\pi z/\omega)$ ma okresy $n\omega$, gdzie $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną jednoznaczną, okresową i różną od stałej i niech ω będzie jej okresem różnym od zera i najbliższym zera (nie dalszym niż inne)[1]). Wówczas wszystkie liczby postaci

$$n\omega \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{2}$$

[1]) Okres taki istnieje, bo w przeciwnym razie liczba 0 byłaby punktem skupienia okresów i funkcja byłaby stała.

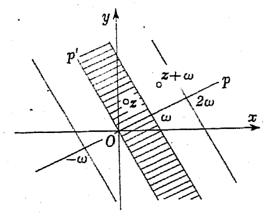
są też okresami danej funkcji i leżą na prostej $p=0\omega$ (rys. 49). Możliwe są dwa przypadki:

1° Wszystkie okresy leżą na prostej p. Wówczas wszystkie okresy są postaci (2), bo gdyby na prostej p leżał inny jeszcze okres, to byłby postaci $w=(n+\theta)\omega$, gdzie $0<\theta<1$, i wtedy liczba $w-n\omega=\theta\omega$ byłaby też okresem i to bliższym zera niż ω.

2° Istnieją okresy poza prostą p. Wśród nich niech ω' będzie okresem najbliższym zera. Wówczas stosunek ω'/ω nie jest liczbą rzeczywistą i wszystkie liczby postaci

$$n\omega+n\omega' \qquad (n,n'=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{3}$$

są też okresami. Wykażemy, że poza liczbami (3) funkcja nie ma innych okresów.

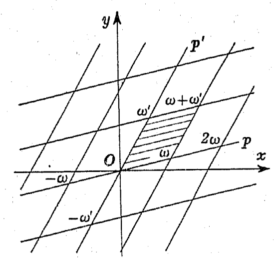


Rys. 49.

Istotnie, w przeciwnym razie istniałby okres postaci

$$w=(n+\theta)\omega+(n'+\theta')\omega', \quad \text{gdzie} \quad 0\leqslant\theta<1, \quad 0\leqslant\theta'<1, \quad \theta+\theta'>0.$$

Wówczas liczba $w'=\theta\omega+\theta'\omega'$ byłaby okresem leżącym wewnątrz lub na brzegu równoległoboku o wierzchołkach 0, ω, $\omega+\omega'$, ω' (rys. 50), lecz poza wierzchołkami. Nie może ona jednak leżeć w trójkącie $0\omega\omega'$, bo wobec nierówności $|\omega|\leqslant|\omega'|$ leżałaby w kole $|z|<|\omega'|$, co jest sprzeczne z określeniem okresu ω'. Liczba w' nie może też leżeć w trójkącie o wierzchołkach ω, $\omega+\omega'$, ω', bo wtedy liczba $\omega+\omega'-w'$ byłaby okresem leżącym w trójkącie $0\omega\omega'$. Wykazaliśmy więc, że:



Rys. 50.

Wszystkie okresy funkcji analitycznej jednoznacznej, okresowej i różnej od stałej są postaci (2) *albo* (3), *gdzie ω i ω' są liczbami różnymi od zera o ilorazie ω'/ω nierzeczywistym.*

W przypadku, gdy wszystkie okresy mają postać (2), daną funkcję nazywamy *jednookresową*, a liczbę ω lub $-\omega$ jej *okresem pierwotnym*. W przypadku (3) daną funkcję nazywamy *dwuokresową*, a liczby ω,ω' *parą okresów pierwotnych*[1]). W dalszym ciągu

[1]) Parą okresów pierwotnych nazywamy również każdą parę liczb

$$w=\alpha\omega+\beta\omega', \qquad w'=\gamma\omega+\delta\omega',$$

gdzie liczby α, β, γ, δ są całkowite i spełniają warunek $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Zbiór liczb (3) jest wówczas identyczny ze zbiorem liczb $nw+n'w'$, gdzie $n,n'=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

ograniczymy się głównie do funkcji okresowych całkowitych i meromorficznych, różnych od stałych.

FUNKCJE OKRESOWE. Niech $f(z)$ będzie funkcją jednookresową o okresach (2). Obierzmy na prostej $p=0\omega$ dowolny punkt c (np. $c=0$) i przez każdy punkt $c+n\omega$, gdzie $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, poprowadźmy prostą równoległą do stałego kierunku p' różnego od p (rys. 49). Wówczas płaszczyzna podzieli się na nieskończenie wiele pasów o tej samej szerokości.

Wystarczy znać wartości funkcji w jednym z tych pasów, bo w innych wartości powtarzają się: $f(z)=f(z+\omega)=f(z+2\omega)=\ldots$ Każdy z tych pasów nazywamy *pasem okresowości* danej funkcji zaliczając do pasa okresowości tylko jedną prostą brzegową.

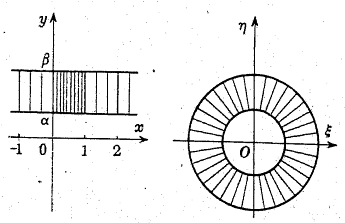
PRZYKŁAD 1. Funkcja e^z ma okres pierwotny $\omega=2\pi i$, a więc prosta p leży na osi urojonej. Pasem okresowości jest np. obszar $0\leqslant \mathrm{I}z<2\pi$ lub obszar $-\pi<\mathrm{I}z\leqslant\pi$; w każdym z nich funkcja e^z przyjmuje wszystkie swe wartości.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\operatorname{tg} z$ ma okres pierwotny π, a więc prosta p leży na osi rzeczywistej. Obszar $c<\mathrm{R}z\leqslant c+\pi$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą (np. $c=-\pi/2$), jest pasem okresowości.

Zajmiemy się rozwinięciem funkcji jednookresowych w szereg. Zauważmy, że gdy funkcja $f(z)$ ma okres ω, to funkcja $f(\omega z)$ ma okres 1, można więc ograniczyć się do przypadku, gdy $f(z)$ ma okres pierwotny 1.

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze D określonym nierównościami

(4) $$\alpha<\mathrm{I}z<\beta,$$



Rys. 51.

gdzie α i β są liczbami rzeczywistymi (rys. 51), i niech będzie $f(z+1)=f(z)$ dla $z\in D$. Przekształcenie

(5) $$\zeta=e^{2\pi iz} \quad \text{czyli} \quad z=\frac{1}{2\pi i}\log\zeta$$

odwzoruje obszar D na pierścień kołowy

(6) $$e^{-2\pi\beta}<|\zeta|<e^{-2\pi\alpha},$$

bo $|\zeta|=|e^{2\pi i(x+iy)}|=e^{-2\pi y}$, a funkcję $f(z)$ przekształca na funkcję analityczną zmiennej ζ [1])

[1]) Odwzorowanie (5) obszaru (4) na pierścień (6) nie jest wzajemnie jednoznaczne. Obszar (4) jest sumą nieskończenie wielu prostokątów $\{n<\mathrm{R}z\leqslant n+1,\ \alpha<\mathrm{I}z<\beta\}$, gdzie $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, z których każdy zostaje odwzorowany wzajemnie jedno-

(7) $$f\left(\frac{1}{2\pi i}\log\zeta\right)=\varphi(\zeta)=\varphi(e^{2\pi iz}).$$

Wprawdzie funkcja $(\log\zeta)/2\pi i$ jest wieloznaczna w pierścieniu (6), lecz jej wartości w tym samym punkcie ζ różnią się o liczby całkowite, te zaś są okresami funkcji $f(z)$. Zatem funkcja $\varphi(\zeta)$ jest w pierścieniu (6) jednoznaczna, a przez to rozwijalna w szereg Laurenta (str. 79) postaci

$$\varphi(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\zeta^n$$

zbieżny w tym pierścieniu. Wracając do zmiennej z otrzymujemy twierdzenie:

Każda funkcja analityczna $f(z)$ o okresie 1 w obszarze (4) jest w tym obszarze rozwijalna w szereg postaci

(8) $$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi niz} \qquad (\alpha<\mathrm{I}z<\beta)$$

jednostajnie zbieżny w każdym obszarze częściowym $\alpha<\alpha'\leqslant\mathrm{I}z\leqslant\beta'<\beta$ obszaru (4).

Szereg (8) nazywamy *szeregiem Fouriera* danej funkcji okresowej [1]). Jeżeli okresem funkcji $f(z)$ jest liczba ω, należy po prawej stronie (8) zastąpić z przez z/ω.

PRZYKŁAD 1. Funkcje $\cos 2\pi z$ i $\sin 2\pi z$ są okresowe o okresie 1 i całkowite. Dla nich szereg (8) jest szczególnie prosty, bo redukuje się do dwóch wyrazów

$$\cos 2\pi z=\frac{e^{2\pi iz}+e^{-2\pi iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\sin 2\pi z=\frac{e^{2\pi iz}-e^{-2\pi iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right).$$

PRZYKŁAD 2. Funkcja meromorficzna $\operatorname{ctg}\pi z$ ma okres 1 i jest analityczna w półpłaszczyznach $\mathrm{I}z<0$ i $\mathrm{I}z>0$, bo bieguny leżą na osi $\mathrm{I}z=0$. Podstawienie (5) przekształca ją na funkcję wymierną zmiennej ζ

$$\operatorname{ctg}\pi z=i\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}=i\frac{\zeta+1}{\zeta-1},$$

ta zaś jest rozwijalna w kołach $|\zeta|<1$ i $|\zeta|>0$ odpowiednio w szeregi

znacznie na pierścień (6), bo w każdym z nich funkcja $\zeta=e^{2\pi iz}$ jest jednokrotna i pokrywa swymi wartościami cały pierścień.

[1]) Podstawiając w (8) $e^{2\pi niz}=\cos 2\pi nz+i\sin 2\pi nz$ oraz $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$ dla $n=1,2,\ldots$, można szeregowi (8) nadać postać szeregu trygonometrycznego

$$f(z)=c_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nz+b_n\sin 2\pi nz).$$

$-i(1+2\zeta+2\zeta^2+\ldots)$ oraz $i(1+2\zeta^{-1}+2\zeta^{-2}+\ldots)$, a więc szereg Fouriera (8) dla $\operatorname{ctg}\pi z$ ma postać

$$\operatorname{ctg}\pi z=\begin{cases}-i\left(1+2\sum_{1}^{\infty}e^{2\pi niz}\right) & \text{dla } \mathrm{I}z<0,\\ i\left(1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-2\pi niz}\right) & \text{dla } \mathrm{I}z>0.\end{cases}$$

Do szczególnie prostych funkcji okresowych $f(z)$ należą takie, dla których $\varphi(\zeta)$ jest funkcją wymierną zmiennej ζ (jak w przykładach poprzednich). Oznaczmy przez K klasę wszystkich takich funkcji i niech

$$f_1(z)=\varphi_1(\zeta),\qquad f_2(z)=\varphi_2(\zeta)$$

będą dwiema funkcjami tej klasy, gdzie φ_1 i φ_2 są funkcjami wymiernymi zmiennej $\zeta=e^{2\pi iz}$[1]). Rugując z tych dwóch równań zmienną ζ otrzymamy równanie postaci $W(f_1,f_2)=0$, gdzie W jest wielomianem dwóch zmiennych. Zatem:

Między każdymi dwiema funkcjami $f_1(z)$ i $f_2(z)$ klasy K zachodzi związek algebraiczny $W(f_1,f_2)=0$.

W szczególności, jeżeli $f(z)$ należy do klasy K, to $f'(z)$ należy również do K, bo gdy $f(z)=\varphi(\zeta)$, to $f'(z)=\varphi'(\zeta)d\zeta/dz=\varphi'(\zeta)2\pi i\zeta$, gdzie $\varphi(\zeta)$ i $\varphi'(\zeta)$ są funkcjami wymiernymi zmiennej ζ. Zatem między f' i f zachodzi związek algebraiczny, a więc:

Każda funkcja $f(z)$ klasy K spełnia równanie różniczkowe postaci

$$W(f',f)=0, \tag{9}$$

gdzie W jest wielomianem względem f i f'.

PRZYKŁAD 1. Funkcje $\sin z$ i $\operatorname{tg} z$ należą do klasy K (o okresie $\omega=2\pi$) i spełniają związek algebraiczny $\sin^2 z(1+\operatorname{tg}^2 z)-\operatorname{tg}^2 z=0$.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\zeta=\sin z$ spełnia równanie różniczkowe $\zeta'^2+\zeta^2-1=0$, czyli $d\zeta/dz=\sqrt{1-\zeta^2}$. Funkcja odwrotna względem $\zeta=\sin z$ spełnia więc równanie różniczkowe $dz/d\zeta=1/\sqrt{1-\zeta^2}$, skąd

$$z=\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\arcsin\zeta.$$

FUNKCJE DWUOKRESOWE. Niech $f(z)$ będzie funkcją dwuokresową o okresach (3). Każdy równoległobok R o wierzchołkach

$$z_0,\qquad z_0+\omega,\qquad z_0+\omega+\omega',\qquad z_0+\omega', \tag{10}$$

gdzie z_0 jest dowolnym punktem pola funkcji (np. $z_0=0$, rys. 50), na-

[1]) Lub ogólniej zmiennej $\zeta=e^{2\pi iz/\omega}$, gdy funkcje klasy K mają okres ω.

zywamy *równoległobokiem okresowości* danej funkcji. Z czterech boków tego równoległoboku zaliczamy do niego tylko dwa wychodzące z jednego wierzchołka (np. z punktu z_0), a z czterech wierzchołków tylko jeden (np. z_0).

Wystarczy znać wartości funkcji dwuokresowej w jednym równoległoboku okresowości, bo w każdym innym wartości te powtarzają się. Wykażemy, że:

Funkcja meromorficzna $\wp(z)$ Weierstrassa (str. 129) *określona przez szereg*

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-w_k)^2}-\frac{1}{w_k^2}\right],\quad \textit{gdzie}\quad w_k=n\omega+n'\omega', \tag{11}$$

jest dwuokresowa i ma okresy w_k, $k=1,2,\ldots$

Dowód. Szereg (11) jest, jak wiemy, bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym obszarze ograniczonym po odrzuceniu skończonej ilości wyrazów początkowych, a więc można go różniczkować wyraz po wyrazie. Ponieważ $w_0=0$ (str. 129), więc

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(z-w_k)^3}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-w_k)^3}. \tag{12}$$

Z wzoru tego wynika, że

$$\wp'(z+\omega)=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[z-(w_k-\omega)]^3}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-w_k)^3}=\wp'(z),$$

bo różnica $w_k-\omega$ przebiega te same wartości co $w_k=n\omega+n'\omega'$, tylko w innym porządku, a porządek nie wpływa na sumę.

Z równania $\wp'(z+\omega)-\wp'(z)=0$ otrzymamy $\wp(z+\omega)-\wp(z)=c$, gdzie c jest pewną stałą. Aby wyznaczyć c zauważmy, że $\wp(z)$ jest funkcją parzystą, bo

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{[z-(-w_k)]^2}-\frac{1}{(-w_k)^2}\right\}=\wp(z),$$

gdyż $-w_k$ przebiega te same wartości co w_k. Przyjmując $z=-\omega/2$ w równaniu $\wp(z+\omega)-\wp(z)=c$, otrzymamy

$$c=\wp\left(\frac{1}{2}\omega\right)-\wp\left(-\frac{1}{2}\omega\right)=\wp\left(\frac{1}{2}\omega\right)-\wp\left(\frac{1}{2}\omega\right)=0,$$

a zatem $\wp(z+\omega)=\wp(z)$. Ze względu na symetrię mamy również $\wp(z+\omega')=\wp(z)$, a więc twierdzenie jest wykazane.

Aby zaznaczyć, że liczby ω i ω' tworzą parę okresów pierwotnych funkcji $\wp(z)$, piszemy $\wp(z;\omega,\omega')$. Dwie funkcje dwuokresowe nazywamy *współokresowymi*, jeżeli mają wspólną parę okresów (niekoniecznie pierwotnych) o ilorazie nierzeczywistym. Na przykład funkcje $\wp(z;\omega,\omega')$ i $\wp(z;2\omega, 3\omega')$ są współokresowe.

60. Funkcje eliptyczne. Funkcję meromorficzną na całej płaszczyźnie otwartej i dwuokresową nazywamy *funkcją eliptyczną*. Funkcja $\wp(z)$ jest więc eliptyczna jako meromorficzna i dwuokresowa. Funkcje stałe zaliczamy do eliptycznych.

Wiemy, że wśród funkcji całkowitych istnieją funkcje jednookresowe różne od stałych, np. $\sin z$. Funkcja całkowita dwuokresowa, musi być ograniczona w każdym równoległoboku okresowości, a przez to na całej płaszczyźnie, a więc w myśl twierdzenia Liouville'a musi być stała. Zatem

I. *Funkcja eliptyczna nie mająca biegunów jest stała.*

Funkcja eliptyczna różna od stałej musi więc mieć w każdym równoległoboku okresowości R co najmniej jeden biegun. Ilość biegunów zawartych w R z uwzględnieniem ich krotności nazywamy *rzędem* funkcji eliptycznej. Np. funkcja $\wp(z)$ jest rzędu 2, funkcja stała jest rzędu 0.

II. *Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch funkcji eliptycznych współokresowych jest funkcją eliptyczną.*

Wynika to stąd, że cztery działania arytmetyczne zachowują meromorficzność i dwuokresowość, bo np. $f(z+\omega)\cdot g(z+\omega)=f(z)\cdot g(z)$, jeżeli $f(z+\omega)=f(z)$ i $g(z+\omega)=g(z)$.

Podobnie

III. *Pochodna funkcji eliptycznej jest funkcją eliptyczną.*

Istotnie, pochodna funkcji meromorficznej $f(z)$ jest funkcją meromorficzną, a przy tym, jeżeli $f(z+\omega)=f(z)$, to

$$\frac{f(z+\omega+h)-f(z+\omega)}{h}=\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

a więc $f'(z+\omega)=f'(z)$.

IV. *Dwie funkcje eliptyczne współokresowe $f(z)$ i $g(z)$ różnią się 1° o stałą, jeżeli mają te same bieguny i w nich te same części główne, 2° czynnikiem stałym, jeżeli mają te same zera i te same bieguny (z uwzględnieniem ich krotności).*

Istotnie, w przypadku 1° różnica $f-g$, a w przypadku 2° iloraz f/g jest funkcją eliptyczną nie mającą biegunów, a więc stałą.

V. *Suma residuów wszystkich biegunów funkcji eliptycznej $f(z)$ zawartych w dowolnym równoległoboku okresowości R równa się zeru.*

Dowód. W każdym równoległoboku okresowości R residua biegunów funkcji są te same, a więc R można obrać dowolnie, np. tak, aby na jego brzegu C nie leżał żaden biegun. Suma residuów wyraża się wówczas przez całkę (str. 86)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

Rozłóżmy tę całkę na cztery całki wzdłuż czterech boków równoległoboku R. Na bokach przeciwległych wartości $f(z)$ są te same, a więc całki wzdłuż boków przeciwległych różnią się tylko znakiem, bo boki przeciwległe są skierowane przeciwnie. Stąd wynika, że suma całek równa się zeru.

Z twierdzenia tego wynika, że:

VI. *Rząd funkcji eliptycznej różnej od stałej jest $\geqslant 2$.*

Gdyby bowiem był równy 1, to istniałby tylko jeden biegun b o części głównej postaci $c/(z-b)$, gdzie c jest liczbą stałą. Ponieważ residuum tego bieguna równa się zeru, więc $c=0$, a zatem funkcja nie miałaby bieguna i byłaby stałą.

VII. *Funkcja eliptyczna $f(z)$ rzędu r przyjmuje w dowolnym równoległoboku okresowości R każdą wartość dokładnie r-krotnie (w szczególności ilość zer równa się ilości biegunów, tj. r).*

Istotnie, iloraz $f'(z)/f(z)$ jest wraz z funkcją $f(z)$ funkcją eliptyczną. Suma residuów tego ilorazu w równoległoboku R równa się zeru w myśl V, a w myśl (28) na str. 89 równa się różnicy między ilością zer i biegunów funkcji $f(z)$, a więc funkcja $f(z)$ przyjmuje w R wartość 0 r-krotnie. Podobnie każdą wartość a przyjmuje r-krotnie, bo różnica $f(z)-a$ jest funkcją eliptyczną rzędu r.

Uwaga. Poznaliśmy dotąd jedną tylko funkcję eliptyczną różną od stałej, a mianowicie funkcję $\wp(z)$ Weierstrassa. Należy ona do najprostszych, bo jest rzędu 2, a w myśl twierdzenia VI rząd 2 jest najniższy. Pochodne $\wp'(z)$, $\wp''(z),\ldots$ są też funkcjami eliptycznymi odpowiednio rzędów $3, 4, \ldots$

Funkcje eliptyczne wprowadzili Abel[1]) i Jacobi[2]) jako funkcje odwrotne względem funkcji wieloznacznych określonych przez całki eliptyczne (str. 112). W teorii rozwiniętej przez Jacobiego rolę najprostszej funkcji eliptycznej odgrywała inna funkcja rzędu 2, mająca w równoległoboku okresowości dwa oddzielne bieguny rzędu 1 i oznaczona przez $\operatorname{sn} z$.

[1]) N. H. Abel (1802-1829).
[2]) C. G. J. Jacobi (1804-1851).

61. Związki między funkcjami eliptycznymi. Wykażemy, że:

Funkcja $\wp(z)$ *i jej pochodna* $\wp'(z)$ *spełniają związek algebraiczny*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \tag{13}$$

gdzie stałe g_2 *i* g_3 *zależą od okresów* $w_k = n\omega + n'\omega'$ *i wyrażają się wzorami*

$$g_2 = 60\sum_1^\infty \frac{1}{w_k^4}, \qquad g_3 = 140\sum_1^\infty \frac{1}{w_k^6}. \tag{14}$$

Dowód. Wiemy, że $1/(1-z)^2 = 1+2z+3z^2+\dots$ dla $|z|<1$, a więc

$$\frac{1}{(z-w_k)^2} = \frac{1}{w_k^2} + 2\frac{z}{w_k^3} + 3\frac{z^2}{w_k^4} + \dots \qquad \text{dla } |z| < |w_k|.$$

Szereg $\sum_{k=1}^\infty w_k^{-n}$ jest bezwzględnie zbieżny dla $n=3$ (str. 122), a więc jest bezwzględnie zbieżny dla $n \geqslant 3$. Niech

$$\sum_{k=1}^\infty w_k^{-n} = s_n \qquad (n=3,4,\dots). \tag{15}$$

Na mocy wzoru (11) otrzymamy dla dostatecznie małych $|z|$

$$\wp(z) - z^{-2} = 2s_3 z + 3s_4 z^2 + 4s_5 z^3 + \dots$$

Dla n nieparzystych mamy $s_n = 0$, bo w szeregu (15) obok wyrazu $w_k = n\omega + n'\omega'$ występuje zawsze wyraz $-w_k = -n\omega - n'\omega'$, a więc

$$\wp(z) = z^{-2} + 3s_4 z^2 + 5s_6 z^4 + \dots, \tag{16}$$

skąd

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6s_4 z + 20 s_6 z^3 + \dots \tag{17}$$

Utwórzmy wyrażenie

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 60 s_4 \wp. \tag{18}$$

Jest to funkcja eliptyczna i może mieć bieguny jedynie w punktach $w_0, w_1, \dots$ Wobec (16) jest $\wp^3 = z^{-6} + 9s_4 z^{-2} + 15 s_6 + \dots$, gdzie dalsze wyrazy są postaci $a_k z^k$ dla $k>0$, a w myśl (17) $\wp'^2 = 4z^{-6} - 24 s_4 z^{-2} - 80 s_6 + \dots$; zatem

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 60 s_4 \wp = -140 s_6 + \dots, \tag{19}$$

gdzie dalsze wyrazy są postaci $a_k z^k$ dla $k>0$. Funkcja (18) nie ma więc bieguna $w_0 = 0$, a przez to żadnego bieguna, a więc redukuje się do stałej (str. 142, I). Wyrazy dalsze po prawej stronie (19) są więc równe zeru, skąd wynika (13).

Wniosek. Funkcja $w = \wp(z)$ spełnia równanie różniczkowe (13), czyli $(dw/dz)^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$, a zatem odwrotna względem niej funkcja $z = z(w)$ spełnia równanie $(dz/dw)^2 = 1/(4w^3 - g_2 w - g_3)$. Całka tego równania jest wyznaczona, gdy znamy dwie odpowiadające sobie wartości z_0 i $w_0 = \wp(z_0)$, a więc funkcja eliptyczna $w = \wp(z)$ jest funkcją odwrotną względem *całki eliptycznej Weierstrassa* (str. 113)

$$z = \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} + z_0, \qquad \text{gdzie} \quad w_0 = \wp(z_0).$$

Wymieniona wyżej (str. 143) funkcja eliptyczna Jacobiego $w = \operatorname{sn} z$ spełnia równanie różniczkowe $(dw/dz)^2 = (1-w^2)(1-\lambda^2 w^2)$, gdzie $0<\lambda<1$, i jest funkcją odwrotną względem *całki eliptycznej Legendre'a* (str. 113)

$$z = \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\lambda^2 w^2)}} + z_0, \qquad \text{gdzie} \quad w_0 = \operatorname{sn} z_0.$$

Wykażemy teraz, że:

Między funkcjami $\sigma(z)$ *i* $\wp(z)$ *Weierstrassa* (str. 122 i 129) *zachodzi związek*

$$-\frac{\sigma(z+w)\,\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(w)} = \wp(z) - \wp(w), \tag{20}$$

gdzie w *jest dowolną liczbą różną od okresów* $w_0, w_1, \dots$

W tym celu wykażemy najpierw, że istnieją takie dwie stałe η i η', że

$$\sigma(z+\omega) = -e^{\eta(z+\frac{1}{2}\omega)}\sigma(z), \qquad \sigma(z+\omega') = -e^{\eta'(z+\frac{1}{2}\omega')}\sigma(z). \tag{21}$$

Istotnie, w myśl (14) na str. 130 mamy $\zeta'(z+\omega) = \zeta'(z)$, a więc

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta,$$

gdzie η jest stałą. Zastępując tu na mocy (13), str. 130, $\zeta(z)$ przez $\sigma'(z)/\sigma(z)$ i całkując, otrzymamy $\sigma(z+\omega) = ce^{\eta z}\sigma(z)$, gdzie c jest nową stałą. Podstawmy w ostatnim równaniu $z = -\omega/2$. Ponieważ (str. 123) $\sigma(-z) = -\sigma(z)$, więc $c = -e^{\eta\frac{1}{2}\omega}$, a zatem pierwszy ze wzorów (21) jest wykazany. Drugi wynika z niego przez symetrię.

Lewa strona (20) jest funkcją meromorficzną jako iloraz funkcji całkowitych. Wzory (21) pozwalają sprawdzić, że ma ona okresy ω i ω', a więc jest funkcją eliptyczną, podobnie jak strona prawa. Równocześnie obie strony mają te same zera $w_k \pm w$ i te same bieguny w_k, a więc stosunek obu stron jest pewną stałą (IV, str. 142). Stała ta równa się 1, bo obie strony pomnożone przez z^2 dążą do 1, gdy $z \to 0$. Zatem równość (20) jest wykazana.

Obliczmy pochodne logarytmiczne obu stron (20), najpierw względem z, potem względem w, i dodajmy stronami; otrzymamy[1])

$$\zeta(z+w)=\zeta(z)+\zeta(w)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}. \tag{22}$$

Opierając się na tym związku między funkcjami $\zeta(z)$ i $\wp(z)$ wykażemy, że:

Każda funkcja eliptyczna $f(z)$ o okresach ω i ω' jest funkcją wymierną względem $\wp(z)$ i $\wp'(z)$, tj. daje się wyrazić wzorem

$$f(z)=R[\wp(z),\wp'(z)], \tag{23}$$

gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną swych zmiennych.

Dowód. Niech b będzie jednym z biegunów funkcji $f(z)$ i niech jego część główna ma postać

$$g(z,b)=\frac{c}{z-b}+\frac{d}{(z-b)^2}+\frac{e}{(z-b)^3}+\ldots+\frac{l}{(z-b)^k}. \tag{24}$$

Każda z funkcji

$$\zeta(z),\quad \wp(z),\quad \wp'(z),\quad \wp''(z),\quad \ldots$$

ma w punkcie 0 biegun o części głównej odpowiednio równej

$$\frac{1}{z},\quad \frac{1}{z^2},\quad -\frac{2!}{z^3},\quad \frac{3!}{z^4},\quad \ldots;$$

zatem funkcja

$$G(z,b)=c\zeta(z-b)+d\wp(z-b)-\frac{e}{2!}\wp'(z-b)+\ldots+\frac{(-1)^k l}{(k-1)!}\wp^{(k-2)}(z-b) \tag{25}$$

jest meromorficzna i ma w punkcie b biegun o części głównej (24).

Zauważmy, że na mocy wzoru (22) pierwszy wyraz po prawej stronie (25) jest sumą wyrażenia $c[\zeta(z)+\zeta(-b)]$ i funkcji wymiernej względem $\wp(z)$ i $\wp'(z)$. Wszystkie wyrazy dalsze prawej strony (25) są też funkcjami wymiernymi względem $\wp$ i $\wp'$[2]), a zatem $G(z,b)=c\zeta(z)+R(\wp,\wp')$,

[1]) Wiadomo (str. 130), że $\sigma'(z)/\sigma(z)=\zeta(z)$. Funkcja meromorficzna $\zeta(z)$ nie jest funkcją eliptyczną, bo jej rząd $=1$.

[2]) Na mocy (13) mamy bowiem $2\wp'\wp''=12\wp\wp'-g_2\wp'$, a więc $\wp''=6\wp^2\wp'-g_2/2$; następnie $\wp'''=12\wp\wp'^2+6\wp^2\wp''=12\wp\wp'$ itd. Różniczkując obustronnie (22) otrzymamy na mocy (14), str. 130, związek

$$\wp(z+w)=\wp(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right]$$

zwany *twierdzeniem o dodawaniu* dla funkcji $\wp(z)$.

gdzie R jest funkcją wymierną względem $\wp$ i $\wp'$, a c jest residuum bieguna $z=b$. Dodajmy teraz wszystkie funkcje $G(z,b_j)$ odpowiadające poszczególnym biegunom $b_1,b_2,\ldots,b_r$ funkcji $f(z)$ położonym w jednym równoległoboku okresowości. Jeżeli $c_1,c_2,\ldots,c_r$ są residuami tych biegunów, to $\sum_1^r c_j=0$ (str. 142, V), a więc $\sum_1^r G(z,b_j)$ jest funkcją wymierną względem $\wp$ i $\wp'$ mającą te same bieguny i w nich te same części główne, co dana funkcja $f(z)$. Funkcja $f(z)$ różni się więc od $\sum_1^r G(z,b_j)$ o stałą (str. 142, IV), a zatem twierdzenie jest wykazane.

Twierdzenie to orzeka, że zbiór wszystkich funkcji eliptycznych o okresach ω i ω' redukuje się do ogółu wszystkich funkcji wymiernych względem $\wp(z)$ i $\wp'(z)$. Jeżeli $f_1(z)=R_1(p,p')$ i $f_2(z)=R_2(p,p')$ są dwiema funkcjami tego zbioru, gdzie R_1 i R_2 są funkcjami wymiernymi, to rugując z tych równań $\wp$ i $\wp'$ za pomocą związku (13), dochodzimy do wniosku, że:

Między każdymi dwiema funkcjami eliptycznymi współokresowymi $f_1(z)$ i $f_2(z)$ zachodzi związek algebraiczny $W(f_1,f_2)=0$, gdzie W jest wielomianem względem f_1 i f_2.

W szczególności związek taki zachodzi między dowolną funkcją eliptyczną $f(z)$ i jej pochodną $f'(z)$, a zatem (zob. str. 140):

Każda funkcja eliptyczna $f(z)$, spełnia równanie różniczkowe postaci $W(f',f)=0$, gdzie W jest wielomianem względem f i f'.

62. Dalsze własności funkcji eliptycznych. Związek (13) odgrywa ważną rolę w teorii funkcji eliptycznych. Prawa jego strona $4\wp^3-g_2\wp-g_3$ jest trójmianem 3-go stopnia względem $\wp$. Współczynniki g_2 i g_3 zależą od okresów, co zapisujemy: $g_2=g_2(\omega,\omega')$, $g_3=g_3(\omega,\omega')$, i noszą nazwę *niezmienników*[1]), a wyrażenie

$$\Delta=\Delta(\omega,\omega')=g_2^3-27g_3^2$$

nazywamy *wyróżnikiem*. Wykażemy, że:

Wyróżnik jest zawsze różny od zera.

Istotnie, pochodna $\wp'(z)$ staje się równa zeru w 3 punktach

$$\frac{1}{2}\omega,\quad \frac{1}{2}\omega',\quad \frac{1}{2}(\omega+\omega') \tag{26}$$

[1]) Nazwa pochodzi stąd, że gdy w i w' jest dowolną parą okresów pierwotnych (zob. uw. na str. 137), to $g_k(w,w')=g_k(\omega,\omega')$ dla $k=2$ i 3, bo zbiór liczb $nw+n'w'$, gdzie $n,n'=0,\pm1,\pm2,\ldots$, jest identyczny ze zbiorem $n\omega+n'\omega$.

leżących w jednym równoległoboku okresowości, bo gdy w jest dowolnym okresem, to mamy[1])

$$\wp'\left(-\frac{1}{2}w\right)=-\wp'\left(\frac{1}{2}w\right) \quad \text{i} \quad \wp'\left(-\frac{1}{2}w\right)=\wp'\left(-\frac{1}{2}w+w\right)=\wp'\left(\frac{1}{2}w\right),$$

skąd $\wp'(w/2)=0$. Wobec tego przyjmując

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega\right)=e_1, \qquad \wp\left(\frac{1}{2}\omega'\right)=e_2, \qquad \wp\left(\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega'\right)=e_3 \tag{27}$$

można związek (13) napisać w postaci

$$\wp'^2=4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3), \tag{28}$$

z czego wnosimy, że[2])

$$(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2). \tag{29}$$

Liczby e_1, e_2, e_3 są różne, bo różnica $\wp(z)-e_k$ ma w odpowiednim punkcie (26) zero dwukrotne, gdyż w tym punkcie $\wp'=0$, a więc gdyby było np. $e_1=e_2$, to różnica $\wp(z)-e_1$ miałaby w jednym równoległoboku okresowości cztery zera (dwa podwójne), choć jest funkcją rzędu 2. Prawa strona (29) jest więc różna od zera[3]).

Można dowieść[4]), że:

Dla dowolnej pary liczb a i b spełniających warunek $a^3-27b^2\neq 0$ istnieje taka para liczb ω, ω' o ilorazie nierzeczywistym, że

$$g_2(\omega,\omega')=a, \qquad g_3(\omega,\omega')=b. \tag{30}$$

---

[1]) Równość pierwsza wynika stąd, że na mocy wzoru (12) $\wp'(-z)=-\wp'(z)$.

[2]) Wiadomo z algebry, że gdy e_1, e_2, e_3 są pierwiastkami równania $z^3-az-b=0$, to $(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2=4a^3-27b^2$. Prawa strona tej równości nosi nazwę *wyróżnika* równania $z^3-az-b=0$.

[3]) Z wzorów (14) wynika, że niezmienniki g_2 i g_3 są funkcjami jednorodnymi okresów ω i ω' odpowiednio stopni -4 i -6, a więc wyróżnik Δ jest funkcją jednorodną stopnia -12. Przyjmując $\omega'/\omega=z$, otrzymamy

$$g_2(\omega,\omega')=\omega^{-4}g_2(1,z), \qquad g_3(\omega,\omega')=\omega^{-6}g_3(1,z) \qquad \Delta(\omega,\omega')=\omega^{-12}\Delta(1,z)$$

a więc stosunek g_2^3/Δ zależy tylko od zmiennej z. Oznaczamy go przez $J(z)$ i nazywamy *funkcją modułową zmiennej* z. Zatem

$$J(z)=\frac{g_2^3(1,z)}{\Delta(1,z)}.$$

Dowodzi się, że jest to funkcja analityczna w półpłaszczyźnie $\mathrm{I}z>0$, nieprzedłużalna poprzez oś rzeczywistą.

[4]) Zob. S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938, str. 384.

Wyprowadzimy stąd pewne wnioski. Zbiór wszystkich par liczb zespolonych x, y spełniających równanie

$$y^2=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4, \tag{31}$$

którego prawa strona jest wielomianem stopnia 4 lub 3 nie mającym pierwiastków wielokrotnych, nazywamy *powierzchnią eliptyczną*[1]). W szczególności zbiór par liczb x, y spełniających równanie

$$y^2=4x^3-ax-b, \qquad \text{gdzie} \quad a^3-27b^2\neq 0, \tag{32}$$

nazywamy *powierzchnią eliptyczną Weierstrassa*.

Dobierzmy do współczynników a i b parę okresów ω, ω' spełniających równania (30). Wówczas na mocy (13) każda para liczb x, y wyrażona wzorami

$$x=\wp(z), \qquad y=\wp'(z) \tag{33}$$

jest dla dowolnego z punktem powierzchni (32). Na odwrót, każdemu punktowi x, y powierzchni (32) odpowiada w równoległoboku okresowości funkcji $\wp(z)$ dokładnie jeden taki punkt z, że zachodzą związki (33).

Istotnie, równanie $\wp(z)=x$ ma dla danego x dwa rozwiązania na z różniące się znakiem, bo $\wp(z)$ jest funkcją parzystą rzędu 2. Rozwiązaniom tym odpowiadają dwie wartości $y=\wp'(z)$ różniące się znakiem, bo $\wp'(z)$ jest funkcją nieparzystą, co jest zgodne z tym, że każdemu x odpowiadają na powierzchni (32) dwie wartości y różniące się znakiem.

Stąd wynika, że powierzchnia (32), na której y jest funkcją wieloznaczną zmiennej x, daje się przedstawić równaniami parametrycznymi (33), w których funkcje $\wp$ i $\wp'$ są jednoznaczne, a parametr z przebiega jeden równoległobok okresowości. Mówimy, że równania (33) *uniformizują* funkcję y zmiennej x określoną równaniem $y=\sqrt{4x^3-ax-b}$ [2]).

Czytelnik sprawdzi, że każdą powierzchnię (31) można przekształcić na powierzchnię (32) za pomocą stosownie dobranego podstawienia postaci

$$x=\frac{\alpha x'+\beta}{\gamma x'+\delta}, \qquad y=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y'}{(\gamma x'+\delta)^2},$$

gdzie α, β, γ i δ są liczbami spełniającymi warunek

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

---

[1]) Lub *krzywą eliptyczną*.

[2]) Podobnie powierzchnię określoną równaniem $x^2+y^2=1$ można przedstawić równaniami parametrycznymi $x=\sin z$, $y=\cos z$. Równania te uniformizują funkcję y zmiennej x określoną wzorem $y=\sqrt{1-x^2}$.

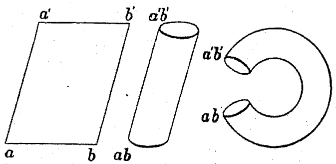
Wnioskujemy stąd, że:

Powierzchnię eliptyczną (31) *można przedstawić równaniami parametrycznymi postaci*

$$x=\frac{a\wp(z)+\beta}{\gamma\wp(z)+\delta}=\varphi(z),\qquad y=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\wp'(z)}{[\gamma\wp(z)+\delta]^2}=\varphi'(z),$$

gdzie $\varphi(z)$ *jest stosownie dobraną funkcją eliptyczną.*

Każda powierzchnia eliptyczna jest więc wzajemnie jednoznacznym i ciągłym obrazem równoległoboku okresowości pewnej funkcji eliptycznej. Niech $aba'b'$ będzie tym równoległobokiem (rys. 52). Z dwóch boków przeciwległych należy do niego tylko jeden. Identyfikując punkty przeciwległe boków aa' i bb' otrzymamy z równoległoboku walec; identyfikując następnie punkty przeciwległe boków ab i $a'b'$ otrzymamy *torus* (rys. 52).



Rys. 52.

Powierzchnia eliptyczna jest więc obrazem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym torusa.

ĆWICZENIA.

1. Wykazać, że funkcja wymierna różna od stałej nie może być okresowa.

2. Wykazać, że funkcja całkowita okresowa różna od stałej mająca okres $\omega=p+iq$, gdzie $p\neq 0$, nie może być ograniczona w pasie $a\leqslant \mathrm{R}z<a+p$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

3. Funkcje $f=e^{az}$ i $g=\operatorname{tg} z$ należą do klasy K (str. 140). Znaleźć odpowiadające im równania różniczkowe postaci (9).

4. Wykazać, że jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną okresową o okresie 1, ograniczoną w obszarze $\mathrm{I}z>a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $f(z)$ dąży do granicy skończonej, gdy $\mathrm{I}z\to\infty$.

5. Szereg a) $\varphi(z)=\sum\limits_{1}^{\infty}e^{2^n iz}$, b) $\theta(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2niz}$, gdzie $|q|<1$, przedstawia funkcję okresową. Znaleźć obszar istnienia funkcji i okres.

6. Wykazać, że funkcja $\wp(z)=\wp(z;\,a,\,\beta i)$ o okresach $\omega=a>0$ i $\omega'=\beta i$, gdzie $\beta>0$, ma wartości rzeczywiste na brzegu każdego prostokąta okresowości o wierzchołku $ma+m'\beta i$, gdzie m i m' są liczbami całkowitymi.

7. Czy funkcje $e^{\wp(z)}$, $\sin\wp(z)$, $R[\wp(z)]$, gdzie R jest funkcją wymierną, są dwuokresowe i eliptyczne?

ROZWIĄZANIA.

1. Funkcja okresowa przyjmuje każdą swą wartość w nieskończenie wielu punktach, a funkcja wymierna mająca tę własność jest stała. — **2.** W pasie tym przyjmuje wszystkie swe wartości; zastosować twierdzenie Liouville'a. — **3.** $f'-af=0$ i $g'-g^2-1=0$. — **4.** Współczynniki c_n dla $n<0$ rozwinięcia (8) danej funkcji muszą być równe zeru, a więc istnieje $\lim f(z)$, gdy $\mathrm{I}z\to\infty$. — **5.** a) $\mathrm{I}z>0$, b) cała płaszczyzna. Okres $\omega=\pi$. — **6.** Jeżeli z leży na brzegu prostokąta okresowości, tj. $z=ma+m'\beta i+x$ lub $z=ma+m'\beta i+yi$, to wyrazy szeregu (11), gdzie $w_k=na+n'\beta i$, można połączyć w pary ze sobą sprzężone. — **7.** Wszystkie są dwuokresowe, dwie pierwsze nie są eliptyczne, bo nie są meromorficzne.

ROZDZIAŁ XIV

Funkcje algebraiczne. Powierzchnie Riemanna

63. Punkty rozgałęzienia. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną dowolnie przedłużalną (str. 107) w otoczeniu pierścieniowym

$$(1) \qquad 0<|z-z_0|<R$$

punktu z_0. W przypadku, gdy $z_0=\infty$, należy otoczenie (1) zastąpić przez $R<|z|<\infty$.

Jeżeli każdy element funkcji po przedłużeniu wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej zawartej w obszarze (1) wraca do elementu wyjściowego, to funkcja jest jednoznaczna, a punkt z_0 jest albo biegunem albo punktem pozornie lub istotnie osobliwym. Jeżeli natomiast pewien element nie wraca po przedłużeniu do elementu wyjściowego, to funkcja jest wieloznaczna i każdy punkt obszaru (1) jest środkiem tej samej liczby $r>1$ elementów (str. 107). W tym przypadku nazywamy z_0 *punktem rozgałęzienia* funkcji, a liczbę $r-1$ *rzędem rozgałęzienia* w punkcie z_0. Rząd rozgałęzienia jest nieskończony, gdy $r=\infty$.

PRZYKŁAD 1. Funkcje $\sqrt[n]{z}$ i $\log z$ są dowolnie przedłużalne w obszarze $0<|z|<\infty$ i mają po dwa punkty rozgałęzienia: 0 i ∞. Rząd rozgałęzienia pierwszej[1]) jest $n-1$, drugiej — nieskończony.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\sqrt{z(z-1)}$ ma dwa punkty rozgałęzienia 0 i 1, każdy rzędu 1; punkt ∞ nie jest punktem rozgałęzienia tej funkcji, bo elementy obu funkcji $\sqrt{z}$ i $\sqrt{z-1}$ przedłużone wzdłuż okręgu $|z|=\varrho>1$ zmieniają po przedłużeniu znak na przeciwny, a więc element iloczynu $\sqrt{z}\cdot\sqrt{z-1}$ wraca po przedłużeniu do elementu wyjściowego. Ogólnie, funkcja

$$\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}, \qquad \text{gdzie} \quad z_j\neq z_k \quad \text{dla} \quad j\neq k,$$

jest dwuznaczna i ma n punktów rozgałęzienia $z_1, z_2, \ldots, z_n$, gdy n jest parzyste, lub $n+1$ punktów $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$, gdy n jest nieparzyste.

[1]) W punkcie 0 i w punkcie ∞.

icm

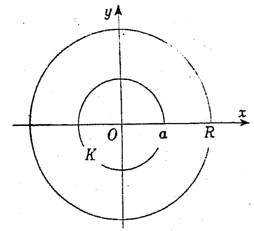
Elementy bowiem funkcji $\sqrt{z-z_1}, \sqrt{z-z_2}, \ldots, \sqrt{z-z_n}$ przedłużone wzdłuż okręgu $|z|=\varrho$ zawierającego wewnątrz wszystkie punkty $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zmieniają po przedłużeniu znaki na przeciwne, a więc ich iloczyn wraca do elementu wyjściowego, gdy n jest parzyste, natomiast zmienia znak, gdy n jest nieparzyste. W tym ostatnim przypadku ∞ jest więc punktem rozgałęzienia.

PRZYKŁAD 3. Funkcja $\sqrt[6]{z^3(1-z)^2}=\sqrt{z}\cdot\sqrt[3]{1-z}$ jest sześcioznaczna i ma trzy punkty rozgałęzienia 0, 1 i ∞ odpowiednio rzędu 1, 2 i 5.

Oznaczmy przez K dowolny ustalony okrąg $|z-z_0|=\varrho$ zawarty w otoczeniu (1) i niech $r\cdot K$ oznacza krzywą zamkniętą, jaką opisze punkt obiegając r-krotnie okrąg K w tym samym kierunku. Wykażemy, że:

Jeżeli pewien element $P(z)$ funkcji analitycznej $f(z)$ dowolnie przedłużalnej w otoczeniu (1) *jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $r\cdot K$, lecz nie jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $m\cdot K$, gdzie $m<r$, to funkcja $f(z)$ jest w otoczeniu* (1) *dokładnie r-znaczna i daje się w tym otoczeniu przedstawić przez szereg postaci*[1])

$$(2) \qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\sqrt[r]{z-z_0}\right)^n.$$



Rys. 53.

Dowód. 1° Zajmiemy się najpierw przypadkiem $r=1$. Stosując w razie potrzeby przesunięcie układu i obrót, możemy założyć, że $z_0=0$ i że środek a danego elementu $P(z)$ leży na półosi rzeczywistej dodatniej (rys. 53).

Oznaczmy przez D_1 i D_2 dwa obszary jednospójne otrzymane z otoczenia $0<|z|<R$ przez rozcięcie go wzdłuż półosi urojonej ujemnej (obszar D_1) względnie dodatniej (obszar D_2) i niech element $P(z)$ wytwarza w obszarze D_1 funkcję analityczną $f_1(z)$, a w D_2 funkcję $f_2(z)$. Funkcje te są jednoznaczne w myśl twierdzenia o monodromii (str. 108) i są sobie równe w części wspólnej obszarów D_1 i D_2 złożonej z półpłaszczyzny $\mathrm{R}z>0$. W półpłaszczyźnie $\mathrm{R}z<0$ mamy również $f_1(z)=f_2(z)$, bo przedłużając element $P(z)$ do punktu $-a$ raz po półokręgu K górnym, drugi raz po dolnym, otrzymamy w obu przypadkach ten sam element, gdyż przedłużenie wzdłuż całego okręgu K daje element wyjściowy $P(z)$. Funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ wyznaczają więc w obszarze D_1+D_2, tj. w całym pierścieniu

[1]) To znaczy: Każdy element funkcji $f(z)$ jest złożeniem pewnego elementu funkcji r-znacznej $\zeta=\sqrt[r]{z-z_0}$ i funkcji jednoznacznej określonej przez szereg Laurenta $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n$ zbieżny w otoczeniu pierścieniowym $0<|\zeta|<\sqrt[r]{R}$.

$0<|z|<R$, jedną funkcję jednoznaczną. Funkcja ostatnia jest identyczna oczywiście z funkcją $f(z)$, bo obie mają wspólny element $P(z)$. Zatem funkcja $f(z)$ jest jednoznaczna w otoczeniu $0<|z|<R$, a przez to (str. 79) daje się przedstawić przez szereg Laurenta postaci $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$.

2° Przypadek $r>1$. Funkcja $z=z_0+\zeta^r$ przekształca otoczenie

$$0<|\zeta|<\sqrt[r]{R}$$

na otoczenie (1), a okrąg $|\zeta|=\sqrt[r]{\varrho}$ na krzywą $r\cdot K$. W myśl założenia element $P(z)$ o środku $a\,\epsilon\,K$ funkcji $f(z)$ jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $r\cdot K$, a zatem element $P(z_0+\zeta^r)$ o środku $\sqrt[r]{a}$ funkcji $f(z_0+\zeta^r)$ jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż okręgu $|\zeta|=\sqrt[r]{\varrho}$. Na mocy poprzedniej części dowodu funkcja $f(z_0+\zeta^r)$ zmiennej ζ daje się przedstawić przez szereg Laurenta

$$f(z_0+\zeta^r)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n \quad \text{w obszarze} \quad 0<|\zeta|<\sqrt[r]{R}.$$

Przyjmując tu $\zeta=\sqrt[r]{z-z_0}$ otrzymamy rozwinięcie (2), czego należało dowieść.

Z twierdzenia tego wynika, że gdy funkcja $f(z)$ spełnia założenia twierdzenia w obszarze $R<|z|<\infty$, to daje się w nim przedstawić przez szereg postaci

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^n \qquad (R<|z|<\infty), \tag{3}$$

bo wówczas funkcja $f(1/z)$ daje się przedstawić w otoczeniu $0<|z|<1/R$ przez szereg $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n(\sqrt[r]{z})^n$.

Uwaga. Nazywamy *uniformizacją* funkcji analitycznej $w=F(z)$ wieloznacznej w pewnym obszarze D dobór takiej pary funkcji analitycznych

$$z=\varphi(\zeta), \qquad w=\psi(\zeta),$$

jednoznacznych w pewnym obszarze Δ, że dla każdej pary wartości z, w spełniającej związek $w=F(z)$ istnieje wartość $\zeta\,\epsilon\,\Delta$, dla której $\varphi(\zeta)=z$ i $\psi(\zeta)=w$. Np. funkcja wieloznaczna $w=\sqrt{1-z^2}$ daje się zuniformizować za pomocą pary funkcji $z=\cos\zeta$, $w=\sin\zeta$ lub za pomocą pary

$$z=\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \qquad w=\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}.$$

Podobnie funkcja $w=\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}$ daje się zuniformizować, jak to już stwierdziliśmy, za pomocą $z=\wp(\zeta)$, $w=\wp'(\zeta)$.

Wzór (2) pozwala zuniformizować funkcję $w=f(z)$ w obszarze (1) za pomocą funkcji jednoznacznych

$$z=z_0+\zeta^r, \qquad w=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n. \tag{4}$$

Niech z_0 będzie punktem rozgałęzienia funkcji $f(z)$. Punkt ten będziemy nazywali *punktem rozgałęzienia algebraicznym*, jeżeli rząd rozgałęzienia jest skończony i jeżeli w rozwinięciu (2) wszystkie lub prawie wszystkie współczynniki a_n dla $n<0$ są równe zeru. W punkcie takim istnieje granica

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \tag{5}$$

skończona lub nieskończona[1]). Gdy granica ta jest nieskończona, punkt z_0 nazywamy również *biegunem rozgałęzienia*.

Podobnie, punkt ∞ nazywamy *punktem rozgałęzienia algebraicznym rzędu* $r-1$, jeżeli w rozwinięciu (3) wszystkie lub prawie wszystkie a_n dla $n>0$ są równe zeru.

Bieguny (zwykłe) i punkty rozgałęzienia algebraiczne nazywamy krótko *punktami osobliwymi algebraicznymi*. W punktach takich można funkcji $f(z)$ nadać w naturalny sposób wartość, mianowicie wartość graniczną (5), i wobec tego punkty osobliwe algebraiczne zaliczamy do obszaru istnienia funkcji. W otoczeniu punktu osobliwego algebraicznego z_0 względnie ∞ funkcja jest rozwijalna w szereg Laurenta postaci

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n(\sqrt[r]{z-z_0})^n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^n, \tag{6}$$

gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią, ujemną lub równą zeru. Szeregi (6) nazywamy *elementami nieregularnymi* danej funkcji (o środku z_0 lub ∞) w odróżnieniu od szeregów Taylora, zwanych *elementami regularnymi*. Gdy $r=1$ i $k\geqslant 0$, wówczas szeregi (6) stają się elementami regularnymi.

Punkty osobliwe nie algebraiczne nazywamy *punktami osobliwymi przestępnymi*.

Przykład 1. Funkcja $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ ma trzy punkty osobliwe algebraiczne: 1, 2 i ∞; dwa pierwsze są punktami rozgałęzienia rzędu 1, trzeci jest biegunem (zwykłym).

Przykład 2. Funkcja $\sqrt{\log z}$ ma trzy punkty rozgałęzienia, a mianowicie 0, 1 i ∞; pierwszy i ostatni są punktami osobliwymi przestępnymi (funkcja nie ma w nich granicy), drugi zaś dla tego elementu tej funkcji, dla którego $\log 1=0$, jest punktem rozgałęzienia algebraicznym rzędu 1 (zob. uwagę na str. 107).

[1]) Granica jest 1° skończona i równa a_0, gdy wszystkie $a_n=0$ dla $n<0$; 2° nieskończona, gdy niektóre a_n dla $n<0$ są różne od zera.

64. Funkcje algebraiczne. Funkcję $f(z)$ analityczną na całej płaszczyźnie domkniętej z pominięciem skończonej ilości punktów $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, w których ma ona bieguny lub punkty rozgałęzienia algebraiczne, nazywamy *funkcją algebraiczną*. Funkcje nie algebraiczne, np. e^z lub $\log z$, nazywamy *funkcjami przestępnymi*.

Funkcja algebraiczna nie mająca punktów rozgałęzienia jest jednoznaczna i redukuje się do funkcji wymiernej, bo jedynymi jej punktami osobliwymi są bieguny. Funkcja algebraiczna wieloznaczna jest dowolnie przedłużalna po całej płaszczyźnie wzdłuż każdej drogi nie przechodzącej przez punkty osobliwe $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ i wobec tego każdy punkt a płaszczyzny różny od punktów z_k jest środkiem tej samej ilości elementów (str. 107). Jeżeli ilość tych elementów równa się n, to funkcja jest n-znaczna.

Niech będzie dane równanie algebraiczne postaci

$$\Phi(z,w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0, \tag{7}$$

którego lewa strona $\Phi(z,w)$ jest wielomianem względem zmiennej w, a współczynniki $A_k(z)$ są funkcjami wymiernymi zmiennej z. Mówimy, że szereg potęgowy $P(z) = \sum\limits_0^\infty c_\nu (z-a)^\nu$ spełnia równanie (7), jeżeli w kole zbieżności tego szeregu poza biegunami współczynników $A_k(z)$ zachodzi tożsamość $\Phi[z, P(z)] \equiv 0$. O funkcji analitycznej $f(z)$ mówimy, że spełnia równanie (7), jeżeli każdy jej element spełnia dane równanie.

Aby funkcja $f(z)$ spełniała równanie (7), wystarcza, żeby jeden jej element $P(z)$ spełniał to równanie, bo gdy wyrażenie $\Phi[z, P(z)]$ jest tożsamościowo równe zeru i element $Q(z)$ jest przedłużeniem elementu $P(z)$ wzdłuż drogi nie przechodzącej przez bieguny współczynników $A_k(z)$, to funkcja $\Phi[z, Q(z)]$ jest przedłużeniem funkcji $\Phi[z, P(z)]$ i jako taka równa się tożsamościowo zeru. Wykażemy, że:

Każda funkcja algebraiczna n-znaczna $f(z)$ spełnia pewne równanie algebraiczne stopnia n postaci (7), w którym współczynniki $A_k(z)$ są funkcjami wymiernymi nie mającymi biegunów poza punktami osobliwymi $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ funkcji $f(z)$.

Dowód. Niech

$$P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z) \tag{8}$$

będzie układem n różnych elementów funkcji $f(z)$ o wspólnym środku a i niech $S(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ będzie dowolnym wielomianem symetrycznym n zmiennych $w_1, w_2, \ldots, w_n$[1]. Każdy z elementów (8) jest przedłużalny

[1] Np. w wielomianie

$$(w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_n) = w^n - s_1 w^{n-1} + s_2 w^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n$$

współczynniki s_k są wielomianami symetrycznymi zmiennych $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Są to tzw. *funkcje symetryczne podstawowe*.

wzdłuż każdej krzywej C wychodzącej z punktu a i nie przechodzącej przez punkty z_k, a ponieważ suma i iloczyn dwóch funkcji przedłużalnych wzdłuż C są oczywiście przedłużalne wzdłuż C, więc szereg potęgowy $S(z)$ określony wzorem

$$S(z) = S[P_1(z), \ldots, P_n(z)] \tag{9}$$

jest przedłużalny wzdłuż C.

Niech C będzie krzywą zamkniętą zawierającą wewnątrz jeden z punktów z_k. Elementy (8) przejdą po przedłużeniu odpowiednio na pewne elementy (o tym samym środku a)

$$P_{\nu_1}(z), P_{\nu_2}(z), \ldots, P_{\nu_n}(z), \tag{10}$$

które od elementów (8) mogą różnić się co najwyżej porządkiem, a więc prawa strona (9) nie ulegnie zmianie. Szereg potęgowy $S(z)$ jest więc elementem pewnej funkcji analitycznej jednoznacznej $A(z)$, która poza punktami $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ nie ma punktów osobliwych i w każdym z punktów z_k ma granicę $\lim\limits_{z \to z_k} A(z)$ skończoną lub nieskończoną[1]. Każdy z punktów z_k jest więc punktem regularnym lub biegunem funkcji $A(z)$, a zatem $A(z)$ jest funkcją wymierną.

Wynika stąd, że współczynniki $A_k(z)$ wielomianu

$$[w - P_1(z)][w - P_2(z)] \ldots [w - P_n(z)] = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \ldots + A_n(z)$$

są funkcjami wymiernymi zmiennej z nie mającymi biegunów poza punktami z_k. Wielomian ten staje się tożsamościowo równy zeru, gdy za w wstawimy dowolny element (8). Twierdzenie jest więc wykazane.

Uwaga. Układ elementów (10) tworzy pewną *permutację* elementów układu (8). Przejście od jednej permutacji do innej, złożonej z tych samych elementów, nazywamy *podstawieniem*. Wiadomo z algebry, że każde podstawienie daje się rozłożyć na pewną ilość podstawień cyklicznych, czyli *cyklów* złożonych z jednego lub kilku elementów. Np. przejście od permutacji $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ do permutacji $(2, 3, 1, 4, 6, 5)$ daje się rozłożyć na trzy cykle $[1, 2, 3]$, $[4]$, $[5, 6]$, z których pierwszy zawiera trzy elementy[2], drugi jeden, trzeci dwa; przejście zaś od permutacji $(1, 2, \ldots, n-1, n)$ do $(2, 3, \ldots, n, 1)$ tworzy jeden cykl złożony z n elementów.

Gdy więc wspólny środek układu n elementów funkcji algebraicznej n-go stopnia okrąża pewien punkt osobliwy, wówczas elementy przechodzą jeden w drugi i tworzą przy tym pewną ilość cyklów.

[1] Bo elementy funkcji danej $f(z)$ mają w każdym z punktów z_k granicę, a funkcja $S(w_1, \ldots, w_n)$ jest wielomianem.

[2] Cykl $[1, 2, \ldots, r]$ oznacza podstawienie, w którym element 1 przechodzi w 2, element 2 w 3, … i wreszcie element r w 1.

PRZYKŁAD 1. $\sqrt[n]{z}$ jest funkcją algebraiczną n-znaczną. Spełnia ona równanie $w^n-z=0$ i ma dwa punkty rozgałęzienia: 0 i ∞. Jeżeli $P_0(z)$ jest pewnym jej elementem o środku a, to wszystkie elementy o tym samym środku mają postać

$$P_k(z)=e^{2\pi i/n}P_0(z) \qquad (k=0,1,\ldots,n-1).$$

Gdy punkt a okrąża punkt 0 (lub ∞), wówczas elementy te ulegają podstawieniu, które tworzy jeden cykl.

PRZYKŁAD 2. Funkcja algebraiczna $\sqrt[6]{z^3(1-z)^2}$ czyli $\sqrt{z}\cdot\sqrt[3]{1-z}$ spełnia równanie $w^6-z^3(1-z)^2=0$. Każdy punkt $a\neq 0$, 1, ∞ jest środkiem sześciu elementów; można je otrzymać mnożąc elementy $P_1(z)$ i $P_2(z)$ funkcji $\sqrt{z}$ przez elementy $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ i $Q_3(z)$ funkcji $\sqrt[3]{1-z}$.

Gdy punkt a okrąża raz tylko punkt rozgałęzienia 0, wówczas elementy danej funkcji $\sqrt{z}\cdot\sqrt[3]{1-z}$ ulegają przekształceniu złożonemu z trzech cyklów po 2 elementy

$$[P_1Q_1, P_2Q_1], \qquad [P_1Q_2, P_2Q_2], \qquad [P_1Q_3, P_2Q_3],$$

bo elementy Q_k wracają po okrążeniu do wartości wyjściowych. Gdy a okrąża tylko punkt 1, wówczas elementy ulegają przekształceniu złożonemu z dwóch cyklów po 3 elementy

$$[P_1Q_1, P_1Q_2, P_1Q_3], \qquad [P_2Q_1, P_2Q_2, P_2Q_3].$$

Gdy natomiast a okrąża punkt ∞ (czyli oba punkty 0 i 1 jednocześnie), wówczas elementy przekształcają się tworząc jeden cykl złożony z 6 elementów.

Funkcję algebraiczną n-znaczną $w=f(z)$ nazywamy również *funkcją algebraiczną n-go stopnia*, bo spełnia równanie n-go stopnia postaci

$$\Phi(z,w)=w^n+A_1(z)w^{n-1}+\ldots+A_n(z)=0 \tag{11}$$

o współczynnikach wymiernych względem z. Można dowieść, że wielomian $\Phi(z,w)$ jest wówczas n i e r o z k ł a d a l n y na iloczyn dwóch wielomianów $\Phi_1(z,w)\cdot\Phi_2(z,w)$ stopni niższych względem w (lecz dodatnich) o współczynnikach wymiernych względem z. Na odwrót, każde równanie postaci (11), którego lewa strona jest wielomianem nierozkładalnym o współczynnikach wymiernych $A_k(z)$, spełnia dokładnie jedna funkcja algebraiczna n-znaczna; nazywamy ją *rozwiązaniem równania* (11) [1]. Zatem:

[1]) Wiadomo z algebry, że — poza skończoną ilością punktów osobliwych $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, w których wielomiany $\Phi(z_k,w)$ mają zera wielokrotne lub współczynniki $A_k(z)$ mają bieguny — każdej wartości z odpowiada n różnych zer

$$w_1(z), w_2(z), \ldots, w_n(z)$$

równania (11). Dowodzi się (dowód w tomie następnym), że zera te w otoczeniu każdego punktu nieosobliwego tworzą układ n szeregów potęgowych będących elementami jednej funkcji algebraicznej.

Każda funkcja algebraiczna $w=f(z)$ jest rozwiązaniem pewnego równania algebraicznego postaci (11).

Pomnóżmy obie strony równania (11) przez wielomian $a_0(z)$ najniższego stopnia będący wspólnym mianownikiem funkcji wymiernych $A_k(z)$. Otrzymamy równanie postaci

$$a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z)=0, \tag{12}$$

w którym współczynniki $a_k(z)$ są wielomianami względem z. Oznaczając przez m najwyższy stopień tych wielomianów i porządkując lewą stronę względem z, otrzymamy równanie

$$b_0(w)z^m+b_1(w)z^{m-1}+\ldots+b_m(w)=0, \tag{13}$$

w którym współczynniki $b_k(w)$ są wielomianami zmiennej w. Otrzymujemy stąd wniosek:

Funkcja odwrotna względem funkcji algebraicznej jest również funkcją algebraiczną (na ogół innego stopnia).

Niech $f(z)$ będzie funkcją algebraiczną n-go stopnia mającą μ punktów osobliwych $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$. Stwierdziliśmy wyżej, że w otoczeniu każdego punktu z_k elementy danej funkcji rozdzielają się na pewną ilość cyklów. Niech r_i oznacza ilość elementów jednego z tych cyklów. Suma $\sum(r_i-1)$, gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie cykle i wszystkie punkty osobliwe, jest oczywiście nieujemna (bo $r_i\geqslant 1$). Dowodzi się [1]), że suma $\sum(r_i-1)$ jest zawsze liczbą parzystą i że jej połowa jest niemniejsza od $n-1$. Liczbę

$$p=\frac{1}{2}\sum(r_i-1)-n+1 \tag{14}$$

nazywamy *rodzajem* danej funkcji algebraicznej. Jest to liczba całkowita nieujemna i charakteryzuje w pewnej mierze daną funkcję.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $\sqrt[n]{z}$ jest stopnia n i rodzaju $p=0$, bo ma dwa punkty rozgałęzienia 0 i ∞, przy czym w otoczeniu każdego z nich elementy tworzą jeden cykl złożony z n elementów. Zatem

$$\sum(r_i-1)=2(n-1), \qquad \text{skąd} \qquad p=\frac{1}{2}\sum(r_i-1)-n+1=0.$$

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$, gdzie $z_i\neq z_k$ dla $i\neq k$, jest stopnia $n=2$ i rodzaju $p=1$, bo ma 4 punkty rozgałęzienia, przy czym w każdym z nich elementy tworzą jeden cykl złożony z dwóch elementów. A więc

$$\sum(r_i-1)=4\cdot(2-1)=4; \qquad \text{zatem} \qquad p=2-2+1=1.$$

65. Powierzchnie Riemanna. *Powierzchnią Riemanna* funkcji analitycznej j e d n o z n a c z n e j nazywamy jej obszar istnienia, tj. zbiór punktów środkowych wszystkich jej elementów (regularnych lub nie, str. 155).

[1]) Zob. G. A. Bliss, *Algebraic Functions*, New York 1933, str. 58.

Każdy punkt tego obszaru jest środkiem dokładnie jednego elementu. Np. powierzchnią Riemanna funkcji wymiernej jest cała płaszczyzna domknięta, funkcji $\operatorname{tg} z$ — płaszczyzna otwarta.

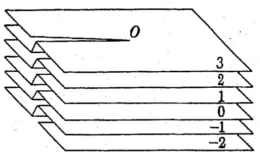
Powierzchnię Riemanna funkcji analitycznej wieloznacznej określamy również tak, aby każdy jej punkt był środkiem dokładnie jednego elementu danej funkcji i żeby zachowana była ciągłość funkcji na powierzchni. Wyjaśnimy to na przykładach.

1° $\log z$.

Funkcja ta jest, jak wiemy, nieskończenie wieloznaczna. Na płaszczyźnie rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej[1]) istnieje nieskończenie wiele gałęzi jednoznacznych logarytmu, mianowicie: $\operatorname{Log} z + 2n\pi i$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Utwórzmy nieskończony w obie strony ciąg tak rozciętych płaszczyzn i ponumerujmy je liczbami

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$



Rys. 54.

(rys. 54). Odrzućmy z tych płaszczyzn punkty 0 i ∞ i połączmy górny brzeg rozcięcia każdej z nich z dolnym brzegiem rozcięcia następnej tak, aby punkty brzegowe o tych samych współrzędnych tworzyły jeden punkt.

Otrzymana w ten sposób nieskończenie wielolistna powierzchnia złożona z płaszczyzn (liści) przedstawia powierzchnię Riemanna pełnej funkcji analitycznej $\log z$. Punktom płaszczyzny oznaczonej liczbą 0 przyporządkujmy wartości gałęzi głównej $\operatorname{Log} z$. Ogólnie punktowi z płaszczyzny n-tej przyporządkujmy wartość $\operatorname{Log} z + 2n\pi i$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ W ten sposób każdej wartości pełnej funkcji $\log z$ zostaje przyporządkowany dokładnie jeden punkt naszej powierzchni i na odwrót. Na tej powierzchni $\log z$ jest funkcją jednoznaczną. Gdy okrążymy punkt 0 po wyjściu z pewnego punktu z powierzchni, dojdziemy po jednym okrążeniu do punktu z na liściu sąsiednim. Równocześnie po każdym okrążeniu wartość $\log z$ wzrośnie lub zmaleje o $2\pi i$ zależnie od tego, czy okrążamy punkt 0 w kierunku dodatnim, czy ujemnym.

2° $\sqrt[n]{z}$.

Funkcja ta jest n-znaczna i ma n gałęzi jednoznacznych na całej płaszczyźnie rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej[2]). Gdy punkt $z_0 \neq 0$

[1]) Nie jest rzeczą istotną, aby rozcięcie biegło wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej. Może to być dowolna linia bez punktów wielokrotnych łącząca punkty 0 i ∞.

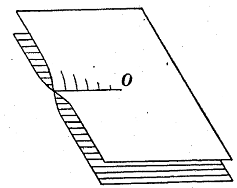
[2]) Lub wzdłuż dowolnej linii nie przecinającej się ze sobą i łączącej punkty 0 i ∞.

okrąża raz punkt 0 w kierunku dodatnim na płaszczyźnie nierozciętej, wówczas każdy element funkcji o środku z_0 przedłużany wzdłuż tej drogi zostaje pomnożony przez $2^{2\pi i/n}$, a więc po okrążeniu n-krotnym zostaje pomnożony przez $e^{2\pi i} = 1$, tj. wraca do swej wartości początkowej w punkcie z_0. Uwaga ta daje wskazówkę, jak zbudować powierzchnię Riemanna funkcji $\sqrt[n]{z}$.

Umieśćmy jedną nad drugą n płaszczyzn rozciętych wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej i połączmy wszystkie płaszczyzny w punktach 0 i ∞ oraz górny brzeg rozcięcia każdej płaszczyzny poprzedniej z dolnym brzegiem rozcięcia następnej jak na rys. 54. Górny brzeg rozcięcia ostatniej płaszczyzny połączmy z dolnym brzegiem rozcięcia pierwszej, łącząc punkty rozcięć o tych samych współrzędnych. Zakładamy przy tym, że żadne inne punkty rozważanych płaszczyzn nie są identyczne[1]).

Otrzymana w ten sposób n-listna powierzchnia nie ma brzegu i przedstawia powierzchnię Riemanna dla $\sqrt[n]{z}$. Na jednym liściu tej powierzchni rozmieśćmy wartości jednej gałęzi jednoznacznej danej funkcji, a na każdym następnym liściu wartości gałęzi poprzedniej, pomnożonej przez czynnik $e^{2\pi i/n}$. W ten sposób każdej wartości funkcji $\sqrt[n]{z}$ zostanie przyporządkowany dokładnie jeden punkt powierzchni i na odwrót. Na tej powierzchni jest więc $\sqrt[n]{z}$ funkcją jednoznaczną.

Dwulistną powierzchnię Riemanna dla $\sqrt{z}$ ilustruje rys. 55.



Rys. 55.

3° $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)}$.

Zakładamy, że $z_1 \neq z_2$. Funkcja ta jest dwuznaczna i ma dwa punkty rozgałęzienia: z_1 i z_2. Jej powierzchnia Riemanna jest dwulistna i powstaje w następujący sposób: Rozcinamy płaszczyznę domkniętą wzdłuż dowolnego łuku łączącego z_1 i z_2 (np. wzdłuż odcinka) i łączymy ze sobą dwa egzemplarze tak rozciętej płaszczyzny w ten sposób, aby lewy brzeg rozcięcia na jednej płaszczyźnie był złączony z prawym brzegiem na drugiej (łączymy ze sobą punkty o tych samych współrzędnych).

Jeżeli pewien punkt z_0 okrąża na tej powierzchni tylko jeden z punktów rozgałęzienia z_1 lub z_2, to przechodzi on po okrążeniu z jednego liścia powierzchni na drugi. Równocześnie element funkcji mającej środek z_0, przedłużony wzdłuż tej drogi, przechodzi w inny element o tym samym

[1]) Konstrukcja taka nie daje się zrealizować w przestrzeni trójwymiarowej, jest jednak możliwa w przestrzeni o wyższej liczbie wymiarów.

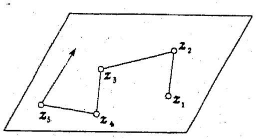
środku z_0. Gdy natomiast punkt z_0 okrąża oba punkty z_1 i z_2, wówczas pozostaje on po okrążeniu na tym samym liściu i równocześnie odnośny element funkcji wraca po przedłużeniu do swych wartości początkowych.

4° $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$.

Zakładamy, że żadne dwie z liczb z_1, z_2, z_3 nie są równe. Funkcja ta jest dwuznaczna i ma 4 punkty rozgałęzienia: z_1, z_2, z_3 i ∞. Jej powierzchnia Riemanna jest dwulistna. Otrzymamy ją rozcinając płaszczyznę domkniętą wzdłuż dwóch łuków l_1 i l_2 nie przecinających się ze sobą, z których jeden łączy dwa dowolne punkty rozgałęzienia, drugi — dwa pozostałe. Następnie łączymy dwa egzemplarze tak rozciętej płaszczyzny w ten sposób, aby lewy brzeg rozcięcia l_k dla $k=1, 2$ na jednej płaszczyźnie był złączony w odpowiednich punktach z prawym brzegiem tego samego rozcięcia l_k na drugiej.

5° $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}$.

Zakładamy, że $z_j \neq z_k$ dla $j \neq k$. Punktami rozgałęzienia tej funkcji są punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$, gdy n jest liczbą parzystą 2ν; Jeżeli $n=2\nu-1$, to punktami rozgałęzienia są $z_1, z_2, \dots, z_n, \infty$. Aby otrzymać powierzchnię Riemanna tej funkcji, rozcinamy płaszczyznę wzdłuż nieprzecinających się ze sobą łuków l_k, $k=1, 2, \dots, \nu$, z których każdy łączy dwa punkty rozgałęzienia, następnie łączymy ze sobą dwa egzemplarze tej płaszczyzny tak, aby lewy brzeg każdego łuku l_k na jednej płaszczyźnie był złączony z prawym brzegiem tegoż łuku l_k na drugiej. W przypadku $n=3$ lub $n=4$ funkcja ma 4 punkty rozgałęzienia i jej powierzchnia Riemanna nosi nazwę *powierzchni eliptycznej*.



Rys. 56.

Ogólnie, niech $f(z)$ będzie dowolną funkcją algebraiczną n-go stopnia, a $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ — jej punktami osobliwymi. Połączmy te punkty w dowolnym porządku jedną linią L nie przecinającą się ze sobą (rys. 56). Płaszczyzna domknięta rozcięta wzdłuż L jest obszarem jednospójnym, a więc każdy z n elementów danej funkcji o wspólnym środku a nie leżącym na L jest dowolnie przedłużalny w tym obszarze i wytwarza w nim gałąź jednoznaczną $f_k(z)$, $k=1, 2, \dots, n$, danej funkcji $f(z)$.

Umieśćmy jedną nad drugą n płaszczyzn rozciętych wzdłuż L, oznaczmy przez σ_k, $k=1, 2, \dots, n$, k-tą z nich i rozmieśćmy na niej wartości gałęzi $f_k(z)$. Przedłużajmy następnie gałęzie

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z) \tag{15}$$

poprzez pewien odcinek otwarty $l_i = z_i z_{i+1}$ linii L, np. z brzegu górnego na dolny (w tej samej płaszczyźnie). Każda gałąź f_j przejdzie po przedłużeniu na pewną gałąź f_k, inną lub tę samą. Połączmy wówczas górny brzeg płaszczyzny σ_j z dolnym brzegiem płaszczyzny σ_k wzdłuż odcinka l_i bez końców i postąpmy tak samo ze wszystkimi odcinkami l_i. Otrzymamy w ten sposób z płaszczyzn $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ jedną powierzchnię n-listną Σ nie zawierającą punktów osobliwych $z_1, z_2, \dots, z_\mu$, na której każdemu punktowi z odpowiada dokładnie jeden element regularny funkcji $f(z)$ i na odwrót. Funkcja $f(z)$ jest więc na powierzchni Σ jednoznaczna.

Niech z_k będzie dowolnym punktem osobliwym, a K okręgiem o środku z_k nie zawierającym na sobie ani wewnątrz żadnego innego punktu osobliwego. Gałęzie (15) przedłużone jeden raz wzdłuż K ulegają permutacji, która rozpada się na pewną ilość, np. ν cyklów, gdzie $1 \leqslant \nu \leqslant n$. Punkt z_k nazywamy *wierzchołkiem* każdego z tych cyklów. Jeżeli $[f_1, f_2, \dots, f_r]$ jest pewnym cyklem o wierzchołku z_k, połączmy płaszczyzny $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ w punkcie z_k i punkt ten zaliczmy do powierzchni Σ, przy czym dwu oddzielnym cyklom o wierzchołku z_k niech odpowiadają na powierzchni Σ dwa różne punkty z_k. W otoczeniu punktu z_k można gałęzie cyklu przedstawić przez jeden szereg postaci (6). Dwu różnym cyklom o wierzchołku z_k odpowiadają dwa różne elementy nieregularne postaci (6) danej funkcji.

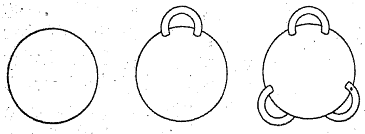
Każdemu punktowi osobliwemu z_k odpowiada więc na powierzchni Σ tyle różnych punktów, ile jest różnych cyklów o wierzchołku z_k. Uzupełniona w ten sposób punktami z_k powierzchnia Σ jest zamknięta[1]) i przedstawia powierzchnię Riemanna danej funkcji algebraicznej.

Uwagi. Interesującym jest pytanie, jaki charakter topologiczny mają omówione wyżej powierzchnie Riemanna. Łatwo stwierdzić, że powierzchnia Riemanna funkcji $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)}$ i tak samo funkcji $\sqrt{z}$ jest homeomorficzna z powierzchnią kuli, tzn. jest jej obrazem wzajemnie jednoznacznym i obustronnie ciągłym. Powstaje ona przez złączenie dwóch płaszczyzn domkniętych (z których każda jest homeomorficzna z kulą) wzdłuż pewnego rozcięcia. Jeżeli brzegi tego rozcięcia połączymy ze sobą nie w sposób wyżej opisany, lecz łącząc lewy brzeg z lewym i prawy z prawym, to otrzymana powierzchnia będzie oczywiście homeomorficzna z kulą i równocześnie z wyżej opisaną powierzchnią Riemanna, a zatem ta ostatnia jest homeomorficzna z powierzchnią kuli.

W podobny sposób można wykazać, że powierzchnia Riemanna funkcji 4° jest homeomorficzna z torusem[2]) lub, co na jedno wychodzi, z kulą opatrzoną jednym uchem (powstaje ona w ten sposób, że z kuli wycinamy dwa koła i otwory łączymy rurą, jak na rys. 57). Podobnie powierzchnia Riemanna funkcji 5°, gdzie $n=2\nu-1$ lub 2ν, jest homeomorficzna z kulą opatrzoną $\nu-1$ uchami. Ogólnie, powierzchnia

[1]) Nie ma ona brzegu, podobnie jak płaszczyzna domknięta.
[2]) Stwierdziliśmy to już na str. 150.

Riemanna każdej funkcji algebraicznej jest homeomorficzna z kulą opatrzoną uchami (rys. 57), których ilość równa się rodzajowi p (str. 159) danej funkcji.



Rys. 57.

Zauważmy, że powierzchnia Riemanna funkcji $w=\log z$ rozważanej w pierścieniu $r<|z|<R$ jest nieskończenie wielolistna i ma postać pasa, który nawija dany pierścień (a więc obszar dwuspójny) nieskończenie wiele razy w obu kierunkach. Obrazem tej powierzchni na płaszczyźnie zmiennej w jest pas nieograniczony jednospójny $\operatorname{Log} r<\mathrm{R}\, w<\operatorname{Log} R$, a więc dana powierzchnia Riemanna jest obszarem jednospójnym. Nosi ona nazwę *pokrywy uniwersalnej* (Überlagerungsfläche) obszaru dwuspójnego $r<|z|<R$.

66. Całki Abela. Niech $w=w(z)$ będzie funkcją algebraiczną określoną równaniem postaci $\Phi(z,w)=0$, którego lewa strona jest wielomianem nierozkładalnym zmiennych z i w; niech dalej $R(z,w)$ będzie funkcją wymierną zmiennych z i w. Funkcja określona przez całkę

$$F(z)=\int_a^z R[\zeta,w(\zeta)]\,d\zeta,$$

gdzie droga całkowania nie przechodzi przez punkty osobliwe funkcji podcałkowej, nosi nazwę *całki Abela*. Funkcja ta zależy na ogół od drogi całkowania i jest funkcją analityczną jednoznaczną lub wieloznaczną, przedłużalną po całej płaszczyźnie z pominięciem skończonej ilości punktów osobliwych.

Całki Abela są uogólnieniem całek eliptycznych omawianych w § 50 (str. 113). Podobnie jak dla całek eliptycznych różne gałęzie całki Abela w tym samym obszarze różnią się o stałe[1]).

ĆWICZENIA.

1. Rozwinąć funkcję $\sqrt[6]{(z-1)^2/z^3}$ w szereg Laurenta postaci (6) w otoczeniu punktu a) $z=0$, b) $z=1$, c) $z=\infty$.

2. Czy $z=\infty$ jest punktem osobliwym (w szczególności czy jest punktem rozgałęzienia) funkcji $\sqrt[n]{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}$?

3. Znaleźć punkty osobliwe funkcji a) $\arccos z$, b) $\log(\operatorname{arc\,tg} z)$.

4. Wykazać, że funkcja $\zeta=\operatorname{tg}(\log z)$ odwzorowuje pokrywę uniwersalną Π pierścienia $e^{-\pi/4}<|z|<e^{\pi/4}$ jednokrotnie na koło $|\zeta|<1$.

---

[1]) Pełny wykład teorii funkcji algebraicznych i całek Abela znajdzie czytelnik w książce cytowanej na str. 159.

ROZWIĄZANIA.

1. a) $\dfrac{1}{\sqrt{z}}-\dbinom{1/3}{1}\sqrt{z}+\dbinom{1/3}{2}(\sqrt{z})^3\ldots$ dla $|z|<1$,

b) $\sqrt[3]{z-1}+\dbinom{-1/2}{1}(\sqrt[3]{z-1})^4+\dbinom{-1/2}{2}(\sqrt[3]{z-1})^7+\ldots$ dla $|z-1|<1$,

c) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{z}}-\dbinom{1/3}{1}\dfrac{1}{(\sqrt[6]{z})^7}+\dbinom{1/3}{2}\dfrac{1}{(\sqrt[6]{z})^{13}}-\ldots$ dla $|z|<1$.

2. Punkt ∞ jest biegunem zwykłym. — **3.** a) 1, -1, ∞, b) i, $-i$, ∞ oraz 0 dla pewnych elementów. — **4.** Funkcja $w=\log z$ odwzorowuje powierzchnię Π jednokrotnie na pas $-\pi/4\leqslant \mathrm{R}\,w\leqslant\pi/4$, a funkcja $\zeta=\operatorname{tg} w$ odwzorowuje ten pas jednokrotnie na koło $|\zeta|<1$ (str. 96).