

ROZWIĄZANIA.

1. $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots$; $r = \pi/2$. — 2. $I(z) = \left(\sum_0^\infty a_n z^n \right) / \left(\sum_0^\infty b_{p+n} z^n \right)$; suma $\sum_0^\infty b_{p+n} z^n$

jest funkcją analityczną różną od zera w pewnym otoczeniu punktu 0, a więc w pewnym otoczeniu tego punktu istnieje pochodna $I'(z)$. Z tożsamości

$$(\Sigma a_n z^n) / (\Sigma b_{p+n} z^n) = \Sigma c_n z^n$$

otrzymamy: $c_0 b_p = a_0$, $c_1 b_p + c_0 b_{p+1} = a_1, \dots$, $c_n b_p + c_{n-1} b_{p+1} + \dots + c_0 b_{p+n} = a_n$, stąd zaś

można obliczyć $c_0, c_1, \dots, c_n$. — 3. $\Phi(z) = 1 / \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_0^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$, więc

$$\left(B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots \right) \left(\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = 1,$$

skąd $B_0 = 1$, $\frac{B_1}{1!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{2!} = 0$ i ogólnie $\frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = 0$

dla $n \geq 1$; zatem $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}, \dots$ Spraw-

dzić, że suma $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{B_1}{1!} z = 1 + \sum_2^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$ jest funkcją parzystą, a zatem współczynniki B_n dla $n > 2$ i nieparzystych są równe zero. — 4. Stosując wzory Eulera

i przykład poprzedni (tj. $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu}$) otrzymamy

$$\begin{aligned} z \operatorname{ctg} z &= iz \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = iz \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} + \frac{2iz}{2} = 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} (2iz)^{2\nu} = \\ &= 1 - \frac{B_2}{1!} (2z)^2 + \frac{B_4}{4!} (2z)^4 - \dots \end{aligned}$$

5. Wynika to stąd, że

$$2 \operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin z \cos z} = \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z.$$

6. Ponieważ $\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$, więc $|a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$, skąd $|a_n| \leq M r^{-n}$.

7. a) $\sin z = (-1)^n \left[(z - n\pi) - \frac{(z - n\pi)^3}{3!} + \frac{(z - n\pi)^5}{5!} - \dots \right],$

b) $\cos z = (-1)^{n+1} \left[(z - z_0) - \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \frac{(z - z_0)^5}{5!} - \dots \right],$

gdzie $z_0 = (2n+1)\pi/2$. — 8. Dla małych $\varepsilon > 0$ zachodzą nierówności $|a_n(r-\varepsilon)| < M$ i $|b_n(r'-\varepsilon)| < M$, gdzie M jest pewną stałą, skąd $\limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq 1/(r-\varepsilon)(r'-\varepsilon)$; podstawić $g(z/\zeta) = \Sigma b_n z^n \zeta^{-n}$ do całki i całkować wyraz po wyrazie. — 9. Całkować wyraz po wyrazie i uwzględnić wzór $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$.

CZĘŚĆ TRZECIA

WŁASNOŚCI OGÓLNE FUNKCJI ANALITYCZNYCH

ROZDZIAŁ VIII

Wnioski z wzoru całkowego

32. Funkcje całkowite i twierdzenie Liouville'a. Funkcję analityczną na całej płaszczyźnie (otwartej) nazywamy *funkcją całkowitą*. Funkcja całkowita $f(z)$ daje się przedstawić jednym szeregiem potęgowym postaci

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

zbieżnym na całej płaszczyźnie.

Funkcje całkowite dzielimy na *wielomiany* (czyli *funkcje całkowite wymierne*) i na *funkcje całkowite przestępne* zależnie od tego, czy w rozwinięciu (1) ilość współczynników a_n różnych od zera jest skończona, czy nieskończona. Np. e^z , $\sin z$, $\cos z$ są funkcjami całkowitymi przestępnymi. Wykażemy następujące ważne

TWIERDZENIE LIOUVILLE'A. *Każda funkcja całkowita ograniczona jest stała.*

Dowód. Niech funkcja $f(z)$ będzie całkowita i niech spełnia na całej płaszczyźnie nierówność $|f(z)| \leq M$, gdzie M jest pewną stałą. Na mocy nierówności Cauchy'ego (str. 64) mamy dla dowolnego $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Ponieważ promień r może być dowolnie wielki, więc moduł $|a_n|$ jest dowolnie mały, gdy $n > 0$; zatem $a_n = 0$ dla $n=1, 2, \dots$ i dlatego $f(z)$ redukuje się do wyrazu stałego a_0 .

Twierdzenie powyższe orzeka, że każda funkcja całkowita różna od stałej przyjmuje wartości o module dowolnie wielkim, czyli że

$\limsup_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. Wielomiany różne od stałej mają własność bardziej specjalną, mianowicie:

Jeżeli $W(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$, gdzie $a_m \neq 0$ i $m > 0$, to

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \infty.$$

Istotnie,

$$W(z) = z^m \left(\frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z} + a_m \right)$$

i gdy $z \rightarrow \infty$, to z^m dąży do ∞ , wyrażenie zaś w nawiasie dąży do $a_m \neq 0$, a zatem iloczyn dąży do ∞ . Zauważmy, że funkcje całkowite przestępne nie mają własności (2), bo np. e^z dąży do zera, gdy z dąży do nieskończoności poprzez wartości rzeczywiste ujemne.

Z twierdzenia Liouville'a łatwo wyprowadzić zasadnicze twierdzenie algebry:

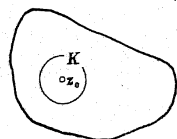
Każdy wielomian $W(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$ różny od stałej ma przynajmniej jeden punkt zerowy.

Istotnie, gdyby wielomian $W(z)$ nie miał zer, to iloraz $1/W(z)$ byłby funkcją całkowitą i to ograniczoną, bo wobec (2), gdy $z \rightarrow \infty$, to $1/W(z) \rightarrow 0$. Na mocy twierdzenia Liouville'a funkcja $1/W(z)$ byłaby stała, a przez to wielomian $W(z)$ byłby stały, wbrew założeniu.

Funkcje całkowite przestępne mogą nie mieć zer. Np. funkcja e^z jest wszędzie różna od zera (str. 30).

33. Zasada maksimum. Następującą własność funkcji analitycznych nazywamy *zasadą maksimum*:

Moduł funkcji analitycznej $f(z)$ różnej od stałej w obszarze D nie osiąga maksimum w żadnym punkcie wewnętrznym z_0 tego obszaru, tzn. w każdym kole $|z - z_0| < r$ zawartym wewnątrz D istnieje taki punkt z' , że $|f(z')| > |f(z_0)|$.



Rys. 26.

Dowód. Przypuśćmy, że $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ w całym kole $|z - z_0| < r$ i niech K będzie okręgiem $\zeta = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, gdzie $\rho < r$. Na mocy wzoru całkowego mamy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

skąd po podstawieniu $\zeta = z_0 + \rho e^{it}$ otrzymamy

$$(3) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Gdyby choć w jednym punkcie okręgu K zachodziła silna nierówność $|f(z)| < |f(z_0)|$, to wobec ciągłości $f(z)$ zachodziłaby ona na pewnym łuku, np. dla $0 \leq t \leq a$. Jest to niemożliwe, bo roz dzielając całkę (3) na dwie wzdłuż łuków $0 \leq t \leq a$ i $a \leq t \leq 2\pi$, otrzymalibyśmy nierówność fałszywą:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| < \frac{1}{2\pi} \int_0^a |f(z_0 + \rho e^{it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt = |f(z_0)|.$$

Wykażemy teraz, że równość $|f(z)| = |f(z_0)|$ nie może zachodzić w całym kole $|z - z_0| < r$. W tym celu wystarczy wykazać, że:

Jeżeli moduł funkcji analitycznej jest w pewnym obszarze stały, to funkcja jest stała.

Istotnie, jeżeli $|f(z)| = |u + iv| = c$, gdzie c jest stałą, to $u^2 + v^2 = c^2$, skąd po zróżniczkowaniu

$$uu_x + vv_x = 0 \quad \text{ i } \quad uu_y + vv_y = 0,$$

czyli na mocy równań Cauchy-Riemanna $uu_x - vv_y = 0$ i $uu_y + vv_x = 0$. Rugując u_y otrzymamy $(u^2 + v^2)u_x = c^2 u_x = 0$, a więc $u_x = 0$, jeżeli $c \neq 0$. Podobnie pochodne u_y , v_x i v_y są też równe zeru w całym obszarze, a więc funkcje u i v są stałe i dlatego funkcja $f(z)$ jest stała. Jeżeli $c = 0$, to oczywiście $f(z) = 0$.

34. Szeregi funkcji analitycznych. Udowodnimy następujące twierdzenie Weierstrassa:

Jeżeli wyrazy szeregu $\sum_1 f_n(z)$ są funkcjami analitycznymi w obszarze D

i szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym obszarze domkniętym $\Delta \subset D$, to 1° suma

$$(4) \quad f(z) = \sum_1 f_n(z)$$

jest funkcją analityczną w obszarze D i 2° szereg k -tych pochodnych $\sum_1 f_n^{(k)}(z)$

jest jednostajnie zbieżny w każdym obszarze $\Delta \subset D$ i

$$(5) \quad f^{(k)}(z) = \sum_1 f_n^{(k)}(z) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Dowód. 1° Niech C będzie dowolnym konturem zawartym wraz ze swym wnętrzem wewnątrz D . Na mocy wzoru (15) na str. 49 mamy

$$(6) \quad \oint_C f(z) dz = \sum_1 \oint_C f_n(z) dz.$$

Całki pod znakiem sumy są równe zeru na mocy twierdzenia całkowego Cauchy'ego, a więc całka po lewej stronie równa się zeru, a przez to — w myśl twierdzenia Morery — funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze D .

2° Niech z będzie dowolnym punktem obszaru D , a K — okręgiem o środku z , skierowanym dodatnio i zawartym wraz ze swym wnętrzem w obszarze D . Pomnóżmy obie strony równości $f(\zeta) = \sum f_n(\zeta)$ przez $k!/(2\pi i)(\zeta - z)^{k+1}$ i scałkujmy względem ζ wzdłuż K . Otrzymamy równość

$$(7) \quad \frac{k!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_K \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,$$

która na mocy wzoru (5) na str. 63 redukuje się do równości (5).

Oznaczmy przez $2r$ promień okręgu K , a przez K_1 — koło współśrodkowe o promieniu r . Wówczas dla $\zeta \in K$ i $z \in K_1$ mamy $|\zeta - z| \geq r$. Szereg (4) jest z założenia jednostajnie zbieżny na K , a więc na tym okręgu $\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} f_v(\zeta) \right| < \varepsilon$, gdy $n > N(\varepsilon)$ dla $p=1, 2, \dots$. Wyrazy sumy po prawej stronie (7) są funkcjami $f_n^{(k)}(z)$; więc, gdy $z \in K_1$ i $n > N(\varepsilon)$, to

$$\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} f_v^{(k)}(z) \right| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_K \sum_{v=n+1}^{n+p} f_v(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r^{k+1}} \cdot 4\pi r.$$

Moduły $\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} f_v^{(k)}(z) \right|$ są więc dowolnie małe, gdy n jest dostatecznie duże, a zatem szereg po prawej stronie (5) jest jednostajnie zbieżny w kole K_1 , tj. w otoczeniu dowolnie obranego punktu obszaru D , a przez to (na mocy twierdzenia Borela, str. 14) w dowolnym obszarze domkniętym $\Delta \subset D$.

PRZYKŁAD 1. Szereg $1 + z + z^2 + \dots$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z| \leq \varrho$, gdzie $\varrho < 1$, i jego suma $1/(1-z)$ jest funkcją analityczną. Stosując wzór (5), otrzymamy

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)z^{n-k},$$

skąd

$$(8) \quad \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k}{k} z^v \quad \text{dla } |z| < 1.$$

PRZYKŁAD 2. Szereg

$$(9) \quad \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots, \quad \text{gdzie } n^z = e^{z \log n},$$

jest jednostajnie zbieżny w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} z \geq 1 + \delta$ dla dowolnego $\delta > 0$, bo moduły wyrazów tego szeregu są dla $\operatorname{Re} z \geq 1 + \delta$ niewiększe od wyrazów szeregu zbieżnego $\sum 1/n^{1+\delta}$. Suma szeregu (9) jest więc funkcją analityczną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} z > 1$; oznaczamy ją przez $\zeta(z)$ i nazywamy funkcją zeta Riemanna.

WNIOSEK. Twierdzenie poprzednie wypowiedziane dla ciągów brzmi:

Jeżeli wyrazy ciągu $\{s_n(z)\}$ są funkcjami analitycznymi w obszarze D i jeżeli ciąg jest jednostajnie zbieżny w tym obszarze do funkcji $s(z)$, to 1° funkcja $s(z)$ jest analityczna w D i 2° ciąg k -tych pochodnych $\{s_n^{(k)}(z)\}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym obszarze domkniętym $\Delta \subset D$ do pochodnej $s^{(k)}(z)$ dla $k=1, 2, \dots$

Zastosowanie. Niech szereg $f(z) = \sum_1^{\infty} f_n(z)$, którego wyrazami są szeregi potęgowe

$$(10) \quad f_n(z) = a_{n0} + a_{n1}(z - z_0) + a_{n2}(z - z_0)^2 + \dots$$

zbieżne w kole $|z - z_0| < r$, będzie jednostajnie zbieżny w każdym kole $|z - z_0| \leq \varrho$, gdzie $\varrho < r$. Wówczas suma $f(z)$ daje się rozwinąć w szereg potęgowy

$$(11) \quad f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots$$

zbieżny w kole $|z - z_0| < r$. Współczynniki A_k otrzymamy dodając odpowiednie współczynniki szeregów (10), tj.

$$(12) \quad A_k = a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + \dots \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Wynika to z wzorów (5), bo $A_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ oraz $a_{nk} = f_n^{(k)}(z_0)/k!$.

Uwaga. Interesujące własności mają ciągi funkcji analitycznych $\{s_n(z)\}$ jednostajnie ograniczone w obszarze D , tzn. spełniające dla każdego $z \in D$ i dla każdego $n=1, 2, \dots$ nierówność

$$|s_n(z)| \leq M,$$

gdzie M jest pewną stałą. Można dowieść, że każdy taki ciąg

1° zawiera ciąg częściowy zbieżny w całym D ;

2° jest już wówczas jednostajnie zbieżny w każdym obszarze domkniętym $\Delta \subset D$, gdy jest zbieżny w dowolnym ciągu punktów mającym punkt skupienia wewnątrz D .

Twierdzenie 2° nosi nazwę twierdzenia Vitaliego.

35. Funkcja analityczna określona przez całkę. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze jednospójnym D . Na stronie 58 wykazaliśmy, że wzór

$$(13) \quad \Phi(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta, \quad \text{gdzie } a \in D,$$

określa nową funkcję analityczną w obszarze D i że $\Phi'(z) = f(z)$.

Poznamy teraz inny sposób określania funkcji analitycznej za pomocą całki. Niech $f(z, t)$ będzie funkcją ciągłą dwóch zmiennych, z których z przebiega obszar D , a t — przedział $a \leq t \leq \beta$. Dla każdego $z \in D$ istnieje oczywiście całka

$$(14) \quad F(z) = \int_a^\beta f(z, t) dt.$$

Wykażemy, że:

Jeśli $f(z, t)$ jest dla każdego t funkcją analityczną zmiennej z w obszarze D , to funkcja $F(z)$ jest analityczna w obszarze D i jej pochodne wyrażają się wzorami

$$(15) \quad F^{(k)}(z) = \int_a^\beta \frac{\partial^k f(z, t)}{\partial z^k} dt \quad (k=1, 2, \dots).$$

Dowód. Niech C będzie dowolnym konturem leżącym wraz ze swym wnętrzem wewnątrz D . W każdym punkcie z leżącym wewnątrz C mamy (str. 61)

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta,$$

a więc

$$(16) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^\beta \left[\int_C \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta \right] dt.$$

Niech $\zeta = \zeta(s)$ gdzie $\gamma \leq s \leq \delta$, będzie równaniem konturu C . Całkę wzdłuż C można zamienić na całkę zwyczajną w przedziale $[\gamma, \delta]$. Funkcja podcałkowa w całce (16) jest funkcją ciągłą zmiennych s i t , więc jak w przypadku całek rzeczywistych można w całce (16) zmienić porządek całek; zatem

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{1}{\zeta - z} \int_a^\beta f(\zeta, t) dt \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ostatnia całka określa, jak wiemy (str. 62), funkcję analityczną wewnątrz C^1 , a więc $F(z)$ jest funkcją analityczną. Jej k -ta pochodna wyraża się wzorem (str. 63)

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Zastępując w nim $F(\zeta)$ całką (14) i zmieniając znowu porządek całkowania, otrzymamy

$$F^{(k)}(z) = \int_a^\beta \left[\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta, t)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right] dt = \int_a^\beta \frac{\partial^k f(z, t)}{\partial z^k} dt;$$

twierdzenie jest więc wykazane.

¹⁾ Funkcja $F(\zeta)$ jest ciągła na C . Funkcja $f(\zeta, t)$ bowiem jest jednostajnie ciągła, gdy ζ przebiega C , a t przebiega przedział $[a, \beta]$, a więc $|f(\zeta, t) - f(\zeta_0, t)| < \varepsilon$ dla wszystkich t , gdy ζ leży dostatecznie blisko ζ_0 . Zatem

$$|F(\zeta) - F(\zeta_0)| = \left| \int_a^\beta [f(\zeta, t) - f(\zeta_0, t)] dt \right| < \varepsilon(\beta - a),$$

gdy ζ leży dostatecznie blisko ζ_0 .

Twierdzenie to daje się rozszerzyć na całki niewłaściwe. Niech $f(z, t)$ będzie funkcją ciągłą dwu zmiennych z i t , gdzie $z \in D$, t zaś niech przebiega przedział z jednej strony otwarty, np. $a \leq t < \beta$. Punkt β nazwijmy punktem wyjątkowym, gdy $\beta = \infty$ lub funkcja $f(z, t)$ nie jest ograniczona, gdy $t \rightarrow \beta$. Oznaczmy

$$F_\lambda(z) = \int_a^\lambda f(z, t) dt \quad (a < \lambda < \beta).$$

Jeżeli dla każdego $z \in D$ istnieje $\lim_{\lambda \rightarrow \beta} F_\lambda(z) = F(z)$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą i oznaczamy symbolem (14). Mówimy, że całka ta jest jednostajnie zbieżna w obszarze D , jeśli dla każdego ciągu $\{\lambda_n\}$, gdzie $a < \lambda_n < \beta$ i $\lambda_n \rightarrow \beta$, ciąg $\{F_{\lambda_n}(z)\}$ jest jednostajnie zbieżny w obszarze D do funkcji $F(z)$. Wykażemy, że

Jeśli $f(z, t)$ dla każdego t z przedziału $a \leq t < \beta$ jest funkcją analityczną w obszarze D i całka niewłaściwa (14) jest w tym obszarze jednostajnie zbieżna, to funkcja $F(z)$ jest analityczna w D i wzory (15) pozostają prawdziwe¹⁾.

Istotnie, w myśl poprzedniego twierdzenia funkcje $F_{\lambda_n}(z)$ są analityczne, a ponieważ zbieżność $F_{\lambda_n}(z) \rightarrow F(z)$ jest jednostajna, więc funkcja $F(z)$ jest analityczna w obszarze D na mocy § 34, str. 71, i wzory (12) pozostają prawdziwe.

PRZYKŁAD. Całka niewłaściwa

$$(17) \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{gdzie } t^{z-1} = e^{(z-1) \text{Log } t},$$

istnieje i jest jednostajnie zbieżna w każdym pasie nieograniczonym $a \leq \text{Re } z \leq \beta$, gdzie $0 < a < \beta < \infty$ ²⁾, a więc $\Gamma(z)$ jest funkcją analityczną w półpłaszczyźnie $\text{Re } z > 0$. Nosi ona nazwę funkcji gamma Eulera (będzie o niej mowa w rozdziale XII).

36. Związek funkcji analitycznych z funkcjami harmonicznymi.

Funkcję rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych $u(x, y)$ określoną w pewnym obszarze D nazywamy funkcją harmoniczną w tym obszarze, jeżeli ma ona w nim ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu i jeżeli spełnia równanie różniczkowe Laplace'a

¹⁾ Analogiczne twierdzenie istnieje dla całki niewłaściwej (14), gdy początek przedziału jest punktem wyjątkowym.

²⁾ Dowód przebiega podobnie jak w przypadku, gdy zmienna z jest rzeczywista (zob. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wydanie II, Warszawa 1949, str. 277).

$$(18) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0^1).$$

Funkcje harmoniczne odgrywają ważną rolę w teorii potencjału (nazywamy je również *potencjalami regularnymi*). Wykażemy, że:

Część rzeczywista $u(x, y)$ każdej funkcji $f(z) = u + iv$ analitycznej w pewnym obszarze D jest funkcją harmoniczną w tym obszarze. Na odwrót, każda funkcja harmoniczna w pewnym obszarze jednopójnym jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji analitycznej.

Dowód. 1° Niech $f(z) = u + iv$ będzie funkcją analityczną w obszarze D . Wiemy (str. 38), że $f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$ i że istnieją dalsze pochodne. Ponieważ

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = \frac{1}{i^2}(u_{yy} + iv_{yy}),$$

więc $u_{xx} + u_{yy} = 0$, a zatem $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w obszarze D .

2° Niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną w obszarze jednopójnym D . Całka krzywoliniowa

$$(19) \quad \int_{x_0, y_0}^{x, y} -u_y dx + u_x dy,$$

gdzie drogą całkowania jest dowolna krzywa regularna zawarta w D o ustalonym początku (x_0, y_0) i zmiennym końcu (x, y) , nie zależy od drogi całkowania, bo na mocy (18) spełniony jest warunek

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial y}(-u_y),$$

a więc całka (19) jest funkcją górnej granicy całkowania. Oznaczmy tę funkcję przez $v(x, y)$. Wiadomo z analizy²⁾, że $v_x = -u_y$ i $v_y = u_x$; zatem funkcje u i v mają w obszarze D ciągle pochodne i spełniają równania Cauchy-Riemanna, z czego wynika (str. 39), że $f(z) = u + iv$ jest funkcją analityczną w obszarze D .

Część urojona $v(x, y)$ funkcji analitycznej $f(z) = u + iv$ jest również funkcją harmoniczną, bo jest ona częścią rzeczywistą funkcji analitycznej $\frac{1}{i}f(z)$.

¹⁾ Analogicznie określamy funkcję harmoniczną n zmiennych $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jako funkcję spełniającą równanie Laplace'a

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

²⁾ P. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1949, str. 338-340.

Część rzeczywista u i urojona v funkcji analitycznej $f(z) = u + iv$ noszą nazwę *funkcji harmonicznych sprzężonych*. Wiemy (str. 42), że rodziny krzywych $u(x, y) = c$ i $v(x, y) = c'$ są ortogonalne.

PRZYKŁAD 1. Funkcje $\frac{x}{x^2 + y^2}$ i $-\frac{y}{x^2 + y^2}$ są harmoniczne sprzężone, bo $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

PRZYKŁAD 2. Jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną różną od zera w pewnym obszarze, to $\text{Log}|f(z)|$ jest funkcją harmoniczną jako część rzeczywista funkcji analitycznej $\log f(z) = \text{Log}|f(z)| + i \arg f(z)$. W szczególności $\text{Log}(x^2 + y^2)$ jest funkcją harmoniczną poza punktem $z = 0$. Natomiast $x^2 + y^2$ nie jest funkcją harmoniczną, bo nie spełnia równania (18).

ĆWICZENIA.

1. Wykazać, że iloczyn $f(z) \cdot g(z)$ dwóch funkcji analitycznych w obszarze D jest wtedy i tylko wtedy stale równy zeru, gdy przynajmniej jedna z funkcji jest stale równa zeru.
2. Wykazać, że funkcja całkowita $f(z)$ a) jest stała, gdy jej część rzeczywista jest ograniczona z góry, b) jest wielomianem stopnia $\leq k$, gdy $\limsup_{z \rightarrow \infty} |f(z)/z^k| \leq M$.
3. Wykazać, że gdy $f(z)$ jest funkcją analityczną wewnątrz i na konturze C i spełnia na C nierówność $|f(z)| \leq M$, to wewnątrz C mamy $|f(z)| \leq \lambda M^n$ dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie λ nie zależy od n . Wyprowadzić stąd wniosek, że $|f(z)| \leq M$ wewnątrz C .
4. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n / (z - a_n)$, gdzie $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem punktów leżących na pewnym konturze C , jest zbieżny wewnątrz C i zewnątrz C i jego suma jest w każdym z tych obszarów funkcją analityczną. Rozważmy przypadek, gdy żaden z punktów a_n nie leży na pewnej części C_1 konturu C .
5. Wykazać, że szereg $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(z - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{1 - z^{2n}} - \frac{1}{1 + z^{2n-1}} \right)$ jest zbieżny poza okręgiem $|z| = 1$ i znaleźć jego sumę wewnątrz okręgu i zewnątrz okręgu.
6. Wykazać, że moduł funkcji analitycznej $f(z)$ różnej od stałej i różnej od zera w obszarze D nie osiąga minimum w żadnym punkcie wewnętrznym obszaru D .
7. Znaleźć funkcję analityczną, której częścią rzeczywistą jest a) $x^2 - 3xy^2 - 3x$, b) $e^x \sin y$.

ROZWIĄZANIA.

1. Gdyby żadna z funkcji f i g nie była stale równa zeru, to w obszarze D istniałoby koło K , w którym K istniałoby koło K' , w którym $g \neq 0$, a zatem w kole K' byłoby $f \cdot g \neq 0$. — 2. a) Jeżeli $\text{Re} f(z) = u \leq M$, to funkcja $e^{f(z)} =$ również całkowita — jest ograniczona, bo $|e^{f(z)}| = e^u \leq e^M$, a więc jest stała,

a przez to funkcja $f(z)$ jest stała, b) z założenia $|f(z)| \leq 2M|z|^k$ dla $|z| > R$, a więc na mocy nierówności Cauchy'ego $|a_n| \leq 2M R^{k-n}$ dla $r > R$; gdy $n > k$, wówczas a_n jest dowolnie małe, a więc $a_n = 0$ dla $n > k$. — 3. Zastosować wzór całkowy do funkcji $[f(z)]^n$. — 4. Jeżeli Δ jest dowolnym obszarem, mającym od C odległość $\delta > 0$, to dla $z \in \Delta$ mamy

$$\left| \frac{A_n}{z - a_n} \right| \leq \frac{|A_n|}{\delta},$$

a więc dany szereg jest jednostajnie zbieżny w obszarze Δ , a przez to wewnątrz C i zewnątrz C ; na mocy twierdzenia Weierstrassa suma szeregu jest funkcją analityczną poza $C - C_1$. — 5. Suma n wyrazów początkowych szeregu wyraża się wzorem

$$s_n(z) = \frac{1}{z} + \left(z - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{1 + z^n},$$

przy czym $s_n(z) \rightarrow z$ dla $|z| < 1$, natomiast $s_n(z) \rightarrow 1/z$ dla $|z| > 1$. — 6. Zastosować zasadę maksimum do funkcji $1/f(z)$. — 7. a) $z^2 - 3z$, b) $-ie^z$.

ROZDZIAŁ IX

Punkty osobliwe i residua

37. Rozwinięcie w szereg Laurenta. Jeżeli dwa szeregi postaci

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{ i } \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

są dla pewnej wartości z zbieżne, to ich sumę oznaczamy jednym symbolem

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

i nazywamy *szeregiem Laurenta*¹⁾ o środku z_0 zbieżnym w punkcie z . Szereg (2) nazywamy *rozbieżnym*, jeżeli przynajmniej jeden z szeregów (1) jest rozbieżny.

Pierwszy z szeregów (1) jest, jak wiadomo, zbieżny wewnątrz i rozbieżny zewnątrz koła $|z - z_0| < R$, gdzie $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, drugi z szeregów (1) jest rozbieżny wewnątrz i zbieżny zewnątrz koła $|z - z_0| < r$, gdzie $r = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$. Jeżeli więc $r < R$, to szereg Laurenta (2) jest zbieżny wewnątrz pierścienia kołowego

$$(3) \quad r < |z - z_0| < R$$

i przedstawia w nim funkcję analityczną. Wykażemy, że na odwrót:

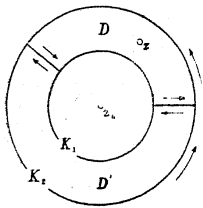
Jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną w pierścieniu (3), to daje się w nim przedstawić przez szereg Laurenta postaci (2), przy czym współczynniki szeregu wyrażają się wzorami

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

gdzie K jest dowolnym okręgiem o środku z_0 skierowanym dodatnio i zawartym w pierścieniu (3)²⁾.

¹⁾ Czytaj „Loranta”.

²⁾ Twierdzenie to nie stosuje się do funkcji analitycznych wieloznacznych, o których będzie mowa później.



Rys. 27.

Dowód. Niech z będzie dowolnym punktem pierścienia (3), a K_1 i K_2 dwoma okręgami o środku z_0 położonymi wewnątrz pierścienia tak, aby punkt z leżał między K_1 i K_2 (rys. 27). Podzielmy pierścień zawarty między K_1 i K_2 dwoma promieniami na dwa obszary D i D' i niech $z \in D$. Oznaczając brzegi obszarów D i D' skierowane dodatnio przez C i C' , otrzymamy na mocy § 28 (str. 61 i 62)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

skąd po dodaniu stronami i redukcji całek wzdłuż promieni

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

gdzie okręgi K_1 i K_2 są skierowane dodatnio.

W całce wzdłuż K_2 mamy $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ dla wszystkich $\zeta \in K_2$ (rys. 27), wobec czego

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

w całce zaś wzdłuż K_1 mamy $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, bo $\zeta \in K_1$, a więc

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Oba te szeregi są jednostajnie zbieżne względem ζ , wstawiając więc te rozwinięcia pod odpowiednie całki (5) można całkować wyraz po wyrazie, skąd otrzymamy

$$(6) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^{-n}.$$

W ostatnich całkach można zastąpić okręgi K_1 i K_2 dowolnym okręgiem K o środku z_0 skierowanym dodatnio i zawartym w pierścieniu (3), co wynika ze wzoru (8) na str. 58. Zatem twierdzenie jest wykazane, bo rozwinięcie (6) jest sumą szeregów (1) o współczynnikach (4).

Twierdzenie to orzeka, że funkcja $f(z)$, analityczna w pierścieniu (3), daje się przedstawić zawsze jako suma dwóch funkcji

$$(7) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

z których pierwsza jest analityczna w kole $|z - z_0| < R$, druga dla $|z - z_0| > r$. W pewnych przypadkach pierwsza lub druga z tych funkcji może być tożsamościowo równa zeru.

PRZYKŁAD. Funkcja $f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}$ jest analityczna na całej płaszczyźnie poza punktami $z=1$ i $z=2$, a w szczególności w pierścieniu $1 < |z| < 2$. W pierścieniu tym daje się ona przedstawić jako suma dwóch szeregów:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{zbieżny dla } |z| < 2),$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (\text{zbieżny dla } |z| > 1).$$

Równocześnie funkcja $f(z)$ jest analityczna w pierścieniu $2 < |z| < \infty$. Dla $|z| > 2$ mamy

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad \text{ i } \quad \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

a więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 1}{z^n} \quad \text{ dla } 2 < |z| < \infty.$$

38. Punkty osobliwe odosobnione. Punkt, w którego otoczeniu funkcja jest analityczna, nazywamy *punktem regularnym* funkcji. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym

$$(8) \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

to mówimy, że z_0 jest *punktem osobliwym odosobnionym* funkcji $f(z)$. W rozwinięciu (7) takiej funkcji pierwszy szereg jest zbieżny w kole $|z - z_0| < R$ i nosi nazwę *części regularnej funkcji* $f(z)$, drugi jest zbieżny dla $|z - z_0| > 0$ i nosi nazwę *części osobliwej*. Możliwe są trzy następujące przypadki:

I. Część osobliwa redukuje się do zera, tj. $a_{-n}=0$ dla $n=1,2,\dots$ Wówczas mówimy, że z_0 jest punktem *pozornie osobliwym* albo że $f(z)$ ma w punkcie z_0 *osobliwość usuwalną*; wtedy istnieje oczywiście granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ i przyjmując $f(z_0) = a_0$, otrzymamy funkcję analityczną w całym kole $|z - z_0| < R$; z_0 staje się więc punktem regularnym.

II. Część osobliwa składa się ze skończonej ilości wyrazów, np.

$$(9) \quad \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}, \quad \text{gdzie } a_{-m} \neq 0.$$

Wówczas punkt z_0 nazywamy *biegunem m-krotnym* lub *biegunem rzędu m* funkcji $f(z)$, a wyrażenie (9) *częścią główną bieguną*.

III. Część osobliwa zawiera nieskończenie wiele wyrazów. Wówczas z_0 nazywamy punktem *istotnie osobliwym* funkcji $f(z)$.

Poznamy kilka twierdzeń objaśniających zachowanie się funkcji w sąsiedztwie punktów osobliwych. Wykażemy najpierw następujące

TWIERDZENIE RIEMANNA. *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną i ograniczoną w dowolnie małym otoczeniu pierścieniowym $0 < |z - z_0| < \delta$, to z_0 jest punktem pozornie osobliwym.*

Dowód. Niech będzie $|f(z)| \leq M$ dla $0 < |z - z_0| < \delta$. W otoczeniu tym $f(z)$ jest sumą dwóch szeregów (7); wystarczy wykazać, że $a_{-n} = 0$ dla $n=1,2,\dots$ W myśl wzoru (4) mamy

$$(10) \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta,$$

gdzie K jest okręgiem $\zeta = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, o promieniu ρ dowolnie małym. Podstawiając w całce $\zeta = z_0 + \rho e^{it}$ otrzymamy po przekształceniu

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \rho^n e^{int} dt,$$

z czego wnioskujemy, że $|a_{-n}| \leq M \rho^n$. Lecz ρ jest dowolnie małe, więc $a_{-n} = 0$ dla $n=1,2,\dots$, czego należało dowieść.

Funkcja $f(z)$ ma w otoczeniu pierścieniowym $0 < |z - z_0| < R$ bieguna rozwinięcia

$$(11) \quad f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

gdzie $a_{-m} \neq 0$, czyli

$$(12) \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \text{gdzie } \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-m+k} (z-z_0)^k.$$

Funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w kole $|z - z_0| < R$ i różna od zera w punkcie z_0 . Gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas $\varphi(z) \rightarrow a_{-m} \neq 0$; zatem:

Jeżeli z_0 jest biegunem funkcji $f(z)$, to 1° $f(z) \rightarrow \infty$, gdy $z \rightarrow z_0$, 2° różnica między $f(z)$ i częścią główną bieguną jest funkcją analityczną w otoczeniu z_0 .

Zauważymy jeszcze, że na mocy (12) mamy $1/f(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$, gdzie $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu z_0 , różną od zera w tym punkcie. Funkcja $1/f(z)$ ma więc w punkcie z_0 zero m -krotne. Na odwrót, jeżeli funkcja $g(z)$ ma postać $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu z_0 i różną od zera w tym punkcie, to

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \text{gdzie } \psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Zatem:

Jeżeli z_0 jest biegunem m-krotnym funkcji $f(z)$, to dla funkcji $1/f(z)$ jest on punktem regularnym i to zerem m-krotnym; na odwrót, jeżeli z_0 jest zerem m-krotnym funkcji $g(z)$, to jest on biegunem m-krotnym dla $1/g(z)$.

Łącznie inaczej zachowuje się funkcja analityczna w otoczeniu punktu istotnie osobliwego. Udowodnimy mianowicie następujące

TWIERDZENIE CASORATIEGO-WEIERSTRASSA. *Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji $w=f(z)$, to zbiór wartości w , jakie funkcja przyjmuje w dowolnie małym otoczeniu pierścieniowym $0 < |z - z_0| < \delta$, pokrywa całą płaszczyznę wszędzie gęsto¹⁾.*

Dowód. Gdyby zbiór wartości $w=f(z)$ nie pokrywał wszędzie gęsto płaszczyzny, wówczas istniałoby koło $|w-a| \leq r$ nie pokryte przez żadną wartość $f(z)$, a więc mielibyśmy $|f(z)-a| > r$ dla $0 < |z - z_0| < \delta$, a przez to funkcja $\Phi(z) = 1/[f(z)-a]$ byłaby w otoczeniu punktu z_0 ograniczona.

W myśl twierdzenia Riemanna punkt z_0 byłby pozornie osobliwy dla $\Phi(z)$, a więc istniałaby granica $\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z)$. Funkcja $\Phi(z)$ — po nadaniu jej w punkcie z_0 wartości granicznej — byłaby analityczna w kole $|z - z_0| < \delta$, a więc funkcja $1/\Phi(z) = f(z) - a$, a przez to i funkcja $f(z)$, byłaby analityczna lub miałaby biegun w punkcie z_0 , wbrew założeniu.

Z twierdzenia tego wynika, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 i jeżeli $f(z) \rightarrow \infty$, gdy $z \rightarrow z_0$, to z_0 jest biegunem funkcji. Punkt z_0 nie może być bowiem ani pozornie osobli-

¹⁾ Tzn. w każdym kole leżą punkty w . Twierdzenie to jest prostym wnioskiem z następującego twierdzenia Picarda:

Funkcja analityczna przyjmuje w dowolnie małym otoczeniu pierścieniowym swego punktu istotnie osobliwego wszystkie wartości z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Dowód twierdzenia Picarda będzie podany w tomie następnym.

wym, bo wtedy istniałaby granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ skończona, ani istotnie osobliwym, bo wtedy granica nie istnieje.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{(z-1)^2}$ jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym $0 < |z-1| < 1$. Jej rozwinięcie w szereg Laurenta ma w tym otoczeniu postać

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots,$$

a więc punkt $z=1$ jest biegunem rzędu 2 o części głównej $1/(z-1)^2$.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $e^{1/(z-1)}$ jest analityczna wszędzie poza punktem 1. W otoczeniu pierścieniowym $0 < |z-1| < \infty$ ma ona rozwinięcie

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n},$$

którego część regularna składa się z jednego wyrazu 1, część zaś osobliwa z nieskończenie wielu wyrazów, a więc $z=1$ jest punktem istotnie osobliwym.

PRZYKŁAD 3. Funkcja $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ma bieguny w punktach $z=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a zera w punktach $z=(2n+1)\pi/2$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Jej odwrotność $\operatorname{tg} z$ ma zera w punktach $n\pi$, a w punktach $(2k+1)\pi/2$ bieguny. Bieguny i zera są jednokrotne.

59. Zachowanie się w punkcie ∞ . Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze

$$(13) \quad r < |z| < \infty, \quad \text{gdzie } r > 0.$$

Wówczas funkcja $f(1/z)$ jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym $0 < |z| < 1/r$. Obszar (13) nazywamy *otoczeniem pierścieniowym punktu ∞* .

Mówimy, że funkcja $f(z)$ ma w nieskończoności 1° *punkt regularny*, 2° *biegun rzędu m* , 3° *punkt istotnie osobliwy* zależnie od tego, czy funkcja $f(1/z)$ ma w punkcie 0 osobliwość usuwalną, biegun rzędu m , czy punkt istotnie osobliwy.

W myśl wzoru (7) funkcja $f(z)$ daje się przedstawić w otoczeniu (13) jako suma dwóch szeregów

$$(14) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n},$$

z których pierwszy jest zbieżny dla $|z| < \infty$, drugi dla $|z| > r$. Zgodnie z definicją poprzednią punkt ∞ jest dla $f(z)$ punktem regularnym, bie-

gunem lub punktem istotnie osobliwym zależnie od tego, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, zwany częścią osobliwą rozwinięcia (14), jest równy zeru, czy jest wielomianem, czy też funkcją całkowitą przestępną. Funkcja $f(z)$ jest więc *regularna w nieskończoności*, gdy daje się przedstawić przez szereg

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots,$$

zbieżny w pewnym otoczeniu (13). Wówczas funkcja $f(z)$ ma granicę $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$, co oznaczamy $f(\infty) = a_0$.

Punkt ∞ jest *pierwiastkiem k -krotnym*, gdy $a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-k+1} = 0$ i gdy $a_{-k} \neq 0$.

PRZYKŁAD 1. Funkcja wymierna

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$$

może mieć osobliwości (bieguny) na płaszczyźnie otwartej tylko w punktach zerowych mianownika. Dla dostatecznie dużego r mianownik nie równa się zeru w obszarze (13), a więc w tym obszarze funkcja $R(z)$ jest analityczna. Punkt ∞ jest regularny, gdy $n \leq m$, bo wtedy istnieje skończona granica $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z)$. Gdy $n > m$, wówczas punkt ∞ jest biegunem rzędu $n-m$, bo wtedy $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \infty$.

W szczególności wielomian $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, ma w nieskończoności biegun rzędu n .

PRZYKŁAD 2. Funkcja e^z ma w nieskończoności punkt istotnie osobliwy, bo część osobliwa rozwinięcia (14) dla e^z zawiera nieskończenie wiele wyrazów.

PRZYKŁAD 3. Funkcja $e^{1/z}$ ma w nieskończoności punkt regularny.

40. Twierdzenie o residuach. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w otoczeniu pierścieniowym $0 < |z-a| < r$ punktu osobliwego a . Wówczas jest ona rozwijalna w szereg Laurenta

$$(15) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

zbieżny dla $0 < |z-a| < r$. Oznaczmy przez C dowolny kontur zawarty w danym otoczeniu i zawierający wewnątrz punkt a . Na mocy wzorów (16) na str. 50 i (20) na str. 51, mamy

$$(16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = a_{-1},$$

bo szereg (15) można całkować wyraz po wyrazie.

Wartość całki (16), czyli współczynnik a_{-1} rozwinięcia (15), nazywamy *residuum funkcji* $f(z)$ w punkcie a i oznaczamy przez $\text{res}_a f(z)$. Łatwo stwierdzić, że:

Jeśli punkt $z=a$ jest biegunem 1-krotnym funkcji $f(z)$, to

$$(17) \quad \text{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z),$$

bo wtedy $f(z) = a_{-1}/(z-a) + a_0 + a_1(z-a) + \dots$, a więc $(z-a)f(z) \rightarrow a_{-1}$, gdy $z \rightarrow a$.

Jeśli funkcje $P(z)$ i $Q(z)$ są analityczne w otoczeniu punktu $z=a$ i spełniają warunki $P(a) \neq 0$, $Q(a) = 0$ i $Q'(a) \neq 0$, to na mocy wzoru (17)

$$(18) \quad \text{res}_a \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(a)}{Q'(a)},$$

bo gdy $z \rightarrow a$, wówczas

$$(z-a) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} \rightarrow \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Wykażemy następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem o residuach*:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na konturze C poza skończoną ilością punktów $z_1, z_2, \dots, z_p$ leżących wewnątrz C , w których funkcja ma odpowiednio residua $A_1, A_2, \dots, A_p$, to

$$(19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = A_1 + A_2 + \dots + A_p.$$

Dowód. Niech C_k będzie konturem zawierającym wewnątrz punkt z_k i tak małym, aby wszystkie kontury $C_1, C_2, \dots, C_p$ leżały zewnątrz siebie i wewnątrz C . Wówczas na mocy wzoru (7), str. 57,

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_p} = 2\pi i \sum_{k=1}^p A_k,$$

z czego wynika wzór (19).

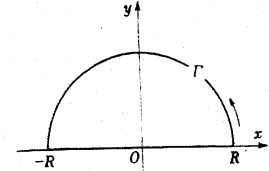
Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia całkowego Cauchy'ego i ma liczne zastosowania. Jest rzeczą godną uwagi, że obliczono wiele całek niewłaściwych funkcji rzeczywistych, stosując twierdzenie całkowego Cauchy'ego lub twierdzenie o residuach. Wyjaśnimy to na przykładach.

1. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną na półpłaszczyźnie $\text{Im} z \geq 0$ poza punktami osobliwymi $z_1, z_2, \dots, z_p$, leżącymi wewnątrz $\text{Im} z > 0$, i niech funkcja ta będzie rzeczywista na osi x . Niech $f(z)$ spełnia dla $|z| \geq R$ warunek $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$, gdzie $\alpha > 1$ i $M > 0$ są stałe. Wykażemy, że całka funkcji $f(x)$ w przedziale $(-\infty, \infty)$ istnieje i wyraża się wzorem

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (A_1 + A_2 + \dots + A_p),$$

gdzie A_k oznacza residuum funkcji $f(z)$ w punkcie z_k .

Istotnie, niech C będzie konturem złożonym z przedziału $[-R, R]$ i półkola $\Gamma \{z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ o promieniu R tak dużym, aby wszystkie punkty $z_1, z_2, \dots, z_p$ leżały wewnątrz C (rys. 28). Ponieważ $C = [-R, R] + \Gamma$, więc na mocy (19)



Rys. 28.

$$(21) \quad \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p A_k,$$

z czego wynika (20), bo gdy $R \rightarrow \infty$, wówczas pierwsza z całek (21) dąży do całki (20), druga zaś dąży do zera, gdyż

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^\alpha} \pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}}, \quad \text{gdzie } \alpha > 1.$$

Stosując wzór (20), otrzymamy, przy założeniu, że a, b i c są liczbami rzeczywistymi i że $ac - b^2 > 0$,

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}},$$

bo funkcja podcałkowa ma na półpłaszczyźnie $\text{Im} z > 0$ jeden biegun $(-b + i\sqrt{ac - b^2})/a$ i w nim residuum $1/2i\sqrt{ac - b^2}$.

W podobny sposób można wykazać, że

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \pi.$$

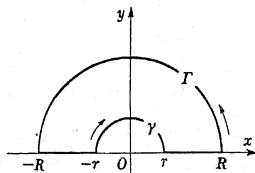
Stosując wzór (21) do funkcji $ze^{iz}/(z^2 + a^2)$, gdzie $a > 0$, względnie do funkcji $e^{inz}/(1+z^2)$, można obliczyć następujące całki niewłaściwe:

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+x^2} dx = \pi e^{-n}.$$

2. Wykażemy teraz, opierając się na wzorze całkowym Cauchy'ego, że

$$(25) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Funkcja e^{iz}/z jest analityczna wewnątrz i na konturze przedstawionym na rys. 29, gdzie γ i Γ są półkrykami o promieniach r i R , a zatem całka po tym konturze równa się zeru, czyli



Rys. 29.

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Suma pierwszej i trzeciej z tych całek po przekształceniu trzeciej równa się

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Druga całka po podstawieniu $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, daje

$$\left| \int_{\Gamma} \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{iR(\cos t + i \sin t)} i dt \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt.$$

Dla ustalonego dodatniego $\varepsilon < \pi$ i dla dostatecznie dużych R mamy

$$\left| \int_{\Gamma} \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} < 2\varepsilon + \pi e^{-R \sin \varepsilon} < 3\varepsilon,$$

a więc całka wzdłuż Γ dąży do zera, gdy $R \rightarrow \infty$. Całkę wzdłuż γ można napisać w postaci

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz,$$

gdzie $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Gdy $r \rightarrow 0$, wówczas ostatnia całka dąży do zera, bo funkcja podcałkowa jest ograniczona, a długość drogi całkowania dąży do zera. Z drugiej strony (uwzględniając skierowanie γ)

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 i d\theta = -\pi i,$$

gdy więc $r \rightarrow 0$, wówczas całka wzdłuż γ dąży do $-\pi i$. Zatem

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0,$$

z czego wynika wzór (25).

Stosując wzór całkowy Cauchy'ego do funkcji e^{-z^2} można obliczyć następujące całki *Fresnela*:

$$(26) \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

41. Residua pochodnej logarytmicznej. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną wewnątrz i na konturze C , różną od zera na C , i niech Z oznacza ilość zer tej funkcji wewnątrz C , gdzie zero k -krotne liczymy za k zer (tzn. jeżeli $z_1, z_2, \dots, z_k$ są zerami funkcji f wewnątrz C , a $a_1, a_2, \dots, a_r$ — krotnościami tych zer, to $Z = a_1 + a_2 + \dots + a_r$). Wówczas

$$(27) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z.$$

Dowód. Oznaczmy przez $F(z)$ pochodną logarytmiczną $f'(z)/f(z)$. Jedynymi punktami osobliwymi funkcji $F(z)$ wewnątrz C są punkty, w których $f(z) = 0$, a zatem lewa strona (27) równa się sumie residuów funkcji $F(z)$ w tych punktach.

Niech $z = a$ będzie zerem a -krotnym funkcji $f(z)$. W pewnym otoczeniu tego punktu mamy więc $f(z) = (z-a)^a \varphi(z)$, gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją analityczną różną od zera w punkcie a . Zatem

$$F(z) = \frac{\alpha(z-a)^{\alpha-1} \varphi(z) + (z-a)^{\alpha} \varphi'(z)}{(z-a)^{\alpha} \varphi(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Iloraz $\varphi'(z)/\varphi(z)$ jest funkcją analityczną w punkcie a , a więc w myśl (16) residuum funkcji $F(z)$ w punkcie a równa się α , czyli krotności punktu zerowego a . Suma residuów funkcji $F(z)$ równa się więc sumie krotności wszystkich zer funkcji $f(z)$, czyli liczbie Z .

Twierdzenie to można uogólnić w następujący sposób:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna i różna od zera na konturze C oraz analityczna wewnątrz C poza skończoną ilością punktów, w których ma bieguny, to

$$(28) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - B,$$

gdzie Z jest ilością zer, a B — ilością biegunów funkcji $f(z)$ wewnątrz C (zera i bieguny k -krotne liczymy za k zer względnie k biegunów).

Dowód. Jedynymi punktami osobliwymi funkcji podcałkowej $F(z) = f'(z)/f(z)$ są zera i bieguny funkcji $f(z)$; zatem lewa strona wzoru (19) dla $F(z)$ równa się sumie residuów funkcji $F(z)$ w tych punktach. Z poprzedniego dowodu wiemy, że suma residuów pochodzących od zer

równa się Z . Niech $z=b$ będzie biegunem β -krotnym funkcji $f(z)$; wówczas $f(z)=(z-b)^{-\beta}\psi(z)$ gdzie $\psi(z)$ jest funkcją analityczną różną od zera w punkcie b . Zatem w otoczeniu tego punktu

$$F(z)=\frac{-\beta(z-b)^{-\beta-1}\psi(z)+(z-b)^{-\beta}\psi'(z)}{(z-b)^{-\beta}\psi(z)}=-\frac{\beta}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Wnoskujemy stąd, jak w dowodzie poprzednim, że residuum funkcji $F(z)$ w punkcie b równa się $-\beta$, a więc suma residuów pochodzących od biegunów wynosi $-B$.

Uwaga. Całka (28) ma inną interesującą interpretację. Niech $z=z(t)$, $a \leq t \leq \beta$, będzie równaniem konturu C i niech funkcja $w=f(z)$ odwzorowuje kontur C na krzywą Γ (rys. 30). Krzywa Γ jest zamknięta i może się ze sobą przecinać, lecz nie przechodzi przez początek układu współrzędnych¹⁾; jej równanie ma postać

$$w=f[z(t)]=w(t), \quad a \leq t \leq \beta.$$

Niech A będzie punktem $z(a)$, a B punktem zmiennym $z(t)$ na C i niech A' i B' będą obrazami tych punktów na Γ . Całkując wzdłuż C od A do B otrzymamy

$$\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^t \frac{f'[z(t)]}{f[z(t)]} z'(t) dt = \int_a^t \frac{w'(t)}{w(t)} dt = \log w(t) - \log w(a),$$

gdzie różnica $\log w(t) - \log w(a)$ jest funkcją ciągłą zmiennej t równą zeru dla $t=a$. Gdy punkt B obiegnie raz kontur C , wówczas punkt B' opisze krzywą Γ . Przyjmując $t=\beta$ i dzieląc przez $2\pi i$, otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log w(\beta) - \log w(a)].$$

Zauważmy teraz, że $\log w(t) = \text{Log}|w(t)| + i \arg w(t)$. Gdy punkt $B'=w(t)$ opisze raz krzywą Γ , wówczas moduł $|w(t)|$ wraca do wartości $|w(a)|$, natomiast $\arg w(t)$ wzrasta o pewną wielokrotność $2k\pi$ liczby 2π , gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (na rys. 30 $k=2$). Liczbę $2k\pi$ nazywamy przyrostem argumentu funkcji $f(z)$ wzdłuż konturu C i oznaczamy przez

$$\Delta_C \arg f(z).$$

Mamy więc $\log w(\beta) - \log w(a) = 2k\pi i$ oraz $\Delta_C \arg f(z) = 2k\pi$, a zatem

$$(28') \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

Porównując wzory (28) i (28') otrzymujemy następujące twierdzenie zwane *zasadą argumentu*:

¹⁾ Bo $w=f(z) \neq 0$ na C .

Jeśli założenia poprzedniego twierdzenia są spełnione, to przyrost argumentu funkcji $f(z)$ wzdłuż konturu C podzielony przez 2π równa się różnicy między ilością zer i biegunów funkcji $f(z)$ wewnątrz C .

Równość (28') można napisać w postaci

$$(29) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg w = k.$$

Liczba k określona tym wzorem oznacza, ile razy punkt w opisując krzywą Γ okrąży punkt $w=0$ i nosi nazwę *indeksu punktu $w=0$ względem krzywej Γ* .

42. Twierdzenie Rouchégo. Ważne zastosowania ma następujące
TWIERDZENIE ROUCHÉGO. Jeżeli dwie funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są analityczne wewnątrz i na konturze C i spełniają na C nierówność

$$(30) \quad |g(z)| < |f(z)|,$$

to funkcja $f(z)+g(z)$ ma wewnątrz C tę samą ilość zer, co $f(z)$.

Dowód. Funkcja $f+\lambda g$, gdzie λ jest parametrem zmiennym w przedziale $[0,1]$, spełnia na C na mocy (30) nierówność

$$|f+\lambda g| \geq |f| - \lambda |g| \geq |f| - |g| > 0.$$

Oznaczając przez Z_{λ} ilość zer tej funkcji wewnątrz C , mamy na mocy (27)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f' + \lambda g'}{f + \lambda g} dz = Z_{\lambda}.$$

Lewa strona tej równości jest funkcją ciągłą parametru λ w przedziale $[0,1]$ i przyjmuje tylko wartości całkowite.

Lecz funkcja ciągła w przedziale $[0,1]$ i przyjmująca tylko wartości całkowite musi być stała¹⁾, a zatem $Z_{\lambda}=Z_0$, co dowodzi twierdzenia, bo na mocy wzoru (18) Z_0 i Z_1 są ilościami zer funkcji f i $f+g$ wewnątrz C .

Zastosowania. Wykażemy, że:

1. *Wielomian $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, gdzie $a_0 \neq 0$, ma dokładnie n zer (zero k -krotnie liczymy za k zer).*

Dowód. Przyjmijmy $f(z)=a_0 z^n$ i $g(z)=a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Gdy R jest dostatecznie wielkie, wówczas zewnątrz i na okręgu $|z|=R$ mamy $|g(z)| < |f(z)|$, bo $f(z)/g(z) \rightarrow \infty$, gdy $z \rightarrow \infty$, a więc wielomian $f(z)+g(z)$ ma w kole $|z| < R$ tę samą ilość zer, co $f(z)$, tzn. n zer. Poza kołem $|z| < R$ zer nie ma, bo $|f(z)+g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$.

¹⁾ Gdyby funkcja Z_{λ} zmiennej λ przyjmowała pewną wartość całkowitą w zbiorze Δ zawartym w przedziale $[0,1]$, a inne wartości całkowite w zbiorze dopełniającym Δ , wówczas istniałby ciąg punktów $\{\lambda_n\}$ jednego z tych zbiorów, zbieżny do cym B , wówczas istniałby ciąg punktów $\{Z_{\lambda_n}\}$ jednego z tych zbiorów, zbieżny do punktu λ_0 położonego w drugim zbiorze, a więc ciąg wartości $\{Z_{\lambda_n}\}$ nie byłby zbieżny do Z_{λ_0} , wbrew założeniu o ciągłości funkcji Z_{λ} .

2. Jeśli ciąg funkcji analitycznych $\{s_n(z)\}$ jest jednostajnie zbieżny w obszarze D do funkcji $s(z)$ nie równej stale zero, to $s(z)$ ma w punkcie $z_0 \in D$ zero k -krotne wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym dostatecznie małym kole $|z - z_0| < \varepsilon$ prawie wszystkie funkcje $s_n(z)$ mają dokładnie po k zer.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, aby koło $|z - z_0| \leq \varepsilon$ należało do D i aby funkcja $s(z)$ miała w nim co najwyżej jedno zero w punkcie z_0 . Zatem na okręgu $|z - z_0| = \varepsilon$ mamy $|s(z)| > \eta$, gdzie η jest pewną liczbą dodatnią, oraz (z powodu jednostajnej zbieżności)

$$|s_n(z) - s(z)| < \eta \quad \text{dla } n > N(\eta).$$

A więc dla $|z - z_0| = \varepsilon$ i $n > N(\eta)$ mamy $|s_n(z) - s(z)| < |s(z)|$. W myśl tw. Rouchégo funkcje $s(z)$ i $s_n(z) - s(z) + s(z) = s_n(z)$ mają więc wewnątrz koła $|z - z_0| \leq \varepsilon$ tę samą ilość zer, czego należało dowieść.

Z twierdzenia tego, wykazanego przez Hurwitza, wyprowadzimy następujący wniosek:

Granica $s(z)$ ciągu jednostajnie zbieżnego $\{s_n(z)\}$ funkcji analitycznych jednostajnych w obszarze D jest funkcją jednokrotną lub stałą.

Istotnie, gdyby było $s(z) \neq \text{const}$ i $s(z_1) = s(z_2) = w_0$ dla $z_1 \neq z_2$, to prawie wszystkie wyrazy ciągu $s_n(z) - w_0$ miałyby wartość 0 w otoczeniu punktu z_1 i w otoczeniu punktu z_2 , a więc funkcje $s_n(z)$ nie byłyby jednokrotne.

43. Odwzorowania za pomocą funkcji analitycznych. Niech funkcja

$$(31) \quad w = f(z)$$

będzie analityczna w obszarze D . Mówimy, że odwzorowuje ona p -krotnie otoczenie punktu $z_0 \in D$ na otoczenie punktu $w_0 = f(z_0)$, jeżeli każdemu dostatecznie małemu otoczeniu $|z - z_0| < \delta$ odpowiada takie koło $|w - w_0| < \eta$, że każdą wartość $w_1 \neq w_0$ z tego koła funkcja $f(z)$ przyjmuje w p różnych punktach otoczenia $|z - z_0| < \delta$. Wykażemy, że:

Jeżeli z_0 jest zerem p -krotnym różnicy $f(z) - w_0^{-1}$, to funkcja (31) odwzorowuje otoczenie punktu z_0 p -krotnie na otoczenie punktu w_0^{-1} .

Dowód. Ponieważ zera funkcji analitycznej są osobliwe (str. 66), więc istnieje otoczenie $0 < |z - z_0| < r$, w którym obie funkcje $f(z) - w_0$ i $f'(z)$ są różne od zera. Niech $\delta > 0$ będzie dowolną liczbą mniejszą niż r . Oznaczmy przez η najmniejszą wartość modułu $|f(z) - w_0|$ na okręgu $|z - z_0| = \delta$ i niech w_1 będzie dowolnym punktem koła $|w - w_0| < \eta$ różnym od w_0 .

Funkcje $F(z) = f(z) - w_0$ i $G(z) = w_0 - w_1$ spełniają na okręgu $|z - z_0| = \delta$ nierówność $|G(z)| < |F(z)|$, a więc w myśl twierdzenia Rouchégo funkcja $F + G = f(z) - w_1$ ma wewnątrz okręgu tę samą ilość zer, co $F = f(z) - w_0$.

¹⁾ Czyli $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$.

²⁾ Przez otoczenie punktu a rozumiemy tu dowolny obszar zawierający wewnątrz punkt a (niekoniecznie koło o środku a)

Różnica $f(z) - w_0$ ma jedno zero p -krotne, a więc różnica $f(z) - w_1$ ma p zer, przy czym wszystkie są jednokrotne i wobec tego różne między sobą, bo $f'(z) \neq 0$ dla $0 < |z - z_0| \leq \delta$. Twierdzenie jest więc dowiedzione.

Dodajmy, że gdy z_0 jest biegunem p -krotnym funkcji $f(z)$, to funkcja odwzorowuje otoczenie tego punktu p -krotnie na otoczenie punktu ∞ . Wtedy bowiem z_0 jest zerem p -krotnym funkcji $1/f(z)$, ta zaś odwzorowuje otoczenie punktu z_0 na otoczenie punktu 0, a więc funkcja $f(z)$ odwzorowuje otoczenie punktu z_0 p -krotnie na otoczenie punktu ∞ .

Z twierdzenia tego wynika bezpośrednio, że funkcja analityczna różna od stałej odwzorowuje zawsze obszar na obszar¹⁾ i że:

W dostatecznie małym otoczeniu punktu z_0 , w którym $f'(z_0) \neq 0$, funkcja analityczna $w = f(z)$ jest jednokrotna²⁾, a więc ma funkcję odwrotną $z = f^{-1}(w)$.

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia o lokalnym odwracaniu funkcji analitycznej. Funkcja $f^{-1}(w)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $w_0 = f(z_0)$, bo istnieje pochodna $[f^{-1}(w)]' = 1/f'(z)$.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $\zeta = z^n$ odwzorowuje n -krotnie otoczenie punktu $z = 0$ na otoczenie punktu $\zeta = 0$, natomiast w dostatecznie małym otoczeniu dowolnego punktu $z_0 \neq 0$ jest jednokrotna.

PRZYKŁAD 2. Funkcja określona szeregiem $\zeta = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ o dodatnim promieniu zbieżności, gdzie $a_1 \neq 0$, jest jednokrotna w dostatecznie małym otoczeniu punktu $z = 0$. Funkcja odwrotna daje się przedstawić przez szereg $z = b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots$, zbieżny w pewnym kole $|\zeta| < \varrho$. Dla dostatecznie małych z wartości $\zeta = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ należą do koła $|\zeta| < \varrho$, a więc

$$z = b_1(a_1 z + a_2 z^2 + \dots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + \dots)^2 + \dots$$

Porządkując prawą stronę względem potęg zmiennej z otrzymamy tożsamość

$$z = a_1 b_1 z + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2) z^2 + (a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3) z^3 + \dots,$$

skąd można obliczyć współczynniki $b_1, b_2, \dots$:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^3}, \quad \dots$$

PRZYKŁAD 3. Funkcja $z = \sin \zeta$ ma w otoczeniu punktu $\zeta = 0$ funkcję odwrotną, bo dla $\zeta = 0$ mamy $(\sin \zeta)' = \cos \zeta = 1$. Funkcję odwrotną oznaczamy przez $\arcsin z$; jej pochodna wyraża się wzorem

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{(\sin \zeta)'} = \frac{1}{\cos \zeta} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

¹⁾ Wynika stąd zasada maksimum (str. 70).

²⁾ Podobnie w otoczeniu bieguna jednokrotnego.

Analogicznie określamy

$$\arccos z, \arctg z, \operatorname{arctg} z$$

jako funkcje odwrotne względem $\cos \zeta$, $\operatorname{tg} \zeta$ i $\operatorname{ctg} \zeta$ kolejno w otoczeniu punktów $\pi/2$, 0 i $\pi/2$. Pochodne tych funkcji są odpowiednio równe

$$-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \frac{1}{1+z^2}, \quad -\frac{1}{1+z^2}.$$

44. Odwzorowania konforemne. Wykazaliśmy w paragrafie poprzednim, że funkcja analityczna odwzorowuje zawsze obszar na obszar. Odwzorowanie $w=f(z)$ obszaru D na obszar $D'=f(D)$ nazywamy *konforemnym*, jeżeli funkcja odwzorowująca $f(z)$ jest analityczna w obszarze D z pominięciem co najwyżej jednego punktu, w którym może mieć biegun jednokrotny, oraz jednokrotna w całym D . Pochodna $f'(z)$ musi być wszędzie różna od zera, bo w otoczeniu punktu, w którym $f'(z)=0$, odwzorowanie nie jest jednokrotne (str. 92). Odwzorowanie konforemne jest więc jednokrotne i równokątne z zachowaniem zwrotu (str. 42).

Podstawowym problemem odwzorowań konforemnych, szczególnie ważnych w zastosowaniach, jest pytanie, kiedy dwa dane obszary D i D' dają się przekształcić konforemnie jeden w drugi. Obszar m -spójny nie jest oczywiście przekształcalny konforemnie w obszar n -spójny, gdy $m \neq n$, bo stopień spójności jest niezmiennikiem przekształceń jednokrotnych i ciągłych (*homeomorficznych*). B. Riemann wypowiedział twierdzenie, że:

Każde dwa obszary jednospójne D i D' , których brzegi zawierają więcej niż po jednym punkcie, są przekształcalne konforemnie jeden w drugi¹⁾ i to tak, aby dowolny punkt $z_0 \in D$ przeszedł w dowolny punkt $w_0 \in D'$.

Dowód tego twierdzenia przekracza ramy tej książki²⁾. Ograniczymy się do kilku przykładów ilustrujących odwzorowania konforemne przez najprostsze funkcje analityczne.

1. Wiemy (str. 43), że każda funkcja homograficzna odwzorowuje jednokrotnie całą płaszczyznę domkniętą w siebie. W szczególności funkcje

$$(32) \quad w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

i

$$(33) \quad w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{\bar{a}z-1},$$

¹⁾ Dwa obszary wielospójne nie zawsze są przekształcalne konforemnie w siebie; stopień spójności obu obszarów musi być ten sam, lecz warunek ten nie jest wystarczający.

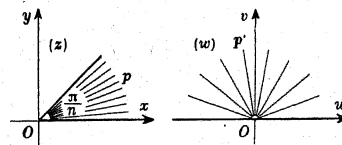
²⁾ Dowód ten będzie podany w tomie następnym.

gdzie φ jest liczbą rzeczywistą, a zaś — zespoloną, są homograficzne. Gdy $|a| > 0$, wówczas funkcja (32) odwzorowuje konforemnie półpłaszczyznę $Im z > 0$ na koło $|w| < 1$ (rys. 31) i to tak, że punkt $z=a$ przechodzi w środek koła, bo gdy z jest rzeczywiste, to $|z-a| = |z-\bar{a}|$, a więc oś rzeczywista przechodzi w okrąg $|w|=1$; gdy zaś $Im z > 0$, to $|z-a| < |z-\bar{a}|$, a więc półpłaszczyzna $Im z > 0$ przechodzi na wnętrze okręgu $|w|=1$. Półpłaszczyznę można więc przekształcić konforemnie w koło i to tak, aby dowolny punkt a półpłaszczyzny przeszedł w środek koła.

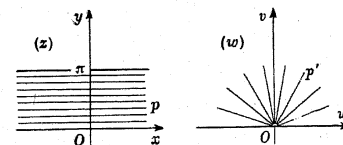
Funkcja (33), gdzie $|a| < 1$, odwzorowuje konforemnie koło $|z| < 1$ w siebie i to tak, że punkt $z=a$ przechodzi w środek koła, okrąg $|z|=1$ przechodzi w okrąg $|w|=1$ (zob. przykład 6, str. 11), a wnętrze przechodzi we wnętrze.

Zbiór wszystkich przekształceń postaci (33), gdzie $|a| < 1$, zależy od trzech parametrów rzeczywistych φ , $Re a$, $Im a$ i tworzy grupę przekształceń koła $|z| < 1$ w siebie, bo złożenie dwóch takich przekształceń oraz przekształcenie odwrotne względem przekształcenia (33) są przekształceniami postaci (33).

2. Funkcja $w=z^n$ odwzorowuje konforemnie wnętrze kąta o wierzchołku $z=0$ i rozwartości π/n (rys. 32) na półpłaszczyznę $Im w > 0$, bo półprostą p o równaniu $z=re^{i\varphi}$, $0 < r < \infty$, przekształca jednokrotnie na półprostą p' o równaniu $w=r^n e^{in\varphi}$, $0 < r < \infty$ (rys. 32). Gdy p obraca się dookoła punktu $z=0$ i zatacza kąt π/n , wówczas p' obraca się dookoła punktu $w=0$ i zatacza kąt π .



Rys. 32.



Rys. 33.

3. Funkcja $w=e^z$ jest jednokrotna w pasie $0 < Im z < \pi$ i odwzorowuje ten pas konforemnie na półpłaszczyznę $Im w > 0$, bo prostą p określoną równaniem $z=x+iy$, gdzie $-\infty < x < \infty$, równoległą do osi x , przekształca na półprostą p' określoną równaniem $w=e^x e^{iy} = re^{i\varphi}$, gdzie $0 < r < \infty$, wychodzącą z punktu $w=0$ (rys. 33); gdy y rośnie od 0 do π , wówczas prosta p przesuwa się równoległe do osi x i zatacza dany pas, półprostą zaś p' obraca się dookoła punktu $w=0$ i zatacza półpłaszczyznę $Im w > 0$.

4. Funkcja $w=\sin z$ jest jednokrotna w pasie $-\pi/2 < Re z < \pi/2$ i odwzorowuje go na całą płaszczyznę, z której odrzucono na osi rzeczywistej półprostą $Re w \leq -1$ i $Re w \geq 1$ (rys. 34). Ponieważ

¹⁾ Równość $\sin z_1 = \sin z_2$, czyli $e^{iz_1} - e^{-iz_1} = e^{iz_2} - e^{-iz_2}$, zachodzi w tym pasie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(e^{iz_1} - e^{iz_2}) + (e^{-iz_1} - e^{-iz_2})e^{-i(z_1+z_2)} = 0,$$

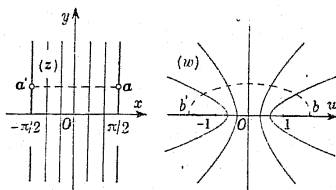
czyli gdy $z_1 = z_2$.

skąd

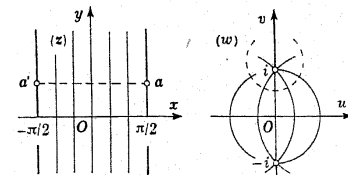
$$w = u + iv = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(z+iv)} - e^{-i(z+iv)}}{2i},$$

$$u + iv = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \sin x + i \frac{e^v - e^{-v}}{2} \cos x,$$

więc, gdy $x=0$, mamy $u=0$, a zatem oś urojona y zostaje odwzorowana na oś urojoną v (rys. 34). Każda prosta $x = \text{const} \neq 0$, równoległa do osi y , przechodzi na jedną gałąź hiperboli $u^2/\sin^2 x - v^2/\cos^2 x = 1$. Odcinek $-\pi/2 < x < \pi/2$ osi rzeczywistej x przechodzi na odcinek $-1 < u < 1$, a każdy inny odcinek a' równoległy do osi x przechodzi na półelipsę $b'b$ (rys. 34).



Rys. 34.



Rys. 35.

jona y przechodzi na odcinek $-1 < v < 1$ osi urojonej v , a odcinek $-\pi/2 < x < \pi/2$ osi x przechodzi na całą oś rzeczywistą u .

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, gdzie $a_n = 2^{-n}$ dla $n \geq 0$ i $a_n = 1$ dla $n < 0$.

2. Znaleźć rozwinięcie funkcji $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$ w szereg Laurenta w obszarze a) $0 < |z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $2 < |z| < \infty$.

3. Znaleźć punkty osobliwe i residua w tych punktach funkcji a) $\frac{4z^3}{z^4+1}$, b) $\frac{1}{z^4+2z^2+1}$.

¹⁾ Bo w tym pasie $\sin z_1/\cos z_1 = \sin z_2/\cos z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin(z_1 - z_2) = 0$, czyli gdy $z_1 = z_2$.

²⁾ Łuki są ograniczone punktami $\pm i$.

5. Funkcja $w = \tanh z$ jest też jednokrotna w pasie $-\pi/2 < \text{Re} z < \pi/2$ i odwzorowuje go na całą płaszczyznę, z której odrzucono na osi urojonej półprostę $1w \geq 1$ i $1w \leq -1$ (rys. 35). Czytelnik sprawdzi, opierając się na równaniu

$$w = u + iv = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

że proste równoległe do osi y przechodzą na łuki pęku okręgów

$$(u + i \tanh 2x)^2 + v^2 = \frac{1}{\sinh^2 2x},$$

przechodzących przez punkty $\pm i^2$, a odcinki $a'a$ (rys. 35) równoległe do osi x przechodzą na okręgi (bez jednego punktu) ortogonalne do poprzedniego pęku. W szczególności oś urojona y przechodzi na odcinek $-1 < v < 1$ osi urojonej v , a odcinek $-\pi/2 < x < \pi/2$ osi x przechodzi na całą oś rzeczywistą u .

4. Wykazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ ma k -krotny biegun z_0 , to współczynniki rozwinięcia $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ wyrażają się dla $v=0, 1, 2, \dots$ wzorami $a_{v-k} = F^{(v)}(z_0)/v!$, gdzie $F(z) = f(z)(z-z_0)^k$.

5. Znaleźć residuum funkcji a) $e^{z+1/z}$ w punkcie $z=0$, b) $1/\sin z$ w punkcie $z=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, c) $\tanh z$ w punkcie $z=(2k+1)\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

6. Znaleźć residuum iloczynu $f(z)g(z)$ w punkcie z_0 , w którym funkcja $f(z)$ jest analityczna, a $g(z)$ ma biegun o części głównej

$$\frac{c_k}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_1}{z-z_0}.$$

7. Znaleźć część główną bieguna funkcji $\tanh \pi z$ w punkcie $z=k$.

8. Wykazać, że gdy funkcja $f(z)$ spełnia założenia twierdzenia (28) ze str. 89, to

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) - (b_1 + b_2 + \dots + b_q),$$

gdzie liczby a_j są zerami, a b_k — biegunami funkcji $f(z)$ wewnątrz C (każdy wypisany tyle razy, ile wynosi jego krotność).

9. Wykazać, że przy dowolnym $R > 0$ zera prawie wszystkich wielomianów $w_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$, $n=1, 2, \dots$, leżą zewnątrz koła $|z| \leq R$.

[Wskazówka: $w_n(z) \rightarrow e^z$].

10. Wykazać, że jeżeli a i b są dowolnymi punktami koła $|z| < 1$, to wyrażenie

$$d(a, b) = \text{Log} \frac{1+r(a, b)}{1-r(a, b)}, \quad \text{gdzie } r(a, b) = \left| \frac{b-a}{\bar{a}b-1} \right|,$$

zwane odległością nieeuklidesową punktów a i b , jest niezmiennikiem grupy przekształceń homograficznych (33) koła $|z| < 1$ w siebie.

11. Wykazać, że funkcja $w = (z+1/z)/2$ jest jednokrotna w kole $|z| < 1$ i że odwzorowuje to koło konforemnie na całą płaszczyznę, z której odrzucono na osi rzeczywistej odcinek $-1 \leq w \leq 1$. Znaleźć obrazy okręgów $z=re^{it}$, gdzie $0 < t < 2\pi$ i $r < 1$.

12. Wykazać, że funkcja $w = z/(1-z)^2$ odwzorowuje konforemnie koło $|z| < 1$ na całą płaszczyznę bez półprostej $\text{Re} w \leq -1/4$ na osi rzeczywistej.

ROZWIĄZANIA.

1. $1 < |z| < 2$, $z/(z-1)(2-z)$. — 2. a) $\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^{-n-1})z^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, gdzie

$b_n = 2^{-n-1}$ dla $n \geq 0$, $b_n = -1$ dla $n < 0$, $n \neq -2$ i $b_{-2} = 0$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$, gdzie $c_n = -(1+2^{n-1})$.

dla $n \neq 2$, $c_2 = -2$. — 3. a) Cztery bieguny $\pm(1+i)/\sqrt{2}$, $\pm(1-i)/\sqrt{2}$; wszystkie reszdu są równe 1; b) dwa bieguny $\pm i$ o reszduach $\pm i/4$. — 4. Bo

$$F(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + \dots + \sum_{v=0}^{\infty} P^{(v)}(z_0)(z-z_0)^v/v!.$$

5. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$, b) $(-1)^k$, c) -1 . — 6. $f(z_0)c_1 + f'(z_0)\frac{c_2}{1} + \dots + f^{(k-1)}(z_0)\frac{c_k}{(k-1)!}$. — 7. $1/\pi(z-k)$. — 8. Zastosować ćwiczenie 6 do iloczynu $z \cdot f/f$. — 9. Zbieżność $w_n(z) \rightarrow e^z$ jest jednostajna w kole $|z| \leq R$, a więc $|w_n(z) - e^z| < \epsilon$ dla $|z| \leq R$ i dla $n > N(\epsilon)$. Niech $\epsilon = e^{-R}/2$. Dla $|z| \leq R$ mamy $|e^z| = e^{\Re z} \geq e^{-R}$, a więc dla $n > N(\epsilon)$ i $|z| \leq R$ mamy $|w_n(z)| > > |e^z| - \epsilon > e^{-R}/2$. — 10. Oznaczając prawą stronę (33) przez $w(z)$ i przyjmując, $a' = w(a)$, $b' = w(b)$, mamy $|a'| < 1$, $|b'| < 1$ i $r(a', b') = r(a, b) < 1$, a więc $d(a', b') = d(a, b)$. Inna droga dowodu: Wykazać, że $d(a, b) = \text{Log}[(a, b, a, \beta)]$, gdzie α i β są punktami przecięcia okręgu $|z|=1$ z okręgiem do niego ortogonalnym, przechodzącym przez punkty (a, b) i zastosować przykład (10), str. 45. Symbol (a, b, α, β) oznacza dwustosunek. — 11. Gdy $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$, wówczas równość $z_1 + 1/z_1 = z_2 + 1/z_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 - z_2 = (z_1 - z_2)/z_1 z_2$, skąd $z_1 = z_2$. Obrazem okręgu $z = re^{i\theta}$ jest elipsa $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$, gdzie $a = (1/r + r)/2$, $b = (1/r - r)/2$. — 12. Przyjmijmy $z = 1/\zeta$; funkcja $1/w = \zeta + 1/\zeta - 2$ odwzorowuje obszar $|\zeta| > 1$ na całą płaszczyznę bez odcinka $[-4, 0]$ na osi rzeczywistej (zob. ćwiczenie 11).

ROZDZIAŁ X

Przedłużenia analityczne. Funkcje wieloznaczne

45. Pojęcie przedłużenia analitycznego. Niech będą dane dwie funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ analityczne odpowiednio w obszarach D_1 i D_2 mających część wspólną złożoną z jednego obszaru Δ (rys. 36). Jeżeli

(1) $f_1(z) = f_2(z)$ w obszarze Δ , to mówimy, że każda z funkcji f_1 i f_2 jest przedłużeniem analitycznym bezpośrednim lub krótko przedłużeniem drugiej.

Zauważmy, że gdy równość (1) zachodzi w dowolnie małej części obszaru Δ , to zachodzi w całym Δ (str. 66) i że funkcja $f_1(z)$ może mieć tylko jedno przedłużenie bezpośrednie na obszar D_2 . Jeżeli bowiem funkcje $f_2(z)$ i $f_3(z)$ są analityczne w obszarze D_2 i $f_1 = f_2$ oraz $f_1 = f_3$ w części obszaru Δ , to $f_2(z) = f_3(z)$ w obszarze Δ , a przez to w całym obszarze D_2 .

Funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ spełniające warunek (1) określają w obszarze $D_1 + D_2$ nową funkcję $f(z)$, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcją f_k dla $k=1, 2$.

PRZYKŁAD. Szeregi geometryczne

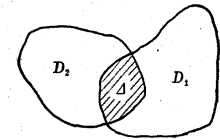
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n, \quad f_2(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (1+iz)^n$$

są zbieżne, pierwszy w kole $|z-1| < 1$, drugi w kole $|z-i| < 1$. Koła te mają część wspólną, a w niej $f_1 = f_2$, bo suma każdego z tych szeregów równa się $1/z$. Funkcje f_1 i f_2 są więc przedłużeniami jedna drugiej.

Pojęcie przedłużenia analitycznego daje się w naturalny sposób uogólnić. Niech będzie dany skończony ciąg funkcji

$$(2) \quad f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$$

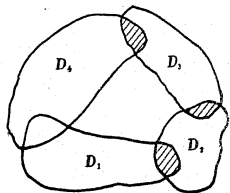
analitycznych odpowiednio w obszarach $D_1, D_2, \dots, D_n$ (rys. 37) i niech każda funkcja następna będzie przedłużeniem bezpośrednim poprzedniej. Mówimy wówczas, że funkcja $f_n(z)$ jest przedłużeniem analitycznym pośrednim funkcji $f_1(z)$. Obszary D_1 i D_n mogą być rozłączne lub nie (na rys. 37 $n=4$ i obszary D_1, D_4 nie są rozłączne).



Rys. 36.

Możliwe są dwa przypadki:

1° W części wspólnej każdych dwóch obszarów D_i , D_k funkcje f_i , f_k są identyczne; wówczas funkcje (2) określają w obszarze $D_1 + D_2 + \dots + D_n$ jedną funkcję analityczną $f(z)$, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcją $f_k(z)$.



Rys. 37.

2° W części wspólnej dwóch obszarów, np. D_1 i D_n (rys. 37), mamy $f_1 \neq f_n$; wtedy funkcje (2) nie określają w obszarze $D_1 + D_2 + \dots + D_n$ funkcji w dotychczasowym znaczeniu. Mówimy wówczas, że funkcje (2) są gałęziami jednej funkcji analitycznej wieloznacznej, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcją f_k .

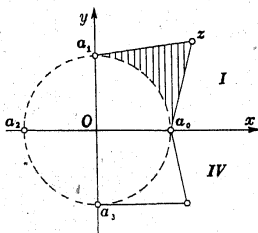
Funkcja wieloznaczna różni się zasadniczo od funkcji dotychczas rozpatrywanych, bo w pewnych punktach ma więcej niż jedną wartość. Funkcje w dotychczasowym znaczeniu, a więc mające w każdym punkcie swego obszaru istnienia jedną wartość, nazywamy funkcjami jednoznaczными. Słowo „funkcja” będzie oznaczało nadal funkcję jednoznaną.

PRZYKŁAD. Obierzmy na okręgu $|z|=1$ cztery punkty $a_k = e^{k\pi i/2}$, $k=0, 1, 2, 3$, oznaczmy przez D_k półpłaszczyznę, którą połowi półoś Oa_k (rys. 38), i przyjmijmy w obszarze D_k

$$(3) \quad l_k(z) = \int_{a_k}^z \frac{dz}{z} + \log a_k, \quad \text{gdzie} \quad \log a_k = \frac{k\pi i}{2}.$$

Funkcje $l_0(z)$, $l_1(z)$, $l_2(z)$, $l_3(z)$ są jednoznaczными gałęziami $\log z$ odpowiednio w obszarach D_0 , D_1 , D_2 , D_3 . Każda następna jest przedłużeniem bezpośrednim poprzedniej, bo np. obszary D_0 , D_1 mają pierwszą ćwiartkę płaszczyzny wspólną i w niej $l_0(z) = l_1(z)$, gdyż dla $z \in D_0 \cap D_1$ mamy (całkując po brzegu obszaru zakreskowanego na rys. 38)

$$l_0(z) = \int_{a_0}^z \frac{dz}{z} = \int_{a_0}^z \frac{dz}{z} + \int_{a_1}^z \frac{dz}{z} = \frac{\pi i}{2} + \int_{a_1}^z \frac{dz}{z} = l_1(z).$$



Rys. 38.

Funkcja $l_2(z)$ jest więc przedłużeniem analitycznym pośrednim funkcji $l_0(z)$. Obszary D_3 i D_0 mają ćwiartkę czwartą wspólną, lecz w niej $l_3(z) \neq l_0(z)$, bo

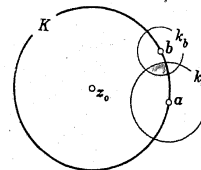
$$l_3(z) = \int_{a_3}^z \frac{dz}{z} + \frac{3\pi i}{2} = \int_{a_1}^z \frac{dz}{z} + \int_{a_0}^z \frac{dz}{z} + \frac{3\pi i}{2} = l_0(z) + 2\pi i.$$

46. Punkty i linie osobliwe. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną (jednoznaczną) w obszarze D . Nazywamy ją *przedłużalną przez punkt brzegowy* z_0 obszaru, jeżeli istnieje funkcja $g(z)$, analityczna w pewnym otoczeniu punktu z_0 i równa $f(z)$ w części wspólnej obszaru D i tego otoczenia. Punkt z_0 nazywamy wówczas *punktem przedłużalności* lub *punktem brzegowym regularnym* funkcji $f(z)$. Jeżeli z_0 nie jest punktem przedłużalności; to nazywamy go *punktem osobliwym* funkcji $f(z)$. Wykażemy, że:

Każdy szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ różny od stałej ma na okręgu swego koła zbieżności $K(|z-z_0|<r)$ przynajmniej jeden punkt osobliwy¹⁾.

Dowód. Gdyby każdy punkt a okręgu koła K był regularny, to istniałby szereg potęgowy $p_a(z)$ o środku a równy $f(z)$ w części wspólnej swego koła zbieżności k_a i koła K (rys. 37). Jeżeli dwa koła k_a i k_b mają część wspólną, to w niej $p_a(z) = p_b(z)$, bo wtedy koła K , k_a i k_b mają część wspólną i w niej $p_a(z) = f(z) = p_b(z)$.

Rodzina wszystkich kół k_a pokrywa cały okrąg K , a więc w myśl twierdzenia Borela (str. 14) istnieje w tej rodzinie skończona ilość kół, np. $k_{a_1}, k_{a_2}, \dots, k_{a_n}$, pokrywających łącznie okrąg koła K . W obszarze $K + k_{a_1} + \dots + k_{a_n}$ mieści się koło o środku z_0 i promieniu większym niż r . W obszarze tym funkcja $f(z)$ byłaby analityczna, a więc promień zbieżności szeregu $f(z)$ byłby większy niż r , wbrew założeniu.



Rys. 39.

Punkty osobliwe na brzegu obszaru D , w którym pewna funkcja $f(z)$ jest analityczna, mogą być odosobnione, jak np. bieguny, lub mogą tworzyć linie ciągłe. Linie takie nazywamy *liniami osobliwymi* lub *granicami naturalnymi* danej funkcji.

Podamy przykład szeregu potęgowego, dla którego okrąg koła zbieżności jest granicą naturalną.

Szereg

$$(4) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

jest zbieżny w kole $|z|<1$. Wykażemy, że wszystkie punkty okręgu $|z|=1$ są osobliwe. Istotnie, dla $z = re^{i\pi p/2^p}$, gdzie $r<1$, $k, p=1, 2, \dots$, mamy

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} e^{i\pi p 2^n / 2^p} \right| \geq \left| \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^n} \right| - \left| \sum_{n=0}^p r^{2^n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^n} - (p+1).$$

Gdy $r \rightarrow 1$, wówczas ostatnia suma dąży do ∞ , a więc $|f(z)| \rightarrow \infty$.

¹⁾ Zakładamy, że $r < \infty$; gdyby było $r = \infty$, wówczas funkcja $f(z)$ byłaby całkowita i punkt ∞ byłby osobliwy.

Wynika stąd, że wszystkie punkty na okręgu $|z|=1$ postaci $z=e^{2\pi i/p}$, gdzie $k, p=1, 2, \dots$, są osobiwe, bo w punkcie regularnym granica funkcji $f(z)$ jest oczywiście skończona. Punkty te tworzą na okręgu zbiór wszędzie gęsty¹⁾, więc wszystkie punkty okręgu są osobiwe, bo dostatecznie małe otoczenie punktu regularnego składa się wyłącznie z punktów regularnych.

Szereg (4) jest tzw. *szeregiem lukowym*, tj. szeregiem potęgowym postaci $\sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}$ gdzie $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ i gdzie istnieje taka liczba $\theta > 0$, że $\lambda_{n+1} \geq (1+\theta)\lambda_n$. J. Hadamard dowiódł, że:

Każdy szereg lukowy jest nieprzedłużalny poza okrąg swego koła zbieżności.

47. Metoda szeregów potęgowych i zasada symetrii. Powstaje pytanie, jak zbadać, czy funkcja analityczna $f(z)$ jest przedłużalna poprzez brzeg swego obszaru istnienia D .

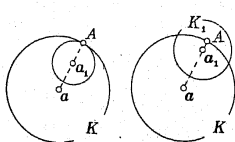
Służy do tego następująca metoda. Niech szereg

$$(5) \quad P(z) = \sum_0^\infty a_n (z-a)^n, \quad \text{gdzie } a \in D,$$

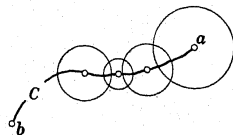
będzie szeregiem Taylora danej funkcji. Jest on zbieżny w pewnym kole $K\{|z-a|<r\}$, którego okrąg przechodzi przez najbliższy punkt brzegowy A obszaru D . Obierzmy wewnątrz odcinka aA dowolny punkt a_1 (rys. 40). Szereg Taylora funkcji $P(z)$ w otoczeniu a_1 ma postać

$$(6) \quad P_1(z) = \sum_0^\infty \frac{P^{(n)}(a_1)}{n!} (z-a_1)^n$$

i jest zbieżny w pewnym kole $K_1\{|z-a_1|<r_1\}$, którego promień r_1 jest niemniejszy niż odległość $|a_1A| = r - |a_1 - a|$.



Rys. 40.



Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze D , ciągła w $D+\bar{d}$ i jeżeli przyjmuje na odcinku $\bar{d}$ wartości rzeczywiste, to daje się przedłużyć analitycznie na cały obszar $D+\bar{d}+\bar{D}=\Delta$, przy czym przedłużenie to otrzymamy przyjmując

$$(9) \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \text{dla} \quad \bar{z} \in \bar{D}.$$

Dowód. Funkcja $f(z)$ rozszerzona na obszar Δ umową (9) jest oczywiście ciągła w tym obszarze. Niech C będzie konturem o równaniu $z=z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, zawartym wraz ze swym wnętrzem w zbiorze $D+\bar{d}$, a $\bar{C}$ — krzywą symetryczną do C względem osi x . Na mocy twierdzenia całkowego Cauchy'ego mamy

$$(10) \quad \int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt = 0.$$

Równanie krzywej $\bar{C}$ ma postać $\bar{z}=\overline{z(t)}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, a zatem na mocy (9)

$$\int_{\bar{C}} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[\overline{z(t)}] \overline{z'(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f[z(t)] z'(t)} dt.$$

Ostatnia całka ma wartość sprzężoną z całką (10), więc także równa się zeru, a zatem na mocy twierdzenia Morery funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze $\bar{D}$.

Ażeby wykazać, że jest ona analityczna w obszarze Δ , obierzmy w Δ dowolny kontur Γ i niech odcinek $\bar{d}$ dzieli wnętrze Γ na dwa obszary (rys. 42). Oznaczając brzegi tych obszarów skierowane dodatnio przez C i C' , otrzymamy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_C + \int_{C'}.$$

W myśl poprzedniej części dowodu całka ta równa się zeru, a więc na mocy twierdzenia Morery funkcja $f(z)$ jest analityczna w Δ .

Twierdzenie to daje nowy sposób przedłużania analitycznego zwany *zasadą symetrii Riemanna-Schwarza*.

48. Pełna funkcja analityczna. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną jednoznaczną w obszarze D , a $P(z)$ — szeregiem Taylora tej funkcji w otoczeniu pewnego punktu $a \in D$. Każdy taki szereg nazywamy *elementem funkcji $f(z)$* . Jeżeli C jest dowolną krzywą wychodzącą z punktu a i zawartą w obszarze D , to wszystkie elementy danej funkcji o środkach na C tworzą łańcuch szeregów potęgowych. Element $P(z)$ daje się więc przedłużać analitycznie wzdłuż każdej drogi zawartej w obszarze D

i każde jego przedłużenie jest nowym elementem danej funkcji (rys. 43). Fakt ten wyrażamy mówiąc, że:

Funkcję $f(z)$ w obszarze D można wytworzyć z jednego jej elementu przez przedłużenie analityczne w obszarze D .

Oznaczmy przez R rodzinę wszystkich elementów danej funkcji $f(z)$. Każdy element rodziny R jest przedłużalny w każdy inny wzdłuż pewnej drogi zawartej w obszarze D . Znając rodzinę R znamy funkcję $f(z)$ i na odwrót. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest przedłużalna poprzez pewne punkty brzegowe obszaru D , to rodzina R daje się powiększyć o nowe elementy; jeżeli nie jest przedłużalna, to funkcję $f(z)$ lub rodzinę R nazywamy *pełną funkcją analityczną*.

Ogólnie, *pełną funkcją analityczną* nazywamy każdą rodzinę R szeregów potęgowych mających dwie następujące własności:

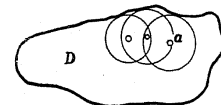
I. Każdy z dwóch szeregów rodziny R jest przedłużalny w drugi (wzdłuż pewnej krzywej).

II. Każdy szereg potęgowy będący przedłużeniem pewnego szeregu rodziny R należy do R .

Jeżeli rodzina R ma własność I, lecz niekoniecznie własność II, to nazywamy ją *gałęzią funkcji analitycznej* lub krótko *funkcją analityczną*. Szeregi potęgowe rodziny R nazywamy *elementami* danej funkcji, zbiór punktów środkowych tych elementów — *obszarem istnienia funkcji*¹⁾, a wartość każdego elementu w jego środku — *wartością funkcji* w danym punkcie.

Funkcja analityczna (pełna lub jej gałąź) jest *jednoznaczna*, jeżeli każde dwa jej elementy o wspólnym środku są identyczne; w przeciwnym razie funkcja jest *wieloznaczna* i ma w pewnych punktach więcej niż jedną wartość. W szczególności funkcję analityczną nazywamy *n-znaczną*, jeżeli każdy punkt jej obszaru istnienia jest środkiem co najwyżej n różnych elementów i jeżeli istnieje punkt będący środkiem n elementów. Analogicznie określamy funkcję *nieskończenie wieloznaczną*²⁾.

Punkty osobliwe szeregów potęgowych rodziny R oraz ich punkty skupienia nazywamy *punktami osobliwymi* odnośnej funkcji. Każdy punkt obszaru istnienia danej funkcji jest środkiem, a więc *punktem regularnym* przynajmniej jednego jej elementu; jeśli jednak funkcja jest wieloznaczna,



Rys. 43.

¹⁾ Ze względu na własność I zbiór punktów środkowych szeregów rodziny R jest zawsze pewnym obszarem.

²⁾ H. Poincaré dowiódł, że ilość elementów funkcji analitycznej o wspólnym środku jest co najwyżej przeliczalna.

to ten sam punkt może być punktem osobliwym innego elementu danej funkcji.

Wartość funkcji wieloznacznej $f(z)$ w punkcie a jej obszaru istnienia D jest wyznaczona dopiero wówczas, gdy znamy element $P(z)$ tej funkcji o środku a . Ze względu na to parę $\{a, P(z)\}$ złożoną z punktu $a \in D$ i elementu $P(z)$ o środku a nazywamy *punktem analitycznym* funkcji wieloznacznej. Sam punkt a nazywamy *punktem geometrycznym*.

PRZYKŁAD 1. $\sqrt{z}$ jest funkcją analityczną, której elementami są szeregi potęgowe (str. 65)

$$(11) \quad a^{1/2} \left[1 + \left(\frac{1}{1} \right) \frac{z-a}{a} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{z-a}{a} \right)^2 + \dots \right],$$

gdzie a jest dowolną liczbą różną od zera. Zbiór tych elementów ma własności I i II; obszarem istnienia jest cała płaszczyzna bez punktów 0 i ∞ . Każdy punkt a jest środkiem dwu elementów (11) odpowiadających dwu wartościom potęgi $a^{1/2}$, a więc $\sqrt{z}$ jest funkcją dwuznaczną. Gdy punkt a okrąży raz dokoła punktu 0 , wówczas $a^{1/2}$ zmieni się na $-a^{1/2}$, a więc element (11) zmieni znak.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $\log z$ jest nieskończenie wieloznaczna, jej elementami są szeregi (8). Obszarem istnienia jest cała płaszczyzna bez punktów 0 i ∞ . Każde dwa elementy tej funkcji o wspólnym środku różnią się o $2k\pi i$, gdzie $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Funkcja odwrotna. Niech $f(z)$ będzie funkcją jednoznaczną lub wieloznaczną różną od stałej i niech D będzie jej obszarem istnienia. Każdy element $w = P(z)$ tej funkcji o środku $z_0 \in D$, w którym $P'(z_0) \neq 0$, jest, jak wiemy (str. 93), odwracalny i ma element odwrotny $z = P^{-1}(w)$ o środku $w_0 = P(z_0)$.

Wykażemy, że:

Zbiór elementów odwrotnych dowolnej funkcji analitycznej $f(z)$ tworzy jedną funkcję analityczną (oznaczamy ją przez f^{-1} i nazywamy funkcją odwrotną względem f).

Istotnie, wystarczy wykazać, że każde dwa elementy odwrotne $P_1^{-1}(w)$ i $P_2^{-1}(w)$ są przedłużalne w siebie. Elementy pierwotne $P_1(z)$ i $P_2(z)$ są z założenia przedłużalne w siebie wzdłuż pewnej krzywej C , tj. istnieje łańcuch elementów $P_t(z)$, gdzie $1 \leq t \leq 2$, o początku $P_1(z)$ i końcu $P_2(z)$. Punkty zerowe pochodnej $f'(z)$ są odosobnione, a więc krzywą C można tak dobrać, aby wzdłuż niej było $f'(z) \neq 0$. Wówczas wszystkie elementy $P_t(z)$ są odwracalne i elementy odwrotne $P_t^{-1}(w)$ tworzą łańcuch łączący elementy $P_1^{-1}(w)$ i $P_2^{-1}(w)$.

Uwaga. Jeżeli funkcja $w = f(z)$ jest jednokrotna, to funkcja odwrotna $z = f^{-1}(w)$ jest *jednoznaczna*, jeżeli natomiast funkcja $w = f(z)$ jest wielokrotna, tzn. istnieją takie punkty z_1 i $z_2 \neq z_1$, że $f(z_1) = f(z_2)$, to funkcja $z = f^{-1}(w)$ jest wieloznaczna.

PRZYKŁAD 1. Funkcjami odwrotnymi względem $z = w^n$ i $z = e^w$ są funkcje wieloznaczne $w = \sqrt[n]{z}$ i $w = \log z$.

PRZYKŁAD 2. Funkcje odwrotne względem $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$ i $\operatorname{ctg} w$ oznaczamy: $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ i $\operatorname{arctg} z$. Te ostatnie są wieloznaczne, bo funkcje pierwotne są wielokrotne (przyjmują każdą wartość w nieskończenie wielu punktach, p. ćwiczenia 7 i 8, str. 34).

/ 49. Funkcje dowolnie przedłużalne w obszarze. Funkcję analityczną w pewnym obszarze D nazywamy *dowolnie przedłużalną* w tym obszarze, jeżeli każdy jej element daje się przedłużać analitycznie wzdłuż każdej krzywej zawartej w D . Np. $\log z$ i $\sqrt{z}$ są funkcjami dowolnie przedłużalnymi w obszarze $0 < |z| < \infty$. Funkcja jednoznaczna jest zawsze dowolnie przedłużalna w swym obszarze istnienia, nie każda jednak funkcja wieloznaczna¹⁾. Poznamy dwie ważne własności funkcji dowolnie przedłużalnych.

Jeżeli funkcja analityczna jest dowolnie przedłużalna w obszarze D , to każdy punkt $a \in D$ jest środkiem tej samej ilości elementów danej funkcji.

Dowód. Niech punkt a będzie środkiem p elementów, a punkt b środkiem q elementów i niech krzywa C łączy a i b . Gdyby było $p > q$, to istniałyby dwa elementy $P_1(z)$ i $P_2(z)$ o środku a , których przedłużeniem wzdłuż C byłby jeden element $Q(z)$ o środku b . Wówczas, przedłużając element $Q(z)$ wzdłuż C w kierunku przeciwnym, otrzymalibyśmy jako wynik przedłużenia dwa różne elementy, co jest niemożliwe (§ 47, str. 103).

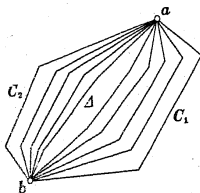
Funkcja analityczna dowolnie przedłużalna w obszarze jednoznacznym D jest w tym obszarze jednoznaczna.

Dowód. W przypadku przeciwnym istniałyby dwa różne elementy $P_1(z)$ i $P_2(z)$ o wspólnym środku a . Niech $Q(z)$ będzie elementem o innym środku b . Elementy P_1 i P_2 są oczywiście przedłużeniami elementu Q wzdłuż pewnych łuków C_1 i C_2 o początku b i końcu a (rys. 44.). Można założyć, że łuki te są liniami wielobocznymi, bo przedłużenie wzdłuż dwóch łuków dostatecznie bliskich o tym samym początku i końcu daje na wynik ten sam element końcowy. Można dalej założyć, że linie C_1 i C_2 nie przeci-

¹⁾ Funkcja $[1/(z-1)] \log z$ jest wieloznaczna w obszarze $0 < |z| < \infty$. Szereg $\log z = 2k\pi i + (z-1) - (z-1)^2/2 + (z-1)^3/3 - \dots$ jest podzielny przez $z-1$, gdy $k=0$, więc punkt $z=1$ jest regularny dla jednego z elementów funkcji danej, a osobliwy dla wszystkich innych elementów.

nają się poza punktami a i b , bo w przeciwnym razie możnaby punkt przecięcia obrać za punkt a lub b .

Obszar Δ ograniczony liniami C_1 i C_2 należy do obszaru D^1). Oprzemy się na twierdzeniu pomocniczym dość oczywistym, że obszar Δ można pokryć rodziną linii wielobocznych C_t , $1 \leq t \leq 2$, o wspólnym początku b i końcu a , nie przecinających się ze sobą (rys. 44). Gdyby elementy P_1 i P_2 były różne, to istniałaby w rodzinie C_t taka linia C_{t_0} , że przedłużenie elementu Q wzdłuż C_{t_0} dałoby w punkcie a element inny niż przedłużenie wzdłuż linii C_t dowolnie bliskiej, co jest niemożliwe, a zatem $P_1 = P_2$.



Rys. 44.

Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia o monodromii*. Wynika z niego, że jeżeli pewien element $P(z)$ funkcji analitycznej $f(z)$ jest przedłużalny wzdłuż krzywej zamkniętej C i jeżeli po przedłużeniu element końcowy jest różny od $P(z)$, to wewnątrz C funkcja $f(z)$ musi mieć przynajmniej jeden punkt osobliwy. Gdy istnieje tylko jeden taki punkt, wówczas nazywamy go *punktem rozgałęzienia* danej funkcji.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $\sqrt[n]{z}$ jest dowolnie przedłużalna w obszarze $0 < |z| < \infty$. Każdy punkt tego obszaru jest środkiem n elementów funkcji. Punkt $z=0$ jest punktem rozgałęzienia.

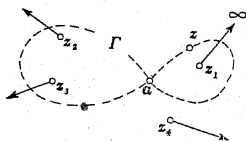
PRZYKŁAD 2. Funkcja

$$(12) \quad \sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_\mu)},$$

gdzie $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ są liczbami różnymi, jest analityczna i jednoznaczna w każdym obszarze jednospójnym D nie zawierającym punktów $z_1, z_2, \dots, z_\mu^2$, np. na całej płaszczyźnie rozciętej wzdłuż półprostych wychodzących z punktów z_k i nie przecinających się (rys. 45). Określiłmy ją jako równą (str. 60)

$$(13) \quad e^{(\log(z-z_1) + \log(z-z_2) + \dots + \log(z-z_\mu))/2}.$$

Funkcja (12) jest przedłużalna wzdłuż każdej krzywej nie przechodzącej przez punkty z_k . Gdy pewien jej element $P(z)$ przedłużymy wzdłuż krzywej zamkniętej Γ okrążającej dokładnie jeden punkt z_k (z_1 na rys. 45),



Rys. 45.

¹⁾ Bo wewnątrz krzywej zamkniętej zawartej w obszarze jednospójnym należy do tego obszaru.

²⁾ W każdym takim obszarze istnieją dwie gałęzie jednoznaczne funkcji (12). Gałąź jest wyznaczona, gdy ustalimy jej wartość w jednym punkcie.

wówczas po przedłużeniu otrzymamy $-P(z)$, bo $\frac{1}{2} \log(z-z_k)$ wzrośnie lub zmaleje o πi , a więc funkcja (13) zmieni znak. Gdy krzywa Γ okrąży parzystą ilość punktów z_k , wówczas element $P(z)$ wróci do swych wartości wyjściowych.

50. Całki funkcji jednoznacznych i wieloznacznych. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną jednoznaczną lub wieloznaczną, dowolnie przedłużalną na całej płaszczyźnie otwartej poza skończoną ilością punktów osobliwych $z_1, z_2, \dots, z_\mu^1$ (np. funkcją wymierną lub funkcją wieloznaczną postaci (12)). Odrzucając z płaszczyzny półproste $z_k \infty$ (rys. 45), otrzymamy obszar jednospójny D , w którym $f(z)$ jest funkcją jednoznaczną, a więc całka

$$(14) \quad F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta, \quad \text{gdzie } a \in D,$$

określa funkcję jednoznaczną (str. 58) o pochodnej $F'(z) = f(z)$. Funkcja $F(z)$ jest przedłużalna po każdej drodze nie przechodzącej przez punkty z_k , bo położenie półprostych $z_k \infty$ można zmieniać. Rozróżnimy dwa przypadki:

1° $f(z)$ jest funkcją jednoznaczną. Oznaczmy przez a_k residuum funkcji $f(z)$ w punkcie z_k i niech Γ będzie drogą zamkniętą nie przechodzącą przez punkty osobliwe z_k .

Jeżeli Γ nie przecina się ze sobą i okrąża dokładnie jeden punkt z_k , to całka funkcji $f(z)$ wzdłuż Γ nie zależy od kształtu i położenia Γ i równa się $2\pi i a_k$ lub $-2\pi i a_k$, zależnie od skierowania (dodatniego lub ujemnego) drogi Γ (str. 86). Gdy Γ okrąża punkt z_k n -krotnie, to całka wzdłuż Γ równa się $2n\pi i a_k$. Stąd łatwy wniosek, że gdy Γ jest dowolną drogą zamkniętą (rys. 46), to całka wzdłuż Γ równa się

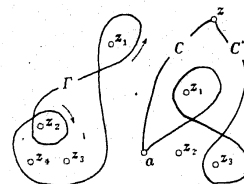
$$2n_1\pi i a_1 + 2n_2\pi i a_2 + \dots + 2n_\mu\pi i a_\mu,$$

gdzie $n_1, n_2, \dots, n_\mu$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, ujemnymi lub zerami.

Zmienimy w całe (14) drogę całkowania C na inną C' o tym samym początku a i końcu z . Wówczas suma $C' + (-C)$ jest pewną krzywą zamkniętą Γ , a zatem $C' = C + \Gamma$ i wobec tego funkcja (14) zmieni się na

$$(15) \quad F(z) + 2\pi i (n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_\mu a_\mu).$$

Całka (14) jest na ogół funkcją nieskończenie wieloznaczną i jeżeli $F(z)$ jest pewną jej gałęzią jednoznaczną, to wszystkie inne gałęzie w tym



Rys. 46.

samym obszarze mają postać (15), gdzie liczby a_k są residuami funkcji $f(z)$ w jej punktach osobliwych, a n_k są liczbami całkowitymi. Liczby $2\pi i a_k$, $k=1, 2, \dots$, nazywamy *okresami całki* (14).

Każde dwie gałęzie całki (14) różnią się więc o pewną stałą. Jedyne w przypadku, gdy wszystkie residua są równe zeru, pełna funkcja analityczna (14) jest jednoznaczna.

PRZYKŁAD. Funkcja

$$(16) \quad \varphi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

jest przedłużalna po każdej drodze nie przechodzącej przez bieguny $\pm i$ funkcji podcałkowej. Ponieważ $1/(1+\zeta^2) = [1/(\zeta-i) - 1/(\zeta+i)]/2i$, więc residua w punktach $\pm i$ wynoszą odpowiednio $\pm 1/2i$, a zatem wszystkie elementy funkcji (16) o wspólnym środku mają postać $\varphi(z) \pm k\pi$, $k=0, 1, 2, \dots$

Zauważmy, że $\varphi'(z) = 1/(1+z^2) = (\arctg z)'$, a więc funkcje $\varphi(z)$ i $\arctg z$ różnią się o stałą. W punkcie 0 jeden z elementów obu funkcji ma wartość 0, więc obie funkcje są identyczne, a zatem

$$(17) \quad \arctg z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}.$$

Ponieważ $1/(1+\zeta^2) = 1 - \zeta^2 + \zeta^4 - \dots$ dla $|\zeta| < 1$, więc całkując wyraz po wyrazie, otrzymamy

$$(18) \quad \arctg z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

Jest to jeden z elementów funkcji $\arctg z$ o środku $z=0$. Inne elementy o tym samym środku różnią się od niego o $k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \dots$

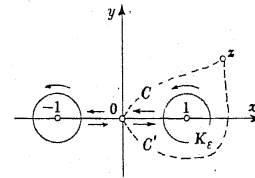
2° $f(z)$ jest funkcją wieloznaczną. Rozważmy najpierw przypadek szczególny

$$(19) \quad \psi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

w którym funkcja podcałkowa ma dwa punkty rozgałęzienia ± 1 , i zauważmy, że całka (19) zależy nie tylko od drogi całkowania, lecz także od wartości funkcji podcałkowej w punkcie początkowym drogi. W każdym obszarze jednospójnym D nie zawierającym punktów ± 1 , lecz zawierającym punkt 0, funkcja $\psi(z)$ jest jednoznaczna i dowolnie przedłużalna poza obszar D po każdej drodze nie przechodzącej przez punkty ± 1 .

Obliczmy wartość całki (19) po drodze zamkniętej Γ wychodzącej z punktu 0 i okrążającej raz tylko punkt osobliwy 1, przy czym element wyjściowy funkcji podcałkowej $1/\sqrt{1-\zeta^2}$ w punkcie 0 niech ma wartość $+1$. Czytelnik sprawdzi, że wartość tej całki nie zależy od kształtu drogi Γ ¹⁾.

Obierzmy jako drogę Γ linię złożoną z przedziału $[0, 1-\varepsilon]$ na osi x , z okręgu K_ε zatoczonego z punktu 1 promieniem ε (rys. 47) i z przedziału $[1-\varepsilon, 0]$. Zauważmy, że gdy zmienna ζ okrąży okrąg K_ε , wówczas element $\sqrt{1-\zeta^2}$ zmieni znak na przeciwny, a więc



Rys. 47.

$$\int_{\Gamma} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{K_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \int_{1-\varepsilon}^0 \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, wówczas całka wzdłuż K_ε dąży, co łatwo stwierdzić, do zera, bo długość drogi całkowania dąży do zera. Dwie pozostałe całki są sobie równe i każda z nich dąży do $\pi/2$, a więc całka wzdłuż Γ równa się π ²⁾. Element funkcji podcałkowej $1/\sqrt{1-\zeta^2}$ po obiegu wzdłuż Γ ma w punkcie 0 wartość -1 , a więc całka wzdłuż 2Γ , tj. wzdłuż linii Γ obieganej dwukrotnie, równa się $\pi - \pi = 0$, przy czym element funkcji podcałkowej wraca po obiegu do wartości wyjściowej.

W podobny sposób stwierdzimy, że całka (19) wzdłuż drogi zamkniętej Γ' wychodzącej z punktu 0 i okrążającej punkt -1 (rys. 47), równa się $-\pi$ ³⁾, przy czym element funkcji podcałkowej zmienia po obiegu znak. Wniosujemy stąd, że całka wzdłuż $\Gamma + \Gamma'$ równa się 2π , natomiast całka $\Gamma' + \Gamma$ równa się -2π i w obu przypadkach funkcja podcałkowa wraca po obiegu do wartości wyjściowej. Ogólnie, całka (19) po drodze zamkniętej złożonej z pewnej ilości okrążeń Γ i Γ' równa się $2k\pi$ lub $(2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, zależnie od ilości okrążeń (parzystej lub nieparzystej) i od ich porządku. Gdy ilość okrążeń jest nieparzysta, funkcja podcałkowa zmienia po obiegu znak na przeciwny.

Niech C będzie ustaloną drogą całkowania w całce (19) i niech C' będzie inną drogą o tym samym początku 0 i końcu z (rys. 47). Drogę C'

¹⁾ Tzn. dla dwóch takich dróg Γ_1 i Γ_2 wychodzących z punktu 0 mamy $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$.

Całki te mogą być różne, gdy drogi okrążają wprawdzie punkt 1, lecz nie wychodzą z jednego punktu 0 (np. Γ_1 leży całkowicie wewnątrz Γ_2).

²⁾ Wartość ta nie zależy więc od skierowania linii Γ .

³⁾ Gdy element wyjściowy funkcji podcałkowej w punkcie $\zeta=0$ ma wartość 1 ; gdy wartość ta równa się -1 , całka (19) wzdłuż Γ' równa się π .

można zastąpić drogą, złożoną z pewnej ilości okrążeń Γ i Γ' oraz drogi C . Wnioskujemy stąd, że całka (19) wzdłuż C' wyraża się jednym z wzorów

$$(20) \quad \psi(z) + 2k\pi \quad \text{lub} \quad -\psi(z) + (2k+1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gdzie $\psi(z)$ jest całką (19) wzdłuż C . Pełna funkcja analityczna $\psi(z)$ jest więc nieskończenie wieloznaczna; znając jedną jej gałąź $\psi(z)$ otrzymamy wszystkie inne na zasadzie wzorów (20).

Wiemy, że $\psi'(z) = 1/\sqrt{1-z^2} = (\arcsin z)'$, a więc $\arcsin z$ różni się od $\psi(z)$ o stałą. Stała ta równa się zeru, bo $\psi(0) = \arcsin 0 = 0$, a więc

$$(21) \quad \arcsin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Na mocy wzoru (15), str. 65, mamy dla $|z| < 1$ rozwinięcie

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots,$$

skąd, całkując, otrzymamy

$$(22) \quad \arcsin z = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7} + \dots$$

Całka (19) jest przypadkiem szczególnym całki

$$(23) \quad F(z) = \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\dots(\zeta-z_\mu)}},$$

gdzie punkty $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ są różne. Całka (23) nosi nazwę *całki eliptycznej*, gdy $\mu=3$ lub 4, oraz *całki hipereliptycznej*, gdy $\mu>4$. Jak w przypadku całki (19) dowodzi się¹⁾, że całka (23) dla $\mu \geq 2$ jest funkcją nieskończenie wieloznaczną, i gdy $F(z)$ jest pewną jej gałęzią jednoznaczną, wówczas każda inna gałąź w tym samym obszarze wyraża się jednym z dwóch wzorów: $\Phi(z) + \Omega$ lub $-\Phi(z) + \Omega'$, gdzie Ω i Ω' są liczbami zależnymi od drogi całkowania.

W szczególności, gdy całka (23) jest całką eliptyczną, wówczas istnieją takie dwie stałe ω i ω' o ilorazie nieracjonalnym, że wszystkie gałęzie całki w tym samym obszarze wyrażają się jednym z dwóch wzorów

$$(24) \quad \Phi(z) + n\omega + n'\omega', \quad -\Phi(z) + n\omega + n'\omega' + \alpha,$$

gdzie n i n' są liczbami całkowitymi, α zaś jest pewną liczbą zespoloną, zależną od położenia punktu a . Liczby ω i ω' nazywamy *okresami* danej *całki eliptycznej*.

¹⁾ Zob. E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, t. II, Paris 1929, str. 128.

Ogólnie, każdą całkę postaci

$$\int_a^z R(\zeta, w) d\zeta, \quad \text{gdzie} \quad w = \sqrt{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\dots(\zeta-z_\mu)},$$

przy czym $R(\zeta, w)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, nazywamy *całką eliptyczną*, gdy $\mu=3$ lub 4, — *hipereliptyczną*, gdy $\mu>4$. Całki eliptyczne postaci

$$(25) \quad \int_a^z \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g\zeta - h}}, \quad \int_a^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}},$$

gdzie g i h są liczbami zespolonymi, λ zaś jest liczbą rzeczywistą, należą do najprostszych. Pierwsza z nich nosi nazwę *całki eliptycznej Weierstrassa*, druga *całki eliptycznej Legendre'a* (I rodzaju).

ĆWICZENIA.

1. Wykazać, że szeregi $\sum_0^\infty a^n z^n$ i $\sum_0^\infty (a-1)^n z^n / (1-z)^{n+1}$ są przedłużeniami analitycznymi jeden drugiego; czy przedłużenia te są bezpośrednie?

2. Wykazać, że szeregi $\sum_1^\infty z^n/n$ i $\pi i + \sum_1^\infty (2-z)^n/n$ są elementami tej samej funkcji.

3. Wykazać, że a) $\arcsin z + \arccos z = \pi/2 + 2k\pi$, b) $\arctg z + \operatorname{arctg} z = \pi/2 + k\pi$, gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Niech $w = \sqrt{1-z}$ będzie funkcją analityczną odwrotną względem $z = (1-w^2)^2$. Wykazać, że jest to funkcja 4-znaczna i że punkt $z=1$ jest regularny dla pewnych jej elementów, a osobliwy dla innych.

5. Wykazać, że gdy $\sum_1^\infty A_n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym o wyrazach różnych od zera i gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem punktów okręgu $|z|=1$, wówczas szereg $\sum_1^\infty A_n/(z-a_n)$ przedstawia pewną funkcję analityczną $\varphi(z)$ wewnątrz okręgu i pewną funkcję analityczną $\psi(z)$ zewnątrz okręgu. Funkcje te są przedłużalne jedna w drugą, gdy zbiór punktów $\{a_n\}$ nie jest wszędzie gęsty na okręgu; w przeciwnym razie funkcje są nieprzedłużalne i okrąg jest ich naturalną granicą.

ROZWIĄZANIA.

1. Oba szeregi są równe $1/(1-az)$, pierwszy w kole $|az| < 1$, drugi w obszarze $|(a-1)z| < |1-z|$; przedłużenia są bezpośrednie, bo obszary nie są rozłączne.

2. Pierwszy w kole $|z| < 1$ równa się $-\operatorname{Log}(1-z)$, drugi w kole $|z-2| < 1$ równa się $2\pi i - \operatorname{Log}(1-z)$. — 3. a) Przyjmijmy $\arcsin z = w$, $\arccos z = w'$; wówczas $z = \sin w = \cos w' = \sin(\pi/2 - w')$, skąd $w + w' = \pi/2 + 2k\pi$, b) niech $\arctg z = w$, $\operatorname{arctg} z = w'$; wówczas $z = \operatorname{tg} w = \operatorname{ctg} w' = \operatorname{tg}(\pi/2 - w')$, skąd $w + w' = \pi/2 + k\pi$. —

4. Każdy punkt $z_0 \neq 0$ jest środkiem dwóch elementów funkcji $p(z) = 1 - \sqrt{z}$, a więc środkiem 4 elementów funkcji $\sqrt{p(z)}$, o ile $p(z_0) \neq 0$. W punkcie $z_0 = 1$ jeden z elementów funkcji $p(z)$ ma wartość 0, a więc punkt ten jest środkiem dwóch elementów danej funkcji. — 5. Zastosować przykład 4, str. 77; gdy z zdąża z wnętrza lub z zewnątrz okręgu do pewnego punktu a_n , wówczas funkcje φ i ψ rosną nieograniczenie.